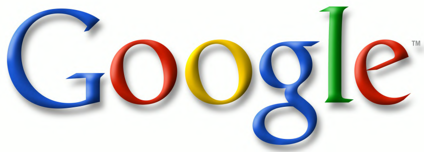
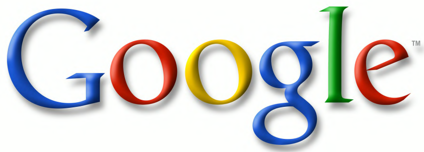



Google


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
ET
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. W. FÖRSTER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR A. LADENBURG, DR. ANT. REICHENOW,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. W. VALENTINER, PROF. DR. A. WINKELMANN,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN.

III. ABTHEILUNG.

I. THEIL:

HANDBUCH DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN

VON

PROFESSOR DR. A. WINKELMANN.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1894.

HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PORF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, Dr. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, PROF. DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, DR. PULFRICH-JENA, PROF. DR. FR. STENGER (†), DR. STRAUBEL-JENA, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT 190 ABBILDUNGEN UND EINER TAFEL.

ZWEITER BAND. ERSTE ABTHEILUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1894.



HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PROF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

ACHTE LIEFERUNG.



BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1891.

Handbuch der Physik. — Achte Lieferung.

Inhalt: »Handbuch der Physik«. II. Band. Optik. Artikel: »Geschwindigkeit des Lichtes« von Prof. Dr. F. AUERBACH. (Seite 1—14). »Geometrische Optik« von Dr. S. CZAPSKI. (Seite 14—37). »Theorie der optischen Abbildung« von Dr. S. CZAPSKI (Seite 37—66). »Realisirung der optischen Abbildung«: A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen. (Seite 66—82); B. durch schiefe Elementarbüschel, von Dr. S. CZAPSKI. (Seite 82—95). »Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen« von Dr. S. CZAPSKI. (Seite 96).

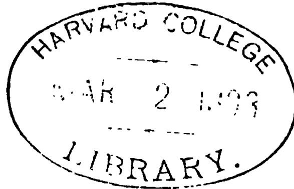
Zur gefälligen Kenntnissnahme.

Um die Herren Abonnenten nicht länger warten zu lassen, gebe ich diese Lieferung mit nur 6 Bogen aus, da Herr Dr. CZAPSKI, technischer Leiter der optischen Werkstätte von CARL ZEISS in Jena, durch seine Berufsgeschäfte in letzter Zeit so ungewöhnlich stark in Anspruch genommen war, dass er die Correkturen nicht rechtzeitig besorgen konnte.

Einige der nächsten Lieferungen werden dafür mit 9 Bogen ausgegeben werden.

Eduard Trewendt
Verlagsbuchhandlung.

Optik.



Geschwindigkeit des Lichts.

1) Allgemeines. Ob das Licht Zeit braucht, um den Raum zu durchmessen, ist eine Frage, deren Aufwerfung ebenso nahe liegt, wie ihre Beantwortung schwierig, ja fast unmöglich erscheint. Es ist daher nicht zu verwundern, dass ihre erste Lösung bei dem Studium scheinbar ganz fernliegender Fragen erfolgte, nämlich bei Gelegenheit zweier bestimmter Arten von astronomischen Beobachtungen. Erst viel später gelang es, auch im Bereiche der Erdoberfläche, ja schliesslich sogar im Raume eines Zimmers nicht nur zu zeigen, dass, sondern auch zu messen, welche Zeit das Licht braucht, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen. Dieser Erfolg hat übrigens, ausser der unmittelbaren, noch manche andere, nicht minder wichtige Bedeutung, insofern nämlich die Frage nach der Lichtgeschwindigkeit mit anderen hervorragenden physikalischen und astronomischen Problemen in innigem Zusammenhange steht. Das erste derselben betrifft die Entscheidung zwischen Emissionstheorie und Undulationstheorie des Lichtes; in optisch dichteren Stoffen, d. h. Stoffen von grösserem Brechungsexponenten, muss sich nämlich das Licht nach jener Theorie rascher, nach dieser hingegen langsamer fortpflanzen, als in optisch dünneren Mitteln; da sich nun die letztere Alternative als die richtige herausstellte, so war in der Mitte dieses Jahrhunderts der schon durch die Entdeckung der Interferenzerscheinungen nahezu gesicherte Sieg der Undulationstheorie endgiltig entschieden. Zweitens ist die Lichtgeschwindigkeit zusammen mit der sogen. Aberrationsconstanten und der Sonnenparallaxe (von der wiederum der mittlere Abstand der Erde von der Sonne und die mittlere Bahngeschwindigkeit der Erde abhängt) eine der drei Grössen, die sich gegenseitig bestimmen, sodass, wenn man die Lichtgeschwindigkeit auf selbständigem Wege bestimmt, man die Entfernung der Sonne berechnen kann; und es lässt sich schon jetzt die Vermuthung aussprechen, dass sich auf diesem Wege einmal ein genauerer Werth als der aus Venus- oder Marsbeobachtungen berechnete ergeben wird. Drittens endlich ist die Kenntniss der Endlichkeit und der Grösse der Lichtgeschwindigkeit eine wichtige Grundlage für allgemeine physikalische Erörterungen, wie beispielsweise für die Vergleichung akustischer, elektrischer und optischer Schwingungen, sowie für die Frage nach der Natur und dem Verhalten des Aethers in den verschiedenen Körpern.

2) Methode von RÖMER. Bei Beobachtungen über die Verfinsterungen der Jupitermonde fand OLAF RÖMER[1]) 1675, dass dieselben nicht stets nach gleichen Zeitintervallen, welche den betreffenden Umlaufszeiten der Monde um den Jupiter hätten entsprechen müssen, ihren Anfang nahmen; entfernte sich vielmehr die Erde in der Zeit zwischen zwei Verfinsterungen vom Jupiter, so trat eine Verspätung, im entgegengesetzten Falle eine Verfrühung der zweiten Verfinsterung ein. Schon RÖMER selbst erklärte dies aus der Zeit, welche das Licht brauche, um das in dem einen Falle im Vergleich zum andern stattfindende Mehr an Raum zu durchmessen, und er hat, trotz des Auftretens zahlreicher Zweifler, wie CASSINI, Recht behalten. Trete eine Verfinsterung gerade im Momente der Conjunction, eine andere genau im Momente der Opposition von Erde und Jupiter ein und wäre hierbei die Verspätung 2δ, so hätte man hierin ohne weiteres die vom Licht zur Zurücklegung des betreffenden Durchmessers der Erdbahn erforderte Zeit; da jedoch obige Annahme nicht genau erfüllt ist, und um den Werth für einen mittleren Durchmesser zu finden, hat man noch Correctionen auszuführen. Für δ, also die Fortpflanzungszeit für den mittleren Abstand zwischen Sonne und Erde, fand hiernach RÖMER selbst $8^m\ 18{\cdot}2^s$, nach neuen Beobachtungen des Jupitersystems von DELAMBRE[2]) ergiebt sich $\delta = 8^m\ 13^s$, nach den neuesten Messungen von GLASENAPP[3]) $8^m\ 20{\cdot}8^s$ oder $500{\cdot}8^s$, mit einem wahrscheinlichen Fehler von 1^s, so dass die Unsicherheit dieser Zahl nur noch $\frac{2}{1000}$ beträgt. In die Formel für die Lichtgeschwindigkeit V

$$V = \frac{R}{\delta},$$

wo R der mittlere Radius der Erdbahn ist, geht nun aber dieses R als zweite Grösse ein, oder die beiden Grössen: Erdradius r und Sonnenparallaxe ε, die für R nach der Formel $r = R\,tg\,\varepsilon$ eingeführt werden können, sodass man

$$V = \frac{r}{\delta\,tg\,\varepsilon}$$

hat. Nun hat man sehr genaue Kenntniss des äquatorialen Erdradius $r = 6378\ km$, dagegen herrscht in Bezug auf die Sonnenparallaxe noch immer beträchtliche Unsicherheit. Während nämlich seit ENCKE's[4]) Berechnung der Werth $8{\cdot}57''$ für den besten galt, haben neuere Bestimmungen[5]) Werthe geliefert, welche zwischen $8{\cdot}7''$ und $9{\cdot}0''$ liegen, und deren wahrscheinliches Mittel $8{\cdot}85''$ beträgt, mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa $\frac{1}{200}$. Schliesslich findet man als wahrscheinlichen Werth der Lichtgeschwindigkeit

$$V = 297100\ km$$

für die Sekunde, mit einer Sicherheit von etwa $\frac{1}{2}$—$1\frac{0}{0}$.

3) Methode von BRADLEY. Als BRADLEY[6]) 1727 sich bemühte, bei den Fixsternen eine Parallaxe aufzufinden, fand er allerdings eine scheinbare Aenderung ihres Ortes, aber der Verlauf derselben liess sofort erkennen, dass sie nicht

[1]) Acad. des Sciences, Paris 1675. Publicirt in: J. des Sav. 1676, und in: Hist. de l'Ac. 1, pag. 213. — CASSINI und MARALDI widersprachen RÖMER's Ansicht, HUYGENS und NEWTON unterstützten sie.

[2]) DELAMBRE, Tables ecliptiques des satellites du Jupiter. Paris 1790.

[3]) S. RAYLEIGH, Nature 25, Aug. 1881.

[4]) ENCKE, Die Entfernung der Sonne. Gotha 1824.

[5]) U. A. v. HANSEN, LEVERRIER, GILL.

[6]) BRADLEY, Phil. Trans. London 1728, No. 406.

parallaktischen Charakters war; sie erfolgte nämlich nicht in der der augenblicklichen Bewegung der Erde entgegensetzten, sondern in der gleichen Richtung; sie war ferner nicht in denjenigen Punkten der Erdbahn am grössten, in denen die Erde sich in der Richtung zu dem Stern hin oder von ihm fortbewegt, sondern in den beiden, gerade in der Mitte zwischen jenen gelegenen Punkten, wo die Bewegungsrichtung der Erde und die Richtung nach dem Stern auf einander senkrecht stehen, und sie war drittens nicht für alle Sterne verschieden, sondern gleich gross für alle diejenigen Sterne, die in der gleichen Höhe über der Ekliptik liegen, während auch für verschieden hohe Sterne die grosse Axe der, eine kleine Ellipse bildenden, scheinbaren Verschiebung stets dieselbe war. Diese Umstände liessen schon BRADLEY erkennen, dass es sich hier um eine ganz andere Erscheinung, die sogen. Aberration des Lichtes handelt. Lässt man einen Stein durch eine senkrechte Röhre fallen, während man diese gleichzeitig parallel mit sich verschiebt, so ist die Falllinie keine der Röhrenaxe parallele, sondern eine von vorn oben nach hinten unten geneigte Gerade. Da nun, wie der Stein zum Fallen, so das Licht zum Durchmessen des Raumes Zeit braucht, und da, wie dort die Röhre, so hier die Erde in Bewegung begriffen ist, so muss der Stern eine Verschiebung, also die Richtung nach ihm eine Drehung aufweisen, und dieser Winkel muss am grössten sein, wenn die Erde senkrecht zur Sehrichtung fortschreitet[1]). Für dieses Maximum, die allen Gestirnen gemeinsame Aberrationsconstante α fand BRADLEY 20·25″, STRUVE[2]) 20·445″, und nach den neuesten Berechnungen von GILL[3]) ergiebt sich als bester Mittelwerth 20·496″, mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{2}{1000}$. Nennt man nun u die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, T die Umlaufszeit, also das siderische Jahr, so hat man offenbar

$$V = \frac{u}{tang\,\alpha} = \frac{2\pi R}{T\,tang\,\alpha} = \frac{2\pi r}{T\,tang\,\alpha\,tang\,\varepsilon},$$

und dies giebt mit den obigen neuesten Werthen

$$V = 298200\ km;$$

die Genauigkeit hängt wieder von der am unsichersten bekannten Sonnenparalaxe ε ab und beträgt daher wie bei der vorigen Methode $\frac{1}{2}$ bis 1 %.

Im Mittel aus den beiden astronomischen Methoden[1]) ergiebt sich schliesslich

$$V = 297650\ km.$$

4) Methode von FIZEAU. Der Erste, welcher auf rein physikalischem Wege die Lichtgeschwindigkeit constatirte und, wenn auch zunächst (1849) nur annähernd, ermittelte, ist FIZEAU[2]). Das Princip der Methode ist folgendes. Von einer kräftigen Lichtquelle wird durch ein geeignetes Linsensystem ein Bild entworfen, die von diesem ausgehenden Strahlen werden durch eine weitere Linse parallel gemacht, sie fallen, nachdem sie eine grosse Strecke zurückgelegt haben, wiederum auf eine Linse, convergiren nach einem kleinen Hohlspiegel von derartiger Krümmung und Aufstellung, dass sie, als Strahlensystem im Ganzen betrachtet,

---

[1]) Ueber die Zulässigkeit des hier gemachten Vergleichs des Lichts mit einem materiellen Körper s. w. u.

[2]) STRUVE, Recueil und Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg 1844.

[3]) GILL, s. RAYLEIGH, a. a. O.

[1]) Eine dritte, auf Marsbeobachtungen beruhende Methode ergab 302000 *km*. — LIAIS, Compt. rend. 60, pag. 174. 1865. — Eine vierte, auf der Veränderlichkeit des Sterns Algol basirende, ergab 295000 *km*. — CHARLIER, Oefv. kgl. Ak. Vorh. Stockh. 46, pag. 523. 1889.

[2]) FIZEAU, Compt. rend. 29, pag. 90. 1849. — POGG. Ann. 79, pag. 167.

auf gleichem Wege zurückkehren, und somit erzeugen sie ein, mit dem ursprünglichen zusammenfallendes Bild im ersten Brennpunkt. Um mittelst eines Oculars dieses reflectirte Bild für sich beobachten zu können, also durch die Lichtquelle und das direkte Bild nicht behindert zu werden, stellt man die Lichtquelle seitlich auf, bringt eine sowohl spiegelnde als durchlassende Glasplatte unter 45° in dem Punkte an, wo das von der Lichtquelle auf die Axe aller übrigen Theile des Apparates gefällte Loth diese Axe trifft und giebt dadurch den Strahlen nach der Reflexion von der Glasplatte die gewünschte Richtung; die zurückkehrenden Strahlen gehen hingegen theilweise durch die Glasplatte hindurch und das Bild gelangt im Ocular zur Beobachtung. In die Axe wird nun an der Stelle, wo das direkte und das reflectirte Bild entstehen, der Rand eines Zahnrads derart gebracht, dass, wenn sich eine Lücke in der Axe befindet, die Strahlen hindurchkönnen, dass sie dagegen aufgehalten werden, wenn ein Zahn sich in der Axe befindet. Rotirt dieses Zahnrad mit sehr geringer Geschwindigkeit, so wird man das Bild abwechselnd sehen und nicht sehen; rotirt das Rad schneller, so wird man in Folge der Dauer des Lichteindrucks das Bild ununterbrochen sehen; rotirt es noch schneller, so wird man das Bild überhaupt nicht mehr sehen, weil in der Zeit, welche das Licht zur Durcheilung des Hin- und Rückweges braucht, Zähne und Lücken ihre Stellungen mit einander vertauscht haben, weil also die Strahlen, welche hinwärts auf einen Zahn treffen, auf dem Hinwege, diejenigen aber, welche hinwärts auf eine Lücke treffen, auf dem Rückwege durch einen Zahn aufgehalten werden. Der Uebergang von der Sichtbarkeit zur Unsichtbarkeit des Bildes wird übrigens ein allmählicher sein, da anfangs nur wenige und allmählich immer mehr Strahlen aufgefangen werden. Wächst die Drehgeschwindigkeit des Rades weiter, und zwar auf das Doppelte der letztgedachten, so wird das Bild wieder erscheinen, bei der dreifachen wieder verschwinden u. s. w. Ist l die Strecke vom ersten Bild zum Reflector, also $2l$ der Weg der Lichtstrahlen, ist ferner n die Zahl der Umdrehungen des Rades in der Sekunde, bei welcher das Bild zuerst dauernd verschwindet, n_1 die, bei welcher es wieder erscheint, n_2 die, bei welcher es zum zweiten Mal verschwindet, und ist endlich z die Anzahl der Zähne (die mit den Lücken gleiche Breite haben sollen), also $1/2z$ die Breite eines Zahns oder einer Lücke in Theilen des Umfanges, so hat man für den Zeitwerth des Lichtweges einerseits $2l/V$, andererseits $1/2zn$, resp. $2/2zn_1$, resp. $3/2zn_2$ u. s. w., und folglich ist

$$V = 4lnz = 4l\frac{n_1}{2}z = 4\,l\,\frac{n_2}{3}z \text{ u. s. w.}$$

Man kann also zahlreiche Messungen combiniren, und es frägt sich nur, ob man den Grössen l, n und z ohne technische Schwierigkeiten genügend grosse Werthe geben kann. Bei FIZEAU's Versuch war $l = 8{\cdot}633$ *km* und $z = 720$, und die erste Verfinsterung trat schon bei $n = 12{\cdot}6$ ein, sodass sich $V = 313300$ *km* ergiebt; die Drehgeschwindigkeit wurde aus den Tönen ermittelt, welche die gegen den Rand eines Kartenblattes schlagenden Zähne hören liessen.

In dieser Bestimmung, sowie in der Constanterhaltung der Geschwindigkeit des Rades liegt die Schwierigkeit der Aufgabe, und in der Ueberwindung derselben beruht der Werth der neueren, nach FIZEAU's Methode von CORNU[1]) ausgeführten Messungen. CORNU lässt sich auf die Constanterhaltung, da sie doch

[1]) CORNU, Compt. rend. 73, pag. 857. 1871. (Methode.) — Compt. rend. 76, pag. 338. 1873. (Ergebnisse.) — J. de l'Ec. pol., Heft 44 (ausführliche Abhandlung). — Rep. d. Phys. 9, pag. 88. — Compt. rend. 79, pag. 1361. 1874. (Genaueste Bestimmung.)

nur angenähert zu verwirklichen wäre, gar nicht erst ein; er giebt vielmehr dem Rad innerhalb passender Grenzen eine nach bestimmtem Gesetz zu- oder abnehmende Geschwindigkeit und registrirt das Gesetz dieser Bewegung auf elektrischem Wege; ebenfalls elektrisch registrirt er die genauen Zeitpunkte des Erscheinens und Verschwindens des Bildes; ein Chronograph endlich registrirt gleichzeitig die Sekunden. Auf die Einzelheiten, Aufstellung der Apparate, günstigste Sichtbarmachung des Bildes u. s. w. kann hier nicht eingegangen werden. Bei den Versuchen von 1873 war $l = 10{\cdot}310$ *km*, bei denen von 1874 $l = 23{\cdot}100$ *km*; dort wurden 658, hier 405 Einzelbeobachtungen gemacht und zwar die meisten zur Nachtzeit mit DRUMMOND'schem Kalklicht, nur wenige mit Sonnenlicht; n konnte bis auf 1600 gesteigert werden, und es konnte demgemäss noch n_{21} verwerthet werden. Die Messungen von 1873 ergaben (reducirt auf den leeren Raum, s. u.) im Mittel

$$V = 298500 \pm 500,$$

diejenigen von 1874 liefern

$$V = 300400 \pm 300,$$

im Mittel wird also

$$V = 299950 \pm 400,$$

sodass der wahrscheinliche Fehler auf 1 bis 2 Tausendtel herabgemindert ist.

YOUNG und FORBES[1]) modificirten die FIZEAU'sche Methode in der Weise, dass sie zwei Reflektoren hintereinander statt eines einzigen aufstellten; man hat dann zwei Bilder mit verschiedenen Perioden; während das eine heller wird, wird das andere dunkler; die Drehgeschwindigkeit, bei der beide gleich hell sind, so wie diejenige, bei der das eine Bild am hellsten, das andere am dunkelsten ist, wird mit dem Chronographen bestimmt. Das Endergebniss lautet

$$V = 301300;$$

benutzt wurde dabei elektrisches Licht.

5) Methode von FOUCAULT. Schon aus Anlass der bekannten Versuche WHEATSTONE's über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität in Drähten hatte ARAGO[2]) (1838) darauf hingewiesen, dass die Methode des rotirenden Spiegels auch für die Entscheidung der betreffenden optischen Fragen Anwendung finden könne. Aber erst FOUCAULT[3]) gelang es, die Schwierigkeiten zu überwinden und (1849) die Geschwindigkeit des Lichtes zu messen. Das Bild eines durch Sonnenlicht beleuchteten Spaltes würde durch eine geeignete Linse in einer bestimmten Entfernung entworfen werden, wenn nicht die Strahlen durch einen drehbaren Spiegel schon vorher aufgefangen und, bei einer bestimmten Stellung dieses Spiegels, nach einem weit entfernten Hohlspiegel derart geworfen würden, dass, durch die Wirkung einer zwischengestellten Linse, gerade in ihm das Bild entsteht; da ferner der Hohlspiegel so steht, dass seine Axe mit der Axe des auffallenden Strahlenbündels zusammenfällt, nimmt das ganze Licht den gleichen Rückweg und es entsteht, wie bei FIZEAU, ein mit dem ursprünglichen zusammenfallendes reflectirtes Bild, so lange der drehbare Spiegel ruht; dagegen wird es, sobald der Spiegel rotirt, zwar ebenfalls, in Folge der Dauer des Lichteindrucks stetig, aber gegen das ursprüngliche Bild verschoben erscheinen, weil der Spiegel

---

[1]) YOUNG und FORBES, Proc. R. Soc. 32, pag. 247. 1881.

[2]) ARAGO, Compt. rend. 7, pag. 954. 1838. — POGG. Ann. 46, pag. 28. — Compt. rend. 30, pag. 489. 1850.

[3]) FOUCAULT, Compt. rend. 30, pag. 551. — POGG. Ann. 81, pag. 434. 1850. (Methode.) — Compt. rend. 55, pag. 501 u. 792. 1862. — POGG. Ann. 118, pag. 485 u. 580 (Messung).

in der Zeit zwischen den beiden Reflexionen an ihm sich um einen kleinen Winkel gedreht hat. Um diese Verschiebung zu messen, ist einmal dicht hinter dem Spalt ein feines, in Glas geritztes Gitter aufgestellt, und sodann werden die reflectirten Strahlen, ehe sie dieses Gitter erreichen, durch eine unter 45° geneigte Glasplatte nach der Seite reflectirt, erzeugen hier das Bild, und dieses resp. seine Verschiebungen werden mit Mikroskop und Glasmaassstab gemessen. Da die Entfernung des rotirenden vom Hohlspiegel gross sein muss, modificirte FOUCAULT später die Methode, um sie auch im Raum eines grösseren Zimmers ausführbar zu machen, derart, dass er den Hohlspiegel etwas schräg stellte, die in Folge dessen etwas seitlich reflectirten Strahlen in einem zweiten, passend entfernten Hohlspiegel zu einem Bilde vereinigte, und schliesslich erst von dem fünften, senkrecht aufgestellten Hohlspiegel den Rückweg antreten liess. Ist nun φ der gedachte Drehungswinkel des Spiegels, also 2φ der Winkel der zurückkehrenden mit der hingehenden Strahlenaxe, ist ferner r die Entfernung des drehbaren Spiegels vom leuchtenden Objekt, d die Verschiebung, $2l$ der Weg des Lichtes, n die Zahl der Umdrehungen des Spiegels in der Sekunde, so hat man für den Zeitwerth des Lichtweges wiederum wie bei FIZEAU zwei Ausdrücke, nämlich einerseits wieder $2l/V$, andererseits $\varphi/2\pi n$, oder da $\varphi = \frac{1}{2} arc\ tang\ d/r$, also mit genügender Genauigkeit (da φ sehr klein ist) $\varphi = d/2r$ ist, $d/4\pi n r$; die Vergleichung liefert also

$$V = \frac{8\pi n r l}{d}.$$

Als Resultat seiner Messungen giebt FOUCAULT ohne nähere Einzelheiten

$$V = 298000\ km$$

an. Im Princip ist jedenfalls diese Methode weniger günstig als die FIZEAU'sche, da sie ausser der Messung der Strecken l und r und der Tourenzahl n noch die Messung der sehr kleinen Verschiebung d erfordert. Um diese aber grösser zu gestalten, muss man die Tourenzahl erhöhen, und zwar auf einen so hohen Werth, dass die Festigkeit der Aufstellung des kleinen Spiegels und die Zuverlässigkeit des Ganges der Versuche leidet.

Erst MICHELSON[1]) in Washington gelang es, auch bei mässiger Tourenzahl eine starke Verschiebung zu erzielen, und zwar durch erhebliche Verlängerung der Strecke l. Bei FOUCAULT's Anordnung war dies nicht möglich, weil der Hohlspiegel, je weiter entfernt von dem Drehspiegel, desto grösser hätte sein müssen, um einen ausreichenden zeitlichen Complex von Lichtbündeln an die Beobachtungsstelle zurückzuwerfen, und seine Dimensionen wären bald ins praktisch Unmögliche gewachsen. MICHELSON stellt nun die zwischen Drehspiegel und festen Spiegel (für den er übrigens einen Planspiegel wählt) anzubringende Linse nicht wie FOUCAULT, nahe am Drehspiegel, sondern so auf, dass sich der Drehspiegel in ihrer sehr beträchtlichen Hauptbrennweite befindet; auf den Abstand des festen Spiegels kommt es dann gar nicht an, es genügt vielmehr, dass er mit der Linse gleiche Dimensionen habe. So konnte MICHELSON bei der ersten Versuchsreihe bis zu $l = 150\ m$, in der zweiten sogar bis zu $l = 600\ m$ gehen. Die Linse musste freilich 20 cm, der Spiegel 3 cm Durchmesser haben, die Brennweite der ersteren betrug 45 m, und der Abstand r war 9 m, dagegen war schon eine Tourenzahl von $n = 128$ resp. $n = 250$ ausreichend, und die Verschiebung ging bis zu 133 mm, sodass, da noch 0·01 mm beobachtet werden

---

[1]) MICHELSON, Sill. J. (3) 15, pag. 394. 1878. — Proc. Am. Soc. of Sc. 1878, pag. 71. — Sill. J. (3) 18, pag. 390. 1879. — Naut. Alm. Wash. 1880, pag. 109. — Naut. Alm. 1885, pag. 235.

konnte, die Genauigkeit über 1/10000 hinausging. Auf die Erzeugung der Rotation des Spiegels und ihre Regulirung durch einströmende Luft, auf die Messung der Tourenzahl durch optische Vergleichung mit einer elektrischen Stimmgabel, auf die mikrometrische Messung der Verschiebung, die Ermittelung der Constanten des Apparats u. s. w. wurde die grösste Sorgfalt verwandt; auch wurden alle möglichen Fehlerquellen diskutirt (Verzögerung bei der Reflexion, Deformation des Drehspiegels u. s. w.). Die aus hunderten von Einzelmessungen abgeleiteten Mittelwerthe sind, für die drei Versuchsreihen von 1878, 1880 und 1885, folgende:

1) $V = 300\,140 \pm 500$, 2) $V = 299\,940 \pm 50$, 3) $V = 299\,850 \pm 60$.

In anderer Weise modificirte NEWCOMB[1]) die FOUCAULT'sche Methode; auf die Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden, nur sei bemerkt, dass der Abstand zwischen den beiden, bei der Rotation des Spiegels nach den beiden entgegengesetzten Richtungen sich in entgegengesetztem Sinne verschiebenden Bildern gemessen wurde, und dass die Entfernung l bei der einen Reihe 2·55 *km* bei der anderen sogar 3·72 *km* betrug. Das Endergebniss ist

$$V = 299\,860 \pm 50.$$

6) Ein Rückblick auf die mitgetheilten Zahlen lässt erkennen, wie die Genauigkeit der Bestimmungen sich immer mehr steigerte, und welch bewundernswürdigen Grad von Uebereinstimmung die neuesten unter ihnen aufweisen. Insbesondere weichen die Mittelwerthe von

CORNU	MICHELSON	NEWCOMB
299950	299895	299860

nur noch um 35 bis 90 *km* von einander ab und das Hauptmittel dieser physikalischen Messungen

$$V = 299\,890 \pm 30,$$

st bis auf 1/10000 genau. Dagegen ist es um fast 1/100 grösser als das astronomische Mittel (pag. 5); berechnet man also aus dem physikalischen Mittel die astronomischen Constanten, so wird nach der RÖMER'schen Gleichung entweder δ oder ε kleiner als man jetzt annimmt, nach der BRADLEY'schen Gleichung entweder ε oder α kleiner; am wahrscheinlichsten ist es hiernach, dass die gegenwärtig angenommene Entfernung der Sonne von der Erde etwas zu klein ist.[2])

Schliesslich sei angeführt, dass die ermittelte Geschwindigkeit des Lichtes mit derjenigen der Fortpflanzung elektrodynamischer Wirkungen unter bestimmten Umständen wahrscheinlich identisch, dass sie dagegen fast 900000 Mal so gross wie die des Schalles in der Luft ist; ferner, dass das Mondlicht nur wenig mehr als eine Sekunde, das Sonnenlicht 8½ Minuten, das Licht selbst der nächsten Fixsterne dagegen Jahre braucht, um zur Erde zu gelangen (das Licht des Sternes α centauri, des vermuthlich nächsten aller Fixsterne, 3¾, das des Sirius 17 Jahre u. s. w.). Grosse Entfernungen im Weltraume pflegt man hiernach auf V als Einheit zu beziehen, d. h. in Lichtjahren auszudrücken.

7) Geschwindigkeit in verschiedenen Stoffen. Die schon erwähnte von ARAGO 1838 entwickelte Idee betraf nicht sowohl Versuche zur absoluten Messung der Lichtgeschwindigkeit in Luft, als vielmehr Versuche zur Vergleichung der Geschwindigkeiten des Lichts in der Luft und im Wasser. Auch diese Idee wurde fast gleichzeitig von FOUCAULT[3]) und FIZEAU[4]) zur Ausführung gebracht

---

1) NEWCOMB, Naut. Alm. Wash. 1885, pag. 112.

2) Ausführliche Betrachtungen dieser Art stellt KERICUFF an, Mondes (2) 36, pag. 372. 1875.

3) FOUCAULT, Compt. rend. 30, pag. 551. 1850. — POGG. Ann. 81, pag. 434.

4) FIZEAU und BREGUET, Compt. rend. 30, pag. 562 und 771. 1850. — POGG. Ann. 81, pag. 442; 82, pag. 124.

FOUCAULT wandte wieder den rotirenden Spiegel an, diessmal aber ausserdem zwei symmetrisch zu beiden Seiten aufgestellte feste Spiegel, deren einer durch Luft, deren anderer durch eine Röhre mit Wasser von dem Drehspiegel getrennt war. Jener war soweit verdeckt, dass er nur das mittlere Drittheil des Bildes lieferte, während dieser das ganze Bild gab; das Ergebniss bei rotirendem Spiegel war, dass die beiden äusseren Drittel stärker verschoben erschienen, als das mittlere, oder genauer gesagt, dass der mittlere Streifen in zwei sich theilweise deckenden Bildern erschien, von denen das von der Wasserseite herrührende, durch die Uebereinstimmung seiner Lage mit der der äusseren Drittel kenntliche Bild stärker verschoben war, als das von der Luftseite herrührende Ehe das durch das Wasser geschickte Licht zurückkehrte, hatte sich also der Spiegel stärker gedreht, als bei der Rückkehr des durch die Luft gegangenen Lichts, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im Wasser ist also kleiner als die in der Luft. Ganz ähnlich war die Methode von FIZEAU und BREGUET; nur machten sie die Luftstrecke und die Wasserstrecke nicht räumlich, sondern zeitlich gleich, d. h. sie gaben ihnen Längen, welche, einmal, wenn die Emissionstheorie richtig war, das andere Mal, wenn die Undulationstheorie richtig war, von dem Lichte in gleichen Zeiten zurückgelegt werden mussten, also gemäss dem Brechungsexponenten des Wassers gegen Luft (4/3), zuerst Längen, die sich wie 3:4, alsdann solche, die sich wie 4:3 verhielten; in jenem Falle erwiesen sich die Verschiebungen als ausserordentlich verschieden, in diesem waren sie genau gleich. Hiermit haben sich FIZEAU und FOUCAULT das Verdienst erworben, die Emissionstheorie endgiltig widerlegt zu haben.

Quantitative Bestimmungen über die Lichtgeschwindigkeit im Wasser und im Schwefelkohlenstoff hat MICHELSON[1]) ausgeführt; für das Verhältniss der Geschwindigkeiten in Wasser und Luft fand sich 1·33, für Schwefelkohlenstoff und Luft bei Anwendung von weissem Licht 1·77; die erstere Zahl stimmt genau, die letztere einigermaassen mit dem beobachteten Brechungsexponenten (s. w. u.). Da übrigens bekanntlich auch die Luft das Licht bricht, und zwar gemäss dem absoluten Brechungsexponenten 1·000294, so muss man die aus irdischen Beobachtungen, also in Luft abgeleiteten Werthe von V, um sie auf den leeren Raum zu reduciren, in demselben Verhältniss, also um etwa 90 *km* vergrössern; bei den obigen Angaben [4) bis 6)] ist dies bereits geschehen.

8) Einfluss der Beschaffenheit der Lichtquelle. Man kann die Frage aufwerfen, ob die verschiedenen, unter 2) bis 5) aufgeführten Messungen überhaupt ohne weiteres mit einander vergleichbar seien, da sich doch die BRADLEY'sche Methode auf Fixsternlicht, die RÖMER'sche auf Planetenlicht, die übrigen auf Sonnenlicht, Kalklicht, elektrisches Licht u. s. w. beziehen. Zunächst könnte man fragen, ob nicht die Intensität des Lichtes von Einfluss auf seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei. Nach Versuchen von J. J. MÜLLER[2]) ist diese Frage zu bejahen; derselbe fand, dass, wenn das Licht eine Abschwächung auf den dritten Theil seiner Helligkeit erfährt, die Verminderung der Geschwindigkeit 0·000016 des Werthes, oder absolut genommen, 5 *km* beträgt. Indessen sind diese Resultate durch F. LIPPICH[3]) und H. EBERT[4]) nicht bestätigt; nach den Beobachtungen des Letzteren beträgt die Aenderung

---

[1]) MICHELSON, Rep. Brit. Ass. Montreal 1884, pag. 56. — Naut. Alm. Wash. 1885, pag. 235.

[2]) J. J. MÜLLER, POGG. Ann. 145, pag. 86. 1872.

[3]) LIPPICH, Wien. Ber. 77, pag. 352. 1875.

[4]) EBERT, WIED. Ann. 32, pag. 337. 1887.

der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes weniger als 0·0000012 des Werthes, oder weniger als 0·4 *km*, wenn die Intensität auf den 250 fachen Betrag wächst.

Zweitens könnte die Farbe, also die Wellenlänge des Lichts seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit beeinflussen, wie dies ja für Flüssigkeiten zweifellos und auch direkt von MICHELSON nachgewiesen ist (rothes Licht im Verhältniss zu blauem im Wasser 1·4 ℔ schneller, Licht von der Wellenlänge zwischen *C* und *D* im Schwefelkohlenstoff 2·5 ℔ schneller als solches zwischen *b* und *F*, beides in Einklang mit den zu erwartenden Zahlen). Jedoch liegt für Luft nur eine Untersuchungsreihe von YOUNG und FORBES[1]) vor, bei denen sich im Durchschnitt das blaue Licht um 1·8 ℔ schneller fortpflanzte als das rothe. Für die Richtigkeit dieses Resultats führen die Verfasser an: 1) dass bei ihren oben unter 4) erwähnten Versuchen das an Helligkeit zunehmende Bild röthlich, das abnehmende bläulich erschien; 2) dass einige veränderliche Sterne anfangs blau, dann gelb, endlich roth erscheinen; 3) dass bei den Versuchen von CORNU, MICHELSON und ihnen selbst V desto grösser sich ergab, je mehr brechbare Strahlen die Lichtquelle enthielt. Gegen das Resultat sprechen aber gewichtigere und nicht minder zahlreiche Gründe, die besonders von Lord RAYLEIGH[2]), MACAULAY[3]), Sir W. THOMSON[4]) und NEWCOMB[5]) hervorgehoben worden sind. Letzterer z. B. hätte, auch schon bei einem viel geringeren Einfluss der Wellenlänge, farbige Ränder an seinem Spaltbild beobachten müssen, was nicht der Fall war. Temporäre Sterne müssten zuerst blau erscheinen und dann roth, was sich an demjenigen in der Corona von 1866 nicht bestätigte. Optisch-theoretische Einwände liegen ebenfalls auf der Hand. Endlich macht Lord RAYLEIGH auf einen Punkt aufmerksam, der auch an sich von wesentlichem Interesse ist. Man hat nämlich bei jeder Wellenbewegung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Welle (V) und derjenigen eines durch seine eigenthümliche Beschaffenheit charakterisirten Wellenzuges (U) zu unterscheiden, wie sich denn z. B. bei Wasserwellen schon in dem Umstande, dass vorn Wellen verschwinden, hinten solche auftauchen, augenfällig zu erkennen giebt, dass die Geschwindigkeit des Wellenzuges kleiner als die der einzelnen Wellen ist. Bedeutet k die reciproke Wellenlänge, so ist allgemein

$$U = \frac{d(kV)}{dk},$$

sodass nur, wenn V von k unabhängig ist, $U = V$ wird. RAYLEIGH zeigt nun, dass die FIZEAU'sche Methode U, die FOUCAULT'sche dagegen (ohne Rücksicht auf eine gewisse Fehlerquelle, die sich schwer in Rechnung ziehen lässt) weder V noch U, sondern die Grösse V^2/U liefert, sodass man event. durch Combination beider Methoden U und V selbst finden könnte. Nach SCHUSTER[6]) geben die FOUCAULT'schen Versuche einen noch anderen Werth, nämlich $V^2/(2V - U)$, und man müsste, um V/U zu bestimmen, statt des festen Spiegels einen beweglichen anwenden, der mit der doppelten Geschwindigkeit des ersten rotirte. GIBBS[7]) endlich meint — und SCHUSTER giebt ihm nachträglich Recht — dass das

[1]) YOUNG und FORBES, Proc R. Soc. 32, pag. 247. 1881. — Trans. R. Soc. 1882 (1), pag. 231.

[2]) Lord RAYLEIGH, Nature 24, pag. 382; 25, pag. 52. 1881.

[3]) MACAULAY, Nature 24, pag. 556. 1881.

[4]) Sir W. THOMSON, s. FORBES, Nature 26, pag. 465. 1882.

[5]) NEWCOMB, a. a. O.

[6]) SCHUSTER, Nature 33, pag. 439. 1886.

[7]) GIBBS, Nature 33, pag. 582. 1886.

Ergebniss U selbst sei. Alle diese Betrachtungen entbehren nun aber vorläufig der Unterlage, da die nach der FIZEAU'schen und die nach der FOUCAULT'schen Methode gefundenen Zahlenwerthe bis auf den wahrscheinlichen Fehler mit einander stimmen; und diese Thatsache wiederum spricht auf Grund der RAYLEIGH'schen Betrachtungen gegen das Resultat von YOUNG und FORBES. Ferner macht Lord RAYLAIGH darauf aufmerksam, dass, wenn YOUNG und FORBES Recht hätten, sich keine harmonischen Beziehungen zwischen den Spektrallinien eines leuchtenden Gases ergeben könnten, was doch der Fall zu sein scheint. Da schliesslich YOUNG und FORBES selbst zugeben, dass das genannte Resultat nicht bei allen Versuchen eintrat, dass vielmehr bei einigen beide Lichtsorten die gleiche und bei einem Versuche sogar die rothe die grössere Geschwindigkeit zu haben schien, muss ihr Ergebniss vorläufig noch bezweifelt werden.

9) Einfluss der Bewegung des Mediums auf die Lichtbewegung. Nach Analogie des Schalles, welcher bekanntlich mit dem Winde schneller als gegen denselben sich fortpflanzt, kann man die Frage aufwerfen, ob der Träger der Lichtbewegung in bewegten Mitteln ruhe oder an der Bewegung theilnehme, und wenn letzteres, ob diese Theilnahme eine vollständige oder eine nur partielle sei; die eminente Wichtigkeit dieser Frage für die Theorie des Lichts sowie ihr Zusammenhang mit anderen Fragen liegen auf der Hand. FRESNEL stellte die Hypothese auf, dass der Aether theilweise an der Geschwindigkeit des Mediums theilnehme, nämlich mit dem Bruchtheil $(n^2 - 1)/n^2$, wo n der Brechungsexponent ist, und dieser Werth ist später von BEER[1]), welcher ihn den Correptionscoëfficienten der betreffenden Substanz nannte, von KETTELER[2]) und Anderen theoretisch näher begründet worden; er ist beispielsweise für Wasser gleich 0·438, für Luft aber nur gleich 0·00059. Experimentell wurde die Frage zuerst von FIZEAU[3]) bearbeitet und zwar mittelst einer Interferenzmethode, die dann später noch vielfache Anwendung und Abänderung erfahren hat. Hinter dem Objekt sind nämlich diesmal zwei Spalte neben einander aufgestellt, von diesen gehen die Strahlen durch zwei parallel neben einander gestellte Röhren, werden durch eine Linse vereinigt und im Vereinigungspunkte von einem symmetrisch gegen sie aufgestellten Spiegel derart reflektirt, dass sie ihre Wege mit einander vertauschen; die beiden Spaltbilder gelangen auf diese Weise zum Ausgangspunkt zurück und bilden hier Interferenzstreifen. Wird nun durch die Röhren Wasser in entgegengesetztem Sinne getrieben, so geht das eine Strahlenbündel hin- und herwärts mit dem strömenden Wasser, das andere beide Mal gegen dasselbe. Eine etwaige Fortführung des Lichts mit dem Wasser müsste sich also in einer Verschiebung der Interferenzstreifen zeigen. Dies war in der That und zwar schon bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 2 m der Fall; bei einer solchen von 4 bis 7 m war sie sogar näherungsweise messbar und bestätigte die Hypothese der partiellen Correption des Aethers. Vervollkommnet wurde die Methode durch MICHELSON und MORLEY[4]) und zwar derart, dass exakt dafür gesorgt wurde, dass die beiden Lichtwege räumlich genau identisch waren, eine grössere Lichtfülle gewonnen, die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers einige Minuten lang constant erhalten und ihr axialer Werth, auf den es hier ankommt, genau gemessen wurde. Ist l die Röhrenlänge, u die Strömungsgeschwindigkeit,

1) BEER, POGG. Ann. 93, pag. 213. 1854.

2) KETTELER, POGG. Ann. 144, pag. 109, 287, 363, 550. 1871.

3) FIZEAU, Compt. rend. 33, pag. 349. 1851. — POGG. Ann. Erg. Bd. 3, pag. 457. — Ann. Chim. Phys. (3) 57, pag. 385. 1859. — Vergl. auch ARAGO, Compt. rend. 88, pag. 538. 1853.

4) MICHELSON u. MORLEY, Sill. J. (3) 31, pag. 377. 1886.

λ die Wellenlänge, n der Brechungsexponent des Wassers, δ die Verschiebung des centralen Streifens der Interferenzerscheinung in Bruchtheilen seiner ganzen Breite, so hat man für die Beschleunigung des Lichts die Formel

$$x = \frac{\lambda \delta}{4 l n^2 u} V.$$

Aus zahlreichen Versuchen, bei denen u zwischen 5·7 und 8·7 variirte, ergab sich der Mittelwerth 0·434 ± 0·02, nahezu identisch mit dem FRESNEL'schen Werthe 0·438. Auch mit Luft haben sowohl FIZEAU als auch MICHELSON und MORLEY Versuche angestellt, aber ohne Erfolg, und Letztere zeigen, dass dieser auch nicht erwartet werden durfte, da sich hier nach der Theorie nur eine Verschiebung um 0·0036 Streifenbreiten ergiebt.

Um nun aber die gerade für die Lichtbewegung in der Atmosphäre der durch den Weltraum sich fortbewegenden Erde wichtige Entscheidung zu ermöglichen, hat MICHELSON[1]) einen anderen Weg eingeschlagen, und diesen dann einige Jahre später derartig abgeändert[2]), dass die gegen die ursprüngliche Untersuchung von LORENTZ[3]) erhobenen Einwände Berücksichtigung finden. Die Idee MICHELSON's ist folgende. Am nächsten läge es, Strahlen zu vergleichen, welche in entgegengesetzten Richtungen, also der eine mit, der andere entgegen der Erdbewegung verlaufen; dies scheitert aber daran, dass man die Strahlen zum Zwecke der Beobachtung wieder auf demselben Wege zurückführen muss, wodurch die zu untersuchenden Differenzen sich gerade ausgleichen. Wohl aber kann man zwei Strahlen zur Interferenz bringen, die senkrecht gegen einander verlaufen, nämlich der eine mit der Erdbewegung, der andere senkrecht zu ihr. Nun falle ein Strahl in der Richtung der Erdbewegung auf eine unter 45° geneigte Glasplatte, die beiden hier durch Reflexion und Durchgang entstandenen Componenten werden nach gleicher Wegstrecke D von den zwei Spiegeln in sich zurückgeworfen; es kommt dann die auf dem Rückwege durchgegangene Componente des auf dem Hinwege reflectirten Strahles mit der auf dem Rückwege reflectirten Componente des hinwärts durchgegangenen Strahles in gleicher Richtung zusammen, und diese Strahlen müssten, wenn u die Erdgeschwindigkeit ist, einen Wegunterschied von Du^2/V^2 besitzen, falls der Aether an der Erdbewegung nicht theilnähme; wird jetzt die Anordnung um 90° gedreht, so wird der Wegunterschied der entgegengesetzte, also die Differenz zwischen beiden Fällen $2Du^2/V^2$. Die Drehung der fest montirten Apparate geschah in der vorsichtigsten Weise, und die zu beobachtende Verschiebung wurde durch Anwendung mehrerer Spiegel statt je eines auf 0·4 Streifenbreiten gebracht. Die wirklich beobachtete war aber um so viel kleiner, dass der Correptionscoëfficient des Aethers in der Atmosphäre mindestens $\frac{3}{4}$, wahrscheinlich aber sogar mehr als $\frac{7}{8}$ beträgt. Nach einigen Monaten ergaben Controlbeobachtungen das gleiche Resultat, woraus hervorgeht, dass bei der ersten Reihe nicht etwa zufällig die Erdbewegung und die Bewegung des Sonnensystems sich gerade aufhob.

Andererseits hat FIZEAU[4]) seine früheren Versuche später auf andere Weise wieder aufgenommen, indem er die Drehung der Polarisationsebene polarisirten

---

1) MICHELSON, Sill. J. (3) 21, pag. 120. 1881.

2) MICHELSON und MORLEY, Sill. J. (3) 34, pag. 333. 1887.

3) LORENTZ, Arch. Néerl. 21, pag. 103. 1886.

4) FIZEAU, Compt. rend. 49, pag. 717. 1859. — POGG. Ann. 109, pag. 160. Vergl. hierzu auch BABINET, Compt. rend. 55, pag. 561. 1862.

Lichtes beim schiefen Durchgang durch eine planparallele Platte untersuchte. Da diese Drehung vom Brechungsexponenten abhängt, also von der Lichtgeschwindigkeit, muss sie verschieden ausfallen, je nachdem das durchfallende Licht mit der Erde oder gegen diese sich bewegt. Die Beobachtungen ergaben in der That die Drehung stets grösser, wenn um die Mittagszeit der Apparat gegen Westen als wenn er gegen Osten gerichtet war, und die Zahlen stimmten mit dem nach der FRESNEL'schen Annahme zu erwartenden nahezu überein.

Hiernach besteht ein Widerspruch zwischen FIZEAU's und MICHELSON's Resultaten, insofern nach jenen der Aether fast gar nicht, nach diesen fast vollständig mit der Erde fortschreitet, und es muss diese Frage daher noch für offen gelten.

Schliesslich sei auf die zahlreichen theoretischen Diskussionen hingewiesen, welche diese Frage theils an sich, theils hinsichtlich ihrer Folgen für die Theorie der Aberration des Lichtes, der Bewegung des Sonnensystems durch den Weltraum u. s. w. hervorgerufen hat[1]). F. AUERBACH.

Geometrische Optik.

Einleitung.

Die Gesammtheit der uns bekannten Erscheinungen des Lichts hat zu der Annahme geführt, dass das Licht in transversalen Schwingungen eines sehr feinen, sehr elastischen und überall verbreiteten Mediums, des sogen. Lichtäthers bestehe. Auf Grund dieser Vorstellung gelingt es, von den meisten Erscheinungen des Lichts ziemlich vollständig Rechenschaft zu geben.

Es giebt aber ein grosses Gebiet von Lichterscheinungen — und darunter befinden sich gerade solche in grosser Zahl, welche sich im gewöhnlichen Leben am häufigsten darbieten, und eine weitgende praktische Anwendung gefunden haben — die in ihrem wesentlichen Theile nicht von der genannten näheren Natur des Lichts abhängen, sondern die auf gewissen allgemeineren Eigenschaften der Lichtbewegung beruhen, — Eigenschaften, die an sich sehr einfach sind und die auch für sich, ohne Berücksichtigung, ja selbst ohne Kenntniss der

---

[1]) STOKES, Phil. Mag. (3) 27, pag. 9. 1846 u. s. w. (Nachweis, dass die Fortpflanzung des aus dem Weltraume kommenden Lichts in der Atmosphäre krummlinig werden muss, und somit die gewöhnliche Erklärung der Aberration nicht mehr gilt.) — CHALLIS, ebenda, pag. 321. (Einwände dagegen, die STOKES widerlegt.)

FAYE, Compt. rend. 49, pag. 870. (Einwände gegen FIZEAU.) — TESSAN, ebenda, pag. 980. (Widerlegung derselben). —

S. TOLVER PRESTON, Nat. 19, pag. 178. 1879. (Ohne Kenntniss der Thatsachen und der Literatur geschrieben.)

KLINKERFUES, Versuche üb. d. Bew. d. Erde u. d. Sonne im Aether, Gött. Nachr. 1870, pag. 226. (Von KETTELER in der oben citirten Abh. z. Thl. widerlegt.)

VELTMANN, POGG. Ann. 150, pag. 497. 1870. (Ueber die FRESNEL'sche Hypothese.)

PUSCHL, Wien. Ber. (2) 68, pag. 446. 1874. — Rep. d. Phys. 10, pag. 171. 1874. (Ersatz der Mitbewegung des Aethers durch die Bewegung der Körpermolekeln, wobei nahezu ebenfalls die FRESNEL'sche Beziehung herauskommt).

GOUY, Ann. Chim. Phys. (6) 16, pag. 262. 1889. (Allgem. Ableitung der Gleichung für Lichtstrahlen u. s. w.)

näheren Natur des Lichts zur Grundlage der hierher gehörigen Untersuchungen genommen werden können und — in früheren Zeiten ebensowohl, als in der Gegenwart — mit Erfolg genommen worden sind.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Lichtbewegung lassen sich aus den Grundvorstellungen über die Natur desselben unter Zuhilfenahme einiger durch die Erfahrung dargebotener Hilfsprinzipien mathematisch streng ableiten und dadurch tiefer begründen. Sie lassen sich aber auch ohne weiteres als durch die Erfahrung gegeben ansehen und zum selbständigen Ausgangspunkt der Untersuchung nehmen.

Es sind dies die Gesetze 1) der geradlinigen Ausbreitung des Lichts; 2) der Unabhängigkeit der Theile eines Lichtbündels von einander; 3) das Gesetz der regelmässigen Zurückwerfung, Spiegelung, Reflexion und 4) das Gesetz der regelmässigen Brechung (Refraction) des Lichts.

Alle vier Gesetze beziehen sich nur auf die Richtung der Lichtbewegung, also eine rein geometrische Eigenschaft derselben. Die Anwendung dieser Gesetze auf die in der Natur sich darbietenden oder künstlich herstellbaren Combinationen bildet den Gegenstand der »geometrischen Optik«.

Die eigentlich so genannte geometrische Optik erstreckt sich jedoch nicht auf alle Erscheinungen des Lichts, soweit in ihnen blos Richtungsänderungen in Frage sind, sondern sie beschränkt sich auf diejenigen Fälle, in welchen die wirkenden Medien isotrop, unkrystallinisch, sind.

Wenn nun aber auch die genannten Gesetze genügen, um auf ihnen ein sehr vollständiges System aufzubauen, d. h. ein solches, welches die beobachtbaren Erscheinungen sehr annähernd wiedergiebt, und gestattet, noch nicht beobachtete Erscheinungen richtig vorauszusagen, so werden wir doch der näheren Vorstellungen über die Natur des Lichts und deren Consequenzen auch im Verfolge des hier ins Auge gefassten beschränkteren Untersuchungsgebietes nicht entrathen können. Es hat öfters zu Irrthümern geführt, dass man die Gesetze der geometrischen Optik über diejenigen Grenzen hinaus, in welchen sie durch die Erfahrung bestätigt oder durch die strengere Theorie gestützt waren, anwandte; namentlich eine vollständige Theorie der optischen Instrumente und der meteorologisch-optischen Erscheinungen lässt sich nur durch Rückgreifen auf die Begriffe der Undulationstheorie gewinnen; und es wird in jedem Falle gut sein, sich zu vergewissern, wie weit die aus den einfachen Vorstellungen gezogenen Folgerungen in der strengen Theorie noch eine Stütze finden, wenn man die geometrische Optik als physikalische Disciplin und nicht als ein blosses Uebungsfeld der Mathematik behandeln will.

Diesem Standpunkte gemäss sollen des weiteren auch im Folgenden ausser den allgemeinen Beziehungen, welche aus den Grundgesetzen abgeleitet worden sind, nur solche Consequenzen derselben behandelt werden, welche entweder zum Verständniss wichtiger Naturerscheinungen oder dem der optischen Instrumente nöthig sind. —

Das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in geraden Strahlen ist ebensowenig, als eines der anderen Grundgesetze der Physik, aus einzelnen, eigens hierzu angestellten Beobachtungen geschlossen worden, noch ist es durch solche überhaupt streng beweisbar. Es nimmt seine Gewissheit, gerade so wie die Grundgesetze anderer physikalischer Disciplinen, aus der Uebereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung. Ueberall im gewöhnlichen Leben, und in aller Strenge in der praktischen Astronomie und Geoäsie, wird auf die unbedingte Giltigkeit dieses Gesetzes gebaut und wird umgekehrt

die Geradlinigkeit einer Strecke aus der Thatsache der Bewegung des Lichtes in ihr gefolgert; und stets haben sich die hieraus weiter gezogenen Schlüsse mit der ursprünglichen Annahme vollkommen vereinen lassen. Diese zahllosen, zum Theil so kritischen Bestätigungen des Gesetzes haben demselben eine Sicherung und allgemeine Annahme verschafft, wie kaum einem anderen Naturgesetze.

Trotzdem ist, wie seit hundert Jahren wohlbekannt ist, das Gesetz nicht unbedingt, und in der gewöhnlich ausgesprochenen Form überhaupt nicht richtig.

Wenn man daran geht, es einer möglichst strengen Prüfung durch das Experiment zu unterziehen; wenn man, um es als Elementargesetz nachzuweisen, möglichst mit den elementaren Bestandtheilen des Lichts, den »Strahlen« selbst zu operiren versucht, also durch Schirme mit sehr engen Oeffnungen aus einem grösseren Lichtbündel solche »Strahlen« heraushebt und ihren Weg verfolgt, so bemerkt man, dass die Ausbreitungsrichtung des Lichts desto unbestimmter, vieldeutiger, und damit die Existenz isolirt darstellbarer »Lichtstrahlen« überhaupt desto zweifelhafter wird, je mehr man sie zu erreichen strebt. Denn je enger man die fragliche Oeffnung macht, desto weiter breitet sich das durch sie getretene Licht, statt in einer einzigen Richtung weiterzugehen, in ein Büschel von variabler Helligkeit aus; einen je kleineren Schirm man in den Weg eines Lichtbündels stellt, desto weniger ist der auf einem gegenübergestellten Schirm entworfene Schatten dem schattenwerfenden Körper blos geometrisch ähnlich, desto mehr tritt an die Stelle dessen, was wir als Schatten zu bezeichnen gewohnt sind, eine ganz andere Erscheinung; und ähnliches mehr. Wir brauchen uns bei einer näheren Beschreibung solcher Versuche nicht aufzuhalten; denn wir gelangen auf diesem Wege zu nichts anderem, als zu dem, was als ein besonderes, wichtiges Erscheinungsgebiet der Optik Diffraction, Beugung des Lichts genannt und genau studirt worden ist. (S. das betreffende Capitel des vorliegenden Werkes.)

Trotzdem hiernach das Gesetz der Ausbreitung des Lichts in Strahlen nur eingeschränkte Giltigkeit hat, verliert es doch kaum an Bedeutung, auch auf dem Boden der strengeren Theorie des Lichts, welche die oben erwähnten Erscheinungen völlig zu erklären vermag. Jene Theorie[1]) zeigt vielmehr, übereinstimmend mit der Erfahrung, dass bis zu einem erheblichen Grade der Annäherung in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, d. h. überall da, wo wir es mit Lichtbüscheln von endlichem Querschnitt zu thun haben, diese Büschel sich in vielen Beziehungen so verhalten als seien sie aus einzelnen Strahlen zusammengesetzt, welche sich unabhängig von einander in geraden Linien fortbewegen. Nur in den, meist ziemlich subtilen Fällen, welche in der Lehre von der Interferenz und Beugung des Lichts betrachtet werden, und auch da oft nur bei besonderer Aufmerksamkeit, sind die Ausnahmen von dieser Regel wahrzunehmen, wiewohl die Regel in aller Strenge niemals gilt.

Auch an den Grenzen von Büscheln endlichen Querschnitts verhält sich das Licht abweichend von den Grundgesetzen der geometrischen Optik; aber alsdann ist die Menge des abweichenden Lichts verschwindend gegen die des, in diesem Sinne, regulären, kann also gegenüber jener für viele Zwecke vernachlässigt werden.

Die anderen beiden Grundgesetze der geometrischen Optik sind, wie die strenge Theorie des Lichts und ebensolche experimentelle Prüfung zeigen, bis

[1]) S. z. B. KIRCHHOFF, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzber. Berl. Ak. 1882; WIED. Ann. 18, pag. 663 (1883).

zu demselben Grade der Annäherung richtig, wie die beiden ersten, das heisst in allen Fällen wo, und in so weit, man gemäss den vorliegenden äusseren Bedingungen berechtigt ist, überhaupt von »Strahlen« zu sprechen. Hiervon weiter unten mehr.

Wiewohl also die angenommenen Grundgesetze der geometrischen Optik nicht unbedingt richtig sind, und zum Theil sogar keine eigentlich reale Bedeutung haben, so verliert doch diese Disciplin nicht ihre Berechtigung; vielmehr hat sie eine solche immer noch auch in dem strengeren Systeme der Wissenschaft als formale Unterdisciplin, welche gestattet, aus wesentlich einfacheren und der gemeinen Erfahrung zugänglicheren Annahmen als die strenge Theorie, einen grossen und praktisch sehr wichtigen Theil von deren Resultaten abzuleiten, mit wesentlich geringeren Mitteln, als jene es vermag und doch mit einer, für sehr viele Fälle hinreichenden Annäherung an die Wirklichkeit.

Es wurde schon oben daran erinnert, dass die Wissenschaft — und dies mit sehr gutem Rechte und bestem Erfolge — auch bei anderen Disciplinen der Physik ganz ebenso verfährt. So sind wir gegenwärtig von der Discretheit der Materie vollkommen überzeugt, fahren aber doch fort, in einer grossen Zahl von Untersuchungen die Continuität derselben anzunehmen. So geht neben den Forschungen nach dem tieferen Wesen der Elektricität die alte, auf der Annahme der beiden elektrischen »Fluida« basirte Elektrostatik unbeirrt ihren Weg weiter. So ist in noch grösserer Aehnlichkeit mit dem vorliegenden Fall, die Elektrodynamik AMPÈRE's auf die Annahme von Elementarwirkungen gegründet, von denen Niemand glaubt und ebensowenig postulirt, dass sie als solche Realität hätten — genau ebenso wie von den »Lichtstrahlen«. Aber wiewohl Strom»elemente« und deren Wirkung auf einander niemals beobachtet worden sind, so ist die Einführung ihres Begriffs und die Annahme eines Wirkungsgesetzes von solchen dennoch eine äusserst fruchtbare gewesen, in so fern sie gestattet, die Wirkung endlicher geschlossener Ströme auf einander, mit einer, ebenfalls in vielen Fällen sehr weitreichenden Annäherung an die beobachtbare Wirklichkeit zu berechnen.

Eine gleiche didactische und methodische Berechtigung, wie die Loslösung der geometrischen Optik von der physikalischen Lehre des Lichts hat innerhalb dieser noch die weitere Scheidung in phoronomische Optik (Undulationstheorie) und mechanische Optik (Theorie des Aethers).

Verhalten des Lichts an der Grenze zweier verschiedener Medien.

So lange sich das Licht in einem völlig homogenen Mittel bewegt, thut es dies, mit den angegebenen Einschränkungen in geradlinigen Strahlen. Gelangt es an die Grenze eines Mittels von anderer optischer Beschaffenheit, so spaltet es sich in zwei Theile, die sich von der getroffenen Stelle der Grenzfläche aus mit, im allgemeinen plötzlich, veränderter Richtung fortbewegen:

a) Ein Theil des Lichts bleibt im ersten Medium — zurückgeworfenes, reflectirtes Licht.

b) Der übrige Theil des Lichts geht in das zweite Medium über und pflanzt sich zunächst in ihm fort — gebrochenes Licht.

Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, dass diese scharfe Scheidung niemals eintritt. Auch der Theil des Lichtes, welcher in das erste Mittel zurückkehrt, war vorher bis zu einer gewissen, sehr geringen Tiefe in das zweite Mittel eingedrungen. Die natürlichen Farben der Körper haben in der bei dieser Gelegenheit vor sich gegangenen selectiven Absorption des Lichts ihren Entstehungsgrund, wie an anderer Stelle auseinandergesetzt wird (s. Absorption). In welchem Maasse und bis zu welcher Tiefe ein solches Eindringen des sogen. reflectirten

Lichtes stattfindet, hängt ausser von der Natur der aneinandergrenzenden Mittel, auch noch in hohem Grade von der Beschaffenheit der Grenzfläche ab; z. B. davon, ob der zweite Körper in festem oder etwa pulverisirtem Zustande vorliegt, ob seine Oberfläche im ersteren Falle rauh oder polirt ist. (S. Artikel Diffusion des Lichts.)

Auf die nähere Natur der hier in Frage stehenden Vorgänge kann nur in der physikalischen Theorie des Lichts eingegangen werden.

Die Richtung des reflectirten Lichts hängt nach dem dritten Grundgesetz der geometrischen Optik in einer bald näher anzugebenden Weise nur von der Neigung des einfallenden Lichtstrahls gegen das von ihm getroffene Element der Grenzfläche ab. Und in der That, wenn diese Fläche mathematisch regelmässig und vollkommen glatt polirt ist, so findet die Bewegung des Lichts fast ausschliesslich in den, jenem Gesetze entsprechenden Richtungen statt. Die Reflexion an solchen Flächen heisst daher regelmässige Reflexion.

Je mehr aber die Trennungsfläche unregelmässig ist, in der Art, dass ihre Elemente schon auf kleinem Gebiete oft und stark ihre Richtung ändern, d. h. je mehr die Fläche rauh, matt ist, desto weniger findet jenes Grundgesetz auf die Reflexion des Lichtes an ihr Anwendung. Die Anordnung der Elemente ist bei solchen Flächen wohl nie näher angebbar, so dass für eine Berechnung ihrer Wirkung nach dem Reflexionsgesetz schon die nöthige Unterlage fehlt. Es ist dann aber auch die Grösse der verschiedentlich wirkenden Flächenstücke eine so geringe, dass die Regeln der geometrischen Optik, wie in der Einleitung hervorgehoben, überhaupt nicht ohne weiteres auf das Verhalten des Lichts an ihnen anwendbar sind. Endlich wird in einem solchen Falle, wie leicht ersichtlich, das in eine geringe Tiefe des zweiten Mittels eingedrungene Licht mit wirksam sein müssen und die Erscheinung beeinflussen. Von dem, z. B. auf eine ebene Fläche in einer Richtung auffallenden Licht werden dann Theile, in stetig variirender Intensität, nach allen Richtungen zerstreut — diffuse Reflexion.

Gerade durch den Umstand, dass die diffus reflectirenden Flächen sich in ihren kleinsten Theilen verschieden gegen das Licht verhalten, werden uns diese, und damit die Fläche selbst, als discrete Ausgangspunkte von Lichtbewegungen sichtbar, während durch Reflexion an vollkommen glatten Flächen — wie wir später sehen werden — nur Bilder der äusseren, ihrerseits entweder selbst leuchtenden oder diffus reflectirenden Gegenstände entstehen, die reflectirenden Flächen selbst aber durchaus unsichtbar bleiben. In der Wirklichkeit wird diese Unsichtbarkeit freilich meist durch die unvermeidlichen Kratz- oder Sprungstellen, Stäubchen u. dergl. mehr oder minder aufgehoben. Denn in der Wirklichkeit giebt es keine Grenzflächen, die dem einen oder dem anderen Falle vollkommen entsprechen, so dass wir es immer nur mit einer mehr oder minder grossen Annäherung an das im Idealfalle stattfindende Verhalten zu thun haben.

In Bezug auf das gebrochene Licht gelten zum Theil dieselben Bemerkungen, wie sie in Bezug auf das reflectirte eben gemacht wurden. Wenn die Grenzfläche der beiden Medien glatt ist, so hängt die Richtung des gebrochenen Lichts gemäss dem bald anzugebenden vierten Grundgesetz der geometrischen Optik nur von der Richtung des einfallenden Strahls gegen das getroffene Flächenelement und der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien ab. Ist die Trennungsfläche aber matt, rauh, so wird das in das zweite Medium eindringende Licht diffus gebrochen, in ganz analoger Weise, wie das in das erste Medium zurücktretende Licht diffus reflectirt wird.

Innerhalb des zweiten Mediums kann das Licht verschiedene Modifikationen erfahren. Stets geht ein Theil des Lichts als solches verloren und wird in andere

Formen von Energie — Wärme, Electricität, chemische Energie — verwandelt, absorbirt (s. Artikel Absorption). Oft ändert das Licht auch nur seine Art, Farbe, innerhalb des neuen Mittels, und bietet dann die interessanten Erscheinungen der Fluorescenz (s. diese) dar. Jenachdem durch eine Schicht von gegebener Dicke ein grösserer oder geringerer Theil des auf sie gefallenen Lichtes hindurchgelassen wird, nennt man den Körper mehr oder weniger »durchsichtig«. Ein Mittel kann für verschiedene Farben verschiedene Absorption und daher auch verschiedenen Grad der Durchsichtigkeit besitzen.

Wenn das Medium, in welchem sich das Licht bewegt, vollkommen homogen ist, so kann man durch hinreichend dünne Schichten desselben andere Objecte, wenn auch in verringerter Helligkeit, so doch in vollkommen unverminderter Schärfe sehen. Medien, welche in homogener Masse Partikel anderer optischer Eigenschaft zerstreut enthalten, wie dies z. B. bei der Milch, dem Blut, dem Porzellan, der feuchten atmosphärischen Luft der Fall ist, heissen trübe Medien. Die in ihnen vorhandenen Partikel verursachen eine innere diffuse Reflexion[1]), deren Natur nur nach den Vorstellungen der physikalischen Lichttheorie näher definirbar ist. Im durchgehenden Lichte lassen diese trüben Medien die äusseren Gegenstände nur unscharf erkennen, weshalb sie auch durchscheinend genannt werden. Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass es in der Natur absolut durchsichtige Medien nicht giebt, sondern nur ein gradueller Unterschied der Trübheit vorhanden ist, welcher allerdings so gross ist, dass er zu einer Verschiedenheit der allgemeinen Bezeichnung vollauf berechtigt. Ebenso ist bekannt, dass es in der Natur keine ganz undurchsichtigen Mittel giebt, sondern in hinreichend dünnen Schichten alle Medien durchsichtig oder wenigstens durchscheinend werden. Doch beziehen sich diese Bemerkungen schon nicht mehr auf das Verhalten des Lichts an der Grenze zweier Medien, sondern auf seinen Verlauf innerhalb je eines Mittels.

In dem Folgenden werden alle Medien, welche das Licht trifft, als vollkommen durchsichtig, homogen, und als durch vollkommen glatte Flächen begrenzt angenommen, oder vielmehr es wird das Verhalten des Lichts an ihnen nur in so weit, als es von jenen Eigenschaften bedingt ist, untersucht.

Entsprechend dem Zwecke und Character der geometrischen Optik wird von allen Eigenschaften des Lichtes, welche nicht zu Aenderungen geometrischer Verhältnisse Anlass geben, in dem Vortrag derselben abgesehen. Also wird keine Rücksicht darauf genommen, ob das Licht von einem selbstleuchtenden oder diffus strahlenden Körper ausgeht, oder von Brennpunkten, die erst durch besondere optische Veranstaltungen aus jenen hervorgegangen sind; ferner ob das Licht intensiv oder schwach, ob natürliches oder in irgend einem Polarisationszustande befindliches ist. Hingegen liegt es ganz im Sinne der geometrischen Optik, als einer Hilfsdisciplin der physikalischen Optik, und einer selbst physikalischen Disciplin, nicht den Schnittpunkt irgend welcher »Strahlen« verschiedenen Ursprungs als »Brennpunkt« des betreffenden Büschels aufzufassen, sondern als solchen nur den Vereinigungspunkt cohärenter Strahlen gelten zu lassen, d. h. von Strahlen, welche ursprünglich von ein und demselben leuchtenden Punkte ausgingen; oder — wie die Definition des Lichtstrahls in der Aus-

---

[1]) RAYLEIGH, Illumination in a Fog., Phil. Mag., pag. 443. 1885; CHWOLSON, Photometrische Untersuchungen über die innere Diffusion des Lichts. Mél. phys. et chim. 12, pag. 475. 1886, und Grundzüge einer mathem. Theorie ders., ibid. 13, pag. 83. 1889, abgedruckt in EXNER's Repert. 23, pag. 139 u. 211. 1878; 26, pag. 364 u. 385. 1890.

drucksweise der Wellentheorie lautet — nur solche, welche Normalen derselben Wellenfläche sind was wir schon hier betonen wollen.

Um der Sicherheit der Terminologie willen stellen wir den weiteren Ausführungen folgende Definitionen voran.

Das von irgend einer — gleichgiltig ob selbst- oder indirekt leuchtenden — Fläche sich ausbreitende Licht denken wir uns zusammengesetzt aus den Antheilen, die von je einem Element der Fläche ausgehen. Das von einem solchen Flächenelement ausgehende Licht bildet ein physikalisches Lichtbüschel.

Das in Oeffnungswinkel und Querschnitt kleinste physikalische Büschel, welches praktisch noch von dem übrigen Licht getrennt und isolirt weiteren Veränderungen unterworfen werden kann, ist ein physikalischer Lichtstrahl (Newton).

In der streng geometrischen Optik bildet man die Fiction, dass das Licht von den einzelnen Punkten einer Fläche ausgehe. Dieser Punkt heisst dann der Brennpunkt des Lichtbüschels oder kurzweg der leuchtende Punkt. Wenn die Winkelöffnung und der Querschnitt des Büsches verschwindend klein ist, so nennt man das Büschel ein Elementarbüschel. (Wo nicht die entgegengesetzte Annahme ausdrücklich gemacht ist, denken wir uns die Form des Elementarbüschels als die eines geraden Kegels bezw. Cylinders). Die Büschel denkt man sich als Aggregate von Lichtstrahlen, welche letztere als mathematische gerade Linien behandelt werden.

Jeder Strahl eines Elementarbüschels kann als seine Axe angesehen werden.

Des näheren oft, und bei endlichen Büscheln durchaus heisst Axe oder Hauptstrahl des Büschels derjenige Strahl, welcher der, durch den Brennpunkt gehenden Schwerpunktslinie des Büschels — dieses als homogenen Körper gedacht — entspricht; also bei cylindrischen und conischen Büscheln die geometrische Axe, Symmetrielinie des Kegels bezw. Cylinders. Die Axe ist der Repräsentant der Richtung des Büschels.

Ein Büschel heisst convergent oder divergent, je nachdem wir es an einer Stelle betrachten, die im Sinne der gedachten Lichtbewegung vor oder hinter dem Vereinigungspunkte der Strahlen, dem Brennpunkte, liegt. Der Grad der Con- oder Divergenz von Büscheln wird durch ihren Oeffnungswinkel, bei Elementarbüscheln durch ihre relativen Oeffnungswinkel, in der Ebene oder im Raume, gemessen.

Der Brennpunkt eines Büschels heisst reell, wenn die Strahlen sich in Wirklichkeit in ihm schneiden oder nur durch die Dazwischenkunft eines fremden Körpers daran gehindert werden, dies in ihrem weiteren Verlaufe zu thun, d. h. wenn sie in der Richtung ihrer Bewegung verlängert, sich in ihm schneiden würden. Der Brennpunkt heisst virtuell, wenn die Strahlen nur in ihrer Verlängerung nach rückwärts — entgegen der Lichtbewegung — sich in ihm schneiden.

Convergente Büschel können daher nur reelle Brennpunkte haben; divergente Büschel aber beide Arten. Ursprünglich ist ein Büschel immer divergent und sein Brennpunkt reel. Durch die Wirkung der optischen Instrumente oder sonstige Reflexionen und Brechungen kann es in ein Büschel der anderen beiden Arten verwandelt werden.

Der Raum, in welchem sich das Licht bewegt, ganz gleich ob derselbe mit wägbarer Matèrie erfüllt ist, oder nicht, heisst das Medium oder Mittel. Der Brennpunkt eines Büschels wird stets in demjenigen Mittel liegend angenommen in welchem thatsächlich die Strahlen verlaüfen, deren reeller oder virtueller Ver-

einigungspunkt er ist, auch wenn dieser dem Orte nach in ein anderes Mittel fällt.

Der Unterschied zwischen reellen und virtuellen Brennpunkten wird nur wegen der praktischen Consequenzen, die er mit sich bringt, statuirt und festgehalten.

Wenn durch irgend welche optischen Mittel die von einem leuchtenden Punkte ausgegangenen Strahlen zum Theil wieder in einen Punkt vereinigt werden, so nennt man diesen das optische Bild des ursprünglichen Punktes. Je nachdem das Bild ein reeller oder virtueller Brennpunkt ist, heisst es selbst reell oder virtuell. Die zur Vereinigung gebrachten Strahlen können dabei ein endliches oder auch ein unendlich dünnes (Elementar-) event. auch nur ebenes Partialbüschel bilden.

Virtuelle Brennpunkte geben nicht unmittelbar Bilder z. B. auf einer Tafel, sondern müssen durch optische Mittel erst in reelle verwandelt werden (z. B. durch das Auge). Diese reellen Brennpunkte haben dann gemäss demselben Satze wieder die Eigenschaft, die Strahlen mit gleicher Phase zu vereinigen, sodass sie nunmehr in der That Bilder jener virtuellen geben.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege (pag. 23) können Objekt und Bildpunkt ihre Function vertauschen, d. h. jeder Bildpunkt als Objekt Strahlen aussendend in den Richtungen, in welchen solche in ihm zur Vereinigung kamen, wird durch dieselben optischen Mittel genau im vorherigen Objektpunkt abgebildet. Statt zu sagen, ein Punkt sei das Bild eines anderen, nennt man daher beide in Bezug auf die betreffenden optischen Mittel »conjugirte« Punkte.

Was von einem einzelnen Punkte gilt, trifft auch auf mehrere zu, welche ein mehr oder weniger ausgedehntes Objekt und Bild formiren.

Ein Unterschied zwischen einem selbstleuchtenden Objekt und einem optischen Bild ist der, dass ersteres von allen Seiten, letzteres aber im allgemeinen nur innerhalb beschränkter Raumgebiete sichtbar ist.

Historische Anmerkung. EUCLIDES (300 v. Chr.), dem Begründer der wissenschaftlichen Geometrie, ist auch die erste Grundlegung der geometrischen Optik zuzuschreiben. Er nimmt die Lichtstrahlen geradlinig an, aber, ebenso wie die griechischen Philosophen, als vom Auge ausgehend, und zwar in gleichen Entfernungen von einander. Auf dieser Grundlage entwickelt er die Perspektive. In seiner »Katoptrik« folgert er das richtige Reflexionsgesetz ganz treffend aus der symmetrischen Gleichheit von Objekt und Bild bei ebenen Spiegeln. HERO von Alexandrien 200 (?) v. Chr. leitete dasselbe Gesetz aus dem »Oeconomie-Princip« der Natur ab. Aber erst der Araber ALHAZEN (um 1100 n. Chr.) stellte fest, dass das Licht von den gesehenen Gegenständen ausgehe und bestimmte das Reflexionsgesetz näher durch die Feststellung, dass die Ebene, in welcher der einfallende und reflectirte Strahl verliefen, senkrecht auf der reflectirenden Ebene stünden. (ALHAZENI, Opticae thesaurus libri VII; item VITTELLONIS, libri X, Basel 1572). Die Anfänge der Lehre von der Brechung des Lichts (»Dioptrik« von KEPLER genannt, als Pendant zu der »Katoptrik« des Euclid) sind auf PTOLEMÄOS zurückzuführen (2. Jahrhundert n. Chr.), welcher Refractionstafeln von anerkennenswerther Genauigkeit veröffentlichte. (GOVI, L'Ottica di Claudio Tolomeo, Turin 1885). Nächst ihm wurde die geometrische Optik, nach fast tausendjährigem Stillstand, erst wieder von den Arabern zu studiren begonnen (ALHAZEN). Durch diese und die späteren, ROGER BACON, MAUROLYCUS, VITTELIO, PORTA und namentlich KEPLER wurden manche qualitative Eigenschaften der Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen gefunden, das Entstehen der Bilder im Auge, sowie die Ursache der Kurz- und Weitsichtigkeit angegeben, die sphärische Aberration entdeckt und die Grundzüge einer Theorie der Fernröhre geliefert. CARTESIUS hat dann neben werthvollen Specialuntersuchungen z. B. über Regenbögen, dem von WILLIBROD SNELLIUS (Anfang des 17. Jahrhunderts) gefundenen Brechungsgesetze die jetzt übliche bequemere Form gegeben (Dioptrice, enth. in Principia philosophiae. Amstelod 1672) und NEWTON endlich erwies, dass der Brechungsindex caet. par. eine Function der Farbe sei.

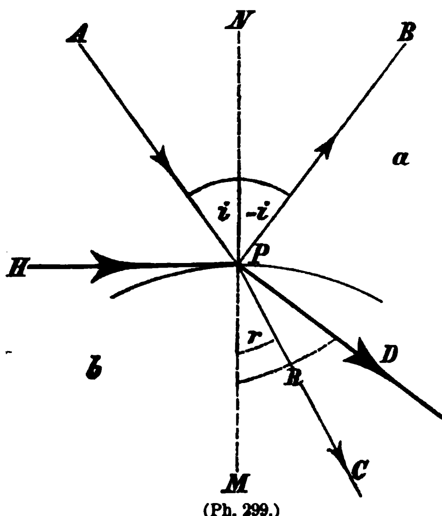
An einer auf neueren Forschungen beruhenden pragmatischen Geschichte der Anfänge der Optik fehlt es. Sehr verdienstlich ist auch jetzt noch als Quellenwerk WILDE, Geschichte der Optik. Berlin 1838—43.

Grundgesetze.

Die Richtung, welche der regelmässig zurückgeworfene und der ebenso gebrochene Theil des Lichts im Verhältniss zu dem einfallenden einschlagen, wird durch die folgenden Gesetze bestimmt (drittes und viertes Grundgesetz der geometrischen Optik).

Definitionen. Der spitze Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der im Einfallspunkte auf der Trennungsfläche der beiden Medien errichteten Normalen, — der Einfallsnormalen, — bildet heisst der Einfalls-, Incidenzwinkel. Der spitze Winkel, welchen der reflectirte bezw. gebrochene Strahl mit derselben Normalen bildet, heisst der Reflexions- bezw. Brechungswinkel. Die Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale liegen heisst die Einfallsebene. Es gilt dann:

1) Der reflectirte und der gebrochene Strahl liegen in der Einfallsebene und auf der entgegengesetzen Seite des Einfallslots, wie der einfallende Strahl.



(Ph. 299.)

2) (Grundgesetz der Reflexion.) Der reflectirte Strahl bildet mit dem Einfallslot den gleichen Winkel, wie der einfallende Strahl: $\sphericalangle APN = BPN = i$ (Fig. 299).

3) Grundgesetz der Brechung. Der Sinus des Brechungs-Winkels steht zu dem Sinus des Einfallswinkels in einem Verhältniss, welches nur von der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien a und b und der Art (Wellenlänge) des wirksamen Lichts, aber nicht von der Grösse des Einfallswinkels abhängig ist: $\sin CPM / \sin APN = \sin r / \sin i = n_{a,b} = const\,(i)$.

Die Verhältniszahl $n_{a,b}$ heisst der Brechungsindex des Mediums a gegen das Medium b für die betreffende Lichtart.

Ueber die erfahrungsmässige Begründung dieser Grund-Gesetze gilt das in der Einleitung gesagte. Die Ableitung derselben aus den Voraussetzungen der physikalischen Theorie des Lichts wird bei dem Vortrag dieser an späterer Stelle dieses Werkes gegeben. Zur Demonstration des Reflexions- und Brechungsgesetzes sind vielfach Apparate construirt worden, s. u. A. TYNDALL, Das Licht, pag. 12 u. 17. WEINHOLD, Physik. Demonstr. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. an versch. Stellen. Die genaueste Bestätigung hat das Reflexionsgesetz durch astronomische Beobachtungen erfahren, bei welchen die Höhe eines Sterns einerseits direkt durch Einstellung auf ihn mit dem Meridianinstrumente, andererseits indirekt durch Messung der Tiefe seines Spiegelbildes in einem Quecksilberhorizont bestimmt wird. Die auf diese Art beobachtete Tiefe wird immer genau der Höhe gleich gefunden, bei jedem Betrage der letzteren. Dergleichen Messungen sind aber einer sehr grossen Genauigkeit fähig, so dass sie eine ebenso genaue Prüfung der Consequenzen des fraglichen Gesetzes repräsentiren.

Das Brechungsgesetz wird am schärfsten auf die Probe gestellt durch Bestimmungen des Brechungsverhältnisses selber (s. das betr. Cap.) und durch die Uebereinstimmung der unter seiner Annahme berechneten optischen Constructionen, wenn dieselben exakt ausgeführt sind, mit der Rechnung.

In Bezug auf letzteres Gesetz hat die Erfahrung weiterhin zu erkennen gegeben, dass — was bei der Reflexion eo ipso statt hat — der einfallende und der gebrochene Strahl stets mit einander vertauscht werden können, so dass, wenn irgendwo ein unter dem Winkel i im Medium a einfallender Strahl unter dem Winkel r in das Medium b gebrochen wird, derselbe unter dem Einfallswinkel r im Medium b einfallend genau unter dem Winkel i in das Medium a gebrochen würde. Mit anderen Worten: wenn $n_{ab} = \sin r/\sin i$ der Brechungsexponent des Mediums a gegen das Medium b ist, so ist $n_{ba} = \sin i/\sin r = 1/n_{ab}$ der Brechungsexponent des Medium b gegen das Medium a; also $n_{ab} = 1/n_{ba}$.

Wir schliessen hieraus: wenn ein Strahl nach irgend welchen Reflexionen und Brechungen so auf eine Fläche fällt, dass er senkrecht reflectirt wird, so durchläuft er genau seinen vorherigen Weg, nur in umgekehrter Richtung — Princip der Umkehrbarkeit der Strahlenwege. —

Und endlich hat die Messung zahlreicher Brechungsverhältnisse gezeigt, dass das Brechungsverhältniss n_{ab} eines Mediums a gegen b vollständig besimmt ist, wenn die Brechungsverhältnisse n_{ac}, n_{bc} der Medien a und b gegen irgend ein anderes Medium c bekannt sind, und zwar, dass $n_{ab} = \frac{n_{ac}}{n_{bc}}$. Der relative Brechungsexponent eines Mediums a gegen das Medium b ist also gleich dem Verhältniss der relativen Brechungsexponenten der Medien a und b gegen ein drittes Medium c. Hierdurch wird die Zahl der möglichen Brechungsexponenten, welche sonst gleich der Zahl der Combinationen aller Medien mit einander wäre, in eindeutiger Weise auf eine einzige Reihe zurückgeführt, nämlich auf die der Brechungsexponenten aller Medien gegen ein einziges. Als das letztere wird vornehmlich der leere Raum genommen. Die Brechungsverhältnisse gegen den leeren Raum heissen darum absolute, oder Brechungsindices schlechthin. Das Vacuum selbst hat gemäss dieser Bestimmung den Brechungsindex 1; die bekannten durchsichtigen Medien haben alle Brechungsindices > 1; nur einige Metalle, in Prismen von sehr geringer Dicke untersucht (Kundt) haben Indices < 1 ergeben. (S. später: Bestimmung des Brechungsexponenten.)

Vermöge dieser Beziehungen lässt sich die Gleichung, welche das Brechungsgesetz ausspricht, in einer symmetrischen Form schreiben, welche wir künftig oft anwenden werden. Wir haben $\sin r = n_{ab} \cdot \sin i$. Da nun $n_{ab} = n_a/n_b$ ist, wenn Raum n_a, n_b die Brechungsexponenten der Medien a und b gegen den leeren wir mit bezeichnen, so wird

$$n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r,$$

oder das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des Winkels (Strahl-Normale) ändert sich bei je einer Brechung nicht. Wir wollen dieses Produkt die »optische Invariante« nennen.

Man erkennt ferner, dass die Reflexion durch dieselbe Gleichung wie die Brechung dargestellt wird, indem für sie nur $n_a : n_b$ den speciellen Werth -1 erhält. Wir werden daher in dem Folgenden oft nur die Probleme der Brechung direkt behandeln und das für die Reflexion geltende Resultat ohne weiteres aus jenem durch die Substitution $n_a : n_b = -1$ gewinnen.

Dispersion des Lichts. Wie schon bemerkt hängt die durch Brechung herbeigeführte Richtungsänderung des Lichts an der Grenze zweier Medien, also

der relative Brechungsexponent derselben nicht nur von der Beschaffenheit dieser Medien ab (für welche er umgekehrt ein wesentliches Charakteristikum ist) sondern auch von der Art (Farbe, Wellenlänge) des wirksamen Lichts; n ist eine Function von λ. Die Natur dieser Function, soweit sie aus den vorhandenen Beobachtungen und der Theorie des Lichts hat erschlossen werden können, wird in einem eigenen späteren Abschnitt (s. Dispersionstheorie) eingehender discutirt werden. Vorläufig genügt uns die von NEWTON zuerst erfahrungsmässig festgestellte Thatsache an sich. Wie eine solche Verschiedenheit der Brechungsexponenten für verschiedene Farben in Erscheinung treten muss, können wir auf Grund des bisher Abgeleiteten schon angeben. Denn ist der Brechungsexponent eines Mediums gegen den leeren Raum (oder auch gegen ein anderes Medium) für eine gewisse Farbe $= n$, so gilt für diese $\sin i = n \cdot \sin r$. Ist der Brechungsexponent für eine benachbarte Farbe (Wellenlänge) $= n + dn$, so wird ein Strahl von der betreffenden Farbe, welcher unter demselben Winkel i einfällt, wie der erste, unter einem Winkel $r + dr$ gebrochen, welcher von r verschieden ist, gemäss

$$n \cdot \cos r \cdot dr + \sin r \cdot dn = 0$$

oder

$$dr = -(dn/n) \operatorname{tg} r.$$

Unter demselben Winkel einfallende Strahlen verschiedener Wellenlänge werden also schon durch eine einzige Brechung (und noch mehr durch zwei solche geeignet angeordnete) in verschiedene Richtungen gelenkt. NEWTON schloss umgekehrt aus der ungleichen Ablenkung verschiedener Farben durch Prismen auf die verschiedene Brechbarkeit des verschieden farbigen Lichts und auf die Zusammensetzung des weissen Sonnenlichts aus verschiedener Farbe. (S. Spectralanalyse.) Die Art der Auffindung dieses Factums durch NEWTON (im J. 1666) gilt noch heute für ein Muster inductiver Forschung und die von ihm gegebene Darstellung seiner Untersuchung für eins der lesenswerthesten Dokumente der älteren Physik S. Letter to Oldenburg dd. Cambridge Feb. 10, 1671 (abgedruckt in TAIT, Light Edinb. 1884, pag 78 ff.) und OPTICKS, London 1704, (3. ed. 1721). Book I, Prop. 1—7.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass der Brechungsexponent der Medien im allgemeinen desto grösser ist, je kleiner die Wellenlänge des betreffenden Lichts ist, dass er also im sichtbaren Theil des Spectrums von dem rothen Ende nach dem blauen hin stetig wächst. Doch giebt es eine Klasse von Körpern, welche eine Ausnahme von dieser Regel bilden, in welchen also entweder das ganze sichtbare Spectrum oder Theile desselben den umgekehrten Zusammenhang zwischen Brechungsexponent und Wellenlänge aufweisen. Man nennt diese Art von Dispersion darum anomale. Auch von dieser wird weiter unten noch näher die Rede sein.

Man glaubte früher, dass die Grösse des Brechungsexponenten stets Hand in Hand ginge mit der Dichte der Körper. Wenn sich nun auch dieser Zusammenhang nach den späteren Untersuchungen als ein keineswegs durchgängiger erwiesen hat, so findet er doch sehr oft Statt und man hat den einmal eingeführten Begriff der »optischen Dichte« zur Abkürzung der Ausdrucksweise beibehalten. Der Ausdruck, ein Medium sei optisch dichter als ein anderes, soll daher nichts weiter besagen, als, es habe einen grösseren Brechungsexponenten als jenes. —

Totalreflexion. Wir haben die Beziehung zwischen Brechungs- und Einfallswinkel durch die Gleichung ausgedrückt $n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r$. Wenn $n_a < n_b$,

also $n_{ab} < 1$ ist, so bestimmt sich gemäss dieser Gleichung zu jedem Einfallswinkel i der Brechungswinkel r. Da der grösste Einfallswinkel $i_{max} = J = \pi/2$ ist, so ist der grösste Brechungswinkel unter diesen Umständen bestimmt durch die Gleichung $sin\,(r_{max} = R) = n_a/n_b$. Allen einfallenden Strahlen entsprechen also gebrochene, die in einem Kegel von der Halböffnung $arc\,(sin = n_a/n_b)$ enthalten sind. Betrachten wir umgekehrt den Uebergang des Lichts aus dem Medium b in das Medium a, oder, was dasselbe ist, nehmen wir an, es sei $n_a > n_b$, also $n_{ab} > 1$, dann giebt es aus der Gleichung $n_a \cdot sin\, i = n_b \cdot sin\, r$ reelle Brechungswinkel r nur zu Einfallswinkeln i, deren sin kleiner ist als n_b/n_a oder kleiner als $1/n_{ab}$, entsprechend dem grössten möglichen Brechungswinkel $r = \frac{\pi}{2}$. Strahlen, welche unter einem grösseren Winkel i einfallen, als dem dieser Gleichung entsprechenden, können gar nicht mehr gebrochen werden, sondern — wenn auch genaue Untersuchungen gezeigt haben, dass auch hier das Licht zum Theil in das zweite Medium eindringt, so geschieht dies doch nur bis zu sehr geringer Tiefe, und auch dieser Theil des Lichts kehrt seine Bewegungsrichtung um und — alles eingefallene Licht wird in das erste Medium reflectirt. Man nennt diese Art von Reflexion daher Totalreflexion und den Einfallswinkel, von welchem an dieselbe beginnt, welcher also der Gleichung genügt, $sin\, J = n_b/n_a = 1/n_{ab} = n_{ba}$, den »kritischen Winkel« oder Winkel der Totalreflexion.

Beiläufig mag bemerkt werden, dass bei durchsichtigen Medien die relative Menge des reflectirten Lichts überhaupt mit dem Einfallswinkel wächst, so dass sie von dem, senkrechter Incidenz entsprechenden Minimum bis zur Totalreflexion stetig wächst.

Der Winkel der Totalreflexion hängt nur von den Brechungsexponenten der beiden an einander grenzenden Medien ab. Er ist daher auch im allgemeinen von der Wellenlänge, Farbe des betrachteten Lichts abhängig. Der Winkel der Totalreflexion in einem Medium, welches an das Vacuum grenzt, bestimmt in einfachster Weise dessen absoluten Brechungsexponenten $sin\, J = 1/n$.

Hilfssätze. Aus dem Reflexions- und Brechungsgesetze lassen sich einige Hilfssätze ableiten, welche uns in der Folge manchmal nützlich sein werden, und die wir daher hier voranstellen. In Bezug auf die Reflexionen folgt aus deren Gesetz: 1) dass der einfallende und der reflectirte Strahl gleiche Winkel auch mit jeder durch den Einfallspunkt gehenden zur Einfallsnormalen senkrechten Geraden bilden, und 2) dass die Projectionen des einfallenden und zurückgeworfenen Strahls auf irgend eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene ebenfalls das Reflexionsgesetz befolgen. Der Beweis dieser Sätze liegt auf der Hand. Wir wollen daher nur die entsprechenden für die Brechung geltenden Sätze beweisen, aus welchen sich die ersteren ja auch ergeben, wenn $n_a = -n_b$ oder $n = -n'$ gesetzt wird. Hier gilt:

1) Die Cosinus der Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit irgend einer durch den Fusspunkt der Einfallsnormalen zu dieser senkrechten, d. h. in der Tangentialebene der brechenden Fläche gelegenen Geraden bilden, stehen ebenfalls im umgekehrten Verhältniss der Brechungsexponenten.

2) In demselben Verhältniss stehen die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit einer durch die Normale gelegten Ebene bilden.

3) Für die Projectionen des einfallenden nnd des gebrochenen Strahls auf eine durch die Normale gelegte Ebene gilt das Brechungsgesetz mit einem Brechungsindex, welcher von der Neigung der Strahlen gegen jene Ebene abhängt.

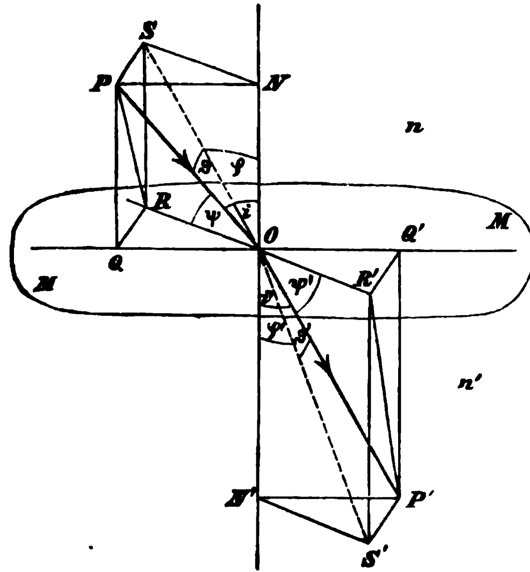
Sei, zum Beweise dessen, ON (Fig. 300) die Einfallsnormale, MM die brechende Ebene oder Tangentialebene zur brechenden Fläche, PO der einfallende, OP' der gebrochene Strahl. Dann gilt

$$n \cdot sin(PON = i) = n' \cdot sin(P'ON' = i');$$

daher auch

$$n \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i = POQ\right) = n' \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - i' = P'OQ'\right).$$

Mache ich die Länge von OP und OP' proportional zu resp. n und n', so ist hiernach, wenn Q und Q' die Fusspunkte der von P und P' auf die Ebene MM gefällten Lothe sind, $OQ = OQ'$. Ziehe ich nun durch O in der Ebene MM irgend eine andere Gerade, ROR' und fälle von P und P' Senkrechte auf sie, nach R und R', so sind die Verbindungslinien QR und $Q'R'$ auch senkrecht auf ROR'. Daher auch $OR = OR'$. Es ist aber $OR = OP \cdot cos\, POR$; $OR' = OP' \cdot cos\, P'OR'$, folglich in der That $n \cdot cos\, POR = n' \cdot cos\, P'OR'$ (1. Satz).



(Ph. 300.)

Denke ich mir nun durch ON und die (beliebige) Gerade RR' eine Ebene gelegt und von den, wie vorher bestimmten Punkten P und P' Senkrechte auf diese Ebene gefällt, nach S und S', so ist $PS = QR$ und $P'S' = Q'R'$, also auch $PS = P'S'$, da ja $QR = Q'R'$. Aber $PS = OP \cdot sin\, POS$; $P'S' = OP \cdot sin\, P'OS'$, folglich $sin\, POS : sin\, P'OS' = OP' : OP = n' : n$ (2. Satz).

Endlich ist $SO \cdot sin\, SON = SN = S'O\, sin\, S'ON' = S'N'$. Aber $SO = PO \cdot cos\, POS$; $S'O = P'O\, cos\, P'OS'$, folglich $n \cdot sin\, SON \cdot cos\, SOP = n' \cdot sin\, S'ON' \cdot cos\, S'OP'$ oder $sin\, SON : sin\, S'ON' = n' \cdot cos\, S'OP' : n\, cos\, SOP$ (3. Satz).

Bei der Bezeichnung der Figur gilt also, neben der Fundamentalgleichung, $n \cdot sin\, i = n' \cdot sin\, i'$ oder $sin\, i : sin\, i' = n' : n$ noch $cos\psi : cos\psi' = n' : n$; $sin\vartheta : sin\vartheta' = n' : n$ und $sin\varphi : sin\varphi' = \frac{n'}{n}(cos\vartheta' : cos\vartheta) = n'\, cos\vartheta' : n\, cos\vartheta$.

Characteristisch für die Natur der Brechung — im Gegensatze zur Reflexion — ist folgende Eigenschaft: Die durch Brechung bewirkte Ablenkung eines Strahls von der Einfallsrichtung wächst mit zunehmendem Einfallswinkel immer schneller — während sie bei der Reflexion diesem proportional ist (stets $= \pi - 2i$).

In der That folgt aus $n \cdot sin\, i = n' \cdot sin\, i'$ zunächst $di/tg\, i = di'/tg\, i'$. Ist nun $n' > n$, so ist $i' < i$, daher auch $tg\, i' < tg\, i$ und, da im selben Verhältniss stehend, $di' < di$. Die Ablenkung γ ist aber $= i - i'$ Diese nimmt also, da $d(i - i') > 0$ ist mit i jedenfalls zu.

Des Näheren ist

$$\frac{di - di'}{di} = \frac{d\gamma}{di} = 1 - \frac{tg\, i'}{tg\, i}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\gamma}{di^2} = -\frac{d}{di}\left(\frac{tg\, i'}{tg\, i}\right).$$

Nun nimmt aber $tg\,i'/tg\,i$ mit i ab; denn

$$\frac{d}{di}\left(\frac{tg\,i'}{tg\,i}\right)=\frac{d}{di}\left(\frac{sin\,i'}{sin\,i}\,\frac{cos\,i}{cos\,i'}\right)=\frac{n}{n'}\,\frac{d}{di}\left(\frac{cos\,i}{cos\,i'}\right)=-\frac{n^2}{n'}\,\frac{sin\gamma}{cos^2 i'}$$

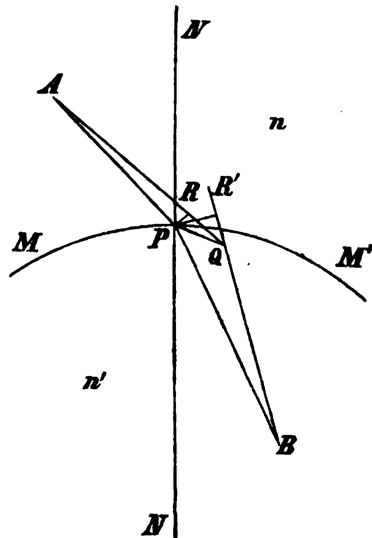
und γ ist, wie eben bewiesen, selbst > 0; also ist $\frac{d^2\gamma}{di^2}=+\frac{n}{n'}\,\frac{sin\gamma}{cos^2 i'}$ stets positiv, $\frac{d\gamma}{di}$ nimmt mit wachsendem i (oder i') zu, d. h. die durch Brechung bewirkte Ablenkung wächst immer schneller.

Wenn $n' < n$, so erfolgt die Ablenkung nach der anderen Seite des Strahls (von der Normalen weg); im übrigen bleiben alle Schlussfolgerungen dieselben.

Einen eleganten rein geometrischen Beweis dieses nützlichen Satzes hat Tait gegeben (Light, pag. 90), s. auch Heath, l. c., pag. 23.

Allgemeine Theoreme über die Reflexion und Brechung.

Satz vom kürzesten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte A nach einem Punkte B gelangt, so ist die Summe der Produkte aus Brechungsexponent je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke, Σnl, ein Grenzwerth, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle dem thatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also $\delta\Sigma nl = 0$. Jenes Produkt wird »Lichtweg«, »reducirter Weg« oder »optische Länge« des Strahls genannt.



(Ph. 301.)

Sei, um den Satz zunächst für eine einzelne Brechung (und damit auch Reflexion) zu beweisen, MM' in (Fig. 301) eine brechende Fläche; der Weg eines das Brechungsgesetz befolgenden Strahls führe von A nach B über P, so dass $n\cdot sin\,APN = n'\cdot sin\,BPN$ erfüllt ist. Sei Q ein dem Punkte P unendlich benachbarter Punkt der Fläche MM', so ist zu beweisen, dass $n\cdot AP + n'PB$ bis auf Grössen der zweiten oder höherer Ordnung $= nAQ + n'QB$ ist.

In der That ist mit eben dieser Annäherung, wenn ich mir mit AP um A und mit BP um B Bögen geschlagen denke, welche resp. AQ in R und BQ in R' treffen

$$AQ = AR + RQ = AP + PQ\cdot sin\,RPQ = AP - PQ\,cos\,APQ,$$

ebenso $$BQ = BP + PQ\,cos\,BPQ,$$

also $$nAQ + n'BQ = nAP + n'BP + PQ\,(n\,cos\,APQ - n'\,cos\,BPQ).$$

Wir haben aber pag. 26 bewiesen, dass die in der Klammer stehende Grösse unter den gemachten Annahmen $= 0$ ist (1. Satz); folglich sind in der That die Lichtwege von A nach B über P und Q bis auf Grössen zweiter Ordnung einander gleich: $\delta(nAP + n'PB) = 0$.

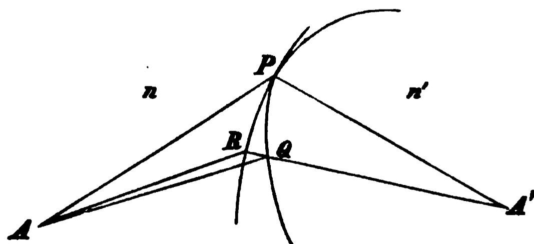
Nach dem Princip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta\Sigma nl = 0$ für eine einzelne Reflexion und Brechuug sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler. Bei stetiger Aenderung des Brechungsexponenten folgt ebenso $\delta\int n\,dl = 0$.

(Der zweite und die höheren Differentiale können grösser oder kleiner oder auch gleich Null sein. Die gewöhnliche Fassung des Satzes, dass jene Summe ein Minimum sei, ist daher nicht correkt, sondern nur historisch überkommen.)

Für ebene Trennungsflächen ist der optische Weg immer ein Minimum, wie für die Reflexion schon HERO v. Alexandrien, für die Brechung FERMAT zuerst bewiesen hat[1]), wir wollen uns daher der Kürze wegen für den allgemeinen Fall desselben Ausdrucks bedienen.

Wichtig ist, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, nämlich, dass sich der Bedingung $\delta\Sigma nl = 0$ für den Weg eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten bei gegebenen reflectirenden und brechenden Flächen nur durch das Reflexions- und Brechungsgesetz genügen lässt. Wegen des Beweises sei auf HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., Leipzig 1867, pag. 239, und Wissensch. Abh., Leipzig 1883, Bd. 2, pag. 147, verwiesen.

Ob in einem speciellen Falle der Weg ein Minimum oder Maximum oder was sonst ist, davon kann man sich, wenn die Gestalt der Grenzfläche gegeben ist, folgendermaassen überzeugen. Sei PQ (Fig. 302) ein Stück der Grenzfläche und PA' der nach dem Brechungsgesetz zu AP gehörige Strahl. Um zu erfahren, ob APA' ein kürzester oder ein längster Weg zwischen A und A' sei, denke ich mir die Fläche $n \cdot AP + n'A'P = const$ construirt, die sogen. aplanatische Fläche (s. u.); PR sei ein Stück derselben. Diese Fläche muss die brechende in P jedenfalls berühren, weil dort für beide $\delta(nAP + n' \cdot A'P) = 0$ ist. Ist nun die brechende Fläche in P nach dem dünneren Medium (n) zu stärker convex als die aplanatische, so ist für jene der Weg APA' ein Maximum, anderenfalls ein Minimum.



(Ph. 302.)

In der That, sei Q ein P unendlich benachbarter Punkt der brechenden Fläche, so ist der Lichtweg von A nach A' über Q, $[Q] = n \cdot AQ + n'A'Q$. Der über R durch die aplanatische Fläche, $[R] = nAR + n'RQ + n'QA'$, wenn R der Schnittpunkt von $A'Q$ mit der aplanatischen Fläche ist. Also ist

$$[Q] - [R] = n(AQ - AR) - n'RQ.$$

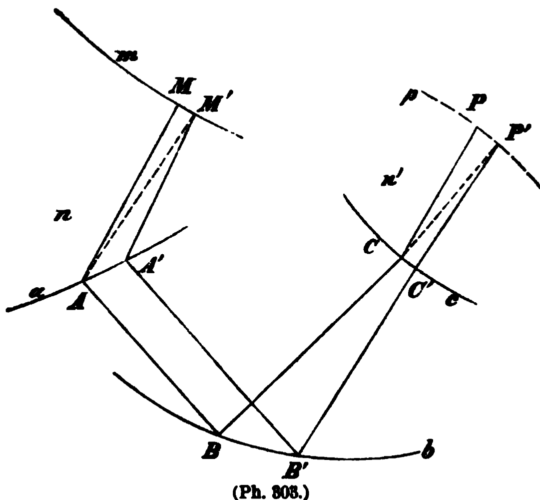
Nun ist $AQ - AR < RQ$ als Seiten eines Dreiecks, daher, wenn $n < n'$, a fortiori $n(AQ - AR) < n'RQ$, also der Weg über Q kleiner, als der über R. Letzterer ist aber gleich dem über P, folglich ist unter diesen Umständen der Weg über P ein Maximum. In ganz analoger Weise lässt sich erkennen, dass wenn die brechende Fläche nach dem optisch dünneren Medium weniger convex ist, also die aplanatische, der Lichtweg über P ein Minimum ist.

Princip der schnellsten Ankunft. Nach den Experimenten von FOUCAULT und in Uebereinstimmung mit der Undulationstheorie des Lichts stehen die Brechungsexponenten zweier Medien im umgekehrten Verhältniss der Geschwindigkeiten der Lichtbewegung in ihnen, also $n/n' = v'/v$, oder allgemein $n = k/v$; $n' = k/v'$; $n'' = k/v''$ etc. Unter Benützung dieser Beziehung geht die Gleichung $\delta\Sigma nl = 0$ über in $\delta\Sigma(l/v) = 0$. Da aber die Geschwindigkeit $v = l/t$ ist, wenn t die zur Durchlaufung der Strecke l vom Licht gebrauchte Zeit bedeutet, so

[1]) HUYGHENS, Traité de la Lumière. Leyden 1690, pag. 39 ff.

wird schliesslich $\delta \Sigma t = 0$, d. h. die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von einem Punkte A unter beliebig vielen Reflexionen und Brechungen nach einem anderen Punkte B zu gelangen, ist für den Weg, welchen der Strahl gemäss dem Reflexions- und Brechungsgesetz einschlägt, um unendlich kleine Grössen der zweiten oder höheren Ordnung verschieden von der für die diesem unendlich benachbarten Wege.

Unter Benützung dieses Satzes lässt sich der folgende wichtige Satz von MALUS[1]) beweisen. Derselbe lautet: Ein System von Strahlen, welches ein Mal senkrecht zu einer Fläche ist, bleibt dies auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen. Da die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen senkrecht stehen auf jeder Kugel um diesen Punkt als Mittelpunkt, so würde für solche der MALUS'sche Satz besonders gelten. Nach der Wellentheorie drückt derselbe etwas Selbstverständliches aus, da gemäss dieser die Strahlen nichts anderes sind, als die Normalen zur Wellenfläche. Auf Grund unserer elementaren Voraussetzungen lässt sich der Satz folgendermaassen beweisen (nach RAYLEIGH)[2]). Seien $MABCP$, $M'A'B'C'P'$ ... (Fig. 303), Strahlen, welche auf der Fläche m bezüglich in M, M' normal stehen und in ihrem weiteren Verlauf an den Flächen a, b, c, bezüglich in A, A' ... B, B' ..., C, C', ... Reflexionen oder Brechungen erfahren haben.



(Ph. 303.)

Ich kann dann nach irgend einer dieser Reflexionen oder Brechungen, z. B. nach der an Fläche c stattgehabten, auf den betreffenden Strahlen jedenfalls Punkte P, P' ... so bestimmen, dass die Summe der reducirten Wege von M bis P, M' bis P' etc. die gleiche wird. Die durch die Punkte P, P' ... gehende Fläche ist dann die gesuchte Orthogonalfläche der Strahlen. Verbinde ich zum Beweise dessen M' mit A und C mit P', so ist bei genügender Nähe von M an M' $(M'ABCP')$ nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als MM' verschieden von $(M'A'B'C'P')$. Laut Annahme ist aber $(M'A'B'C'P') = (MABCP)$; daher, nach Subtraction der gemeinsamen Wegstrecken, wenn der erste Brechungsexponent mit n, der letzte mit n' bezeichnet wird, im Grenzfalle $n \cdot MA + n' \cdot CP = n \cdot M'A + n' CP'$. Nach der Voraussetzung, dass die Strahlen ursprünglich auf m senkrecht stehen, ist aber $lim \cdot M'A = MA$; bis auf unendlich Kleine von wenigstens zweiter Ordnung; folglich auch ebenso nahe $lim \cdot CP' = CP$, d. h. CP steht auf p in P senkrecht, und ebenso die anderen Strahlen $C'P'$ etc.

Analytische Beweise des MALUS'schen Theorems s. ausser in der Originalabhandlung bei HELMHOLTZ, Physiolog. Optik, 1. Aufl., pag. 241, Wissensch. Abh., Bd. 2, pag. 147, und HEATH, l. c., pag. 102.

Optische Länge zwischen conjugirten Brennpunkten. Aus dem

[1]) Journ. de l'Ec. Polyt. 14, pag. 1 u. 84 (1808).

[2]) Encyclop. Brit. 9. ed. Art. Optics.

FERMAT'schen in Verbindung mit dem MALUS'schen Satze können wir einen wichtigen Schluss ziehen; nämlich: wenn durch irgend welche Reflexionen und Brechungen alle in einem gegebenen Winkelraum enthaltenen von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt werden, so ist für sie die optische Länge vom Ausgangs- bis zum Vereinigungspunkt die gleiche. Denn in der That, weil dann von Strahl zu Strahl $\delta\Sigma nl = 0$ ist, so ist $\Sigma nl = const$ innerhalb des betreffenden Winkelraums. Strahlen (Elementarwellen), welche von einem Punkte (Flächenelement) mit gleicher Phase ausgehen, kommen also bei homocentrischer Vereinigung im neuen Brennpunkt auch wieder mit gleicher Phase wieder an. (Phasenverzögerungen, welche etwa bei der Reflexion oder Brechung eintreten, treffen alle Strahlen gleichmässig, wofern dieselben nicht etwa von dem Einfallswinkel abhängen — was, so viel bekannt, nicht der Fall ist — beeinträchtigen also die Giltigkeit dieses Satzes nicht.) In solchen Vereinigungspunkten müssen sich die Strahlen also auch gemäss der Undulationstheorie verstärken, und es kommt daselbst zur Erzeugung eines sich in dem betreffenden Winkelraum selbst wie ein leuchtender Punkt verhaltenden Oscillationscentrums. Hierauf beruht die Möglichkeit einer Abbildung durch optische Mittel.

Aplanatische Flächen. Die Aufgabe, eine Fläche so zu bestimmen, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sämmtlich wieder in einen Punkt gebrochen (oder reflectirt) werden, ist nach dem Voranstehenden mathematisch einfach so formulirbar, dass $nl + n'l'$ für alle Punkte der gesuchten Fläche denselben Werth haben solle, wenn l vom leuchtenden, l' vom Vereinigungspunkt aus gemessen wird. Die Lösung dieser Aufgabe bietet keine besonderen Schwierigkeiten und ist an mehreren Stellen zu finden[1]. Da sie andererseits auch kein besonderes physikalisches oder praktisches Interesse besitzt, so begnügen wir uns mit der Anführung einiger Resultate und weisen nur darauf hin, dass in diesen Fällen für den reducirten Weg des Lichtes zwischen den beiden Punkten wie überhaupt stets bei homocentrischer Strahlenvereinigung auch der zweite und alle höheren Differentialquotienten des Ausdruckes Σnl ebenfalls verschwinden.

Im Falle einer Reflexion ist $l + l' = const$ bekanntlich die Bipolar-Gleichung eines Rotationsellipsoids, dessen Brennpunkte der leuchtende und der Vereinigungspunkt sind, wie auch aus der bekannten Eigenschaft eines solchen Ellipsoids geschlossen werden kann, dass die Radii vectores gegen die Normale des betreffenden Flächenpunktes gleich geneigt sind, also dem Reflexionsgesetz genügen. Rückt der eine Punkt ins Unendliche, so wird die Fläche ein Rotationsparaboloid mit dem anderen Punkt als Brennpunkt und einer zu der Strahlenrichtung parallelen Axe.

Im Falle einer Brechung führt die Gleichung $nl + n'l' = const$ auf die sogen. Cartesischen Ovale. In dem Specialfall, dass wieder der eine, z. B. der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt, ist es eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren einer Brennpunkt auch der der Strahlen ist. Für eine besondere andere, später anzugebende Lage der beiden Punkte zur Fläche ist dieselbe eine Kugel.

Ganz ähnlich sind die Ergebnisse, wenn man die Wiedervereinigung der Strahlen statt durch eine einzige Fläche, durch mehrere solche bewirken will.

Von den aplanatischen Flächen kann man theoretisch Gebrauch machen, um für eine gegebene Lage zweier Punkte und gegebene Gestalt einer, zwei

[1] S. z. B. MEISEL, Geometrische Optik. Halle 1886, pag. 148.

Medien trennenden Fläche diejenigen Stellen der letzteren zu bestimmen, über welche durch Reflexion oder Brechung ein Strahl von dem einen Punkte nach dem anderen gelangen kann. Je nachdem die beiden Punkte in demselben oder in verschiedenen Medien (auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Fläche) liegen, construirt man um sie die Schaar der Flächen $l + l' = const$ oder $nl + nl' = const.$ Jede Stelle der Trennungsfläche, wo sie von einer dieser aplanatischen Flächen berührt wird, hat die gesuchte Eigenschaft, weil für sie eben $\delta \Sigma nl = 0$ ist.

Wir werden den Begriff des »Aplanatismus« übrigens später noch strenger zu fassen haben, wenn wir seine specielle Bedeutung in der Theorie der optischen Instrumente behandeln.

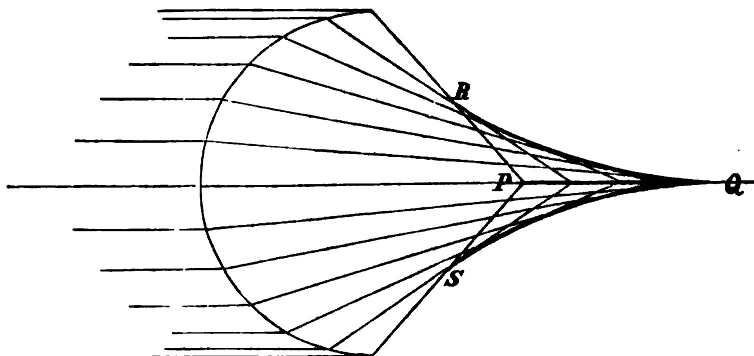
Das Problem der aplanatischen Flächen ist im Uebrigen, wie schon bemerkt, von sehr geringem und mehr negativem praktischen Interesse; letzteres insofern, als die Untersuchung zeigt, dass die Kugel im Allgemeinen keine aplanatische Fläche ist; ersteres weil weder die Natur uns die anderen Arten aplanatischer Flächen darbietet, noch künstlich solche exact genug hergestellt werden können, ausser mit sehr bedeutender Mühe und nur in Fällen, wo die Abweichung der aplanatischen Fläche von der Kugel äusserst gering ist, wie bei den astronomischen Reflectoren oder irrelevant, wie bei den sogen. Scheinwerfern. Wir sind praktisch auf die Anwendung sphärischer Flächen angewiesen und haben es bei Naturprodukten (z. B. den Augen) meist mit Rotationsflächen von schwer genau angebbarer Art zu thun. Bei der Reflexion und Brechung an diesen werden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen im Allgemeinen und streng nicht wieder in einen Punkt (homocentrisch) vereinigt.

Allgemeines optisches Strahlenbüschel, Caustiken; (Brennflächen). Da als optisches Strahlenbüschel, wie in der Einleitung hervorgehoben, nur ein solches angesehen werden kann, welches in letzter Instanz auf einen selbstleuchtenden Punkt (Oscillationscentrum) zurückgeführt werden kann, so hat ein solches gemäss dem Satz von Malus auch stets ein System von Orthogonalflächen, eben die Wellenflächen, in welchen gleiche Phase der Oscillation herrscht. »Jedem optischen Büschel, wie auch immer es entstanden sei, werden daher die Eigenschaften zukommen, welche die Normalen stetig gekrümmter Flächen besitzen. Die Theorie der letzteren lehrt aber, dass, wenn wir uns durch einen beliebigen Strahl a eine Ebene gelegt denken, welche die Fläche in einer Curve schneidet, und diese Ebene um den Strahl drehen, die Curve im Allgemeinen im Schnittpunkte mit a verschiedene Krümmung besitzt und dass die Ebene der grössten Krümmung der Schnittcurve senkrecht steht auf der Ebene ihrer kleinsten Krümmung. Von den dem Strahl a unendlich nahen Normalen der Wellenfläche — welche also benachbarte Strahlen sind — schneiden daher diejenigen, deren Fusspunkte in der Linie grösster oder kleinster Krümmung liegen, den Strahl a in dem Mittelpunkte bezüglich des grössten oder kleinsten Krümmungskreises; die anderen dagegen schneiden den Strahl a gar nicht. Auf jedem Strahle giebt es also im Allgemeinen zwei Brennpunkte, in denen er von benachbarten Strahlen geschnitten wird, welche Punkte den Mittelpunkten der grössten und kleinsten Krümmung im Fusspunkte des Strahles der Wellenfläche entsprechen. Nur wenn die Krümmung der Wellenfläche in dem Fusspunkte des Strahles nach allen Richtungen gleich gross ist, wird der Strahl von allen, ihm unendlich benachbarten in einem Punkte geschnitten« (Helmholtz).

Die Strahlen, deren Fusspunkte in einer Krümmungslinie der Wellenfläche liegen, schneiden einander bei endlicher Ausdehnung jener Linie in successive

verschiedenen Punkten. Sie sind daher die Einhüllenden einer Curve, die aus lauter Brennpunkten unendlich benachbarter Strahlen gebildet ist. Dieselbe heisst daher Brenncurve oder Caustik. Die aufeinander folgenden Krümmungslinien einer Wellenfläche geben ebenso viele Brennlinien, welche insgesammt eine Fläche, die Brennfläche des Strahlensystems, bilden. Da es zwei Schaaren von Krümmungslinien giebt, so giebt es im Allgemeinen zu jeder Orthogonalfläche auch zwei Brennflächen, und jeder Strahl ist gemeinsame Tangente beider Flächen.

Besonders einfach ist der Fall, wo die Wellenfläche eine Rotationsfläche ist. Die eine Schaar von Krümmungslinien sind dann die Meridiancurven der Fläche und die ihnen entsprechende Caustik ist eine Fläche, welche durch Rotation der Evolute der Meridiancurve um die Symmetrieaxe entsteht. Die andere Schaar von Krümmungslinien entspricht den Breitenkreisen der Erdkugel, d. h. es sind parallele Kreise, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieaxe liegen. Die zu ihnen gehörigen Normalen bilden je einen geraden Kreiskegel und schneiden die Axe je in einem Punkt. Die zweite Brennfläche ist daher reducirt auf ein Stück der Axe. Den Charakter einer solchen Brennfläche veranschaulicht Fig. 304 im Meridianschnitt. Hier ist RQS die Erzeugende der einen Brenn-



(Ph. 304.)

fläche; PQ die Gerade, in welche die andere Brennfläche hier degenerirt ist. (Die Figur stellt den Fall der Brechung eines parallelstrahligen Büschels an einer Kugel von höherem Index dar.)

Mit der Aufgabe, die Gestalt der Caustiken in besonderen Fällen zu bestimmen, wollen wir uns hier abermals nicht weiter beschäftigen, da sich auch an diese mehr ein mathematisches, als ein physikalisches oder praktisches Interesse knüpft[1]).

Bemerkt werden muss, dass Untersuchungen über die Intensität in den Punkten einer Caustik und namentlich über die Intensitätsvertheilung in Schnittebenen mit solchen, auf dem Boden der geometrischen Optik allein angestellt[2]),

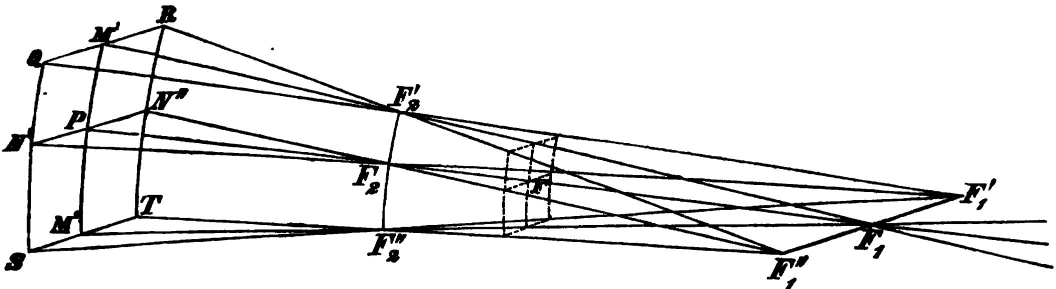
---

[1]) Man findet die Literatur über Caustiken ziemlich vollständig sammt der über »Strahlenbüschel« in VERDET, die Wellentheorie des Lichtes, übersetzt von EXNER. Braunschweig 1881, Bd. 1, pag. 7 u. 8. Wir fügen zu dieser nur die Angabe einiger besonders werthvoller Abhandlungen, nämlich CAYLEY, Phil. Trans. 1857 u. 1867, und PASCH, CRELLE's Journ. 1872. Ausserdem kommen für diese Probleme die Lehrbücher der geometrischen Optik in Betracht, namentlich die von CODDINGTON, LOYD, MEISEL und HEATH. S. auch SCHELLBACH, Zeitschr. f. Physik u. Chem. Unt. 1887. Vortreffliche Zeichnungen in dessen in ENGEL's »Darstellende Optik«, Halle 1878, in welchen aber stets nur auf den Meridianschnitt Rücksicht genommen ist.

[2]) S. z. B. S. FINSTERWALDER, Ueber Brennflächen und die räumliche Vertheilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Inaug.-Diss. Tübingen 1886.

einen sehr beschränkten Werth haben und meist ganz illusorisch sind. Denn die Brennpunkte, welche die Caustik formiren, sind solche von unendlich dünnen Büscheln, würden also für sich allein (wegen des weitgehenden Diffractionseffects so schmaler Wellenzüge) fast gar nicht mehr den Regeln der geometrischen Optik folgen. In benachbarten Brennpunkten kommt aber das Licht mit stetig verschiedener Phase an und die Helligkeit sowohl in den Punkten der Caustik selbst, als in denen einer Schnittebene von den Phasen der sie treffenden Elementarwellen in hohem Grade abhängt. Wenn daher auch die nach den Reflexions- und Brechungsgesetzen berechnete Caustik im Grossen und Ganzen die Stellen hervorstechender Lichtconcentration richtig angiebt, in so fern sie eben aus wirklichen Brennpunkten gebildet ist, so kann doch näheres über die Lichtvertheilung eines optischen Büschels nur mit Hülfe der Undulationstheorie, nämlich des Intereferenzprincips ermittelt werden. Eine auf dieser Grundlage stehende Untersuchung, wie sie z. B. AIRY[1]) mit specieller Rücksicht auf den Regenbogen geführt hat, giebt auch Rechenschaft von den in der Nähe jeder Caustik beobachtbaren, lichtschwächeren Wiederholungen derselben (den überzähligen Bögen), für welche die geometrische Optik gar keine Erklärung zu liefern vermag.

Allgemeine Constitution eines unendlich dünnen, optischen Strahlenbüschels. Es ist schon oben bemerkt, dass ein beliebiger Strahl des Büschels im Allgemeinen nur von den in zwei bestimmten Ebenen ihm un-



(Ph. 305.)

endlich benachbarten Strahlen geschnitten wird, nämlich von den in der Ebene der grössten und der kleinsten Krümmung seiner Orthogonalflächen gelegenen, also von denjenigen, deren Fusspunkte die Elemente jener Krümmungs-Kreise selbst bilden. Suchen wir eine nähere Vorstellung von der Lagenbeziehung der Strahlen, welche ein unendlich dünnes Büschel bilden, zu gewinnen. Denken wir uns zu diesem Zwecke durch einen Punkt P der Wellenfläche die Bögen grösster und kleinster Krümmung gelegt, $M'M''$ und $N'N''$, welche auf einander in P senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Bögen, also die Brennpunkte des durch P gehenden Strahles seien F_1 und F_2; wir wollen sie kurz ersten und zweiten Brennpunkt nennen. Den durch P gehenden Strahl bezeichnen wir als »Hauptstrahl« des ganzen Büschels; derselbe ist zugleich Hauptstrahl der ebenen Partial-Büschel $M'F_1M''$ und $N'F_2N''$. Die Bögen der grössten und kleinsten Krümmung in einem, P benachbarten Punkt, z. B. M', stehen ebenfalls auf einander senkrecht. Es wird aber auch wegen der Kleinheit des betrachteten Elements der Wellenfläche, also des Bogens $M'P$, bis auf unendlich kleine Abweichungen der Bogen $N'N''$, QR parallel sein dem entsprechenden Bogen der zweiten Hauptkrümmung in M' und der durch M' gehende Bogen der ersten Hauptkrümmung

[1]) Trans. of the Soc. of Cambr. 6, pag. 379. 1838.

coincidiren mit $M'M''$. Der Brennpunkt des ebenen Büschels $QM'R$ wird nun jedenfalls auf dem Hauptstrahl desselben liegen, d. i. auf dem durch M' gehenden Strahl. Dieser geht aber als Strahl des Büschels $M'M'$ durch F_1. Folglich verläuft das jetzt betrachtete ebene Büschel gänzlich in der Ebene QRF_1, und ebenso die durch andere zu $M'M''$ senkrechte Bögen gehenden Strahlen in den durch F_1 und diese Bögen gelegten Ebenen. Wo auch ihre Brennpunkte F_2', F_2'' etc. liegen mögen, so müssen alle diese Strahlenebenen, weil auf $F_1 M'M''$ senkrecht und durch F_1 gehend, sich in einer durch F_1 gehenden auf der Ebene $M'M''$ und daher auf dem Hauptstrahl PF_1 senkrechten Linie $F_1'F_2''$ schneiden. Wir nennen dieselbe die erste Brennlinie.

Genau dieselbe Betrachtung ist auf die zu $M'M''$ parallelen Bögen der ersten Hauptkrümmung QS, RT, etc. anwendbar. Die Hauptstrahlen dieser ebenen Partialbüschel gehen, als Strahlen des Partialbüschels $N'PN''$, sämmtlich durch den Brennpunkt dieses F_2. Alle diese ebenen Partialbüschel stehen ausserdem auf der Ebene der zweiten Hauptkrümmung $F_2 N'N''$ senkrecht; sie schneiden sich also in einer auf $F_2 N'N''$ und damit auf dem Hauptstrahl PF_2 senkrechten Linie $F_2'F_2''$, welche wir zweite Brennlinie nennen wollen. Halten wir diese beiden Systeme ebener Partialbüschel zusammen, so ist klar, dass letztere Brennlinie nichts anderes repräsentirt, als die Brennpunkte der zuerst betrachteten ebenen Partialbüschel, und ebenso $T_1'T_1''$ die der jetzt betrachteten.

Wir haben also das Resultat: Die Gesammtheit der Strahlen eines unendlich dünnen, optischen Büschels schneidet sich in zwei geraden Linien, den Brennlinien, welche in den beiden Brennpunkten des Hauptstrahles bezüglich auf diesem senkrecht stehen und in zu einander senkrechten Ebenen (den Hauptkrümmungsebenen der betreffenden Wellenfläche) liegen. In der durch den ersten Brennpunkt gehenden Brennlinie liegen die Brennpunkte der zur ersten Hauptkrümmungsebene senkrechten ebenen Partialbüschel, d. h. derjenigen zweiter Art und umgekehrt (STURM'scher Satz)[1]).

Man sieht, dass aus den beiden Brennlinien und dem Hauptstrahl das ganze Büschel construirbar ist. Man hat nur jeden Punkt der einen Brennlinie mit jedem der anderen zu verbinden und hierbei stets unendlich nahe dem Hauptstrahl zu bleiben.

Die Constitution des Büschels ist aber auch bestimmt aus vier von seinen Strahlen, von denen nicht mehr als zwei durch je einen Punkt einer Brennlinie gehen.

Ebenen senkrecht zum Hauptstrahl schneiden das Büschel in Figuren von verschiedener Gestalt, je nach dem Ort des Schnitts und je nach der Begrenzung des Büschels auf der brechenden Fläche bezw. der Wellenfläche. An einer leicht anzugebenden Stelle F zwischen den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 ist der Schnitt des Büschels etc. ähnlich seiner anfänglichen Begrenzung (Stelle der geringsten Confusion genannt).

Für die Herleitung des Vorstehenden war wesentlich die Annahme, dass die gleichnamigen Hauptkrümmungsebenen in benachbarten Punkten eines unendlich kleinen Flächenelements einander merklich parallel seien. Dies findet aber nicht streng, sondern im Allgemeinen nur bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung statt. Daher gelten die abgeleiteten Beziehungen auch nur mit derselben Annäherung.

---

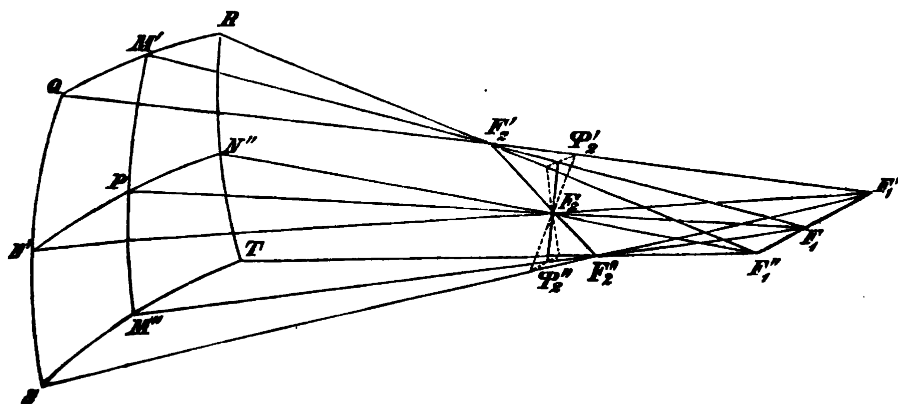
[1]) Journ. de Lionville 3, pag. 357. 1838; übers. in POGG. Ann. 65, pag. 116, 374. 1845. Compt. rend. 20, pag. 554, 761, 1238. 1845.

Genau genommen[1]) kann man jeder Wellenfläche eine andere Fläche, als den Scheitel des vorhin angenommenen elliptischen Paraboloids, näher anschmiegen und sind dann deren Hauptkrümmungen der Betrachtung zu Grunde zu legen. Die ebenen Partialbüschel, z. B. der ersten Hauptkrümmungen, schneiden dann die zum Hauptstrahl gehörige Ebene der zweiten successive in verschiedenen Linien, welche in jener Ebene mit dem Hauptstrahl alle beliebigen Winkel einschliessen können, und desgleichen im Allgemeinen die Partialbüschel der zweiten Hauptkrümmung die Ebene der ersten Krümmung. Mit Berücksichtigung der Grössen der zweiten Ordnung gehen durch die beiden Brennpunkte des Hauptstrahls also keine Brennlinien, sondern Brennflächenstücke. Im Besonderen kann dann auch der Fall eintreten, dass diese Brennflächenstücke in Linien degeneriren, welche aber oft gegen den Hauptstrahl merklich anders als senkrecht geneigt sind, wofür gerade die Brechung eines homocentrischen Büschels an einer Rotationsfläche ein Beispiel giebt. Und wenn in Folge der vorliegenden geometrischen Verhältnisse ein Büschel von endlicher Dicke im wesentlichen dieselbe Constitution hat, wie ein solches unendlich dünnes, — was sehr wohl der Fall sein kann — so werden die Abweichungen von dem vorhin statuirten auch der Beobachtung zugänglich werden können. Aber diese Ueberlegung kann den STURM'schen Satz als solchen natürlich nicht aufheben, da dieser Giltigkeit ja nur innerhalb der angezeigten Genauigkeitsgrenzen beansprucht.

Im Allgemeinen ist ja die Strahlenvereinigung in den Brennpunkten bezw. Brennlinie selbst nur eine solche von erster Ordnung. Es können daher der Natur der Sache nach Sätze, welche sich auf die allgemeinen Eigenschaften optischer Strahlenbündel beziehen, keine Beziehung auf die Grössen der zweiten Ordnung enthalten und umgekehrt Sätze, welche auf diese Grössen Rücksicht nehmen, nicht ebenso allgemein sein, wie der STURM'sche Satz.

Dies hat neuerdings MATTHIESSEN unter Berufung auf eine bezügliche Abhandlung von WEINGARTEN[2]) auch zugestanden[3]).

Dass auch in den Fällen, wo strenggenommen, bis auf Abweichungen von höherer als der 2. Ordnung spitzwinklig gegen den Hauptstrahl geneigte Brenn-



(Ph. 806.)

[1]) MATTHIESSEN, Münch. Sitzber. Bd. 13, pag. 44. 1883. Acta mathem. IV, 2, pag. 185. 1884, und SCHLÖMILCH's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

[2]) CRELLE's Journ. 98, pag. 281. 1885.

[3]) Berlin-Eversbusch, Zeitschr. f. vergl. Augenheilk. 6, pag. 106. 1889.

linien vorhanden sind, eine durch einen der Brennpunkte senkrecht zum Hauptstrahl gelegte Ebene mit dem Büschel nirgend einen Querschnitt von weniger als der zweiten Ordnung (im Vergleich mit der Breite des betrachteten Wellenflächenstücks) hat, also der STURM'sche Satz richtig bleibt, zeigt eine einfache Ueberlegung (Fig. 306). Ein z. B. durch F_2 gelegter senkrechter Querschnitt hat bei den in der Figur angenommenen besonders ungünstigen Verhältnissen seinen grössten Querschnitt im Durchschnitt mit den äussersten ebenen Partialbüscheln QRF_2' und STF_2'' (bei rundlicher Begrenzung des Elements der Wellenfläche, an einer zwischen F_2 und Φ_2' gelegenen Stelle). Dieser Querschnitt q ist aber, wenn wir $F_2\Phi_2' = dr$, d. i. gleich der Differenz der zweiten Hauptkrümmungsradien in M' und P und die mittlere Länge eines Hauptkrümmungsbogens zweiter Art wie $N'N'' = ds$ setzen $q = ds \cdot dr/r$ — also im Allgemeinen unendlich klein gegen ds[1]).

Das hier betrachtete unendlich dünne Strahlenbündel ist eine specielle Art des allgemeinen geradlinigen Strahlenbüschels, welches nicht mehr die Eigenschaft hat, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen. Ein solches wird in der Natur z. B. durch die irregulär in doppeltbrechenden Medien gebrochenen Strahlen repräsentirt. Die Eigenschaften dieses allgemeinen Büschels, deren Studium natürlich auch auf die des speciellen ein Licht wirft, insofern es zeigt, welche von den Eigenschaften dieses letzteren in seiner blossen Geradlinigkeit, welche auf den besonderen Annahmen beruhen, hat besonders HAMILTON[2]) studirt; nach ihm KUMMER[3]), MÖBIUS[4]), MEIBAUER[5]) u. A. (s. die Literaturangaben in VERDET, l. c.).

Nach den voranstehenden Festsetzungen kann als die Aufgabe der Dioptrik unendlich dünner Büschel, allgemein gefasst, die ausgesprochen werden: wenn die Brechungsexponenten zweier Medien n und n', die Gestalt der sie trennenden Fläche $f(x, y, z) = 0$, die Richtung eines einfallenden Strahls und die Orte der Brennpunkte und Lagen der Brennlinien auf ihm gegeben ist, letztere drei Bestimmungsstücke auch für den gebrochenen bezw. reflectirten Strahl zu finden. C. NEUMANN[6]) hat eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe mitgetheilt unter der Annahme der Giltigkeit des STURM'schen Satzes; MATTHIESSEN[7]) ohne die letztere. Hier sei auf diese Darstellungen nur hingewiesen, die Aufgabe selbst werden wir später in einer Anzahl besonderer Fälle behandeln.

Literatur.

Als die beste neuere Gesammtdarstellung der geometrischen Optik (der speciellen Katoptrik und Dioptrik und allgemeinen Theorie der optischen Instrumente) muss das Buch von R. S. HEATH bezeichnet werden: A Treatise on Geometrical Optics. Cambridge 1887. Elementary Treatise, ibid. 1888. Doch ist der Standpunkt des Verfassers mehr der des Mathematikers; so dass gegenüber der vorliegenden Darstellung vieles ausführlicher behandelt ist, vieles aber wiederum weit kürzer oder auch gar nicht. Eine Uebersetzung dieses Werks ins Deutsche ist vorbereitet.

---

[1]) S. auch CZAPSKI, Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in dünnen optischen Büscheln. WIED. Ann. 42, pag. 332. 1891.

[2]) Trans. Irishr. Acad. 15, pag. 69. 1828; 16, pag. 1, 94. 1830/31; 17, pag. 87. 1837. Auch POGG. Ann. 28, pag. 633. 1833; 29, pag. 324. 1834.

[3]) CRELLE's Journ. 57, pag. 189. 1859; Berl. Monatsber. 1860, pag. 469; Abh. Berl. Akad. 1866.

[4]) Sitzb. Sächs. Akad. 14, pag. 1. 1862.

[5]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8, pag. 369. 1863. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Berlin 1864.

[6]) Sitzber. Sächs. Akad. 1880, pag. 42.

[7]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888.

Unter den zahlreichen sonstigen Gesammtdarstellungen der geometrischen Optik (Katoptrik und Dioptrik) sind aus früherer Zeit als die bedeutendsten zu nennen:

R. SMITH, A compleat System of Opticks. 2 Bde. Cambridge 1738. Ein Theil dieses Werks ist übersetzt (»aus dem Englischen ins Deutsche und aus dem synthetischen Vortrage in den analytischen«) von

A. G. KÄSTNER. Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755.

L. EULER, Dioptrice. 3 Bde. Petrop. 1769—71. Ein Auszug und Umarbeitung dieser ist

G. S. KLÜGEL, Analytische Dioptrik. Leipz. 1778.

J. F. W. HERSCHEL, Light. Encycl. Metrop. 1827, übers. v. J. C. E. SCHMIDT, Stuttgart 1831.

H. CODDINGTON, Treatise on the refraction of light. London 1829.

H. LLOYD, Treatise on Light and Vision. London 1831.

R. POTTER, An Elementary Treatise on Optics London, pt. I. 1847 (3. Aufl. 1865), pt. II. 1851.

S. PARKINSON, A. Treatise on Optics. London 1859, 4. Aufl., 1884.

Alle diese Werke ausser dem von HEATH behandeln nur specielle Probleme der Dioptrik. Die Literatur über die durch GAUSS angebahnte neue Richtung der Optik sowie die hervorragenderen Werke und Abhandlungen über besondere Gebiete werden betreffenden Orts angegeben werden.

Die ältere Literatur bis ca. 1830 ist ziemlich vollständig aufgeführt am Schlusse von LITTROW's Dioptrik. Wien 1830 und in der »Litteratur der Optik« (o. O. u. J.) v. H. W. DOVE.

S. CZAPSKI.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.
(Nach ABBE.)

Stellung des Problems.

Mit dem im vorangehenden Kapitel Gegebenen ist dasjenige in der Lehre von der Spiegelung und Brechung des Lichts, was ein unmittelbares physikalisches Interesse besitzt, ziemlich erschöpft. Der weitere Inhalt unserer Darstellung kann sich nunmehr nur noch auf die Anwendungen dieser Lehre beziehen. Diese begreifen einerseits die Erklärung gewisser — meist meteorischer — Naturerscheinungen in sich, andererseits liefern sie die Principien für die Construktion bezw. das Verständniss der sogen. optischen Instrumente, die ihrerseits namentlich als Hilfsmittel der Forschung in- und ausserhalb des physikalischen Gebietes eine grosse Bedeutung besitzen.

Wir wenden uns zuerst den letzteren zu.

Es handelt sich bei diesen in letzter Linie stets darum, dass durch Vermittelung von Reflexionen oder Brechungen (oder Combinationen beider) an geeignet geformten und zusammengestellten optischen Medien Bilder äusserer Gegenstände (oder Bilder solcher Bilder) hervorgebracht werden, und zwar besteht das Zustandekommen dieser Bilder stets darin, dass ein Theil der von je einem Punkte A des Gegenstandes ausgehenden Strahlen durch die Reflexionen und Brechungen, welche er erfährt, so modificirt wird, dass er wieder nach einem Punkte, dem Bildpunkte, A', convergirt.

Man hat nun die Gesetze, welche zwischen den Bildern und ihren Objekten bestehen, bis in die neueste Zeit fast ausnahmslos in der Weise studirt, dass man die besonderen Fälle, in welchen eine Wiedervereinigung von homocentrisch divergirenden Strahlenbüscheln stattfindet, näher untersuchte, und nur auf Grund solcher specieller Untersuchungen gelangte man schliesslich durch Verallge-

meinerung der gewonnenen Resultate zu gewissen allgemeineren Beziehungen. Auch GAUSS, dem der grösste und wichtigste Fortschritt auf dem Wege solcher Verallgemeinerung der speciellen Theoreme zu verdanken ist, ging in seinen berühmten »Dioptrischen Untersuchungen«[1]) von den besonderen Voraussetzungen centrirter Kugelflächen, eines fadenförmigen axialen Strahlen- und Abbildungsraumes, sowie von der Giltigkeit des Brechungsgesetzes selbst aus und liess nur die bis dahin stets gemachte Einschränkung auf den Fall unendlich dünner in Contakt befindlicher Linsen, d. h. mit den Scheiteln coincidirender sphärischer Flächen vollständig fallen. Ihn leitete offenbar — und ausgesprochener Maassen — das Bestreben, die Gesetze der Abbildung durch beliebig zusammengesetzte Linsensysteme zurückzuführen auf gleich einfache Formen, wie sich bei einer einzelnen brechenden Fläche oder einer einzigen Linse verschwindender Dicke ergeben. Wiewohl er nun zeigte, dass in diesen Gesetzen die ursprünglichen Bestimmungsstücke des Systems (Radien, Dicken, Brechungsindices) eine sehr beiläufige Rolle spielten, dass die Abbildung vielmehr von gewissen Constanten viel allgemeinerer Art abhänge, so entging doch auch ihm anscheinend die Erkenntniss, dass alle Annahmen über die besondere Art der Verwirklichung einer optischen Abbildung den Kern der Frage, d. h. deren allgemeine Gesetze überhaupt nicht tangirten. Es war aber schon damals bekannt und ist später noch öfters gezeigt worden, dass es noch andere Fälle dioptrischer Abbildung von sehr verschiedener Art giebt, wie: durch die Brechung (oder Reflexion) schiefer Büschel (s. später) oder durch die Brechung axialer Büschel an nicht centrirten Systemen von Kugelflächen, auch durch Brechung von Büscheln beider Art an anderen als sphärischen Flächen, endlich auch durch eine Art von Strahlenvereinigung, die gar nicht mehr rein dioptrischer Natur ist[2]) — in allen diesen Fällen konnte und musste immer erst besonders gezeigt werden, dass auch sie schliesslich zu ganz gleichartigen Grössen- und Lagenbeziehungen zwischen Objekt und Bild führen, wie sie von GAUSS für den von ihm betrachteten Fall gefunden waren.

Wenn nichts anderes, so müsste diese Uebereinstimmung in den allgemeinen Resultaten von Untersuchungen, die theilweise auf so verschiedener Basis angestellt waren, den Gedanken nahelegen, dass die gedachten Beziehungen überhaupt gar nicht von den besonderen Voraussetzungen abhängen, auf Grund deren sie jedesmal von Neuem abgeleitet worden sind, sondern dass sie eine Folge sind der bereits erwähnten viel allgemeineren und rein geometrischen Voraussetzung, von der naturgemäss Alle in erster Linie ausgehen: von der Voraussetzung nämlich, dass eine Abbildung durch Strahlen überhaupt stattfinde. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass sich dies in der That so verhält.

MÖBIUS hat, wie es scheint, zuerst[3]) darauf hingewiesen, dass die »axiale« Abbildung durch eine einzelne brechende sphärische Fläche die Verhältnisse der collinearen Verwandtschaft zum Ausdruck bringt, und dass in Folge dessen alle Theoreme über die Wirkung auch beliebig zusammengesetzter Systeme brechender und spiegelnder Flächen nichts als eine einfache und direkte Abfolge dieser durch eine Brechung involvirten Beziehung von Objekt und Bild seien. Ihm sind in der Darstellung Mehrere gefolgt[4]), seine Theorie unter Zuhilfenahme

[1]) Göttingen 1841. Abh. Gött. Ges. d. Wiss. 1. 1838—43. Werke Bd. 5, pag. 243. 1867.

[2]) S. z B. S. EXNER, PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. 38, pag. 274. 1886.

[3]) Sitzber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1855, pag. 8.

[4]) LIPPICH, Mitth. d. natw. Vers. Steiermark 2, pag. 1. 1871. — BECK, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18, pag. 588. 1873. — H. HANKEL, Elemente der projectiv. Geometrie. Leipzig 1875, pag. 146.

der Betrachtungen der neueren Geometrie weiter ausbauend und begründend, ohne aber die Voraussetzung aufzugeben, welche auch er noch festgehalten hatte: dass zur Verwirklichung der collinearen Beziehung eine gewisse Art der dioptrischen Wirkung nöthig sei. Hiernach scheinen immer noch die gefundenen Gesetze optischer Bilder abhängig von den physikalischen Vorgängen, durch deren Vermittelung sie entstehen.

Erst ABBE hat ohne Kenntniss der MOEBIUS'schen Arbeit (seit Anfang der 70 er Jahre in seinen Universitätsvorlesungen) den letzten noch übrigbleibenden Schritt gethan: bei der Ableitung der allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung alle Voraussetzungen über die Verwirklichung der letzteren zunächst ganz bei Seite zu lassen. Das einigermaassen überraschende Resultat dieser Untersuchung ist dies: dass alle die Sätze, welche die Lagen- und Grössenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten Begriffe (der Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Cardinalelemente) ihrem Wesen nach gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; dass sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch nothwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehungen zu einander treten, dass eine optische Abbildung des einen in den anderen stattfindet.

Unter optischer Abbildung ist dabei wie oben eine punktweise Abbildung vermittels gerader Strahlen verstanden, also eine Abbildung, bei welcher jedem Punkte des einen Raums ein, und nur ein Punkt des anderen entspricht und der Strahlengruppe, welche durch den ersteren Punkt geht, im anderen Raume Strahlen entsprechen, die sämmtlich durch den Bildpunkt gehen.

Diese beiden Merkmale sind ausreichend, um den Begriff einer bestimmten Art von Abbildung festzulegen, und es sind zugleich die einzigen wesentlichen Merkmale, durch welche die Abbildungsweise charakterisirt wird, welche durch Lichtstrahlen unter Vermittelung spiegelnder oder brechender Flächen irgendwann zu Stande kommt. Von den speciellen geometrischen und physikalischen Umständen der Abbildung hängt nichts weiter ab als einerseits die numerischen Werthe der Constanten, welche in den allgemeinen Abbildungsgleichungen auftreten, und dort, mangels einer besonderen Voraussetzung, natürlich unbestimmt bleiben müssen; zweitens die Bestimmung darüber, in welchem begrenzten Raumgebiet, bezw. unter welchen sonstigen Einschränkungen der allgemeine Fall der Abbildung in dem betrachteten Sonderfall verwirklicht ist und drittens endlich die geometrische Lokalisirung der in einander abgebildeten Räume und ihre Lagebeziehung gegen die Grenzen der angewandten physischen Mittel.

Es scheint aber keineswegs überflüssig, diese Auffassung, d. h. diese Scheidung dessen, was schon aus dem allgemeinen Begriffe der optischen Abbildung folgt und dessen was erst Folge der speciellen dioptrischen Voraussetzungen ist, in der Theorie der optischen Instrumente möglichst streng durchzuführen. Denn für jede verständige Anwendung einer Lehre ist die richtige Bestimmung der zureichenden und nothwendigen Voraussetzungen derselben ein wesentliches Erforderniss. Bei der üblichen Darstellungsweise aber wird diese Bestimmung zum mindesten ausser Acht gelassen, wenn nicht geradezu falsch getroffen. Hierdurch wird die theoretische Erörterung vieler concreter Fragen in eine falsche Bahn gewiesen, und die zutreffende Anwendung der Theorie oft genug verhindert oder doch erschwert. Dies gilt z. B. namentlich in Bezug auf die oft discutirten Fragen, welche die Grenzen der Leistungsfähigkeit der optischen Werkzeuge (auch in dioptrischer Beziehung) betreffen.

Unter Zuhilfenahme der Lehren und Betrachtungsweisen der neueren Geometrie ist der hier zu erbringende Nachweis sehr schnell zu geben. Da aber die uns mit in erster Reihe interessirenden Maassbeziehungen auf dem synthetischen Wege stets etwas umständlicher abzuleiten sind und im Interesse der Allgemeinverständlichkeit dieser sehr elementaren Beziehungen geben wir dem analytischen Wege in der Entwicklung derselben den Vorzug.

Die allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung.

Nehmen wir also — aller besonderen Voraussetzungen uns zunächst entschlagend — an, dass eine »optische Abbildung« stattfinde, d. h. wie oben definirt, eine Abbildung eines Raumgebietes in ein anderes mittels geradliniger Strahlen in der Art, dass den durch einen Punkt P des Raumes R (des Objektraumes) gehenden Strahlen, im Raume R' (dem Bildraum) Strahlen entsprechen, die sämmtlich wieder durch einen Punkt P', das Bild des Punktes P, gehen. Aus dieser, der oberflächlichsten Erfahrung über die faktische Entstehung optischer Bilder zu entnehmenden Charakteristik der Abbildungsweise folgen dann alle weiteren wesentlichen Merkmale derselben.

Zunächst 1) ist aus ihr zu schliessen, dass die gedachte Abbildung eindeutig ist — da die Strahlen als geradlinige sich paarweise nur in je einem Punkte schneiden, also auch zu einem Objektpunkte geometrisch wie physisch nur einen conjugirten oder Bildpunkt zur Folge haben können.

2) Den Punkten auf einer geraden Linie im einen Raume entsprechen als Bilder Punkte im anderen Raume, die wieder auf einer Geraden liegen. Denn dem Strahle S, welcher durch die auf einer geraden Linie gelegenen Punkte $P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht, entspricht laut Annahme ein Strahl S' im Bildraum, der nach unserer Grundannahme durch jeden der drei jenen $P_1 P_2 P_3$ conjugirten Punkte $P_1' P_2' P_3'$ hindurchgeht, und da der Strahl geradlinig ist, so liegen $P_1' P_2' P_3'$ auf einer geraden Linie. (Ueber die Punktfolge auf conjugirten Geraden ist hierdurch natürlich noch nichts bestimmt; dieselbe ergiebt sich erst später).

Dieses gegenseitige eindeutige Entsprechen von Punkten und Geraden bezeichnet die Geometrie bekanntlich als »Collineation« oder »collineare Verwandtschaft«. Es ist also im Vorangehenden bereits bewiesen, dass jede optische Abbildung die beiden Abbildungsräume in collineare Verwandtschaft setzt.

Da die Beziehung zwischen den beiden Räumen dem Gesagten zufolge eine vollständig gleichwerthig-gegenseitige ist, so dient die Bezeichnung des einen als Objekt-, des anderen als Bildraum nur zur Erleichterung des Ausdrucks, ohne dass dem einen im Verhältniss zum anderen unter dem hier vertretenen Gesichtspunkte irgend welche ausgezeichneten Eigenschaften zukommen.

Zur Entwickelung der weiteren Eigenschaften der gedachten Abbildung bedienen wir uns am bequemsten einer dritten, ebenfalls unmittelbar aus 2) sich ergebenden Folgerung, nämlich

3) Einer Ebene E im Objekt Raum entspricht auch wieder eine Ebene E' im Bildraum. Denn die Ebene ist definirt durch zwei sich schneidende Gerade; zwei solchen a, b im einen Raum entsprechen aber nach 2) zwei ebensolche a', b' im anderen Raum. Jeder weiteren in der ersteren Ebene enthaltenen Geraden c, die also die zuerst angenommenen beiden Geraden schneidet entspricht nun im Bildraum eine Gerade c', welche nach der ursprünglichen Annahme den einen wie den anderen der beiden dort gelegenen Strahlen schneiden muss, welche also in dieselbe Ebene fällt.

Dieses Merkmal der Abbildung von Ebenen in Ebene wollen wir also den analytischen Entwickelungen als fundamentales zu Grunde legen. Aus ihm folgt sofort rückwärts die Abbildung von Geraden in Gerade und von Punkten in Punkte jeweilig als der Schnitte je zweier Ebenen bezw. Geraden.

Nehmen wir, um den Zusammenhang der beiden Rähme R und R' näher zu untersuchen, in ihnen je ein, zunächst beliebig orientirtes, rechtwinkliges Parallel-Coordinatensystem an. Die Coordinaten eines Punktes P im einen, dem Objektraum seien x, y, z; die seines conjugirten Punktes im Bildraum, P', seines Bildes x', y', z'; dann ist die Beziehung zwischen den Punkten P und P' mathematisch formulirt, indem wir

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \chi(x, y, z) \\ z' &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

setzen.

Die Beziehung der beiden Räume wäre (analytisch) bekannt, wenn die Funktionen φ, χ, ψ vermittelt wären. Von diesen Funktionen wissen wir nur, dass sie nach 1) stetig und eindeutig sind.

Einer Ebene E' im Bildraum, die durch die Gleichung

$$A'x' + B'y + C'z' + D' = 0 \tag{2}$$

bestimmt ist, entspricht ferner nach 3) eine Ebene E im Objektraum, deren Gleichung wir analog

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

schreiben können.

Vermöge (1) entspricht aber der durch (2) bestimmten Ebene des Bildraums im Objectraum das geometrische Gebilde

$$\Psi(x, y, z) \equiv A'\varphi(x, y, x) + B'\chi(x, y, z) + C'\psi(x, y, z) + D' = 0. \tag{4}$$

Da $\Psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer mit E identischen Ebene sein soll, so muss $\Psi(x, y, z)$ für alle durch (3) definirten Punkte und nur für diese selbst verschwinden. Es muss sich daher Ψ identisch umformen lassen in die Gestalt

$$\Psi(x, y, z) \equiv (Ax + By + Cz + D)\Phi(x, y, z), \tag{5}$$

worin Φ den Bedingungen unterworfen ist

a) Φ darf nie $= \infty$ werden für Werthsysteme (x, y, z), welche die Gleichung (3) erfüllen — damit nicht für Punkte der Ebene (3) $\Psi \gtrless 0$ werde, d. h. der Fall eintrete, dass zu einem Punkte der Ebene (2) kein entsprechender Punkt durch die Gleichung $\Psi = 0$ festgelegt werde — was gegen die Grundannahme eines durchgängigen Entsprechens der beiden Ebenen wäre.

b) Φ darf nie $= 0$ werden, wenn Gleichung (3) nicht erfüllt ist, weil dies involviren würde, dass es Punkte in der Ebene $\Psi = 0$ gebe, die mit Punkten ausserhalb der Ebene E coincidirten — was gegen die Annahme der eindeutigen Abbildung von Ebenen in Ebenen wäre; und drittens

c) nur wenn $Ax + By + Cz = \infty$ ist, darf $\Phi = 0$ werden; denn den unendlich fernen Punkten der Objektebene brauchen nicht nothwendig unendlich ferne Punkte der Bildebene zu entsprechen; zu einer Annahme hierüber ist bis jetzt noch keine Handhabe gegeben, und es hängt von dem besonderen Werthe der sich dann darbietenden Terms $0 \cdot \infty$ ab, ob es der Fall ist oder nicht.

Unter diesen Einschränkungen für die Werthe der Funktion Φ ergiebt im übrigen die Identität der Gleichungen (4) und (5)

$$A'\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right) + B'\left(\frac{\chi}{\Phi}\right) + C'\left(\frac{\psi}{\Phi}\right) + D'\left(\frac{1}{\Phi}\right) \equiv Ax + By + Cz + D. \tag{6}$$

Die linke Seite von (6) kann aber nur dann identisch auf einen linearen Ausdruck führen, wenn die Faktoren von $A'B'C'$ und D' selbst lineare Formen sind, also wenn

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi}{\Phi} &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &\quad \text{oder}\quad \varphi &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d} = x' \\
\frac{\chi}{\Phi} &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 & \chi &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d} = y' \\
\frac{\psi}{\Phi} &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 & \psi &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d} = z' \\
\frac{1}{\Phi} &= ax + by + cz + d &\quad \text{und}\quad \Phi &= \frac{1}{ax + by + cz + d}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Hiermit sind aber die gesuchten Funktionen φ, χ und ψ, welche den gestellten Bedingungen genügen, gefunden. (Man überzeugt sich leicht, dass dies bei Φ auch der Fall ist). Es sind Quotienten linearer Ausdrücke mit gleichem Nenner. Die Abbildung ist also aus den gemachten Voraussetzungen in der That analytisch vollständig bestimmt und zwar durch 16 oder — wenn man überall mit d dividirt — durch 15 Coëfficienten. Wir wollen uns diese Division durch d vorgenommen denken, für die neuen, d mal kleineren, Coëfficienten aber die vorige Bezeichnung beibehalten.

Wir haben nun die geometrischen Eigenschaften der so bestimmten Abbildung zu entwickeln und werden dieselben dann gleich benützen, um durch entsprechende Wahl der Coordinatensysteme in den beiden Räumen die Zahl der Coëfficienten der Abbildung zu reduciren und so die Ausdrücke für φ, χ und ψ erheblich zu vereinfachen.

Reduktion der Abbildungsgleichungen auf die einfachsten Grundformen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst die

a) Beziehungen zwischen den Oertern conjugirter Ebenen. Gemäss den Gleichungen (7) entspricht die Ebene E' des Bildraumes, deren Gleichung (2) $A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$ ist, im Objektraum dem Gebilde

$$\begin{aligned}
o = \frac{1}{ax+by+cz+1}&(A'a_1+B'a_2+C'a_3+D'a)x+(A'b_1+B'b_2+C'b_3+D'b)y \\
&+(A'c_1+B'c_2+C'c_3+D'c)z+A'd_1+B'd_2+C'd_3+D',
\end{aligned} \tag{8}$$

dessen Gleichung wie verlangt von der Form

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1} \tag{9}$$

ist. Es ist also auch

$$(2)\; A'x' + B'y' + C'z' + D' \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1}\; (9).$$

Einem Nullwerden von (2) entspricht nun im Allgemeinen ein Nullwerden des Zählers von (9), d. h. der Ebene E', deren Gleichung (2) ist, entspricht im Allgemeinen im Objektraum die Ebene E, deren Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$, ist, worin die Coëfficienten — vermöge der Identität von (8) und (9) — mit denen der Abbildung und denen von E' verbunden sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
A &= A'a_1 - B'a_2 + C'a_3 + D'a \\
B &= A'b_1 + B'b_2 + C'b_3 + D'b \\
C &= A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 + D'c \\
D &= A'd_1 + B'd_2 + C'd_3 + D'd.
\end{aligned} \tag{10}$$

Endlichen Werthen von x', y', z' entsprechen daher im Allgemeinen auch endliche Werthe von x, y, z und umgekehrt.

Man sieht aber aus der Form des Ausdruckes (9), dass es ein System von Werthen x', y', z' giebt, denen unendlich grosse Werthe von x', y', z' entsprechen, nämlich diejenigen, welche der Gleichung

$$ax + by + cz + 1 = 0 \tag{11}$$

genügen, d. h. in einer gewissen Ebene F liegen. Das Bild dieser im Endlichen gelegenen Ebene F des Objektraumes liegt im Unendlichen. Die Abbildung erleidet daher an ihr eine Unstetigkeit und zwar ist dieses die einzige Unstetigkeitsstelle jenes Raumes.

Eine analoge Ebene existirt, wie schon aus der Gegenseitigkeit aller Beziehungen in den beiden Räumen folgt, auch im Bildraum. In der That wenn $A = B = C = 0$ ist — was gewisse Beziehungen zwischen den wesentlichen Coëfficienten $\frac{A'}{B'}$ $\frac{B'}{D'}$ und $\frac{C'}{D'}$ der Ebene E' und denen der Abbildung involvirt, d. h. eine bestimmte Ebene F' determinirt — so kann das Nullwerden von (9) nur noch eintreten durch Unendlichwerden des Nenners, d. h. im Allgemeinen durch Unendlichwerden von x, y, z. Der durch die Bedingungen $A = B = C = 0$ bestimmten Ebene F' des Bildraumes entspricht also eine unendlich ferne im Objektraum; sie ist daher die Discontinuitätsebene des Bildraumes[1]). Diese in der Anwendung so wichtigen Ebenen — bekanntlich Brennebenen genannt — nehmen daher auch vom rein geometrischen Gesichtspunkte eine ganz besondere Bedeutung in Anspruch.

Es giebt jedoch eine Art von Abbildung, bei welcher keine Unstetigkeit der Abbildung vorhanden ist: wenn nämlich $a = b = c = 0$ ist. In diesem singulären Fall der Abbildung, welcher in einer Klasse von optischen Instrumenten verwirklicht ist, entsprechen offenbar im Endlichen gelegene Ebenen des Bildraumes stets im Endlichen gelegenen Ebenen des Objectraumes und vice versa. Wir werden uns mit diesem Fall noch näher zu beschäftigen haben. Er heisst (aus später ersichtlichen Gründen) der Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Wir wollen nun durch weitere Discussion unserer Abbildungsgleichungen zweitens

b) die Beziehungen zwischen den Richtungen conjugirter Ebenen ableiten und aus diesen eine erste Vereinfachung jener Gleichungen gewinnen.

Orientirung der yz-Ebenen. Die Richtungscoëfficienten A, B, C einer Ebene E im Objektraum hängen, wie (10) zeigt, nicht nur von den Richtungscoëfficienten A', B', C' der conjugirten Ebene E' ab, sondern auch von deren Lagecoëfficient D'. Einer Parallelverschiebung von E' (welche blos eine Aenderung von D' involvirt) entspricht daher im Allgemeinen eine Verschiebung und gleichzeitige Richtungsänderung von E und umgekehrt. Dies ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn A, B, C von D' unabhängig sind, also 1) wenn $a = b = c = 0$ ist, d. h. in dem singulären Fall der teleskopischen Abbildung; alsdann entsprechen parallelen Ebenen im einen Raum überall parallele Ebenen im andern. 2) Wenn in der Gleichung

1) Auch die Schnitte der Ebene F mit dem durch das Nullwerden der Zähler von φ, χ und ψ definirten Ebenen machen keine Ausnahme von obiger Bestimmung. Die ihnen entsprechenden Linien im Bildraum sind resp. der x'-, y'-, z'-Axe parallel, und nehmen allerdings für diese Coordinate alle Werthe an, liegen aber auch im Unendlichen, indem immer bezw. y' und z', x' und z', x' und $y' = \infty$ sind. Ebenso gewisse Linien im Bildraum.

der Objektebene (8) auf andere Weise den Faktor D' enthaltende Theil des Ausdruckes von x, y, z unabhängig wird, also wenn $(ax + by + cz + 1) = const$ ist, d. h. wenn die Ebene im Objektraum der Discontinuitätsebene F derselben parallel ist. Dieser Schaar von parallelen Ebenen — und im Allgemeinen nur dieser einen — im Objektraum entsprechen auch parallele im Bildraum.

Aus der Eindeutigkeit dieser und der Gleichwerthigkeit aller Beziehungen zwischen den beiden Räumen folgt dann, dass jene Ebenen im Bildraum parallel der Discontinuitätsebene F' desselben sind. Dies folgt aber auch direkt, wenn man die unter sich parallelen Ebenen des Bildraumes sucht, denen eine Schaar unter sich parallelen Ebenen im Objektraum entspricht. Für letztere muss $A:B:C$ unabhängig von D' sein. Da nun $A = M + D'a$; $B = N + D'b$; $C = P + D'c$, so musste $M:N:P = a:b:c$ sein. Wir können daher setzen $A = a(K + D')$; $B = b(K + D')$; $C = c(K + D')$. Die Grössen A, B, C dürfen jeden mit a, b, c proportionalen Werth annehmen, ohne mit der gestellten Bedingung in Widerspruch zu treten. Es kann also auch $K = -D'$ werden, daher $A = B = C = 0$. Die durch diese Bedingung bestimmten Ebene des Bildraumes ist nun, wie wir oben gesehen haben, in der That dessen Discontinuitätsebene.

Ebenen, die der Discontinuitätsebene des einen Raumes parallel sind, entsprechen also im anderen Raum Ebenen die der Discontinuitätsebene dieses parallel sind, und dies sind im Allgemeinen die einzigen conjugirten Schaaren von Parallelebenen.

Wir nehmen nun Ebenen, die den Unstetigkeitsebenen in den beiden Räumen parallel sind, zu Coordinatenebenen und zwar zur yz- resp. $y'z'$-Ebene; die x- und x'-Axen senkrecht dazu. Dann kann x' nur noch Funktion von x sein, also reducirt sich die Gleichung für x' in (7) auf

$$x' = \frac{a_1 x_1 + d_1}{ax + 1}$$

und da alle drei Coordinaten nothwendig gleichen Nenner haben, so vereinfachen sich auch diese in

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{ax + 1}$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{ax + 1}.$$

Wahl der Hauptaxen. Die Abscissenaxen x' und x selbst sind bisher noch nicht zu einander conjugirt (wenn $y = z = 0$ ist noch nicht $y' = z' = 0$). Um dies zu erreichen, suchen wir diejenigen zur x-Axe parallelen, d. h. zur Discontinuitätsebene F senkrechten Geraden, deren Bilder im anderen Raum zur x'-Axe parallel, zur F'-Ebene senkrecht sind. Seien die Coordinaten einer solchen Geraden im jetzigen System $y = y_0$ und $z = z_0$, so müssen die Coordinaten ihres Bildes, also

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{ax + 1},$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{ax + 1}$$

von x unabhängig sein. Dies ist der Fall wenn

$$\frac{b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{a_2} = \frac{1}{a}$$

und auch

$$\frac{b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{a_3} = \frac{1}{a}.$$

Diese beiden linearen Gleichungen für y_0 und z_0 haben im Allgemeinen nur eine Lösung. Es giebt also im Allgemeinen auch nur je eine Gerade von der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen diese charakteristischen Hauptaxen der Abbildung zur x- resp. x'-Achse. Dann muss für $y = 0$ und $z = 0$ auch $y' = 0$ und $z' = 0$ sein, also im Zählen der Ausdrücke für y' und z' kein x enthaltendes und kein constantes Glied mehr vorkommen. Demnach werden die Abbildungsgleichungen — unbeschadet ihrer Allgemeinheit — reducirt auf die Form

$$y' = \frac{b_2 y + c_2 z}{ax + 1} \qquad z' = \frac{b_3 y + c_3 z}{ax + 1}.$$

Wahl der Nebenaxen. Zur weiteren Vereinfachung dieser benützen wir den Satz:

Es giebt in jedem Raum ein — und im Allgemeinen nur ein — Paar von auf einander senkrechten durch die Hauptaxe gehenden (Meridian-)Ebenen, denen ebensolche im anderen Raum conjugirt sind.

In der That: Eine im Objektraum durch die x-Axe gelegte Ebene I bilde mit der x-y-Ebene den Winkel u, dessen trigonometrische Tangente $tg\, u = \frac{z}{y} = m$ ist. Eine andere Meridianebene II bilde mit der xy-Ebene (resp. mit der y-Axe) den Winkel v. Wenn nun I und II senkrecht auf einander stehen, so ist $tg\, v = \frac{1}{m}$. Das Bild von I bildet aber mit der y'-Axe den Winkel u', dessen Tangente nach den Abbildungsgleichungen sich darstellt als

$$tg\, u' = \frac{z'}{y'} = \frac{b_3 y + c_3 m y}{b_2 y + c_2 m y} = \frac{b_3 + c_3 m}{b_2 + c_2 m}.$$

Das Bild von II bildet mit y' den Winkel v', so dass analog

$$tg\, v' = \frac{b_3 - \frac{1}{m} c_3}{b_2 - \frac{1}{m} c_2}$$

ist. Soll $u' - v' = \frac{\pi}{2}$ sein, so muss $tg\, v' = -\frac{1}{tg\, u'}$ sein, also

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)(c_2 b_2 - b_3 c_3) = b_3^2 + c_3^2 - (b_2^2 + c_2^2).$$

Diese Gleichung wird entweder durch die Coëfficienten der Abbildung selbst erfüllt, indem der Faktor von $m - \frac{1}{m}$ und die rechte Seite der Gleichung einzeln gleich Null sind, was auf $b_2 = c_2 = b_3 = c_3$ führt, und dann besteht sie eo ipso für jeden Werth von m und damit von u. Oder die Gleichung hat praktisch nur eine Lösung; denn wenn $m = r$ eine Lösung ist, so ist zwar $m = -\frac{1}{r}$ ebenfalls eine solche; dies führt aber bei uns auf die zugehörige Ebene II. Es giebt also im Allgemeinen nur ein Paar Ebenen von der verlangten Eigenschaft im einen wie anderen Raum.

Diese Ebenen benützen wir abermals zur Orientirung unseres Coordinatensystems, indem wir die y- und z- resp. y'- und z'-Axen in die durch sie in der yz resp. $y'z'$-Ebene fixirten Richtungen hineinverlegen und zwar natürlich derart, dass die $x'y'$-Ebene das Bild der xy-Ebene wird und die $x'z'$-Ebene das Bild der xz-Ebene. Es darf dann y' und z' ausser von x nur von y bezw. z abhängen; es erhalten also die Abbildungsgleichungen schliesslich die Form

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{ax + 1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{ax + 1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{ax + 1}.$$

Hauptformen der Abbildungsgleichungen. Aus den allgemeinen Bedingungen der Transformation von Coordinatensystemen ist zu schliessen, dass diese Gleichungen, welche noch 6 Constanten enthalten, weiter reducibel sein müssen. In der That haben wir noch über den bisher willkürlichen Anfangspunkt der x- und x'-Coordinatenzählung zu verfügen. Hierfür bieten sich zwei Festsetzungen als besonders einfach, charakteristisch und für die Anwendung wichtig dar.

1) Zu Anfangsebenen werden die Unstetigkeitsebenen F und F' gewählt. Dann werden die Abbildungsgleichungen, wie man sich leicht überzeugt, von der Form

$$x' = \frac{\mathfrak{a}}{x}; \quad y' = \frac{\mathfrak{b}y}{x}; \quad z' = \frac{\mathfrak{c}z}{x}, \tag{12}$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gewisse mit den früheren einfach zusammenhängende Constanten sind.

2) Zu Nullebenen werden conjugirte Ebenen gewählt.

Die Form der Gleichungen in diesem Falle wird

$$x' = \frac{a_1 x}{a x + 1}; \quad y' = \frac{b_2 y}{a x + 1}; \quad z' = \frac{c_3 z}{a x + 1}, \tag{13}$$

hierbei bleibt eine Constante noch verfügbar für die specielle Wahl der conjugirten Ebenen.

Diese Gleichungen werden im Fall der teleskopischen Abbildung, d. i. $a = 0$ (b und c sind bereits $= 0$), noch einfacher, nämlich

$$x' = px; \quad y' = qy; \quad z' = rz, \tag{14}$$

wenn die Constanten schlechthin mit p, q, r bezeichnet werden.

Der allgemeine hier behandelte Fall der Abbildung ist also charakterisirt durch mindestens 3 Constanten. Die Abbildung ist um die x-Axe nicht symmetrisch, wie es die meisten realen Abbildungen sind. Die x-Axe unseres Coordinatensystems stellt sich als eine Hauptaxe der Abbildung dar, die wie vorangehend bestimmten y- und z-Axen als Nebenaxen derselben. Im singulären Fall der teleskopischen Abbildung sind die 3 Axen gleichwerthig. Auch in diesem Falle, in welchem parallelen Ebenen im einen Raume stets parallele im anderen entsprechen, giebt es im Allgemeinen nur eine rechtwinklige Ecke, welche als ebensolche abgebildet wird, was also zu einer bestimmten Wahl des Coordinatensystems führt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals darauf hinzuweisen, dass die Lagenbeziehung der beiden Abbildungsräume zu einander hier eine ganz willkürliche ist. Diese wird erst durch die speciellen Umstände der Abbildung gegeben.

Um diese rein geometrische Abbildung zur physischen bequemer in Beziehung setzen zu können, wollen wir nur dies noch annehmen, dass die Richtung der positiven x zusammenfalle, d. h. übereinstimmend gewählt werde in beiden Räumen mit der der Lichtbewegung — was natürlich keine Einschränkung bedeutet.

Der geometrische Charakter der durch die Gleichungen (12) bezw. (13) und (14) bestimmten Abbildung ist ein in der Mathematik wohlbekannter; ihre näheren Eigenschaften sind eingehend studirt. Eine Discussion jener Gleichungen ergiebt dieselben in einfachster Weise. Wir beschränken uns hier auf einige Hinweise.

Bei der durch (14) definirten teleskopischen Abbildung sind die beiden Räume nach der Bezeichnung der modernen Geometrie »affin«. Ein räumliches

Gebilde des einen Raumes erscheint im anderen als eins gleicher Gattung, nur in den 3 Dimensionen im Allgemeinen verschieden vergrössert. In dem durch (12) resp. (13) definirten Fall der allgemeineren Abbildung herrscht nur noch in jedem einzelnen zur x-Axe senkrechten Paar conjugirter Ebenen Affinität, aber für die verschiedenen Ebenenpaare sind die Affinitätsconstanten verschieden, nämlich von x abhängig.

Das Verhältniss conjugirter Strecken in den beiden Räumen heisst die »Vergrösserung«. Im speciellen heisst das Verhältniss von auf der Hauptaxe gelegenen conjugirten Strecken Longitudinal-, Axial- oder Tiefenvergrösserung.

Halten wir uns an die auf die Unstetigkeitsebenen bezogenen Abbildungsgleichungen (12), so ist das Verhältniss unendlich kleiner conjugirter Strecken

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = -\frac{\mathfrak{a}}{x^2} = -\frac{x'^2}{\mathfrak{a}}. \tag{12a}$$

Dasselbe variirt, wie man sieht, mit x, resp. x' selber.

Für endliche axiale Strecken ist

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathfrak{a}}{x_1 x_2} = -\frac{x_1' \cdot x_2'}{\mathfrak{a}}.$$

Das Verhältniss von Strecken senkrecht zur x-Axe heisst Lateralvergrösserung, oder auch Vergrösserung schlechthin. Dasselbe variirt in dem allgemeinen Fall der 3-axigen Abbildung von Azimut zu Azimut. In der praktischen Anwendung haben wir es fast ausschliesslich mit dem Sonderfall einer um die x-Axe symmetrischen Abbildung zu thun. Wir wollen uns daher weiterhin mit diesem allein beschäftigen.

Wir haben dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ zu setzen, also zwischen y und z nicht weiter zu unterscheiden. Jedes Paar zu einander senkrechter Meridianebenen wird dann in ebensolche abgebildet. Die Lateralvergrösserung, die wir mit β bezeichnen wollen, ist jetzt für jede zur x-Axe senkrechte Ebene constant

$$\beta = \frac{dy'}{dy} = \frac{y'}{y} = \frac{\mathfrak{b}}{x} = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) x' \tag{12b}$$

unabhängig von y und y' selber.

Zur x-Axe senkrechte ebene Figuren werden also in ähnliche abgebildet.

Die Vergleichung von (12a) und (12b) zeigt, dass

$$\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \beta^2.$$

Die Tiefenvergrösserung ist an jeder Stelle proportional dem Quadrat der Lateralvergrösserung[1]), und es ist das Verhältniss

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}},$$

also bei einer gegebenen Abbildung selbst für jede Stelle des Raumes constant.

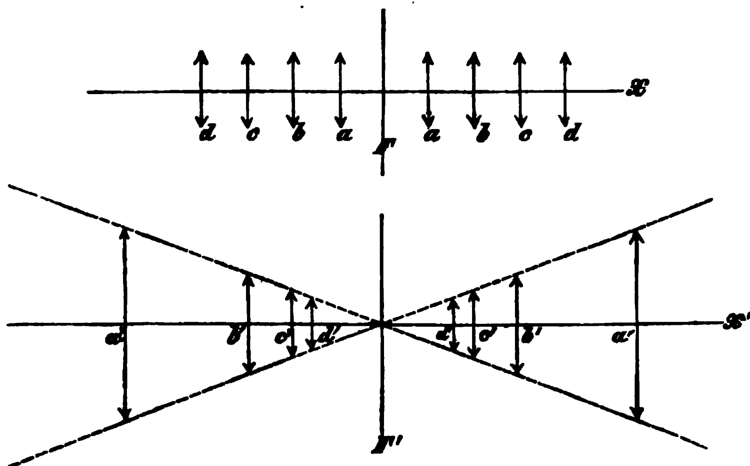
Die Tiefenvergrösserung ist proportional dem Quadrat des reciproken Objektabstandes von der F-Ebene oder dem direkten Quadrat des Bildabstandes von der F'-Ebene.

Die Lateralvergrösserung ist einfach proportional dem reciproken Objektabstande von der F-Ebene oder dem direkten Bildabstande von der F'-Ebene. Beide können stets alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Den Zusammenhang der Lateralvergrösserung und Axialvergrösserung unter einander und mit

[1]) Für die dioptrische Abbildung schon von TÖPLER bemerkt. POGG. Ann. 142, pag. 232. 1871.

den Werthen von x resp. x' veranschaulicht man sich am besten durch folgende graphische Construction (Fig. 307).

Man zeichne eine Anzahl äquidistanter, gleich grosser Ordinaten y, deren Endpunkte also auf einer zur x-Axe parallelen Geraden liegen. Die zugehörigen



(Fig. 307.)

Werthe von y' liegen auf einer durch den Punkt $x' = 0$ gehenden, d. h. die x'-Axe in F' schneidenden Geraden und liegen desto näher aneinander je näher sie an F' kommen.

Umgekehrt entsprechen einer Schaar von äquidistanten y', deren Spitzen auf einer unter einem gewissen Winkel gegen x' geneigten durch F' gehenden Geraden liegen, im Objektraum gleich grosse y, die desto näher an einander stehen, je näher sie der Ebene F sind u. s. w. (Einem Kreise um den Brennpunkt im einen Raum entspricht eine Hyperbel im anderen. Einer Schaar concentrischer Kreise vom Radius r eine Schaar von Hyperbeln von constanter Nebenaxe b, und verschiedener Hauptaxe $\frac{a}{r}$).

Das Hervorstechendste und Wichtigste bei solchen Constructionen ist der anschauliche Hinweis auf die Bedeutung der Brennebenen. Dieselben theilen die betreffenden Räume in zwei symmetrische Hälften, welche auf eine ganz gleichartige Weise abgebildet werden, d. h. einander paarweise entsprechen.

Charakteristik der verschiedenen Gattungen von Abbildung resp. von abbildenden Systemen.

Da unsere Abbildung nur noch durch 2 Constanten bestimmt ist, so kann eine irgend wesentliche Unterschiedlichkeit derselben nur noch in dem verschiedenen Vorzeichen dieser Constanten begründet sein. Nehmen wir als Charakteristika der Abbildung die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so kann jede derselben $> $ oder < 0 sein, woraus vier verschiedene Gattungen von Abbildung resultiren.

1) Je nachdem $a < 0$ oder > 0 ist die Abbildung rechtläufig oder rückläufig. Einer Bewegung des Objeks z. B. im Sinne der Lichtbewegung entlang der x-Axe enspricht eine Bewegung des Bildes, im einen Falle ebenfalls im Sinne der Lichtbewegung, im anderen Falle entgegengesetzt zu ihr. Es mag hier vorausgenommen werden, dass der erstere Fall vorliegt, wenn die Abbildung verwirklicht wird durch lauter Brechungen oder durch eine gerade Zahl von

Reflexionen oder durch Combination von Brechungen mit einer geraden Zahl von Spiegelungen. Wir wollen diese Abbildung schlechthin die »dioptrische« nennen. Der andere Fall liegt vor, wenn die Abbildung durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen zu Stande kommt oder durch Combination von Brechungen mit solchen. Wir wollen ihn kurz als den Fall der »katoptrischen« Abbildung bezeichnen.

Wie man aus (12a) sieht, entspricht ein positives α einem negativen a und umgekehrt. Wir haben daher gemäss Gleichung (12) folgende Bestimmungen:

Bei der rechtläufigen (dioptrischen) Abbildung entspricht der in Bezug auf x positive (rechte) Theil des Objektraumes — gerechnet von der Unstetigkeitsebene F an — dem negativen (linken) Theil des Bildraumes — also diesen gerechnet von F' an, der negative (linke) Theil dieses, der positiven (rechten) Hälfte jenes.

Bei der rückläufigen (katoptrischen) Abbildung entspricht die positive (rechte) Hälfte des Objektraumes dem positiven (rechten) Theil des Bildraumes, die negative (linke) dieses, der negativen jenes.

Man kann sich auch diese Verhältnisse graphisch sehr gut veranschaulichen indem man die Bilder eines in der Objektaxe gelegenen und die Brennebene durchsetzenden Pfeils in den beiden Fällen construirt. (S. a. f. S. Fig. 308.)

Es mag dem Leser überlassen bleiben, diese Verhältnisse weiter zu discutiren.

2) Was nun zweitens das Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ anbetrifft, so ist sein Einfluss auf die Art der Abbildung der, dass, wie aus (12b) folgt, bei

positivem $\mathfrak{b}$ positiven Werthen von x aufrechte / negativen „ „ „ umgekehrte Bilder,

entsprechen, d. h. es wird die rechte Hälfte des Objektivraumes aufrecht, die linke verkehrt abgebildet.

Bei negativem $\mathfrak{b}$ negativen Werthen von x aufrechte / positiven „ „ „ verkehrte Bilder,

d. h. es wird die linke Hälfte des Objektraums aufrecht, die rechte verkehrt abgebildet.

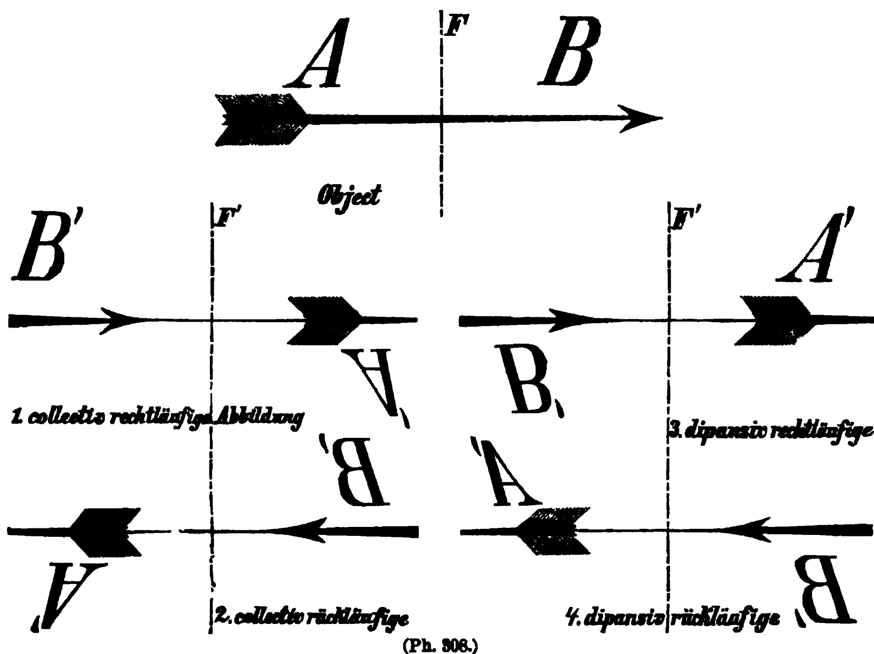
Der erste Fall ist verwirklicht in den sogen. collektiven Systemen, der zweite in den dispansiven, wie wir später sehen werden. Jede Art der Abbildung ergiebt an sich sowohl aufrechte als verkehrte Bilder und nur obiger Unterschied der Beziehung zu den beiden Raumhälften findet statt. Von ganz untergeordneter Bedeutung ist unter dem hier festgehaltenen allgemeinen Gesichtspunkt die Frage nach der Reellität oder Virtuellität der Bilder und danach, wann die einen oder anderen aufrecht bezw. verkehrt sind.

Durch Combination der beiden ad 1) betrachteten Fälle mit den ad 2) unterschiedenen ergeben sich die vier Hauptgattungen optischer Abbildung und demzufolge die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Systeme

dioptrische: collektive, dispansive — katoptrische: collektive, dispansive.

Alle anderen Unterscheidungen betreffen entweder nur die Grössenwerthe der Constanten, also die Maassverhältnisse der Abbildung oder die zufällige gegenseitige Lage der beiden Abbildungsräume, sind also unwesentlich.

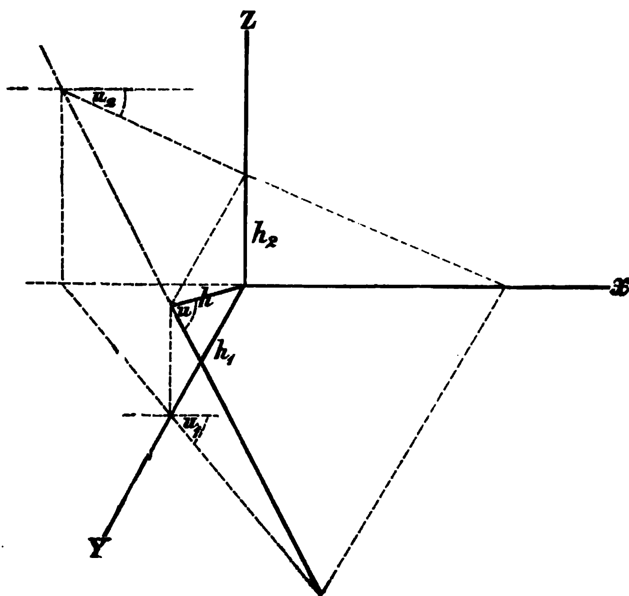
Das Eigenthümliche dieser vier Fälle kann man sich ebenfalls graphisch gut veranschaulichen, etwa indem man die jeweilig resultirenden Bilder schräg liegender Lettern A, B, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen Hälfte des Objektraumes liegt, zeichnet (Fig. 308).



(Ph. 308.)

Gegenseitiges Entsprechen von Geraden und Büscheln.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verhältniss von conjugirten Geraden in den beiden Räumen, da jede Gerade ja auch als Strahl aufgefasst werden kann, die Abbildung von Geraden in einander daher den eigentlichen Process, das Zustandekommen der punktweisen Abbildung näher erläutert.



(Ph. 309.)

Sei ein beliebiger gegen die x-Axe windschiefer Strahl durch seine Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Meridianebenen gegeben. Die Gleichung der einen Projection sei

$$y_1 = h_1 + x \cdot tg\, u_1,$$

die der andern

$$y_2 = h_2 + x \cdot tg\, u_2,$$

u_1 und u_2 sind darin die Winkel der Spuren gegen die x-Axe; h_1 und h_2 die Höhen, in welchen diese Spuren die Unstetigkeitsebene F schneiden (Fig. 309).

Der Strahl selbst bildet dann mit der x-Axe einen Winkel u, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{tg\, u_1^2 + tg\, u_2^2 + 1}}$$

und schneidet die Unstetigkeitsebene in der Entfernung $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ von der x-Axe.

Das Bild dieser Geraden, also der dem einfallenden conjugirte Strahl, sei ebenfalls bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Meridianebenen und zwar auf diejenigen, welche selbst die Bilder der im Objektraum angenommenen 1 und 2 sind und die x' seien von der Ebene F' an gezählt. Alsdann sind die Spuren des Strahls im Bildraum auch selbst wieder die Bilder der Spuren des Strahls im Objektraum. Ihre Gleichungen

$$y_1' = h_1' + x' \cdot tg\, u_1',$$
$$y_2' = h_2' + x' \cdot tg\, u_2',$$

— in denen h_1', h_2' und u_1', u_2' analoge Bedeutung haben, wie oben — reduciren sich daher vermöge der Abbildungsgleichungen (12) und (12b) auf

$$y_1' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_1 + x \cdot tg\, u_1) = b \cdot tg\, u_1 + b\,\frac{h_1}{a} \cdot x'$$

und

$$y_2' = \left(\frac{b}{x}\right)(h_2 + x\, tg\, u_2) = b \cdot tg\, u_2 + \frac{b}{a}\, h_2 x'.$$

Der Vergleich mit den voranstehenden ergiebt, dass

$$h_1' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_1; \quad h_2' = \mathfrak{b} \cdot tg\, u_2;$$
$$tg\, u_1' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_1; \quad tg\, u_2' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_2$$

ist. Der Neigungswinkel u', den das Bild des ursprünglichen Strahles mit der x'-Axe einschliesst, ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$cos\, u' = \frac{1}{\sqrt{tg^2(u_1') + tg^2(u_2') + 1}}.$$

Die Entfernung von der x'-Axe, in welcher der Strahl die F'-Ebene schneidet ist gegeben durch $h' = \sqrt{h_1^{2\prime} + h_2^{2\prime}}$.

Tragen wir hierin die oben gefundenen Werthe für h_1', h_2', u_1', u_2' ein, so wird

$$cos\, u' = 1 : \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2 (h_1^2 + h_2^2) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h\right)^2}},$$

woraus folgt

$$tang\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\, h.$$

Diese Gleichung $tg\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\, h$ besagt, dass Strahlen, welche im Objektraum die Unstetigkeitsebene in gleicher Entfernung von der Hauptaxe schneiden, im Bildraum conjugirt sind Strahlen, die denselben Winkel mit der Hauptaxe derselben einschliessen. Im Speciellen sind nun Strahlen, die durch denselben Punkt der Unstetigkeitsebene im Objektraum gehen, ja conjugirt Strahlen, die durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene gehen, die also einander parallel sind; obige Gleichung giebt alsdann den Zusammenhang zwischen der Schnitthöhe des einfallenden Strahls mit der Unstetigkeitsebene im Objektraum und dem Neigungswinkel des austretenden Strahls gegen die Hauptaxe im Bildraum an.

Wir haben ferner

$$h'^2 = \mathfrak{b}^2 (tg^2 u_1 + tg^2 u_2) = \mathfrak{b}^2\, tg^2 u,$$

also

$$h' = \pm\, \mathfrak{b} \cdot tg\, u.$$

Dies besagt, dass den Strahlen, die im einen Raum gleiche Winkel u mit der x-Axe bilden, im anderen Raum Strahlen entsprechen, welche die Unstetig-

keitsebene derselben in gleicher Entfernung h' von der x-Axe schneiden. Strahlen die im Objektraum nicht nur gleiche Winkel mit der x-Axe bilden, sondern auch untereinander parallel sind, gehen durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene. Dieser ist die Unstetigkeitsebene des Bildraums conjugirt. Die Bilder dieser Strahlen gehen daher sämmtlich durch einen und denselben Punkt dieser Ebene und obige Gleichung giebt die Beziehung zwischen dem Winkel, den ein einfallender Strahl mit der Hauptaxe des Objektraumes bildet und der Entfernung von der Hauptaxe des Bildraums, in welcher der austretende Strahl die Brennebene dieses Raumes schneidet.

Die Brennweiten. Diese Sätze geben eine neue wichtige Eigenschaft der Unstetigkeitsebene an und ebenso erhalten die Constanten der Abbildung eine weitere Bedeutung. Es ist $\mathfrak{b} = \frac{h'}{tg\, u}$ das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Bildraum dessen Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein conjugirter Strahl im Objektraum mit dessen Hauptaxe einschliesst. $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = \frac{h}{tg\, u'}$ ist umgekehrt das Verhältniss der Höhe, in welcher ein Strahl im Objektraum die Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Winkels unter dem sein conjugirter Strahl im Bildraum gegen dessen Hauptaxe geneigt ist.

Es sind also, wie hieraus — und auch schon aus den Abbildungsgleichungen selbst — geschlossen werden muss, die Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht gleichwerthig, $\mathfrak{b}$ eine Länge, $\mathfrak{a}$ das Quadrat einer solchen. Es ist daher schon aus diesem Grunde vortheilhaft, diese Constanten durch die oben sich darbietenden gleichartigen $\mathfrak{b}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ zu ersetzen. Wir wollen $\mathfrak{b} = f$; $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = f'$ setzen. Die Grössen f und f', welche in der Theorie der optischen Instrumente als Charakteristika für die Abbildungsweise angenommen sind, heissen die Brennweiten — aus Gründen, die sich aus dem historischen Entwicklungsgang der geometrischen Optik ergaben, mit dem Wesen der Sache aber eigentlich nicht sehr nahe zusammenhängen. Ihre Definition ergiebt sich sachgemäss nur aus den Gleichungen

$$f = \frac{h'}{tg\, u}; \quad f' = \frac{h}{tg\, u'}; \tag{15}$$

ihr Zusammenhang mit den Eigenschaften der durch sie charakterisirten Abbildung aus den Gleichungen, die nunmehr an die Stelle der früheren treten, nämlich

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x} \quad \text{oder} \quad x\,x' = f \cdot f',$$

$$y' = \left(\frac{f}{x}\right) y = \left(\frac{x'}{f'}\right) y$$

oder

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}.$$

Für die Charakteristik der vier Hauptgattungen optischer Abbildung ergiebt sich gemäss diesen Gleichungen und den früheren Betrachtungen die Bestimmung, dass $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gleiches}}{\text{entgegengesetztes}}$ Vorzeichen von f und f' $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rückläufige (katoptrische)}}{\text{rechtläufige (dioptrische)}}$ Abbildungen bedeutet und dabei $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positives}}{\text{negatives}}$ f die früher näher angegebenen Eigenschaften der Abbildung durch $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{collektive}}{\text{dispansive}}$ Systeme bestimmt.

Der Anschauung am nächsten kommt und praktisch am besten anwendbar

ist die, sich aus den obigen Bestimmungsgleichungen ohne weiteres ergebende *Definition der Brennweiten von* GAUSS.

Die erste Brennweite (die des Objektraums) ist das Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Bildraums gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines unendlich entfernten Objekts und analog: die zweite Brennweite gleich dem Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des Objektraums gelegenen Objekts zur scheinbaren Grösse seines (unendlich entfernten) Bildes.

Die Vorzeichen von f und f' geben hierbei zugleich an, ob die betreffenden Bilder aufrecht oder umgekehrt sind, indem in jeder Meridianebene auch $f = \frac{h'}{tgu}$ und $f' = \frac{h}{tgu'}$ ist, also bei $\begin{matrix}\text{positivem}\\ \text{negativem}\end{matrix}$ f sich Werthe $\begin{matrix}\text{gleichen}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}$ Vorzeichens von h' und u entsprechen; ebenso bei $\begin{matrix}\text{positivem}\\ \text{negativem}\end{matrix}$ f' Werthe $\begin{matrix}\text{gleichen}\\ \text{entgegengesetzten}\end{matrix}$ Vorzeichens von h und u'.

Das Convergenzverhältniss. Kehren wir zu der Betrachtung der Abbildung einer Geraden in eine andere zurück und beschränken wir uns auf den Fall, dass die Gerade in einer Meridianebene liegt, also die Axe schneidet, dann liegt ihr Bild in einer Meridianebene des Bildraums und nennen wir nun wieder u und u' die Winkel, unter welchen die Axe im Objekt und Bildraum geschnitten wird, h resp. h' die Schnitthöhen in den Unstetigkeitsebenen, dann ist, wie ersichtlich (vergl. Fig. 309)

$$h = -x\,tgu \qquad h' = -x' \cdot tgu.$$

Es war aber

$$h = f' \cdot tgu' \qquad h' = f \cdot tgu.$$

Es folgt hieraus das *Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahl-Axen-Winkel in jeder Meridianebene*

$$\gamma = \frac{tgu'}{tgu} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'},$$

also unabhängig von u resp. u', daher constant für das Paar conjugirter Axenschnittpunkte, deren Abscissen x und x' sind.

Wir bezeichnen dieses für die Theorie der optischen Systeme ebenfalls sehr wichtige Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahlaxenwinkel als das *Convergenzverhältniss oder die Angularvergrösserung.*

Anmerkung. Gegenüber manchen Darstellungen, die von der Betrachtung der speciellen dioptrischen Abbildung ausgehen und diese dann verallgemeinern, mag hervorgehoben werden: 1) Dass, wie oben von selbst ersichtlich, es das Verhältniss der *Tangenten* und nicht der *Sinus* ist, welches für conjugirte Axenpunkte constant ist. Für unendlich kleine Winkel fallen natürlich beide zusammen. 2) Dass in Folge dessen das Verhältniss der Tangenten und ebenso anderer trigonometrischer Function der Winkel, welche zwei Strahlen mit *einander* bilden, nicht mehr in gleich einfacher Weise bestimmbar ist, wie das der Strahlen gegen die Axe weder für Strahlen, die ihren Divergenzpunkt auf der Axe noch für solche, die ihn ausserhalb derselben haben, sondern dass dieses Verhältniss von den Winkeln der einzelnen Strahlen gegen die Axe abhängt. Man kann daher nicht von einem Convergenzverhältniss in conjugirten *Ebenen* schlechthin sprechen, wie von einem Vergrösserungsverhältniss in solchen. Die vorangegangenen Entwicklungen beweisen vielmehr indirekt, dass die Constanz des Convergenzverhältnisses in conjugirten Ebenen *im Widerspruch steht* mit der Möglichkeit der Abbildung endlicher Räume durch homocentrische Strahlenvereinigung. Nur für sehr kleine Winkel u und u' kann man, unter Vernachlässigung von Grössen, die dem Quadrat dieser Winkel proportional sind,

das Convergenzverhältniss der Winkel conjugirter Strahlen als constant hinstellen für Divergenzpunkte innerhalb eines Paares conjugirter Ebenen.

Beziehungen zwischen den drei Vergrösserungen. Die Vergleichung der Formeln, welche wir für β und γ hergeleitet haben, zeigt sofort den einfachen Zusammenhang, welcher zwischen diesen beiden Grössen besteht, nämlich

$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'} .$$

Das Produkt des Vergrösserungsverhältnisses in zwei conjugirten Ebenen und des Convergenzverhältnisses der Strahlen in den Axenpunkten dieser Ebenen ist constant für eine gegebene Abbildung (gegebenes optisches System).

Je nachdem f und f' gleiches / entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die Abbildung katoptrisch / dioptrisch ist, entspricht eine positive Vergrösserung negativem / positivem Convergenzverhältniss und eine negative Vergrösserung positivem / negativem Convergenzverhältniss, mit anderen Worten: bei der katoptrischen (rückläufigen) Abbildung werden aufrechte Bilder zu Stande gebracht durch Strahlen, die in Objekt und Bild entgegengesetzt gegen die Axe geneigt sind, umgekehrte Bilder durch gleichseitig geneigte; bei der dioptrischen (rechtläufigen) Abbildung findet das umgekehrte Verhältniss statt.

Die bisher abgeleiteten, auf die Unstetigkeitsebenen in beiden Räumen bezogenen Formeln sind, in Kürze zusammengestellt:

Für Brennpunktsabstände conjugirter Axenpunkte

$$x \cdot x' = f \cdot f',$$

für die Tiefenvergrösserung

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{f \cdot f'}{x^2} = -\frac{x'}{x},$$

für die Lateralvergrösserung (I)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'},$$

für das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'} .$$

Durch Combination dieser mit einander erhalten wir:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{f'}{f} \cdot \beta = \frac{1}{\gamma}$$

$$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'} \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \alpha = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma^2}, \qquad (I^*)$$

daher auch noch

$$\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = 1.$$

Dieses sind die Beziehungen, welche für jede durch geradlinige Strahlen vermittelte punktweise Abbildung zweier endlichen Räume in einander gelten.

Die Cardinalpunkte eines optischen Systems.

Wie diese Formeln aufs einfachste zeigen, können sowohl die Grössen α, β und γ selbst, als auch ihre Verhältnisse zu einander jeden Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, wenn x und x' beliebig variirt werden dürfen.

Einige von diesen Werthen sind von ausgezeichneter Bedeutung, sei es für

die Vereinfachung von später abzuleitenden Formeln, sei es für die praktische Beobachtung; es sind dies im besonderen die Stellen der Axe, wo

1) die Tiefenvergrösserung den Werth $+1$ oder -1 hat. In jedem optischen System giebt es zwei Paar Punkte, wo das eine oder das andere (je nachdem das System recht- oder rückläufig ist) statt hat, d. h. einer unendlich kleinen Verschiebung des Objekts auf der Axe eine gleichgrosse und gleich- oder entgegengesetzte Verschiebung des Bildes entspricht. Diese Punkte haben, soviel Verfasser bekannt, keine besondere Benennung erhalten.

2) die Punkte der Axe, wo die Lateralvergrösserung $= +1$ und die, wo dieselbe $= -1$ ist, d. h. Objekt und Bild gleich gross und gleich oder verkehrt gelegen sind. Erstere sind von GAUSS[1]) »Hauptpunkte«, die durch sie gehenden zur Axe senkrechten Ebenen »Hauptebenen« genannt worden; letztere, von TÖPLER[2]) hinzugefügt, von ihm analog als »Hauptpunkte bezw. Hauptebenen der zweiten Art« negative Hauptpunkte bezw. Hauptebenen bezeichnet.

3) Die Stellen der Axe, wo das Convergenzverhältniss $= +1$ bezw $= -1$ ist, d. h. Punkte von der Beschaffenheit, dass einem Strahl, der im Objektraum nach dem einen hinzieht, im Bildraum ein Strahl entspricht, der unter gleichem resp. entgegengesetztem Winkel gegen die Axe von dem conjugirten Punkte ausgeht. Diese Punkte sind, die ersteren von LISTING[3]) eingeführt und Knotenpunkte genannt, die letzteren von TÖPLER[2]) hinzugefügt und wieder als negative Knotenpunkte von den ersteren unterschieden.

In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werthe von α, β, γ, x und x' aufgeführt. Dieselbe zeigt, dass die Knotenpunkte zugleich diejenigen Stellen der Axe sind, in welchen $\alpha = \beta$ ist, d. h. in welchen eine zur Axe senkrechte Schicht in allen drei Dimensionen ähnlich abgebildet wird; und dass in den Punkten wo $\alpha = \pm 1$ 1 ist, $\beta = \pm \gamma$ ist.

α	β	γ	x	x'
$+1$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-f\cdot f'}$	$\mp\sqrt{-f\cdot f'}$
-1	$\pm\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\mp\sqrt{\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$	$\pm\sqrt{f\cdot f'}$
$-\frac{f'}{f}$	$+1$	$-\frac{f}{f'}$	$+f$	$+f'$
$-\frac{f'}{f}$	-1	$+\frac{f}{f'}$	$-f$	$-f'$
$-\frac{f}{f'}$	$-\frac{f}{f'}$	$+1$	$-f'$	$-f$
$-\frac{f}{f'}$	$+\frac{f}{f'}$	-1	$+f'$	$+f$

Ausser diesen conjugirten Punktpaaren haben manche Autoren noch andere theils ebenfalls conjugirte, theils auch nur analog gelegene Paare von Punkten

[1]) Dioptr. Unters. pag. 13. Bemerkt und hervorgehoben wurden sie schon von MÖBIUS, CRELLE's Journ. 5, pag. 113. 1830, für einen specielleren Fall (unendlich dünne Linsen).

[2]) l. c.

[3]) Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Art. Dioptrik des Auges in R. WAGNER's Handwörterbuch der Physiologie. Braunschweig 1853. Bd. 4, pag. 451.

eingeführt[1]). Wir finden unsererseits keinerlei Nutzen in der Anwendung derselben, wohl aber eine Verminderung der ohne sie bestehenden Uebersichtlichkeit der Verhältnisse. Wir werden auch von den meisten der oben charakterisirten Punkte nur selten Anwendung zu machen haben. Hingegen werden wir später Veranlassung haben, weitere Punktpaare einzuführen und zu benützen, welche von einem anderen Gesichtspunkte aus, als dem der allgemeinen Abbildung, ein Interesse und praktische Bedeutung haben.

Graphische Constructionen.

Jedes optische System ist, wie wir gesehen haben, durch vier Bestimmungsstücke, nämlich durch die Orte der Brennebenen und die Werthe der Brennweiten vollständig bestimmt. Es wird auch durch zwei von den oben angeführten Paaren von Cardinalpunkten oder durch eins von diesen in Verbindung mit einem der soeben genannten Elemente eindeutig bestimmt, wie wir noch näher sehen werden. Die sogen. Cardinalpunkte bieten die Möglichkeit, auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise zu einem Punkt oder Strahl den conjugirten Punkt oder Strahl zu ermitteln.

Diese Constructionen, welche vom geometrischen Gesichtspunkte aus ganz interessant sind, haben für uns eine untergeordnete Bedeutung. Es sei desshalb auf die einschlägige Literatur verwiesen[2]) und hier nur die eine Aufgabe behandelt: »Zu einem Punkte den conjugirten finden, wenn die Brennebenen und Brennweiten gegeben sind«. Mit den Brennebenen und Brennweiten sind ja indirekt (gemäss der Tabelle auf voriger Seite) auch die beiden Paare von Hauptpunkten gegeben — indem man nur von F aus beiderseits die Strecke f, von F' aus f' abzutragen hat, und ebenso die beiden Paare von Knotenpunkten — indem man von F aus beiderseits f', von F' aus f auf der Axe abträgt — und damit ist die Möglichkeit gegeben, gleich deren Eigenschaften zur Construction mit zu benützen und umgekehrt. Denken wir uns auf diese Weise z. B. die (positiven) Hauptebenen gezeichnet, so lassen wir vom gegebenen Punkte P einen Strahl parallel zur x-Axe ausgehen; er schneidet die Hauptebene H in der Entfernung h. Der conjugirte Strahl schneidet dann die Hauptebene H' in derselben Höhe und geht durch den zweiten Brennpunkt F', ist also völlig bestimmt. Ein zweiter Strahl gehe von P durch F und schneide H in der Entfernung $h' (= f \cdot tg\, u)$. Der conjugirte Strahl schneidet H' in gleicher Höhe und ist der Axe x' parallel, also ebenfalls bestimmt. P' liegt im Schnittpunkte dieser beiden Strahlen.

---

1) Siehe Drews, Exners's Rep. d. Phys. 25, pag. 707. 1889, wo die einschlägige Literatur theilweise citirt wird.

2) Ausser den bereits angeführten Abhandlungen von Gauss, Listing, Lippich, Beck und Töpler die meisten Darstellungen dieser sogen. Gauss'schen Theorie; insbesondere

Cl. Maxwell, On the general laws of optical instruments. Phil. Mag. 1856 und Quart Journ. 2, pag. 233. 1858.

Gavarret, Des images par réflexion et par réfraction. Rev. des cours scientif. Paris 1866.

C. Neumann, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes. Leipzig 1866.

A. Martin, Interprétation géométrique et continuation de la théorie des Centilles de Gauss. Thèses prés. à la Fac. des Sci. de Paris 1867. Ann. de Chim. et de Phys. (4) 10. 1867.

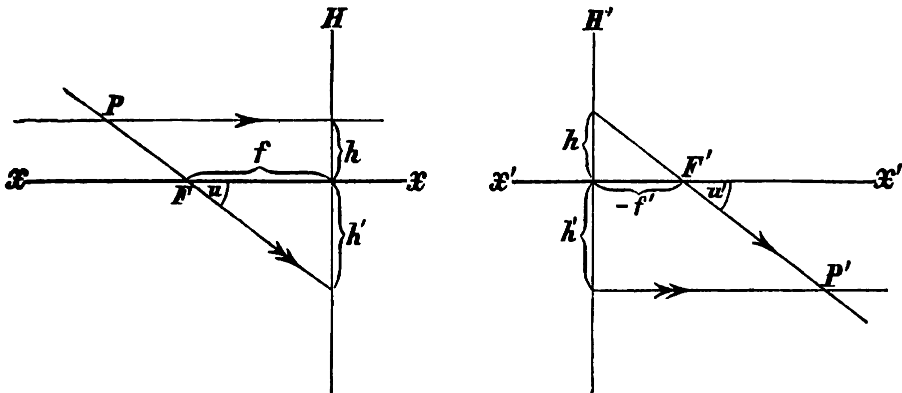
E. Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig 1870.

G. Ferraris, die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Turin 1877. Uebersetzung von Lippich. Leipzig 1879.

Kessler, Beiträge zur graphischen Dioptrik. Jahresb. Gewerbeschule Bochum 1880.

C. M. Gariel, Etudes d'optique géométrique. Paris 1889.

Die analogen Aufgaben werden meist in ähnlicher Weise gelöst.



(Ph. 810.)

Die Abbildungsgleichungen bezogen auf conjugirte Punkte.

Wir haben zuletzt stets von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht, in welchen die Abscissen beider Räume von den Unstetigkeitsebenen derselben an gemessen sind. Schon um den singulären Fall der teleskopischen Abbildung behandeln zu können, dann aber auch aus praktischen Gründen wollen wir die vorher gewonnenen Resultate auch auf die Form (13) der Abbildungsgleichungen anwenden, in welchen die Abscissen von einem Paar conjugirter Punkte an gemessen sind.

Um nicht alle Betrachtungen in wenig veränderter Form noch einmal bei diesen Gleichungen (13) wiederholen zu müssen, gehen wir vielmehr von den schon eingeführten Beziehungen und Gleichungen aus und verschieben nur die Coordinatensysteme entsprechend in Richtung der x-Axe. Seien die Abscissen eines Paares conjugirter Punkte — der neuen Anfangspunkte — bezogen auf die Brennebenen x_0 und x_0', die eines beliebigen anderen Paares bezogen auf dieselben Ebenen x und x', dann sind die Abscissen der letzteren, bezogen auf die ersteren als Anfangspunkte, $\xi = x - x_0$ und $\xi' = x' - x_0'$, und wir haben die Beziehungen zwischen diesen Grössen und den Brennweiten

$$x_0 \cdot x_0' = f \cdot f'$$

und

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

oder

$$(x_0 + \xi)(x_0' + \xi') = f \cdot f',$$

was unter Benützung der ersteren Gleichung übergeht in

$$x_0'\xi + x_0\xi' + \xi\xi' = 0$$

oder

$$\frac{x_0'}{\xi'} + \frac{x_0}{\xi} + 1 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Diese Gleichung drückt die Abscissen der conjugirten Punkte bezogen auf ein Grundpaar von solchen aus durch die Entfernung der Grundpunkte von den Brennebenen (bei Helmholtz[1]) und Anderen, umgekehrt durch die Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die Grundpunkte; daher die Verschiedenheit der Vorzeichen in dem constanten Gliede hier und bei jenen).

[1]) Physiol. Optik. Hamburg u. Leipzig, 1. Aufl. 1867, 2. Aufl. 1888, § 9, u. Wissensch. Abhandlungen. Leipzig 1883, 2, pag. 94, 98.

Die Gleichung für die Vergrösserung wird ohne weiteres aus der früher abgeleiteten

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x_0' + \xi'}{f'} = \frac{f}{x_0 + \xi};$$

ebenso das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{x_0 + \xi}{f'} = -\frac{f}{x_0' + \xi'}.$$

Um von den Abscissen der Brennebenen in Bezug auf die neuen Coordinatenanfangspunkte ganz unabhängig zu werden, können wir statt derselben die Brennweiten f und f', und die in den Grundpunkten bestehende Vergrösserung $\beta_0 = \frac{x_0'}{f'} = \frac{f}{x_0}$ einführen. Es wird dann die Abscissengleichung:

$$\frac{f'}{\xi'}\beta_0 + \frac{f}{\xi}\frac{1}{\beta_0} + 1 = 0,$$

die Ordinatengleichung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f'\beta_0 + \xi'}{f'} = \frac{f\beta_0}{f + \xi\beta_0} \qquad \text{(II*)}$$

und das Convergenzverhältniss

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{(f + \xi\beta_0)}{f'\beta_0} = -\frac{f}{f'\beta_0 + \xi'}.$$

Diese Gleichungen erhalten eine besonders einfache Form, wenn man als Grundpunkte solche wählt, in denen β_0 einen geeigneten Werth hat. Die wichtigste derselben ist die auf die Hauptpunkte bezogene, in welchen $\beta_0 = +1$ ist; nämlich es wird dann

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} + 1 = 0,$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f + \xi} = \frac{f' + \xi'}{f'}, \qquad \text{(II**)}$$

$$\gamma = \frac{tg u'}{tg u} = -\frac{f}{f' + \xi'} = -\frac{f + \xi}{f}.$$

Um Verwechslungen mit den von anderen Autoren, z. B. Helmholtz abgeleiteten Gleichungen zu vermeiden, sei nochmals daran erinnert, dass hier die Abscissen in beiden Räumen von den betreffenden Punkten in gleichem Sinne, nämlich in der Richtung der Lichtbewegung als positiv gerechnet sind.

Bezieht man die Abscissen auf die negativen (Töpler'schen) Hauptebenen, in welchen $\beta_0 = -1$ ist, so erhält man entsprechend

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} - 1 = 0$$

und

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - \xi} = \frac{\xi' - f'}{f'} \text{ etc.},$$

also gleiche Ausdrücke wie Helmholtz für die positiven Hauptebenen erhält indem er ξ' entgegengesetzt misst wie ξ und die Vorzeichen der Brennweiten umgekehrt bestimmt, wie wir es thaten.

Aehnlich liesse sich statt β_0, γ_0 einführen und einfache Gleichungen herleiten welche bezogen sind auf die Knotenpunkte, in welchen $\gamma_0 = \pm 1$ ist. Doch haben solche Gleichungen Werth nur in speciellen Fällen.

Teleskopische Abbildung.

Die im letzten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen behalten ihre Anwendbarkeit auch in dem Falle der teleskopischen Abbildung. Das Charakteristische

desselben ausgedrückt durch die neuen Constanten f und f' ist, wie der Vergleich mit den Einführungsgleichungen für diese lehrt, dies, dass in ihm die Brennweiten beide unendlich gross werden, aber constantes endliches Verhältniss behalten.

Bringt man durch Division mit f bezw. f' die Gleichungen (II*) auf eine Form, in welcher theils $\frac{f'}{f}$ theils f oder f' allein als Faktoren bezw. Divisoren auftreten und setzt dann f und $f' = \infty$, so wird die Abscissengleichung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\beta_0^2\left(\frac{f'}{f}\right) = const\,(\xi', \xi),$$

ferner

$$\beta = \frac{y'}{y} = \beta_0 = const\,(\xi', \xi)$$

entsprechend den früher für diesen Fall abgeleiteten Gleichungen (14).

Im Falle der teleskopischen Abbildung hat das Convergenzverhältniss γ eine besondere praktische Bedeutung; denn bei der Abbildung eines unendlich entfernten Objektes in ein unendlich entferntes Bild kann man ja nur noch von diesem, d. i. der Angularvergrösserung, reden.

Gemäss den allgemein giltigen Gleichungen (I*) ist $\gamma = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\beta_0}$, also ebenfalls constant $= \gamma_0$.

Durch den Werth dieser Angularvergrösserung ausgedrückt wird demnach das Verhältniss conjugirter Abscissen, gemessen von einem Paare conjugirter Punkte an,

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \alpha_0$$

und das Verhältniss conjugirter Ordinaten (III)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0} = \beta_0.$$

Gesetze der Combination optischer Systeme.

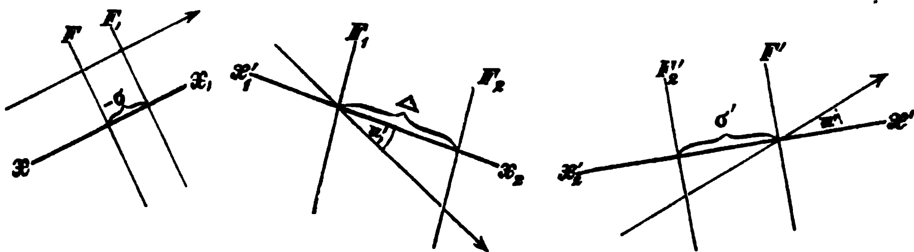
Der Bildraum einer gegebenen ersten Abbildung kann Objektraum einer zweiten sein u. s. f. Den Effekt dieser zwei (oder mehr) successiven Abbildungen kann man als eine einzige Abbildung auffassen, deren Bestimmungsstücke der Lage und Richtung bezw. Grösse nach von den Bestimmungsstücken der einzelnen Abbildungen und deren gegenseitiger Lage abhängen. Dies ist ein praktisch sehr wichtiges Moment. Denn physisch wird eine Abbildung fast stets durch eine Reihe successiver Einzelabbildungen vermittelt. Die Gesammtheit der physikalischen Agentien, durch welche die von den Punkten eines Objektraumes divergirenden Lichtstrahlen in Punkten des Bildraums vereinigt werden und so das zu Stande bringen, was wir eine »optische Abbildung« genannt haben, heisst das »optische« oder »abbildende System«. Das optische System ist der reale Träger der Abbildung, und die Bestimmungsstücke, welche wir bisher vom rein geometrischen Standpunkte aus einer »Abbildung« zusprachen, können wir in concreterer Ausdrucksweise dem optischen System zuertheilen, welches die betr. Abbildung zu Stande bringt. Ein optisches System ist fast stets zusammengesetzt aus Partialsystemen, die jedes für sich ebenfalls eine Abbildung herbeiführen. Wenn wir studirt haben, wie die Abbildung des Gesammtsystems sich berechnet aus den Abbildungsconstanten und der gegenseitigen Lage der Partialsysteme, so wird es weiterhin genügen, die speciellen Abbildungs-

weisen der letzten Elementarsysteme zu studiren, in die man ein gegebenes zerlegen kann, um mit Hilfe jener vorher erhaltenen Combinationsgesetze die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems vollständig berechnen zu können.

Zusammensetzung zweier Abbildungen (zweier optischer Systeme).

a) Zusammensetzung zweier endlicher Abbildungen zu einer endlichen.

Machen wir die beschränkende — in Praxi aber stets sehr annähernd erfüllte — Annahme, dass die Axe des Bildraums des ersten Systems zusammenfalle mit der Axe des Objektraums des zweiten Systems[1]). (Gewöhnlich wird die unnöthige Annahme gemacht, dass alle 4 Axen zusammenfallen.) Seien dann F_1, F_1' die Brennebenen, f_1, f_1' die Brennweiten des ersten



(Ph. 811.)

Systems; F_2, F_2', f_2, f_2' ebenso die Brennebenen und Brennweiten des zweiten Systems, wobei Ebene $F_2 \parallel F_1'$, und sei endlich die Lage der beiden Systeme gegen einander gegeben durch den (im Sinne der Lichtbewegung gemessenen) Abstand der Objekt-Brennebene des zweiten Systems (F_2) von der Bild-Brennebene des ersten (F_1') also $F_1'F_2 = \Delta$.

Dann ist die Abbildung des ganzen aus den Systemen I und II zusammengesetzten Systems bestimmt, wenn die Lage seiner Brennebenen F, F' und die Grösse seiner Brennweiten f, f' ermittelt ist.

Zunächst 1) geht aus den gemachten Annahmen hervor, dass die Brennebene F parallel ist F_1 und F' parallel F_2'; denn den zur Ebene F_1 parallelen Ebenen entsprechen im Bildraum von I Ebenen, die zu F_1' parallel sind, also laut Annahme auch zu F_2. Letzteren aber entsprechen Ebenen, die zu F_2' parallel sind, also schliesslich den zu $F_1 \parallel$ Ebenen solche, die zu $F_2 \parallel$ sind. Ferner

2) Die Objektaxe des ersten Systems ist Objektaxe des ganzen Systems, die Bildaxe des zweiten Systems Bildaxe des ganzen. Denn diese Axen sind, wie leicht ersichtlich, Bilder von einander und gemäss unseren allgemeinen Betrachtungen pag. 44—45 giebt es nur ein Paar zu den Brennebenen senkrechter Geraden, die zu einander conjugirt sind, welche Geraden wir zu Hauptaxen der Abbildung wählten.

3) Die Orte der Brennebenen F und F' ergeben sich aus der Ueberlegung, dass F', als die der unendlich fernen Ebene des Objektraums in Bezug auf das ganze System conjugirte Ebene, conjugirt sein muss der Ebene F_1' in Bezug auf das System II. Bezeichnen wir den — wieder im Sinne der Lichtbewegung ge-

---

[1]) Wenn die Objektaxe des zweiten Systems nicht coincidirt mit der Bildaxe des ersten, so sind auch die Objekt- und Bildaxen des ganzen Systems im Allgemeinen der Lage und Richtung nach verschieden von denen des ersten bezw. zweiten Systems. Doch müssen wir auf ein näheres Eingehen auf diesen Fall hier verzichten.

messenen Abstand der F' von F_2' mit σ', so ist σ' der in Bezug auf II conjugirte Brennpunktsabstand zu der Strecke $F_2 F_1' = -\Delta$, also

$$\sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz analog erhält man $\sigma = +\frac{f_1 f_1'}{\Delta}$, den Abstand der Ebene F von F_1, im gleichen Sinne gemessen, wenn F als die in Bezug auf System I zu F_2 conjugirte Ebene betrachtet wird.

4) Um die Grössen der Brennweiten zu finden, gehen wir auf deren Definitionsgleichungen zurück

$$f = \frac{h'}{tg\,u} \qquad f' = \frac{h}{tg\,u'}.$$

*Ein parallel zur Objekt-Axe des ersten — also auch des ganzen Systems in der Höhe h über dieser Axe einfallender Strahl schneidet nach Durchsetzung des Systems I die Bildaxe desselben (= Objektaxe des zweiten Systems) im Punkte F_1' und unter einem Winkel u_1', der sich bestimmt aus der Definitionsgleichung $f_1' = \frac{h}{tg\,u_1'}$. Unterliegt dieser Strahl nunmehr der Abbildung durch das zweite System, so wissen wir bereits, dass er dessen Bildaxe in F' schneidet, in der vorhin angegebenen Entfernung σ' von F_2' und unter einem Winkel u', der sich bestimmt aus der Gleichung für das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten, nämlich hier

$$\frac{tg\,u'}{tg\,u_1'} = -\frac{x_2}{f_2'} = +\frac{\Delta}{f_2'}.$$

Diese Gleichung combinirt mit der für u_1' ergiebt

$$f' = \frac{h}{tg\,u'} = +\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}.$$

Ganz ebenso erhält man durch Verfolgung eines zur Bildaxe des zweiten (und ganzen) Systems parallel austretenden Strahls nach rückwärts

$$f = \frac{h'}{tg\,u} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}.$$

Durch diese 4 Grössen σ, σ', f, f', und die gemachten Lagenbestimmungen ist die Abbildung des ganzen Systems vollständig definirt.

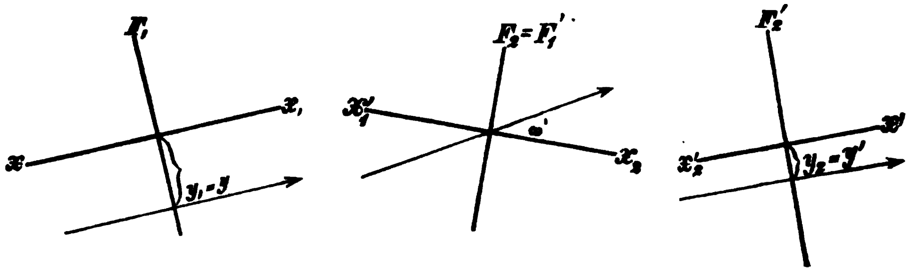
Die angegebenen Formeln gestatten, in sehr einfacher Weise zu übersehen, wie die Lagen der resultirenden Brennebenen und die Grössen und Vorzeichen der resultirenden Brennweiten abhängen von den Brennweiten der Partialsysteme und der Grösse Δ, dem »optischen Abstand« derselben. Indem wir diese Discussion für später aufsparen, wo wir sie an concrete Fälle anknüpfen können, weisen wir hier nur im Allgemeinen auf die durch die Variabilität von Δ gegebene grosse Variabilität der Endgrössen bei gegebenen f_1, f_2, f_1', f_2' hin.

b) Zusammensetzung zweier endlicher Systeme zu einem teleskopischen.

Im Besonderen kann der Fall eintreten, dass $\Delta = 0$ ist, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems zusammenfällt mit dem hinteren Brennpunkt des ersten. Alsdann wird $f = \infty$ und auch $f' = \infty$, also die Abbildung eine teleskopische. Das Verhältniss von f zu f' jedoch bleibt ein endliches, wie schon daraus hervorgeht, dass gemäss den obigen Formeln

$$\frac{f'}{f} = m = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_2} = -\left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \text{ ist.}$$

Um in diesem Falle die Constanten der Abbildung, aus denen der Partialsysteme zu berechnen, genügt die einfache Betrachtung, dass ein parallel zur Axe eintretender Strahl durch den gemeinsamen Brennpunkt beider Partialsysteme gehen und parallel der Axe aus dem zweiten wieder austreten muss. Das Vergrösserungsverhältniss $\frac{y'}{y} = \beta$, welches für alle Punkte der Axe constant ist, ist nun



(Ph. 812.)

$= \frac{y'}{tg\, w} : \frac{y}{tg\, w'}$, wenn w den Winkel bezeichnet, unter dem ein in der Höhe y parallel zur Axe einfallender Strahl zwischen beiden Systemen die Axe schneidet. Also ist

$$\frac{y'}{y} = \beta_0 = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Hiernach die Angularvergrösserung

$$\gamma = \frac{tg\, u'}{tg\, u} = \gamma_0 = -\frac{1}{m\beta_0} = +\frac{f_1}{f_2'}$$

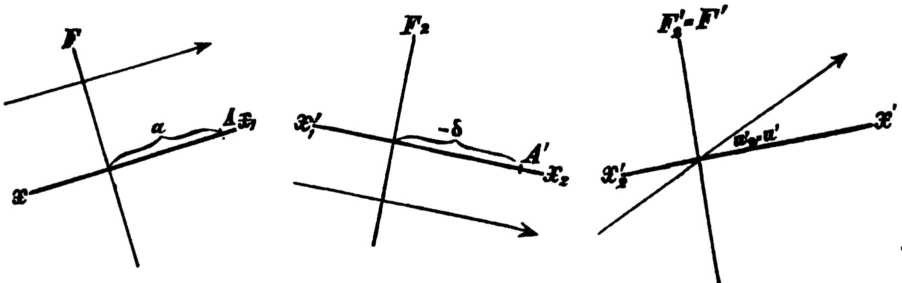
und das Verhältniss conjugirter Abscissen in unserer früheren Bezeichnung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -m\beta_0^2 = +\frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Die Lage eines Paars conjugirter Punkte muss besonders bestimmt werden. Ein solches Paar sind aber offenbar hier (wie immer) der vordere Brennpunkt des ersten Systems und der hintere des zweiten.

c) Combination zweier Systeme, von denen das eine ein teleskopisches ist.

Sei das erste ein teleskopisches und durch den Werth von β_1 oder γ_1, sowie durch die Lage zweier conjugirter Punkte A, A' und das Verhältniss von $f_1' : f_1$



(Ph. 813.)

$= m_1$ bestimmt. Das zweite sei durch F_2, F_2', f_2, f_2' bestimmt, und die gegenseitige Lage der beiden Systeme durch den Abstand von F_2 gegen den Punkt A', $A'F_2 = \delta$. Die Bildaxe des vorderen Systems coincidire wieder mit der Objektaxe des hinteren. Dann ist der hintere Brennpunkt des zweiten Systems auch der des ganzen Systems, da parallel zur Axe einfallende Strahlen zwischen beiden

Systemen parallel zur Axe verlaufen, also auch ebenso auf das zweite System auffallen. Der vordere Brennpunkt des ganzen Systems ist leicht zu berechnen, als der in Bezug auf das vordere (teleskopische System) zum vorderen Brennpunkt des zweiten Systems conjugirte. Sein Abstand a von A berechnet sich gemäss (III) zu

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2} \quad \text{oder} \quad a = -m_1 \delta \cdot \gamma_1^2.$$

Die Brennweite des Bildraums ist

$$f' = \frac{h}{tg\, u'} = \frac{y_1}{y_1'} \cdot \frac{y_1'}{tg\, u'} = \frac{1}{\beta_1} \cdot f_2' = -m_1 \gamma_1,$$

die des Objektraums

$$f = \frac{h'}{tg\, u} = \frac{h'}{tg\, w} \cdot \frac{tg\, w}{tg\, u} = f_2 \cdot \gamma_1 = -\frac{1}{m_1 \beta_1} \cdot f_2.$$

Die Bedeutung der hier benützten Zwischengrössen y_1, y_1', w ist aus ihrer Bezeichnung wohl ohne weiteres ersichtlich.

Ganz analog ist die Betrachtung, wenn das vordere System endlich, das hintere teleskopisch ist.

d) Combination zweier teleskopischer Abbildungen.

Jede sei durch die Werthe von β oder γ, und die Lage eines Paars conjugirter Punkte A_1, A_1'; A_2, A_2', sowie die Verhältnisse $m_1 = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right)$; $m_2 = \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)$ gegeben; die gegenseitige Lage durch den Abstand $A_1'A_2 = \delta$.

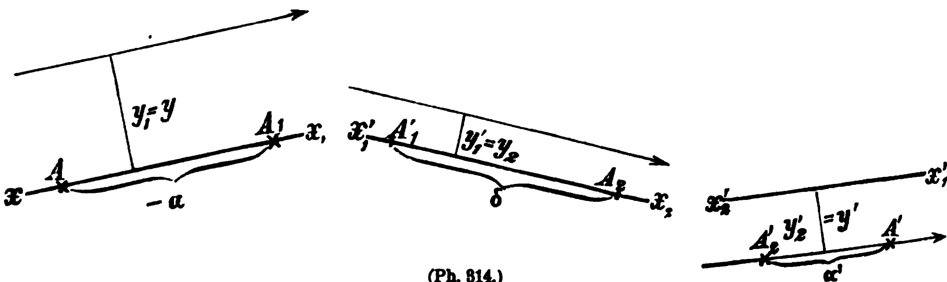
Die resultirende Abbildung ist, wie leicht einzusehen, ebenfalls teleskopisch. Ihr Vergrösserungsverhältniss $\beta = \frac{y'}{y}$, sowie ihr Convergenzverhältniss γ je gleich dem Produkt der betreffenden Verhältnisse der Einzelsysteme. Denn

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \beta_2 \cdot \beta_1$$

ebenso

$$\gamma = \frac{tg\, u'}{tg\, u} = \frac{tg\, u'}{tg\, w} \cdot \frac{tg\, w}{tg\, u} = \gamma_2 \cdot \gamma_1.$$

Die Lage eines, und sogar zweier Paare conjugirter Punkte ist ebenfalls leicht ermittelt, denn der zu A_1' in Bezug auf System 2 conjugirte Punkt A' liegt von



(Ph. 814.)

A_2' in der Entfernung $a' = -m_2 \delta \cdot \beta_2^2$ und ist offenbar in Bezug auf das ganze System conjugirt zu A_1. Ebenso ist der zu A_2 in Bezug auf System 1 conjugirte Punkt A von A_1 um eine Strecke a entfernt (im Sinne des Lichteinfalls!), die gegeben ist durch

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2}.$$

Wir haben also im Ganzen das Resultat: Durch Combination zweier endlicher Systeme entsteht im Allgemeinen eine endliche,

nur in einem Falle eine teleskopische Abbildung. Durch Zusammensetzung zweier teleskopischer Abbildungen entsteht immer eine teleskopische; durch Zusammentritt einer endlichen und einer teleskopischen Abbildung immer eine endliche.

Umgekehrt lässt sich nach denselben Betrachtungen und Formeln eine gegebene endliche Abbildung immer in zwei endliche oder in eine endliche und eine teleskopische Theil-Abbildung zerlegen; eine gegebene teleskopische Abbildung entweder auch in zwei endliche (mit den zugewandten Brennpunkten coincidirende) oder in zwei teleskopische. —

Unsere Formeln gestatten ohne weiteres die Ausdehnung auf beliebig viele Systeme, wobei wir uns auf den Fall lauter endlicher Systeme beschränken wollen.

Zusammensetzung beliebig vieler endlicher Systeme.

Der Abstand der vorderen Brennebene des Gesammtsystems von der vorderen des ersten Systems sei wieder mit σ, der Abstand der hinteren Brennebene des Gesammtsystems von der des letzten Einzelsystems mit σ' bezeichnet; die Brennweiten der Einzelsysteme mit f_1, f_1'; $f_2, f_2' \ldots f_k \cdot f_k'$, die des ganzen mit f und f'.

In Bezug auf die Richtung der Brennebenen, die Lage der Hauptaxen und des ganzen Systems gelten dieselben Betrachtungen wie vorher: dieselben fallen bezw. zusammen mit der Objektbrennebene und Objektaxe des ersten, sowie der Bildbrennebene und der Bildaxe des letzten Einzelsystems.

Um die Lage der Brennebenen und die Grösse der Brennweiten des Gesammtsystems zu berechnen aus denen der einzelnen Systeme, seien die Abstände der einander zugewandten Brennpunkte, je zweier aufeinander folgender Systeme

$$F_1' F_2 = \Delta_1, \quad F_2' F_3 = \Delta_2, \quad F'_{k-1} F_k = \Delta_k.$$

Die hintere Brennebene des Gesammtsystems ist das Bild der hinteren Brennebene des ersten Systems, welches successive von den darauffolgenden Systemen entworfen wird. Bezeichnet man den Abstand der hinteren Brennebene des aus den p ersten Systemen gebildeten Systems von der des $p$ten mit σ_p', so hat man, wie leicht ersichtlich, zur Bestimmung von $\sigma' = \sigma_k'$ folgendes System von Gleichungen:

$$\sigma_2' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad \sigma_3' = -\frac{f_3 \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'} \text{ etc.;}$$

$$\text{allgemein } \sigma_p' = -\frac{f_p \cdot f_p'}{\Delta_{p-1} - \sigma'_{p-1}}.$$

Hieraus ergiebt sich σ' zunächst in Form eines Kettenbruchs

$$\sigma' = -\cfrac{f_k \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{\Delta_{k-2} + \cfrac{\vdots}{\Delta_2 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_1}}}}.$$

Ganz ebenso erhält man

$$\sigma = +\cfrac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta_1 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_2 + \cfrac{\vdots}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} f'_{k-1}}{\Delta_{k\ 1}}}}}$$

Um die Brennweiten des Gesammtsystems zu finden, haben wir ganz ebenso wie bei der Zusammensetzung zweier Systeme successive das Convergenzverhältniss in den Punkten zu suchen, in welche F_1', der Reihe nach abgebildet wird und alle diese Verhältnisse mit einander und mit f' zu multipliciren. Das Resultat ist

$$\frac{h}{tg\,u_1'} \cdot \frac{tg\,u_1'}{tg\,u'_2} \cdot \frac{tg\,u_2'}{tg\,u_3'} \cdots \frac{tg\,u_{k-1}'}{tg\,u_k'} = \frac{h}{tg\,u'} = f'.$$

Wir erhalten auf diese Weise, wenn wir die Brennweite des aus den ersten p-Systemen gebildeten mit $f'_{1,p}$ bezeichnen, successive

$$f'_{1,2} = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad f'_{1,3} = \frac{f'_{1,2} \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'}; \quad \ldots\ldots \quad f'_{1,k} = f' = \frac{f'_{1,k-1} \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1}}.$$

Also

$$f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot f_3' \cdots f_k'}{\Delta_1 (\Delta_2 - \sigma_2') \cdot (\Delta_3 - \sigma_3') \cdots (\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1})}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist nach den oben für σ_p' aufgestellten Formeln ohne weiteres zu berechnen. Bezeichnen wir ihn mit N_k, so ist aus obiger Herleitung ersichtlich, dass N_k mit den vorangehenden Werthen N_{k-1}, N_{k-2} etc. in der Weise zusammenhängt, dass

$$N_k = \frac{\Delta_{k-1} N_{k-1} + f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{N_{k-1}}$$

ist u. s. f. Mit Hilfe dieser Beziehung ist N_k noch leichter zu berechnen. Man kann das Resultat dieser Rechnung auch unmittelbar in Kettenbruchform angeben oder andere Schemata zu Hilfe nehmen. Doch wollen wir diese rein formelle Seite der Frage hier nicht weiter erörtern, sondern verweisen auf die einschlägige Literatur, in welcher die »dioptrischen Kettenbrüche« wiederholt behandelt worden sind[1]).

Man erhält analog für f

$$f = (-1)^{k-1} \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_k}{N_k},$$

wo N_k dieselbe Grösse ist, wie in dem Ausdruck für f_1.

Wenn statt der Brennpunkte und Brennweiten, sowie der Brennpunktsabstände (Δ) andere Grössen zur Bestimmung der Abbildungsweise und gegenseitigen Lage der Einzelsysteme gegeben sind, so erhält man durch analoge Verfahren wie wir sie oben angewendet haben, die entsprechenden für das zusammengesetzte System. Wir unterlassen die Ausführung dieser Rechnung hier unter Verweis auf die oben citirte Literatur, in welcher sie zu finden ist und werden auch hierauf nur gelegentlich in speciellen Fällen Veranlassung haben, zurückzukommen.

---

[1]) A. F. Moebius, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften von Linsengläsern. Crelle's Journ. 5, pag. 113. 1830, und Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, ibid. 6, pag. 215. 1830.

F. W. Bessel, Ueber die Grundformeln der Dioptrik, Astr. Nachr. 18, pag. 37. 1840.

L. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877, § 21 ff. Einführung der Determinanten in dies Problem von

F. Casorati, Le propietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati, Milano 1872, pag. 101. Weitere Ausarbeitungen auf diesem Wege von

G. Ferrapis, Atti R. Acc. di Torino 16, pag. 7. 1880.

F. Monoyer, Séanc. Soc. Franc. de Phys. 1883, pag. 148, übers. in Exner's Repert. 21, pag. 58. 1885.

L. Matthiessen, Schlöm. Zeitschr. 29, pag. 343. 1884, ibid. 32, pag. 170. 1887.

Alle diese Arbeiten behandeln das Problem unter Voraussetzung der speciellen Verhältnisse mit denen sich der nachfolgende Artikel beschäftigt.

Für uns ist es im Augenblick genügend, überhaupt festgestellt zu haben, dass und in welcher Weise etwa sich die wesentlichen Bestimmungsstücke einer zusammengesetzten Abbildung berechnen lassen aus denen der sie formirenden Einzelabbildungen.

Literatur.

Die Theorie der optischen Bilder ist, wie mehrfach hervorgehoben, fast stets unter specielleren Voraussetzungen hergeleitet, als wir oben benützt haben. Die wichtigsten Arbeiten für die Entwickelung dieser Lehre sind, ausser den im Text bereits angeführten von Moebius, Gauss, Bessel, Listing, Maxwell, Helmholtz, Casorati, Ferraris, Matthiessen u. A. noch aus der Zeit vor Gauss:

Kepler, Dioptrice, Augsb. 1611, (ohne Kenntniss des richtigen Brechungsgesetzes, auf der erfahrungsmässigen Thatsache homocentrischer Strahlenvereinigung beruhend!).

Cotes in R. Smith, System of Opticks, Cambr. 1738, 2, pag. 76.

L. Euler, Dioptrice, Petersb. 1769—71.

Lagrange, Nouv. mém. acad. Berlin pour 1778, pag. 162. 1780.

Piola, Effemer. astron. di Milano 1821.

Biot, Traité d'Astron. phys. 3 ed. Paris 1841, Bd. 1 u. 2.

Von neueren Darstellungen sind noch zu erwähnen:

K. L. Bauer, Zur Theorie dioptr. Instrum., München 1866.

V. v. Lang, Wien. Sitzber. 63, pag. 686. 1871, Pogg. Ann. 149, pag. 353. 1873.

F. Neesen, Abbildg. v. leucht. Obj. in einem nicht centr. Linsensyst., Diss. Bonn 1871.

F. Parow, Durchg. d. Lichts d. belieb. brech. Flächen, Diss., Bonn 1876.

Ch. Pendlebury, Lenses and systems of lenses treated after the manner of Gauss, Cambr. 1884.

P. Zech, Math. natw. Mitth., Tübingen 1887.

S. Czapski.

Realisirung der optischen Abbildung
A. durch dünne Büschel nahe der Axe centrirter Kugelflächen.

(Fundamentaleigenschaften der Linsen und Linsensysteme.)

Wir haben bisher immer nur angenommen, dass eine »optische Abbildung« zu Stande komme, ohne uns darum zu kümmern oder Voraussetzungen darüber zu machen, in welcher Weise des näheren dies geschehe. Wir nahmen es als durch die tägliche Erfahrung feststehend an, dass optische Abbildungen thatsächlich vorkommen und untersuchten darauf hin zunächst die allgemeinen Gesetze, denen eine jede solche Abbildung, kraft ihrer Entstehung durch punktweise Vereinigung gradliniger Strahlen nothwendig unterliegen muss, auf welche Weise sie auch immer zu Stande gekommen sein mag.

In dem Folgenden sollen einige besonders wichtige Verwirklichungs-Arten von Abbildung näher untersucht werden. Es soll gezeigt werden — und dies ist, wie wir früher bereits ausführten, nunmehr das einzige was zu zeigen noch übrig bleibt — unter welchen physischen Bedingungen in gegebenen Fällen eine Abbildung zu Stande kommt, welchen Beschränkungen dieselbe gegenüber der vorher von uns angenommenen unendlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel in praxi immer unterliegt, wie Objekt- und Bildraum zu einander liegen und wie sich die Hauptbestimmungsstücke der Abbildung, d. h. die Brennweiten und die Oerter der Brennpunkte aus den Daten des Falles selbst berechnen lassen.

Da wir nach dem letzten Abschnitt eine wie auch immer zusammengesetzte Abbildung stets zerlegen können in die combinirte Wirkung successiver Theilabbildungen, so können wir uns hier darauf beschränken, die einfachsten möglichen Fälle von Abbildung zu untersuchen, d. h. die Abbildung durch Spiegelung oder Brechung von Lichtstrahlen an einer einzelnen, zwei verschiedene Medien trennenden Fläche. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf die Untersuchung sphärischer Flächen, welche, wie wir ebenfalls schon einmal hervorhoben, für die Theorie der optischen Instrumente allein von Bedeutung sind. Ein Büschel homocentrischer Lichtstrahlen falle auf eine solche Fläche und werde an ihr gebrochen.

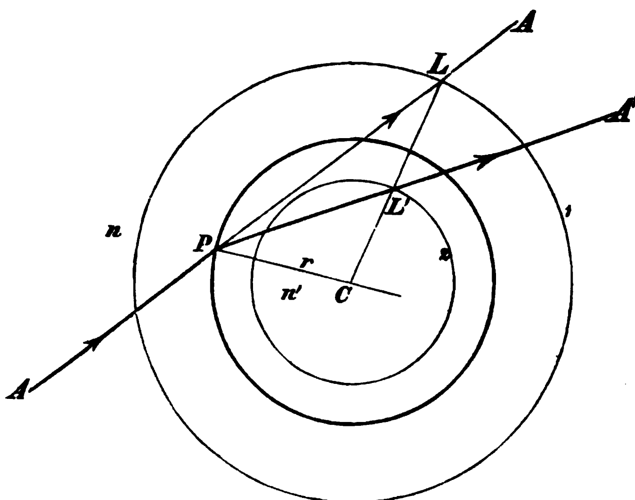
Eine brechende Fläche.

Weg eines Strahls. Sei zunächst nur ein Strahl des Büschels betrachtet. Er falle in einem Medium vom Brechungsindex n auf eine Kugel vom Index n', mit dem Radius r und dem Mittelpunkt C. Die durch den einfallenden Strahl AP und C gelegte Ebene — die der Zeichnung — ist dann Einfallsebene, da der Radiusvector CP Einfallsloth ist; sie enthält daher auch den gebrochenen Strahl PA'. Die Richtung dieses ist bestimmt durch das Brechungsgesetz, d. h. durch die Gleichung

$$n \sin CPA = n' \cdot \sin CPA'$$

oder

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'.$$



(Ph. 315.)

Graphisch lässt sich der gebrochene Strahl wohl am einfachsten durch folgende, wie es scheint zuerst von Weierstrass[1]) angegebene Construktion ermitteln (Fig. 315). Man schlage um C Kreise resp. Kugeln mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$ und $r_2 = \frac{n}{n'} \cdot r$. Den Punkt L, wo der erstere Kreis vom auffallenden Strahl zum zweiten Mal getroffen wird verbinde man mit C, den Schnittpunkt von LC und Kreis 2, L' mit P. Dann ist PL' der gebrochene Strahl. Denn da nach Construktion $CL' : CP = CP : CL$, so ist $\Delta CPL' \sim CL'P$; daher $\angle PLC = L'PC$. In ΔCPL ist aber $\sin CPL : \sin PLC = CL : CP = n' : n$. Folglich ist $\angle CPL'$ der zu CPL gehörige Brechungswinkel i'.

Eine andere Construktion giebt Reusch an (Construktionen zur Lehre etc., Leipzig 1870, pag. 1).

Beiläufig ergiebt sich aus dieser Construktion, dass alle von dem Punkte L der Hilfskugel 1 auf die brechende Kugel fallenden Strahlen, in jeder Neigung und jedem Azimut, nach dem Punkte L' hin gebrochen werden, in welchem

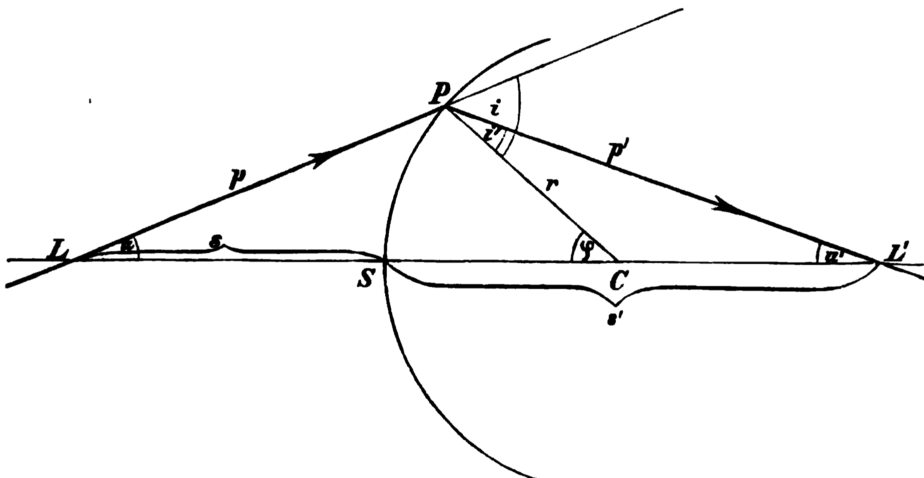
[1]) Nach Schellbach, Z. f. phys. u. chem. Unt. 2, pag. 135. 1889, von W. schon im Tageblatt der Naturf. Vers. zu Wien 1858 mitgetheilt. Später unabhängig von Lippich, Denkschr. d. Kais. Ak. d. Wiss. z. Wien 38, pag. 8, 1877, gefunden.

die Grade LC die Hilfskugel 2 schneidet und umgekehrt die von L' ausgehenden nach L hin.

Wegen dieser wichtigen Eigenschaft heissen Punktepaare, die in den Abständen $(n'/n)r$ und $(n/n')r$ auf je einer Centralen der in einem Medium vom Index n befindlichen Kugel vom Index n' und Radius r liegen »aplanatische Punktepaare«. Dieselben haben eine grosse praktische Wichtigkeit in der Construktion der starken Mikroskopobjektive, welche seit AMICI wesentlich mit auf deren Anwendung beruht.

Ausser diesen giebt es nur noch zwei Schaaren von Punkten gleicher Eigenschaft: jeder Punkt der Kugelfläche und ihr Mittelpunkt sind sich selbst offenbar in gleicher Uneingeschränkheit conjugirt. Die auf diese Weise vermittelten Abbildungen fallen jedoch — da sie sich nur auf Punkte beziehen, die in einem Paar von Flächen liegen — ausserhalb der gesetzmässigen Beziehungen, die wir auf Grund unserer allgemeinen Betrachtungen ableiteten.

Ausser in diesen Fällen findet eine Abbildung durch endliche Büschel im Allgemeinen nur noch in so weit statt, als die sie vermittelnden Büschel flächenhaft (nicht räumliche) sind. Bei der Kugel — wie bei jeder Rotationsfläche — fallen alle Strahlen welche den Mantel eines Kegels mit der Centralen (bezw. Rotationsaxe) als Axe bilden unter gleichem Winkel ein, werden daher auch unter gleichem Winkel gebrochen und bilden folglich nach der Brechung einen Kegelmantel mit derselben Axe wie die einfallenden Strahlen.



(Ph. 316.)

Analytisch ist der Weg eines Strahls und die Abbildung von Punkten durch solche auf axialen Kegelmanteln gelegene Strahlengruppen in folgender Weise zu bestimmen (Fig. 316).

Ist die Entfernung eines Punktes L des Strahls vom Einfallspunkte P, $PL = p$, vom Scheitel S der brechenden Kugel $SL = s$ und von deren Mittelpunkt C, $CL = c = s - r$, die Neigung des Strahls gegen die Centrale $PLC = u$ wird der Einfallswinkel CPL wieder mit i bezeichnet und die entsprechenden Grössen für das gebrochene Strahlenbüschel mit denselben aber gestrichenen Buchstaben, so haben wir in ΔCLP

$$CL : CP = \sin CPL : \sin CLP \quad \text{oder} \quad c = r \cdot \frac{\sin i}{\sin u},$$

welche Gleichung gestattet, aus c, r und u i zu berechnen. Für den gebrochenen

Strahl haben wir analog $c' = r \cdot \frac{\sin i'}{\sin u'}$. Hierin ist i' durch die Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$ bestimmt und u' alsdann durch die Beziehung $\varphi = u - i = u' - i'$ oder $u' - u = i' - i$. Also giebt uns obige Gleichung den Werth von c'. Die Scheitelabstände s und s' sind dann einfach $s = c + r$; $s' = c' + r$. Die Strahllängen p und p' sind analog zu bestimmen, wie die Mittelpunktsabstände durch die sich ebenso ergebende Gleichung

$$\frac{p'}{p} = \frac{\sin u}{\sin u'},$$

wo zur Berechnung von u' dieselben Zwischenbeziehungen zu benutzen sind wie oben. Es sind also in einfachster Weise alle Bestimmungsstücke eines gebrochenen Strahls berechenbar aus denen des einfallenden. Nebenbei ergiebt sich aus obigen Beziehungen, dass

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{c'}{c} \quad \text{oder} \quad n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p}. \tag{1}$$

Die Vorzeichen sind hier wie in allen folgenden und den vorhergehenden Entwickelungen nach dem in der analytischen Geometrie üblichen Schema bestimmt. Wir rechnen Strecken auf der Axe oder auf Strahlen von den angenommenen Fixpunkten aus im Sinne des einfallenden Lichts (von links nach rechts), und solche senkrecht zur Axe von ihr aus nach oben als positiv. Die Vorzeichen der Winkelgrössen ergeben sich hieraus von selbst.

Den Radius einer brechenden (oder spiegelnden) Kugel rechnen wir als positiv, wenn dieselbe dem einfallenden Lichte ihre convexe Seite zukehrt.

Die für die Reflexion geltenden Gleichungen ergeben sich aus den abgeleiteten, wie immer, indem man $n' = -n$ setzt. Wir unterlassen ein näheres Eingehen auf die Besonderheiten dieses Falls an dieser Stelle.

Die angegebene Construction des gebrochenen Strahls und die Formeln für die analytische Verfolgung seines Weges reichen für den Fall beliebig vieler aufeinanderfolgender Brechungen nur dann aus, wenn alle Einfallsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Mittelpunkte aller Kugeln auf einer Geraden liegen, die selbst in der ersten Einfallsebene liegt, die also bei genügender Verlängerung den einfallenden Strahl schneidet. Man nennt in diesem Falle die Kugeln centrirt. Man hat dann stets $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ und $u_k = u'_{k-1}$, wenn d_{k-1} die Entfernung des $k$ten Kugelscheitels vom $k-1$ten bedeutet, und s_k, s'_{k-1}, u_k, u'_{k-1} für die $(k-1)$te resp. $k$te Fläche dieselbe Bedeutung haben wie die gleichen Buchstaben ohne Zeiger für die oben allein betrachtete.

Sind die Flächen aber nicht centrirt, oder ist ihre gemeinsame Centrale, die Axe des Systems, windschief gegen den einfallenden Strahl, so genügen die angegebenen Formeln nicht mehr und auch die graphische Construktion ist nur noch in Gedanken, nicht mehr auf dem Papiere in gleicher Weise ausführbar. Es sind dann statt ebener Dreiecke, wie vorher, die entsprechenden sphärischen aufzulösen. Rechnungsvorschriften für diesen Fall sind wohl zuerst von L. SEIDEL[1]) veröffentlicht.

Normal einfallendes endliches Büschel. Aberration.

Gegen die brechende Kugelfläche SP mit dem Mittelpunkt C falle ein Büschel ein, dessen »Hauptstrahl« (in dem früher angegebenen Sinne) durch C

[1]) Trigonometr. Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichts an centrirten sphärischen Flächen. Sitzber. Münch. Akad. 1866, pag. 263, abgedruckt in STEINHEIL und VOIT, Angewandte Optik. Leipzig 1891, pag. 259; auch HANSEN, Abh. d. Sächs. Akad. 10, pag. 95 bis 202. 1871.

geht, dessen Divergenzpunkt L ist. Es genügt dann, um den Verlauf aller Strahlen des Büschels zu erhalten, die in einem Hauptschnitt, etwa der Zeichenebene, gelegenen Strahlen zu betrachten. Die gebrochenen Strahlen liegen ja in diesem Falle in derselben Ebene, und alle Strahlenkegel werden erhalten durch Rotation der in einer Ebene gelegenen um die Axe LC. Die Gesammtheit aller einfallenden Strahlen lässt sich gruppiren in Strahlenkegel mit der gemeinsamen Spitze L; die Gesammtheit aller gebrochenen Strahlen daher gemäss der Bemerkung pag. 68 in Kegel mit der gleichen Axe LC, aber mit im allgemeinen verschiedenen Spitzen L'.

LP sei einer der einfallenden Strahlen des Büschels, PL' der entsprechende gebrochene. Wir haben bereits gesehen, wie sich die Elemente des letzteren (Scheitelabstand, Neigungswinkel gegen die Axe, Strahllänge) berechnen lassen aus denen des einfallenden. Schon aus den zu dieser Berechnung dienenden Formeln liesse sich schliessen, dass zu gleichem s und r, aber verschiedenem Neigungswinkel u im Allgemeinen auch verschiedene Entfernung s' der Spitze des gebrochenen Strahlenkegels gehört.

Noch deutlicher tritt diese Thatsache und die Beziehung zwischen den fraglichen Grössen hervor, wenn wir beachten, dass in

$$n'\frac{(s'-r)}{p'} = \frac{n(s-r)}{p}, \tag{1}$$

$$p^2 = (s-r)^2 + r^2 + 2r(s-r)\cos\varphi$$

ist und ebenso

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\varphi.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass zu gleichen Werthen von s, r, n und n' verschiedene Werthe von s' gehören je nach der Grösse von φ, dem Oeffnungswinkel der Kugelfläche. Diese Verschiedenheit der Lage der gebrochenen Kegelspitzen bezeichnet man als »sphärische Aberration« oder »Kugelabweichung«. (s. den nächsten Artikel). Wie wir früher gesehen haben (pag. 30) kann man Flächen anderer Gestalt angeben, welche die Eigenschaft haben ein homocentrisches Büschel von gegebener Lage und beliebiger Oeffnung durch Brechung wieder in ein homocentrisches überzuführen (»aplanatische Flächen«). Die Kugel gehört zu denselben insofern sie, wie oben gezeigt, Büschel von bestimmter Lage ebenfalls homocentrisch vereinigt. —

Normal einfallendes Elementarbüschel. Axenpunkte.

Entwickelt man $\cos\varphi$ nach Potenzen von φ, so sieht man weiterhin, dass für solche Werthe von φ, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können gegen die erste, d. h. gegen φ selber $p = s$ und $p' = s'$ ist, also

$$\frac{n(s-r)}{s} = \frac{n'(s'-r)}{s'}. \tag{2}$$

Innerhalb eines Strahlenkegels von dem angegebenen Oeffnungswinkel findet also eine eindeutige Beziehung zwischen s und s' statt, d. h. homocentrische Vereinigung der gebrochenen Strahlen und damit zunächst wenigstens für die auf der Axe gelegenen Punkte eine »Abbildung« in dem von uns früher gebrauchten Sinne.

Die Strahlenvereinigung bei der Brechung eines normal einfallenden Büschels an einer Kugelfläche ist von »zweiter Ordnung«, wie man zu sagen pflegt um auszudrücken, dass es die zweite Potenz von φ (oder u) ist, welche man vernachlässigen musste um die Eindeutigkeit der Beziehungen zu erhalten. Da übrigens unter Vernachlässigung der Grössen von dieser Ordnung die Kugel zusammen-

fällt mit jeder sie im Scheitel berührenden Rotationsfläche anderer Gestalt, so gilt das gefundene Resultat mit gleicher Annäherung auch für solche und es bezeichnet dann in der Formel (2) r den Krümmungshalbmesser der betreffenden Fläche im Scheitel.

Anmerkung. Nebenbei mag darauf hingewiesen werden, dass Gleichung (1) welche ja für jedes Paar von Punkten auf der Axe gilt, für zwei solche Paare $L_1 L_1'$ und $L_2 L_2'$ geschrieben werden kann in den Formen

$$\frac{c_1'}{c_1} : \frac{p_1'}{p_1} = \frac{n}{n'},$$

$$\frac{c_2'}{c_2} : \frac{p_2'}{p_2} = \frac{n}{n'}.$$

welche besagen, dass die Punkte $L_1 S C L_1'$ projectivisch sind zu $L_2 S C L_2'$; ebenso sind sie es zu $L_3 S C L_3'$ etc. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich die Gesetze der Abbildung durch Brechung enger Büschel an centrirten Kugelflächen in sehr eleganter Form entwickeln, wenn man sich auf die ersten Elemente der projectivischen Geometrie stützt. Dies ist der von Möbius, Lippich, Beck und Hankel eingeschlagene Weg. S. die oben (pag. 38) citirten Abhandlungen derselben.

Die Gleichung (2), welche die Beziehung zwischen conjugirten Punkten auf der Axe darstellt ist, wie man sich leicht überzeugt, nichts anderes als der Werth, den die Ausdrücke $n \cdot \sin i$ resp. $n' \cdot \sin i$, d. h. die »optische Invariante« für unendlich kleine Winkel φ annehmen, beide dividirt durch $\sin \varphi$. Dividirt man noch mit r, so erhält man die »Invariante der Brechung« (s. pag. 23) für axiale Elementarbüschel in den für die Rechnung bequemen Formen

$$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right), \tag{2a}$$

oder

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}, \tag{2b}$$

Bezeichnen wir die Differenz der Werthe eines Ausdrucks vor und nach der Brechung an einer Fläche durch ein vorgesetztes Δ, so können wir kürzer schreiben

$$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r}\,\Delta(n). \tag{2c}$$

Abbildung von ausseraxialen Punkten und von Flächen durch genau normal einfallende Elementarbüschel.

Die Abbildung, welche wir bisher statuirt haben, betrifft nur die Punkte je einer Kugelcentralen. Die betreffenden Beziehungen gelten nun für jede solche Centrale mit gleichem Rechte und in gleicher Weise. Führt man also — sei es in Gedanken, sei es thatsächlich (was ganz gut ausführbar wäre) — eine solche Beschränkung der wirksamen Strahlenkegel ein, dass deren Axen sämmtlich durch C gehen und ihre Oeffnungen unendlich klein sind, so würde durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche mit der angegebenen Näherung eine Abbildung des ganzen unendlichen Raumes vom Index n vor der Kugel in den, theils hinter der brechenden Fläche vorhandenen theils vor ihr liegenden ideellen Raum vom Index n' gegeben sein (Fig. 317).

Aber auch diese Abbildung würde nicht in die Rubrik der unter dem allgemeineren Gesichtspunkt betrachteten Arten fallen. Dies kennzeichnet sich schon äusserlich dadurch, dass, wie leicht einzusehen, bei derselben um C concentrische Kugelflächen des Objektraums in eben solche des Bildraums abgebildet werden unter Wahrung der Aehnlichkeit und bei perspektivischer Lage von Figuren auf den Kugelflächen. (Die Radien der conjugirten Kugeln c und c' sind dabei einfach durch die Gleichungen 2a bis 2c in Verbindung mit $c = s - r$, $c' = s' - r$ bestimmt). Bei der von uns früher betrachteten collinearen Abbildung

kommt aber ein solcher Fall unter keinen Umständen vor. Im vorliegenden Falle werden andererseits Ebenen niemals in Ebenen abgebildet und eine Hauptaxe ist nicht zu constatiren.

(Ph. 317.)

In der That treffen auch die im Falle der collinearen Abbildung gemachten Voraussetzungen hier nicht ganz zu. Zum Beweise unserer allgemeinen Gleichungen wurde die Voraussetzung gemacht und benützt, dass alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch wieder vereinigt würden; der Beweis der Collinearität der Abbildung beruhte auf der Annahme, dass die durch irgend welche 3 Punkte gehende Gerade betrachtet werden dürfe als abbildender Strahl jedes der von diesen 3 Punkten ausgehenden Büschel. Diese Bedingung ist aber im vorliegenden Falle nicht erfüllt; derselbe unterliegt daher besonderen Gesetzen, wie den zum Theil oben angegebenen.

Die vorliegende Abbildung — welche sich übrigens auch nicht auf mehr als eine brechende Fläche ausdehnen liesse — zerfällt vielmehr, wie wir nunmehr zeigen wollen, in ein Aggregat von unendlich vielen einzelnen Abbildungen (mit den Centralen als Hauptaxen), von welchen jede die Bedingungen der Collinearität in einem der Axe unendlich nahe benachbarten Raume erfüllt.

Beschränkung auf den Fall paraxialer Punkte. Collineare Abbildung.

Betrachten wir eine dieser rein axialen Abbildungen und daneben die eines der Axe unendlich nahe gelegenen Punktes L_1 (Fig. 318). Das diesen Punkt abbildende Büschel mag nun ein streng centrales sein, wie L_1PQ oder auch nur

(Ph. 318.)

annähernd ein solches wie L_1SQ, d. h. seine Axe L_1R mag nur überhaupt unendlich wenig gegen die anfänglich angenommene LCL' geneigt (sein im letzteren Falle kann man das Büschel als Theil eines streng centralen mit L_1C als Axe ansehen), so wird doch dieser Punkt L_1 mit derselben Genauigkeit der Strahlenvereinigung abgebildet, wie L selber. Dies gilt für jeden der ursprünglichen Axe

unendlich nahen Punkt und für jedes von einem solchen ausgehende Strahlenbüschel, dessen Axe seinerseits gegen die ursprüngliche unendlich wenig geneigt ist und welches eine unendlich kleine Oeffnung hat.

In einem solchen »fadenförmigen« Raum und für Strahlenbüschel, die ganz in ihm verlaufen, findet dann die Beziehung der Collinearität statt. Denn wenn auch nicht alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homocentrisch vereinigt werden, so ist doch die Lage jedes Punktes schon als Schnittpunkt je zweier völlig bestimmt und wenn demgemäss für Punkte, die auf einer beliebigen der Axe nahen, einer »paraxialen« Geraden liegen, bewiesen ist, dass ihre Bilder ebenfalls auf einer Geraden liegen, so gilt dies in dem betreffenden Raum eben allgemein. Erstere Voraussetzung trifft aber, wie ohne weiteres zuzugestehen ist, im vorliegenden Falle zu; denn paraxiale Gerade können durchweg als abbildende Strahlen angesehen werden.

Durch Brechung paraxialer unendlich dünner Strahlenbüschel an einer Kugel wird also eine collineare Abbildung des um die betreffende Centrale gelegenen fadenförmigen Raums bewirkt. Auf diese können wir daher ohne weiteres unsere allgemeinen Resultate anwenden.

Wir haben absichtlich oben diesem Falle einer collinearen Abbildung solche von nicht collinearer, wenn auch sonst zum Theil weniger eingeschränkter Abbildung vorangeschickt, um an diesen Beispielen zu zeigen, wann die im vorigen Capitel abgeleiteten allgemeinen Gesetze Anwendung finden und wie ihr Geltungsbereich zu bestimmen ist.

Grundfaktoren der Abbildung durch eine brechende Fläche.

Die Axe des Objektraums wie Bildraums fällt hier zusammen mit der Kugelcentralen, also fallen auch der Richtung und dem Orte nach hier beide Axen mit einander zusammen. Denn erstens erfüllt diese Centrale die Bedingung, sich selbst conjugirt zu sein (ein senkrecht im Scheitel einfallender Strahl geht ungebrochen weiter). Zweitens werden Ebenen (elemente) senkrecht zu dieser Linie abgebildet in ebensolche. In der That haben wir ja gesehen, dass bei der nicht collinearen Abbildung durch beliebige »centrale« Büschel, pag. 72, um den Kugelmittelpunkt concentrische Kugelflächen abgebildet werden in ebensolche. Für den einer Axe unendlich nahen Raum sind nun beide Abbildungsweisen, die oben und die zuletzt betrachtete, dem Abbildungs-Vorgange und daher auch dem Resultate nach identisch. In diesem beschränkten Gebiete aber kann die zur Axe normale Kugelfläche identificirt werden mit dem zu ihr senkrechten Ebenenelement. Jeder Punkt des Abbildungsraums (des Raums nahe der Axe) kann angesehen werden als Punkt des Objekt- wie des Bildraums — ein Verhältniss, welches wohl im ideellen Falle aber durchaus nicht bei jeder Verwirklichungsweise optischer Abbildung besteht. Je nach seiner Lage zur brechenden Fläche ist jeder Punkt aber »reeller« oder »virtueller« Brennpunkt eines Büschels, und zwar enthält der Raum vor der brechenden Fläche die reellen Objektpunkte der Raum hinter ihr die reellen Bildpunkte und vice versa.

Auf Grund dieser Ueberlegung und der schon abgeleiteten Beziehung für conjugirte Abscissen lassen sich nunmehr auf inductivem Wege für die betrachtete Art von Abbildung an einer Fläche sowohl als an beliebig vielen die allgemeinen Abbildungsgesetze ableiten, welche wir im vorigen Abschnitt deductiv hergeleitet haben. Dies ist der von GAUSS und HELMHOLTZ und seitdem von der überwiegenden Mehrzahl der Autoren eingeschlagene Weg. Wir unsererseits sind bereits im Besitz der allgemeinen Resultate und wenden dieselben nur durch Specifikation auf den vorliegenden Fall an.

Die Brennebenen sind nach unserer Definition die Bilder der unendlich entfernten Ebenen. Ihre Lage zum Scheitel der brechenden Fläche erhalten wir,

indem wir in einem der Ausdrücke 2[a] bis [c] das eine Mal s', das andere Mal $s = \infty$ setzen. Nämlich

$$\left.\begin{aligned} SF &= -\frac{nr}{n'-n} \\ SF' &= +\frac{n'r}{n'-n} \end{aligned}\right\} \text{ als Scheitelabstände der Brennpunkte.}$$

Die Brennweiten sind nach einer unserer Definitionen gleich dem Verhältniss der Höhe eines zur Axe parallelen Strahls zur Tangente seines Neigungswinkels nach der Brechung. Im vorliegenden Fall sind die Tangenten und Sinus von Strahl-Axenwinkeln einander und dem Bogen selbst gleich zu setzen, und, wie ohne weiteres ersichtlich, ist dann die Brennweite des Objekt- bezw. Bildraums direkt gleich dem negativ genommenen Abstand des betreffenden Brennpunkts vom Scheitel. (Dieser Umstand erklärt die Einführung des Worts »Brennweite« für eine Grösse, die sich uns nur als das Verhältniss zweier Grössen darbot.)

Es ist also

$$f = +\frac{nr}{n'-n}; \quad f' = -\frac{n'r}{n'-n} \quad \text{und } f:f' = -n:n'.$$

Hieraus ergiebt sich, dass bei der betrachteten (dioptrischen) Abbildung 1) die Brennweiten stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen und 2) dass ihr Verhältniss, — von dem wir bereits wissen, dass es constant ist, — gleich dem der Medien ist, auf welche sie sich beziehen. Die erstere Folgerung reiht die hier betrachtete, dioptrische Abbildung in die früher unterschiedene Hauptgattung der rechtläufigen. In der That kann man aus der Natur der Brechung (auch wenn dieselbe ein anderes als das SNELLIUS'sche Gesetz befolgte) unmittelbar schliessen, dass die durch sie vermittelten Abbildungen stets rechtläufig sein müssen, nämlich wofern und weil der gebrochene Strahl auf derselben Seite des Einfallsloths liegt (mit ihm einen Winkel von gleichem Vorzeichen bildet) als der einfallende und der Brechungswinkel mit dem Einfallswinkel stetig wächst.

Weiterhin kann man aus den für f und f' abgeleiteten Ausdrücken schliessen, dass bei der Reflexion an einer Fläche, für welche wir $n' = -n$ zu setzen haben $f = f' = -\frac{r}{2}$ ist, also $f:f' = +1$; f und f' haben also stets gleiches Vorzeichen, woraus folgt, dass diese Abbildung rückläufig ist. Auch dies lässt sich unmittelbar aus der Entstehungsweise der Bilder bei der Reflexion entnehmen, nämlich insofern und weil diese durch Strahlen erfolgt, die beim Einfall und Rücktritt auf entgegengesetzten Seiten der Einfallsnormalen liegen und deren Einfalls- und Reflexionswinkel gleichzeitig ab- und zunehmen.

Ferner ergiebt sich aus den Ausdrücken für f, in welchen Fällen die Abbildung durch eine Fläche eine »collective«, in welchen sie eine »dispansive« in dem früher gebrauchten Sinne ist. Nämlich die Abbildung durch einfache Brechung ist, wenn

$$\left.\begin{matrix} n' > n & \text{und} & r > 0 \\ n' < n & \text{und} & r < 0 \end{matrix}\right\} \text{ eine collective,}$$

umgekehrt wenn

$$\left.\begin{matrix} n' > n & \text{und} & r < 0 \\ n' < n & \text{und} & r > 0 \end{matrix}\right\} \text{ eine dispansive.}$$

Die Abbildung durch einfache Reflexion ist eine collective, wenn $r < 0$, eine dispansive wenn $r > 0$.

Die Ausdrücke »collectiv«, »dispansiv« finden ihre anschaulichste Begründung in der Modifikation, die jedes einzelne Strahlenbüschel in dem einen oder anderen

Falle erleidet. Denn wie man sich leicht überzeugt, wird ein Strahlenbüschel durch Brechung oder Reflexion an einer collectiven Fläche stets convergenter, durch die einer dispansiven stets divergenter.

Bedenkt man, dass $i = u - \varphi$; $i' = u' - \varphi$ und für unendlich kleine Einfallswinkel $ni = n'i'$ ist, so hat man $n'u - nu = (n' - n)\varphi$ unabhängig von der Entfernung der conjugirten Punkte als ein Maass der Divergenzänderung, wenn nicht die Aenderung des Oeffnungswinkels selber, sondern die seines dioptrischen Werthes in Anschlag gebracht wird. φ ist positiv für negatives r, negativ für positives. Die »optische Divergenzänderung« wie HELMHOLTZ sie nennt[1]), ist also für unendlich kleine Winkel proportional der Oeffnung der brechenden Kugel, welche von den Strahlen benützt ist. Die Divergenz wird vermehrt, wenn das stärker brechende Medium an der convexen Seite der Kugel liegt und umgekehrt.

Für die Reflexion hat man noch einfacher

$$u' - u = -2\varphi$$

in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, d. h. Convexspiegel zerstreuen, Concavspiegel sammeln die Strahlen homocentrischer Büschel, welche auf sie fallen[2]).

Alle anderen Maassbestimmungen der Abbildung durch eine einfache Brechung oder Spiegelung liessen sich zwar aus den gemachten Annahmen speciell für den vorliegenden Fall ableiten; sie folgen für uns aber, wie gesagt, unmittelbar aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen, die hier ohne weiteres anwendbar sind. Man hat nur für f und f' die oben gefundenen Werthe einzutragen und die Lage von F und F' zu berücksichtigen.

Man sieht dann u. A., dass im Scheitel der brechenden Fläche beide Hauptpunkte zusammenfallen, im Mittelpunkt derselben beide Knotenpunkte.

Die Discussion der Abbildung durch einfache Brechung hat insofern ein besonderes Interesse, als für GAUSS, wie wir bereits an anderer Stelle erwähnten, bei Aufstellung seiner Theorie ersichtlich und ausgesprochener Maassen das Bestreben leitend war, die Abbildung durch ein beliebiges System von brechenden und spiegelnden Flächen möglichst vergleichbar zu machen und durch ähnliche Ausdrücke darzustellen, wie die durch eine einzige solche Fläche.

Den Fall der einfachen Spiegelung an einer sphärischen Fläche haben wir bereits erwähnt. Es ist dann $f = f' = -\frac{r}{2}$. Beide Brennpunkte fallen im Halbirungspunkte des nach dem Scheitel gerichteten Radiusvector zusammen; es fallen daher auch Objekt- und Bildraum genau aufeinander, jedoch unter Wahrung der Art gegenseitigen Entsprechens, welche nach den allgemeinen Gleichungen für diesen Fall der »rückläufigen« Abbildung stattfindet.

Wenn $r = \infty$, d. h. die brechende bezw. spiegelnde Fläche eben ist, so werden auch die Brennweiten $= \infty$, wir haben es dann also mit einer »teleskopischen« Abbildung zu thun. Im Falle der Brechung an einer Ebene folgt aus (2b) als Beziehung zwischen conjugirten Scheitelabständen

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} \cdot s,$$

also einfache Proportionalität des Objekt- und Bildabstandes von der brechenden Ebene für alle Werthe und bei stets gleichseitiger Lage in Bezug auf die Ebene.

[1]) Physiol. Optik. 2. Aufl., pag. 64.

[2]) Manche englischen Darstellungen räumen nach dem Vorgange von CODDINGTON und namentlich wohl von LLOYD den Divergenzveränderungen der Büschel durch optische Systeme den ersten Rang bei deren Studium ein.

Das Convergenzverhältniss γ ist für eine einfache Brechung stets $\gamma = \frac{s}{s'}$, also hier $\gamma = \frac{n}{n'}$; die Lateralvergrösserung $\beta = \frac{n s'}{n' s} = +1$.

Im Falle der Spiegelung an einer ebenen Fläche ist $s' = -s$; $\gamma = -1$; $\beta = +1$, also Objekt und Bild liegen stets symmetrisch zur spiegelnden Fläche und sind einander congruent.

In diesem letzteren Falle ist, wie eine ganz einfache Betrachtung lehrt, die Abbildung weder in Bezug auf das Gebiet noch in Bezug auf die wirksamen Strahlen auf den fadenförmigen Raum beschränkt, der um je eine zur Fläche senkrechte Gerade herum gelegen ist, sondern sie findet in jeder beliebigen Ausdehnung in gleicher Weise statt und wird durch beliebig weite Strahlenbüschel in aller Strenge verwirklicht. Es ist dies der einzige Fall, in welchem eine Abbildung von solcher Ausdehnung stattfindet. Da er aber für die Abstufung der Lage- und Maassbeziehungen der beiden Abbildungsräume gar keinen Spielraum offen lässt, so ist er natürlich nur von beschränktem Nutzen für den Zweck, welchem die »optischen Instrumente« überhaupt dienen. Die Spiegelung an einer (oder mehreren) Ebenen ist ein Mittel, um ein Object oder ein von anderen optischen Systemen entworfenes Bild in unveränderter Gestalt an eine andere Stelle des Raums zu versetzen. Das von einer ungeraden Anzahl ebener Spiegel gelieferte Bild ist dabei symmetrisch gleich, das von einer geraden Anzahl gelieferte congruent dem Objekt, wie sich aus dem obigen von selbst ergiebt[1]).

Viele brechende Flächen (centrirtes optisches System).

Die Abbildung durch Brechung oder Spiegelung centraler Elementarbüschel an einer beliebigen Zahl von sphärischen Flächen, welche die Grenzen von Medien verschiedener Brechungsexponenten sind, folgt aus der durch je eine solche Fläche bewirkten und unseren allgemeinen Gesetzen der collinearen Abbildung und Combination von solchen Abbildungen. Wenn auf die betrachtete erste Fläche eine zweite folgt, deren Mittelpunkt innerhalb des fadenförmigen Raums liegt, in welchem allein jene eine collineare Abbildung zu Stande bringt, so kann der Bildraum der ersten Fläche angesehen werden als Objektraum der zweiten; denn die Axen und Strahlen aller einfallenden Büschel bilden dann sehr kleine Winkel auch mit der Centralen dieser Fläche; u. s. f. für beliebig viele aufeinander folgende Flächen. Wenn die Mittelpunkte dieser Flächen nicht nur innerhalb des für die erste Fläche in Betracht kommenden fadenförmigen Raums liegen, sondern sämmtlich auf derselben Geraden, so nennt man die Flächen centrirt. Die betreffende Gerade ist dann, wie aus den früheren Betrachtungen ohne weiteres folgt, selbst die Hauptaxe der Abbildung, auch »Axe des Systems« genannt.

Die Lage der Brennpunkte eines solchen Systems lässt sich unschwer berechnen, sei es durch successive Anwendung einer der Formel (2a) bis (2b), sei es, indem man diese in Form eines Kettenbruchs bringt, sei es endlich, indem man auch hier von den Determinanten Gebrauch macht. Gleiches gilt für die Berechnung der Brennweiten des zusammengesetzten Systems. Wir wollen uns

[1]) Näheres über die durch mehrfache Spiegelung (sogen. Winkelspiegel) entworfenen Bilder siehe in den früher aufgeführten Lehrbüchern der geometrischen Optik von Lloyd, Parkinson, Meisel, Heath u. A. Die specielle Literatur citirt H. Maurer, Grunert's Archiv (2) 9, pag. 1. 1890, gelegentlich der Discussion einiger besonders interessanter Fragen, die sich an dieses Instrument knüpfen.

aber hierbei nicht aufhalten, da wir diese Aufgabe im Princip schon im vorigen Abschnitt pag. 64 ff. gelöst haben und verweisen hier nochmals auf die daselbst citirte Litteratur, welche das betreffende Problem mehr unter dem speciellen Gesichtspunkte behandelt, unter welchem es sich uns hier darbietet, als unter dem allgemeineren, von dem aus wir es damals betrachteten.

Von Interesse ist uns hier im wesentlichen nur eine Folgerung, betreffend das Verhältniss der beiden Brennweiten nach beliebig vielen Brechungen oder Spiegelungen. Von diesem hat LAGRANGE[1]) für einen speciellen Fall, HELMHOLTZ[2]) allgemein bewiesen, dass es stets gleich dem Verhältniss der Medien des Objekt- bezw. Bildraums sei — wie wir im Falle einer einzigen Brechung durch direkte Ausrechnung fanden.

HELMHOLTZ zeigt, dass die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'}, \quad \text{also} \quad \beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'},$$

welche bei jeder einzelnen Brechung gelten, durch Multiplication zu dem gleichen Ausdruck $\beta\gamma = (n/n')$ für beliebig viele Brechungen führen. Nach unseren allgemeinen Gleichungen ist aber $\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$, folglich bei jeder dioptrischen Abbildung auch $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$.

Wir unsrerseits können den Beweis ohne weiteres darauf stützen, dass wie bereits pag. 65 die Brennweiten eines aus conaxialen beliebig zusammengesetzten Systems gefunden haben, ausgedrückt durch die der einzelnen Systeme wie folgt

$$f = \frac{(-1)^{k-1} f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k}{N_k}; \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{N_k},$$

worin N_k ein gewisser von den Constanten und Lagebeziehungen der einzelnen Systeme abhängiger Ausdruck war. Also ist

$$\frac{(-1)^{k-1} f'}{f} = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{f_1 f_2 \cdot \ldots \cdot f_k} = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \cdots \left(\frac{f_k'}{f_k}\right).$$

Die Verhältnisse der Einzelbrennweiten aber sind, wie wir gesehen haben, gleich dem negativen Verhältniss der Brechungsindices des Objekt- und Bildraums und offenbar ist der Index des Bildraums des $p$ten Systems gleich dem des Objektraums des $(p+1)$ten, folglich ist

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{(2k-1)} \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \cdots \frac{n_{k+1}}{n_k} = -\frac{n'}{n}.$$

Im Falle der rein katoptrischen Abbildung (durch lauter Spiegelungen) ist jedes einzelne

$$\frac{f_k'}{f_k} = +1,$$

also

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{k-1},$$

d. h. $+1$ oder -1 je nachdem die Zahl der Spiegelungen eine ungerade oder gerade ist.

Ist die Abbildung durch Spiegelungen und Brechungen bewirkt, »katadioptrisch«, so wird $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ oder $= +\frac{n'}{n}$, je nachdem die hierbei eingetretenen Spiegelungen gerade oder ungerade an Zahl sind.

---

[1]) Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin. Classe math. 1803, pag. 1.

[2]) Handbuch der physiologischen Optik 1867, pag. 50.

Dies sind also die Bedingungen, unter welchen eine solche Abbildung »rechtläufig« oder »rückläufig« ist, wie wir sie pag. 48 bereits antecipirt hatten.

Unter Benützung der hier festgestellten Beziehungen zwischen f und f' lassen sich nun alle früher abgeleiteten Gleichungen entsprechend modificiren. Eine besonders einfache Form nehmen dieselben in dem sehr häufigen Falle an, dass erstes und letztes Medium gleich, also $f' = \pm f$ ist. Doch überlassen wir die Discussion der besonderen Verhältnisse, welche dieser speciellen Annahme entsprechen, späteren Gelegenheiten.

Die einfache geometrische Bedeutung, welche die »Brennweiten« im Falle der Brechung an einer einzelnen Fläche — und auch im Falle der an beliebig vielen, wenn diese nach verschwindendem Zwischenraum auf einander folgen — hatte, nämlich gleich dem negativen Abstand des Brennpunkts von dem betreffenden brechenden Fläche zu sein, geht bei einem System von Flächen mit endlichen Zwischenräumen natürlich ganz verloren. Die Brennpunkte und alle anderen früher betrachteten Cardinalpunkte können dann gegen die brechenden Flächen und gegen einander selbst jede Lage einnehmen, unter Wahrung nur der früher hergeleiteten allgemeinen Gesetzmässigkeiten, z. B. müssen immer, wenn $n' = n$ ist, also $f' = \pm f$ die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammenfallen etc.[1])

Linsen.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist der Fall eines aus 2 brechenden Flächen bestehenden Systems, welches beiderseits ein Medium von gleichem Index (den wir $= 1$ setzen können) hat; denn die künstlich hergestellten optischen Instrumente bestehen fast durchgängig aus solchen binären Systemen und auch alle anderen lassen sich jedenfalls in Gedanken immer in solche zerlegen. Man nennt dieselben bekanntlich Linsen.

Je nach der Krümmung der die Linse begrenzenden Flächen nach aussen unterscheidet man dieselben als biconvexe, biconcave, planconvexe, planconcave und concav-convexe. Oft wird bei der Bezeichnung auch die Stellung der Linse zu den einfallenden Strahlen mit angedeutet, indem der Krümmungssinn der ersten Fläche in dem Namen vorangestellt, also zwischen planconvexen, und convex-planen, concav-convexen und convex-concaven Linsen unterschieden wird.

Bezeichnen wir die erste und zweite Fläche mit den Indices 1 und 2, so ist, wenn wir den relativen Brechungsexponenten der Linsensubstanz gegen das äussere Medium mit n bezeichnen, den Scheitelabstand der beiden Linsenflächen mit d (»Dicke« der Linse)

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \qquad f_1' = -\frac{nr_1}{n-1}$$

$$f_2 = -\frac{nr_2}{n-1} \qquad f_2' = \frac{r_2}{n-1}.$$

Die Abstände der Brennpunkte der einzelnen Flächen von denselben sind gleich den negativ genommenen bezüglichen Brennweiten. Die Grösse $\Delta = F_1' F_2$ in den Formeln für die Zusammensetzung zweier conaxialen Abbildungen (der Abstand des vorderen Brennpunkts des zweiten Systems vom hinteren der ersteren) wird daher im vorliegenden Falle

$$\Delta = f_1' - f_2 + d.$$

---

1) Man sehe u. A. die Discussionen von MATTHIESSEN, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 32, pag. 170. 1887, und BROCKMANN, Inaug.-Diss., Rostock 1887, über die in katadioptrischen Systemen auftretenden Sonderverhältnisse.

Trägt man hierin obige Werthe ein, so findet man die Brennweiten der Linse

$$f = -\frac{f_1' f_2}{\Delta} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)R}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = -f,$$

und nach den Formeln

$$\sigma = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \qquad \sigma' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta},$$

ebenso die Abstände der Linsenbrennpunkte von den zugewandten Flächenbrennpunkten; hieraus dann weiter die Lage der Linsenbrennpunkte und anderen Cardinalpunkte zu den Scheiteln der brechenden Fläche. Nämlich der Abstand des vorderen Brennpunkts vom Scheitel der ersten Fläche ist

$$s_F = \sigma - f_1 = -\frac{r_1(n r_1 + R)}{(n-1)R};$$

der Abstand des hinteren Brennpunkts vom Scheitel der zweiten Fläche

$$s_F' = \sigma' - f_2' = +\frac{r_2(n r_2 - R)}{(n-1)R},$$

worin überall $R = n(r_2 - r_1) + (n-1)d$.

Die Abstände der Hauptpunkte von den zugewandten Linsenscheiteln sind

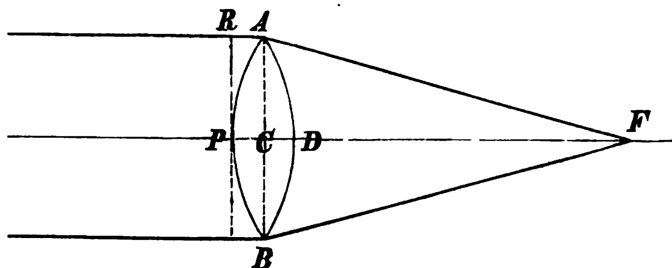
$$s_H = s_F + f = -\frac{(n-1) r_1 d}{(n-1)R}$$

$$s_H' = s_F' + f' = -\frac{n-1) r_2 d}{(n-1)R}.$$

Oft hat man es mit dem Reciproken der Brennweite zu thun, wie wir später sehen werden, der sogen. »Stärke« der Linse $\frac{1}{f} = \varphi$; diese drückt sich durch die Reciproken der Radien, die Krümmungen $\frac{1}{r_1} = \rho_1$ und $\frac{1}{r_2} = \rho_2$ nach obigem, wie folgt aus:

$$\varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n-1)^2}{n} d \rho_1 \rho_2.$$

RAYLEIGH[1]) leitet eine Formel für die Brennweite einer Convex-Linse, als Funktion ihrer freien Oeffnung, Dicke und des Brechungsexponenten direkt aus dem Princip der gleichen optischen Längen her. Wenn die ebene Welle RPQ mit gleicher Phase nach F übergeführt werden soll, so muss (Fig. 319) der Lichtweg $[PDF]$ $= [RAF]$ sein. Nun ist



(Ph. 319.)

$$[PDF] = DF + n \cdot PD = DF + n \cdot d = PC + CF + (n-1)d,$$

CF aber ist bei einer dünnen Linse stets sehr nahe $= f$, also

$$[PDF] = PC + f + (n-1)d.$$

Andrerseits ist $[RAF]$, wenn dies der Weg des den scharfen Rand der Linse passirenden Strahls ist

$$[RAF] = RA + AF = PC + \sqrt{f^2 + y^2} = FC + f\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f^2} + \ldots\right),$$

also, wenn höhere Potenzen von $\frac{y}{f}$ als die zweite vernachlässigt werden,

[1]) Phil. Mag. (5) 8, pag. 480. 1879. S. auch ibid. 20. pag. 354. 1885.

$$[RAF] = PC + f + \frac{1}{2}\frac{y^2}{f}.$$

Damit also $[RAF] = [PDF]$ sei, muss

$$(n-1)d = \frac{1}{2}\frac{y^2}{f} \quad \text{sein, daher} \quad f = \frac{1}{2}\frac{y^2}{(n-1)d}.$$

Bei Glas von Index $n = 1{\cdot}5$ ist dann die halbe Oeffnung der Linse die mittlere Proportionale zwischen Dicke und Brennweite — eine bekannte Regel der älteren Optik.

Endigt die Linse nicht in einen scharfen Rand, so ist für d die Differenz der Linsendicken am Rand und in der Mitte zu setzen.

Die Vorzeichen von f bezw. φ hängt nicht nur von denen der Radien ab, sondern auch von der Dicke der Linse. Z. B. bei einer biconvexen Linse ist $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ also f_1 und f_2 beide > 0; daher $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ positiv, so lange

$$d < \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1};$$

wenn d diesen Grenzwerth überschreitet ist $f < 0$, das System wird dispansiv, trotzdem es aus zwei collectiven zusammengesetzt ist. Wenn $d = \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$, also $\Delta = 0$ und $f = \infty$, so ist die Linse ein teleskopisches System.

In ähnlicher Weise kann man die Werthe und Vorzeichen studiren, welche die Brennweite einer einfachen Linse bei anderen Formen und Dicken annimmt.

Verschwindend dünne Linsen.

Als einfachster Fall hebt sich derjenige heraus, wenn die Dicke der Linse sehr klein ist gegen ihre Brennweite, so dass man den Einfluss der Dicke auf die Brennweite vernachlässigen kann. Alsdann ist

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}; \quad \varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2).$$

Die Stärke der Linse ist dann also einerseits proportional dem um 1 verminderten Brechungsindex, anderseits der Differenz der beiden dem einfallenden Lichte zugewandten Krümmungen. Letztere allein bestimmen das Vorzeichen von f und φ. Je nachdem die nach aussen gerichtete Convex- oder Concavkrümmung der Linse die stärkere ist, wirkt die Linse als collectives oder dispansives System.

Die Theorie solcher Linsen von verschwindender Dicke allein wär es, welche vor den Untersuchungen von Gauss eine einigermaassen übersichtliche und genaue Darstellung gefunden hatte.

Da in manchen Fällen für eine vorläufige, ungefähre Veranschlagung der Wirkungen eines optischen Systems die Linsen derselben in erster Näherung als verschwindend dünn betrachtet werden können, so wollen wir auf die Theorie derselben auch hier kurz eingehen.

Die Brennweiten einer solchen Linse sind offenbar gleich den Abständen der Linse selbst von den Brennpunkten. Die Theorie der dünnen Linse wird hierdurch sehr ähnlich der einer einzelnen brechenden Fläche; nur dass die Brennweiten gleiche Grösse haben, also die Brennpunkte symmetrisch zur Linse liegen und sowohl die Haupt- als auch die Knotenpunkte als am Ort der Linse selbst zusammenfallend zu betrachten sind. Für die Entfernungen conjugirter Punkte von der Linse a, b ergiebt sich die einfache Formel

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f},$$

wenn wieder die Entfernungen a, b von der Linse aus im Sinne der Lichtbewegung als positiv gerechnet werden.

Die Vergrösserung $\beta = \frac{y'}{y}$ wird $= \frac{b}{a}$.

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Axenpunkten,

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{a}{b}.$$

Befinden sich mehrere unendlich dünne Linsen in Contakt und kann man auch die Gesammtdicke dieses Systems gegen seine Brennweite vernachlässigen (was natürlich immer nur bei einer sehr geringen Anzahl von Linsen genügend annähernd der Fall ist), so ergiebt sich die »Stärke« des ganzen Systems

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots \frac{1}{f_k} = \Sigma \frac{1}{f_k} = \Sigma \varphi_k,$$

d. i. gleich der Summe der Stärken der Einzellinsen oder, durch die einzelnen Radien und Brechungsindices ausgedrückt

$$\varphi^{(k)} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) + \ldots\ldots,$$

$$\varphi^{(k)} = \Sigma (n_k - 1)(\rho_k - \rho_k'),$$

wenn erste und zweite Fläche jeder Linse durch hochgestellten, die Linsen selbst durch den unteren Index unterschieden werden.

Wenn die dünnen Linsen nicht im Contakt befindlich, sondern durch endliche Intervalle getrennt sind, so werden die Ausdrücke für die Brennweite complicirter und der Brennpunktsabstand ist dann besonders zu berechnen. Diese Aufgabe ist aber ganz analog derjenigen, die Bestimmungsstücke eines Systems zu berechnen, dessen einzelne brechende Flächen gegeben sind und sei deshalb hier nur auf die betr. Orts citirte Literatur verwiesen.

Von Interesse ist vielleicht nur noch eine kurze Discussion der möglichen Combinationen zweier getrennter dünner Linsen.

Ist ihre Entfernung $= d$, so ist ihr optisches Intervall wie bei einer einzelnen Linse von endlicher Dicke

$$\Delta = f_1' - f_2 + d, \quad \text{also hier} \quad -\Delta = f_1 + f_2 - d.$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d};$$

daher

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1 \varphi_2.$$

1) Sind f_1 und f_2 beide > 0, also beide Linsen collectiv, so sieht man, dass die Brennweite des zusammengesetzten Systems ihren kleinsten positiven Werth hat, wenn $d = 0$ ist, die Linsen sich berühren. Mit wachsendem d nimmt f zu und es wird $f = \infty$, wenn $d = f_1 + f_2$; das System ist dann ein teleskopisches. Bei noch grösserem d erhält f einen grossen negativen Werth und dieser nimmt mit weiter wachsendem d unbegrenzt ab.

2) Sind f_1 und f_2 beide < 0, also beide Linsen dispansiv, so hat f für $d = 0$ seinen grössten und zwar negativen Werth. Bei wachsendem d nimmt f an Grösse ab, bleibt aber stets negativ.

3) Ist die eine Linse collectiv, die andre dispansiv, z. B. $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, so ist bei $d = 0$ die Brennweite des zusammengesetzten Systems positiv oder negativ, je nachdem f_1 dem absoluten Werthe nach kleiner oder grösser als f_2 ist.

a) Wenn $[f_1] > [f_2]$, also hier $f_1 + f_2 > 0$, so nimmt mit wachsendem d f wachsende negative Werthe an und wird bei $d = f_1 + f_2$ unendlich, d. h. das System wird wieder teleskopisch. Bei noch weiterer Steigerung von d durchläuft f abnehmende positive Werthe

b) Wenn $[f_1] < [f_2]$ also $f_1 + f_2 < 0$, so hat f im Falle des Contakts beider Linsen seinen grössten positiven Werth. Bei wachsendem d wird f kleiner, bleibt aber stets positiv. Im Falle wo $d = f_1 + f_2$, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems coincidirt mit dem hinteren der ersten und eine teleskopische Abbildung resultirt, sind die Maassverhältnisse der letzteren, wie wir früher fanden, (pag. 62) gegeben durch die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f_2}{f_1}; \quad \gamma = \frac{tang\, u'}{tang\, u} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Die wichtigsten Werke der ausserordentlich umfangreichen für den Gegenstand dieses Abschnitts vorhandenen Literatur sind schon in den beiden vorangehenden Artikeln namhaft gemacht worden. Es sei daher auf diese verwiesen. Eine bis in die neuere Zeit reichende Zusammenstellung, die jedoch bei weitem nicht erschöpfend ist, hat MATTHIESSEN versucht. Grundriss etc., pag. 272, und PFLÜGER's Arch. f. Physiol. 19, pag. 553. 1879.

S. CZAPSKI.

Realisirung der optischen Abbildung
B. durch schiefe Elementarbüschel.
(Astigmatische Brechung.)

Der vorher betrachtete Fall der Brechung von Elementarbüscheln, deren Axen der gemeinsamen Centrale von Kugelflächen unendlich nahe sind, ist nicht der einzige, in welchem eine collineare Abbildung zu Stande kommt. Von Bedeutung für die Theorie der optischen Instrumente ist noch der andere Fall, dass die abbildenden Büschel zwar auch unendlich eng, elementar, ihre Axen aber nicht der gemeinsamen Centralen, sondern einem unter endlichem Winkel gebrochenen, das System durchsetzenden Strahl unendlich nahe sind. Allerdings wird die Preisgabe der einen Beschränkung hier durch andere neu einzuführende compensirt; aber es bleibt, wie wir zeigen wollen, dennoch eine Abbildung bestehen, welche in ihrem engen Bereich den Bedingungen unserer allgemein behandelten genügt und darum auch ihren Gesetzen unterworfen ist.

Spiegelung und Brechung eines gegen eine einzelne Kugelfläche schief einfallenden Elementarbüschels.

Auf die schönen geometrischen Entwickelungen, durch welche namentlich REUSCH[1]) und LIPPICH[2]) die Theorie dieses Problems ausgebaut haben, können wir hier leider nur hinweisen; um die uns in erster Reihe interessirenden Maassbeziehungen zu erhalten, beschränken wir uns auf die mehr analytische Beweisführung.

Wir haben das vorliegende Problem schon bei frühererGelegenheit (pag. 31—36) in seinen Grundzügen behandelt. Wie wir damals sahen, wird ein schief einfallendes ursprünglich homocentrisches Büschel durch die Spiegelung oder Brechung an einer irgend wie gestalteten Fläche (endlicher Krümmung) im allgemeinen in ein »astigmatisches« verwandelt, d. h. in ein solches, dessen sämmtliche Strahlen in erster Näherung durch zwei zu einander und zu einem mittleren Strahl senkrechte, getrennt liegende Gerade die »Brennlinien« oder »Bildlinien« gehen. Diesen Charakter — tetraëdrische Modifikation des Büschels nennt es REUSCH — behält das Büschel auch nach beliebig vielen Brechungen bei.

Wir haben also nur noch die Maassbeziehungen aufzusuchen, welche zwischen den Elementen des einfallenden und gebrochenen Strahls obwalten, wenn die wirksame Fläche sphärisch ist und wollen hier diese Untersuchung nur unter der weiteren Beschränkung durchführen, dass der Hauptstrahl nie gegen die Axe des Systems windschief sei. Alsdann folgt für die Richtung der Brennlinien eine Vereinfachung, welche die ganze Betrachtung sehr erleichtert.

Denn um diese Richtung zu bestimmen, hätten wir nach den Ausführungen des angezogenen Abschnitts durch den Schnittpunkt der Büschelaxe mit einer der Wellenflächen der gebrochenen Strahlen die Ebenen der grössten und kleinsten Krümmung jener Fläche zu legen. Die Wellenfläche eines beliebig weit geöffneten, ursprünglich homocentrischen Büschels nach der Brechung an einer Kugel ist aber wegen der Symmetrie aller Verhältnisse um den vom leuchtenden Punkt nach dem Kugelmittelpunkt gerichteten Strahl, wie schon pag. 32 hervorgehoben, nothwendig eine Rotationsfläche mit diesem als Axe. Ihre Hauptkrümmungslinien sind daher die Schaaren der Meridiankurven und Parallelkreise zu dieser Axe. Strahlen, welche vom leuchtenden Punkte aus nach den Meridian- und Breitenkreisen der brechenden Kugel (bezogen auf die gleiche Axe) hinzielen, schneiden die Wellenflächen der einfallenden Strahlen in jenen Hauptkrümmungskurven und das gleiche gilt von den in jenen Kreisen an der Kugel gebrochenen Strahlen mit Bezug auf deren Wellenfläche. Die Meridiane und Breitenkreise der Kugel aber liegen Element für Element in bezw. senkrecht zur Einfallsebene, also ist dies auch mit den Brennlinien eines ursprünglich homocentrischen Büschels der Fall.

Dies gilt auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn die Einfallsebenen aller dieser zusammenfallen, d. h. wenn die Brechungen in einem System centrirter Kugeln stattfinden und der Hauptstrahl des einfallenden Büschels mit der Axe des Systems in einer Ebene liegt.

---

[1]) Univ.-Progr., Tübingen 1857, und POGG Ann. 130, pag. 497. 1867.

[2]) Denkschr. d. kais. Akad. d. Wiss. z. Wien 38, pag. 163. 1877.

Dass die Brennlinien des weiteren bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung beide als senkrecht zum Hauptstrahl des Büschels stehend angenommen werden dürfen, bewiesen wir früher allgemein (pag. 36). Hierdurch sind also ihre Richtungen vollständig bestimmt.

Um nun die Lagenbeziehung der conjugirten Punkte auf den Axen, zunächst für eine einzige Brechung zu ermitteln, denken wir uns durch die Axe des einfallenden und des gebrochenen Büschels die beiden Hauptschnitte gelegt, den einen mit der Einfallsebene zusammenfallend, den andern senkrecht zu ihr.

Den ersteren bezeichnen wir als Meridional-, Tangential- oder ersten Hauptschnitt, den anderen als Equatoreal-, Sagittal- oder zweiten Hauptschnitt, und unterscheiden die auf sie bezüglichen Grössen soweit nöthig durch verschiedene Buchstaben oder Indices.

Die Strahlen des einfallenden Büschels, welche in diesen Ebenen liegen, werden in den gebrochenen Büscheln den analogen Schnitten angehören und zwar die des Tangentialschnitts streng, weil ja Strahlen bei der Brechung in der Einfallsebene verbleiben; die des Sagittalschnitts wenigstens bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Denn diese Ebenen gehen eine Berührung von mindestens der zweiten Ordnung mit den Kreiskegeln ein, welche durch Rotation von LPL' um LCL' (Fig. 320) entstehen und welche einander nach dem pag. 68 gesagten

(Fig. 320.)

in ihrer ganzen Ausdehnung conjugirt sind. Hieraus folgt nun bereits, dass der zu L conjugirte Bildpunkt der Sagittalstrahlen der dort betrachtete Punkt L' ist, in welchem der gebrochene Strahl von der Centralen LC getroffen wird. Wir bezeichnen ihn jetzt mit L_s'. Er wird auch »zweiter« Bildpunkt des gebrochenen Büschels genannt im Gegensatz zu dem der Tangentialstrahlen als »erstem« Bildpunkt. (Dies wohl die bei weitem häufigere Bezeichnungsweise; umgekehrt bei Lippich).

Die Strahlenvereinigung in L_s' ist nach dem Vorstehendem eine solche von zweiter Ordnung. Dies ergiebt sich auch schon daraus, dass in dem Sagittalschnitt in Bezug auf die Einfallsebene Symmetrie vorhanden ist, also Strahlen, die unter gleichem Winkel gegen diese Ebene diesseits und jenseits derselben von L_s ausfahren, in L_s' mit einander streng vereinigt werden.

Equatorealschnitt. Um die Beziehungen zwischen conjugirten Stücken des einfallenden und des gebrochenen Sagittalbüschels zu erhalten, fälle ich von L_s und L_s' (Fig. 320) auf den Radiusvector CP Senkrechte, nach R und R'. Dann ist $L_s'R' : L_sR = CR' : CR$ oder $PL_s = s$, $PL_s' = s'$ gesetzt,

$$s' \cdot \sin i' : s \cdot \sin i = (s' \cos i' - r) : (s \cos i - r),$$

woraus unter Anwendung der Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$, wird

$$\frac{n \cdot \cos i}{r} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i'}{r} - \frac{n'}{s'},$$

oder

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}, \tag{1}$$

oder in unserer früher eingeführten Bezeichnungsweise

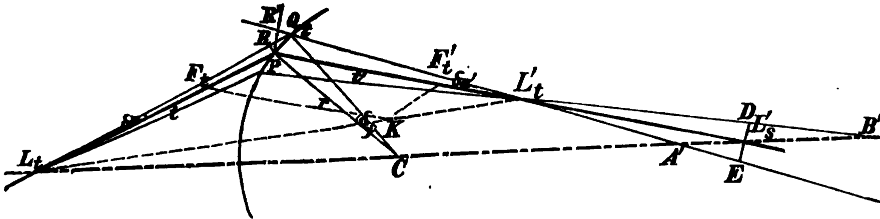
$$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r}\Delta(n \cos i)$$

als die Beziehung zwischen conjugirten Schnittweiten.

Das Verhältniss conjugirter Neigungswinkel von Strahlen gegen die Axe des Büschels — das Convergenzverhältniss in conjugirten Punkten — ergiebt sich einfach, indem für einen Punkt Q_s der Sagittalschnittlinie (senkrecht über oder unter P), gilt

$$PQ_s = s \cdot dv = s' \cdot dv'; \quad \text{also} \quad \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'}. \tag{2}$$

Meridionalschnitt. Um die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der Tangentialbüschel zu erhalten, habe ich die Grundgleichung



(Fig. 321.)

$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i' = Q'$ nach i zu variiren; sie ergiebt für den Strahl LQ_tL' (Fig. 321), dessen Einfallswinkel $= i + di$, dessen Brechungswinkel $= i' + di'$ ist,

$$n \sin(i + di) = n' \cdot \sin(i' + di') = Q + dQ.$$

Entwickeln wir $\sin(i + di)$ und $\sin(i' + di')$ nach dem MACLAURIN'schen Satze und vernachlässigen alle Potenzen von di und di', welche höher als die zweite sind, so finden wir

$$dQ = n \cdot di \cdot \cos i - \frac{1}{2} n\, di^2 \cdot \sin i = n' \cdot di' \cdot \cos i' - \frac{1}{2} n' \cdot di'^2 \cdot \sin i',$$

also

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot \cos i - \frac{1}{2} n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot di \sin i = n' \cdot \frac{di'}{d\varphi} - \frac{1}{2} n' \cdot \frac{di'}{d\varphi} \cdot di' \cdot \sin i',$$

Nun ist $i = u - \varphi$, daher

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} - 1,$$

und ebenso

$$\frac{di'}{d\varphi} = \frac{du'}{d\varphi} - 1.$$

Fälle ich ferner von P Senkrechte auf LQ und $L'Q$, nach R resp. R', so ist wegen der Kleinheit des Bogens PQ_t, der als geradlinig betrachtet werden kann, $RP = PQ_t \cdot \cos RPQ_t = r \cdot d\varphi \cos i$ und andererseits $RP = t \cdot du$ also $t \cdot du = r \cdot d\varphi \cdot \cos i$, welche Gleichung unter Vernachlässigung nur der Grössen von der Ordnung $d\varphi^2$ gilt. Daher ist

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{r \cos i}{t} - 1,$$

und ganz ebenso

$$\frac{di'}{d\varphi} = \frac{r \cos i'}{t'} - 1.$$

Tragen wir diese Ausdrücke für $\frac{di}{d\varphi}$ und $\frac{di'}{d\varphi}$ in die Gleichung für $\frac{dQ}{d\varphi}$ ein, so wird diese:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n\left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)\cos i - \frac{1}{2} n \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2 d\varphi \cdot \sin i$$

$$= n'\left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right)\cos i' - \frac{1}{2} n' \left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right)^2 d\varphi \cdot \sin i'.$$

Oder

$$n' \cos i' \left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right) - n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right) = \frac{1}{2} Q\, d\varphi \left[\left(\frac{r \cos i'}{t'} - 1\right)^2 - \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2\right]$$

bis auf Grössen von der Ordnung $d\varphi^2$ genau.

Hieraus folgt, dass verschiedenen Werthen von $d\varphi$, d. h. verschiedenen Einfallspunkten innerhalb des unendlich kleinen brechenden Kugelelements Werthe von t' entsprechen, die sich um Grössen von der Ordnung der Dimensionen dieses Kugelelements ($r d\varphi$) unterscheiden; es gehören z. B. auch zu Werthen von $d\varphi$ von gleicher Grösse aber entgegengesetztem Vorzeichen verschiedene Werthe von t'. Mit anderen Worten: Strahlenpaare, die in der Einfallsebene symmetrisch zum Hauptstrahl einfallen, werden nicht streng vereinigt (wie im Sagittalschnitt). Die Strahlenvereinigung in L_t' ist nur eine solche von der ersten Ordnung.

In unserer Bezeichnungsweise können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\Delta\left[n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)\right] = \frac{1}{2} Q \cdot d\varphi\, \Delta \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)^2,$$

Unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen von der ersten Ordnung ($d\varphi$) wird dann

$$\Delta\left[n \cos i \left(\frac{r \cos i}{t} - 1\right)\right] = 0, \tag{3}$$

die Beziehung zwischen den Entfernungen t und t' conjugirter Punkte vom Einfallspunkt im Meridianschnitt. Sie wird auch in den Formen gebraucht;

$$\Delta\left[\frac{n \cos^2 i}{t}\right] = \frac{1}{r}\Delta(n \cos i), \tag{3a}$$

oder

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \tag{3b}$$

Das Verhältniss conjugirter Neigungswinkel, das Convergenzverhältniss im Tangentialschnitt, folgt aus den oben schon benützten Gleichungen

$t \cdot du = r d\varphi \cos i$ und $t' du' = r d\varphi \cos i'$, zu

$$\frac{du'}{du} = \frac{\cos i'}{t'} \cdot \frac{t}{\cos i}. \tag{4}$$

Die Abscissen der Hauptbrennpunkte vom Einfallspunkt P aus gemessen sind nach Gleichung (1) resp. (3) für die Sagittalstrahlen

$$s_F = S = -\frac{nr}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad s_F' = S' = \frac{n' r}{n' \cos i' - n \cos i}, \tag{5}$$

für die Meridianstrahlen

$$t_F = T = -\frac{n \cos^2 i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad t_F' = T' = \frac{n' \cos^2 i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}\ ^{1)}.$$

Unter Benützung dieser Grössen können wir die Gleichungen (1) und (3) in der Form schreiben

$$\frac{S'}{s'} + \frac{S}{s} = 1, \tag{1*}$$

$$\frac{T'}{t'} + \frac{T}{t} = 1, \tag{2*}$$

Nach einem, leicht zu beweisenden geometrischen Satze gehen aber die Verbindungslinien zweier Punkte (L, L'), die auf je einer Geraden liegen und deren Abcissen (s, s') bezw. (t, t') einer Gleichung von dieser Form genügen, sämmtlich durch einen Punkt, dessen Coordinaten bezogen auf die Hauptstrahlen als Axen, die Grössen (S, S') bezw. (T, T') sind, und umgekehrt.

Für den Sagittalschnitt kennen wir deren Fixpunkt bereits; es ist der Kugelmittelpunkt C. Mit seiner Hilfe können wir den ersten und zweiten Hauptbrennpunkt F_s, F_s' constructiv ermitteln: als den Schnittpunkt der durch C zum gebrochenen, bezw. einfallenden Hauptstrahl gezogenen Parallelen mit jeweilig dem anderen Hauptstrahl.

Für den Tangentialschnitt können wir umgekehrt den Fixpunkt K aus seinen Coordinaten T, T' construiren, indem wir T und T' auf PL bezw. PL' abtragen nach F_t und F_t', oder sie aus S und S' gemäss den Formeln (5) in üblicher Weise construiren, und durch F_t zu PL', durch F_t' zu PL Parallele ziehen. Der Schnittpunkt dieser ist K. (Eine schönere Construction s. bei LIPPICH, l. c., pag. 171).

Mittelst der Punkte C und K ist es dann sehr einfach, zu jedem Punkt auf dem einen oder anderen Hauptstrahl den in Bezug auf Sagittal- und Tangentialstrahlen conjugirten zu finden. Man hat diesen Punkt nur mit C resp. K zu verbinden und diese Verbindungslinie bis zum Schnitt mit der anderen Axe zu verlängern. Der Schnittpunkt ist der gesuchte conjugirte Punkt.

Einem und demselben Einfallspunkt entsprechen auf diese Weise in Bezug auf Sagittal- und Tangentialschnitt zwei verschiedene conjugirte Punkte. Die Strecke zwischen diesen, die Bildstrecke, ist die centrale Projection der

---

1) Dieselben sind hier nicht identisch mit dem, was wir früher als »Brennweite« definirt haben.

Strecke CK von L aus auf den anderen Hauptstrahl. Dieselbe wird offenbar gleich Null für denjenigen Einfallspunkt, in welchem die verlängerte CK die Axe des einfallenden Büschels schneidet[1]). Dies führt auf die früher betrachteten »aplanatischen Punktepaare« der Kugel (pag. 68).

Astigmatismus. In den Formeln war bisher nichts darüber vorausgesetzt, ob L_s und L_t derselbe Punkt sei, d. h. $s = t$ oder nicht. Aus diesen Formeln (1) und (3) ergiebt sich nun ebenso wie aus obiger Construction und unseren früheren Betrachtungen, dass auch im ersteren Falle im Allgemeinen $s' \neq t'$ ist. Durch die Brechung eines homocentrischen schief einfallenden Elementarbüschels entsteht also eine astigmatische Differenz der Bildpunkte und die eines schon astigmatisch einfallenden erfährt im Allgemeinen eine Aenderung. Da der letztere Fall den ersteren in sich begreift, so leiten wir einen Ausdruck für diese Aenderung aus unseren Formeln ab.

Indem wir $cos^2 x = 1 - sin^2 x$ setzen, wird (3)

$$\frac{n'}{t'} - \frac{n' sin^2 i'}{t'} - \frac{n}{t} + \frac{n\, sin^2 i}{t} = \frac{n' cos\, i' - n\, cos\, i}{r},$$

hiervon Gleichung (1) abgezogen ergiebt

$$n'\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'}\right) - n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = \frac{n' sin^2 i'}{t'} - \frac{n\, sin^2 i'}{t}$$

oder in der eingeführten Bezeichnungweise

$$\Delta n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = Q^2 \Delta\left(\frac{1}{nt}\right). \qquad (6)$$

Der Astigmatismus erfährt keine Aenderung, einem homocentrischen Objektpunkt enspricht also ein homocentrischer Bildpunkt, wenn $n't' = nt$. Diese Bedingungsgleichung führt wiederum auf dieselben »aplanatischen Punktepaare« bezw. Flächen, welche wir früher auf anderem Wege gefunden haben.

Bildlinien. Die Gesammtheit der Strahlen eines unendlich dünnen räumlichen »optischen« Büschels kann man nun in doppelter Weise als ebene Büschel zusammenfassen: ein Mal als Tangential-Büschel, deren Axen sämmtlich durch L_s gehen; das andere Mal als die Sagittalbüschel, deren Axen durch L_t gehen. Die Axen der ersteren werden nach der Brechung durch L_s' gehen, denn diese Axen sind ja identisch mit den Strahlen des sagittalen Hauptbüschels $L_s Q P$ (Fig. 320). Die Axen der letzteren werden nach der Brechung sämmtlich durch L_t' gehen, aus dem analogen Grunde. Die Vereinigungspunkte aller ebenen Tangentialbüschel werden die durch L_t' gehende erste Brennlinie des gebrochenen Büschels bilden; die der ebenen Sagittalbüschel die durch L_s' gehende zweite Brennlinie und es liesse sich hier durch besondere Betrachtung das Resultat gewinnen, welches wir früher auf Grund allgemeinerer Ueberlegung ableiteten: dass diese Brennlinien (bis auf unendlich kleine Abweichungen von der zweiten Ordnung gegenüber den Dimen-

1) Reusch, l. c., pag. 508.

sionen des brechenden Kugelelements) senkrecht auf dem Hauptstrahl und senkrecht zur bezw. in der Einfallsebene liegen[1]).

Anmerkung. Als zweite Bildlinie, welche in der Einfallsebene liegt und durch L_s' geht, bietet sich auf Grund der speciellen Ableitung allerdings zunächst nicht eine zum Hauptstrahl $L_s'P$ senkrechte Gerade dar, sondern das Stück $A'B'$ der Centralen (Fig. 321), welches die beiden äussersten Strahlen des tangentialen Hauptbüschels aus ihr herausschneiden. Durch dieses Stück müssen alle Strahlen des Büschels gehen, denn wenn ich die Fig. 320, um die Centrale LCL' um kleine Winkel aus der Zeichenebene heraus nach vorn und hinten drehe, so bestreiche ich die Gesammtheit aller Strahlen des ganzen Büschels, während $A'B'$ der Grösse und Lage nach ungeändert, also allen gemeinsam ist. Aber die Gerade $C'D'$, welche zu fPL_s' senkrecht ist, erfüllt, wie wir früher gezeigt haben, ebenfalls die Bedingung, dass alle gebrochenen Strahlen ihr bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung nahe bleiben und ist für die meisten Entwicklungen bequemer.

Dass die Strahlenvereinigung in $A'B'$ eine so vollkommene ist, hat für unsere Entwickelungen keinen Werth, da ja die Vereinigung in den ersten Brennpunkten L_t', wie gezeigt, nur von der ersten Ordnung ist.

Die Geometrie bietet natürlich die Hilfsmittel dar, um bei gegebener Grösse des brechenden Elements der Kugel genauer die Art der Strahlenvereinigung in der Nähe von L_s' und L_t' zu untersuchen. (Siehe die Bemerkungen pag. 35—36.)

Während durch Brechung an sphärischen Flächen oder im Scheitel von Rotationsflächen Astigmatismus nur bei schiefem Einfall des Büschels entsteht, bringt die Brechung an einer Fläche doppelter Krümmung im Allgemeinen bei jeder, auch normaler Incidenz des Büschels, eine astigmatische Modifikation desselben hervor. Die Nothwendigkeit hiervon folgt ohne weiteres aus der verschiedenen Krümmung einer solchen brechenden Fläche in verschiedenen, durch den Hauptstrahl gehenden Ebenen. Der so entstandene Astigmatismus, welcher auch beim menschlichen Auge oft vorkommt und auf dem Gebiet der künstlichen optischen Instrumente in dem extremen Fall der Cylinderlinsen verwirklicht ist, war viel eher bekannt und ist bei der genannten Art von Linsen auch viel auffallender als der oben behandelte. Er bildete z. B. für STURM die Anregung und den Ausgangspunkt seiner allgemeinen Untersuchungen.

Die Herleitung der für diesen Astigmatismus geltenden Gesetze bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Wir müssen wegen Mangel an Raum hier auf ein näheres Eingehen verzichten und uns damit begnügen, auf die bezügliche Literatur hinzuweisen.

Die Brechung an einer beliebigen Fläche (doppelter Krümmung) ist, ausser in den Lehrbüchern von LLOYD und A. von C. NEUMANN und L. MATTHIESSEN (s. u.) behandelt.

Das für die Physiologie des Auges wichtige nebst der älteren Literatur findet man in HELMHOLTZ, Physiol. Optik, § 14.

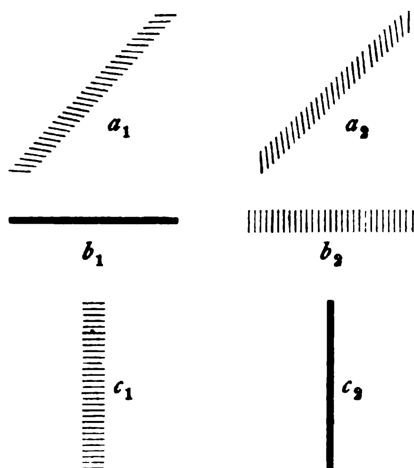
Die Theorie der Cylinderlinsen ist insbesondere von E. REUSCH in einem ebenso betitelten Werkchen (Leipzig 1868) ausgearbeitet worden.

Abbildung ausgedehnter Objekte durch astigmatische Büschel.

Durch Brechung schiefer Büschel wird also im Allgemeinen keine homocentrische Strahlenvereinigung herbeigeführt; als Bild eines Punktes bieten sich zwei zu einander senkrechte Linien dar, wenigstens sind dies diejenigen Stellen des gebrochenen Büschels, in welchen die Concentration des Lichts die grösste ist. Die manchmal aufgeworfene Frage: welche von diesen beiden Linien vom Auge wohl als das eigentliche Bild aufgefasst werde, scheint mir in dieser All-

[1]) In Folge eines Versehens heisst es pag. 34, Zeile 26 v. o. »den ersten Brennpunkt« statt »den zweiten Brennpunkt«.

gemeinheit gar nicht zu beantworten möglich. Unter gewissen Umständen werden wir jedoch in der That veranlasst, dem einen oder dem anderen Bilde den Vorzug zu geben. Denn denken wir uns als Objekt eine kleine zu einem mittleren schief einfallenden (Haupt-) Strahle senkrechte gerade Linie, von deren Punkten Strahlen ausgehn, die jenem mittleren sämmtlich sehr nahe sind (etwa alle die brechende Fläche innerhalb eines kleinen Elements treffen), so wird für diese Punkte je annähernd das gleiche gelten. Die Hauptstrahlen der zu den einzelnen Punkten gehörigen Büschel werden zwar gegen die Normale des abbildenden Kugelsegments etwas verschiedene Winkel bilden, der Astigmatismus der gebrochenen Büschel daher auch etwas verschieden stark sein, doch werden die Bildlinien erster und die zweiter Art je unter sich parallel und ihr Grössenunterschied gering sein. Jeder Punkt der leuchtenden Geraden erscheint also im Bilde (Fig. 322) in eine Linie ausgezogen, ganz gleich ob wir ihn in der ersten (a_1) oder der zweiten (a_2) Bildebene betrachten; das Bild als ganzes muss daher einen undeutlichen, verschwommenen Eindruck machen.



(Ph. 322.)

Wenn jedoch die leuchtende Gerade selbst einer der beiden Reihen von Bildlinien parallel, d. h. entweder in der Einfallsebene des mittleren Hauptstrahls oder senkrecht zu ihr gelegen ist, dann fallen in dem Bilde, dessen Linien sie parallel ist, diese sämmtlich der Länge nach aufeinander, die Breite des Bildes wird hierdurch nicht berührt und dasselbe erscheint fast wie ein normales, scharfes Bild (b_1 resp. c_2). In der anderen Ebene hingegen erscheint jeder Punkt in eine zur Richtung der Geraden senkrechte Linie ausgezogen, die durch den Astigmatismus verursachte Unschärfe erreicht also ihren höchsten Grad b_2 resp. c_1. In diesen beiden Fällen wird demnach unwillkürlich dasjenige Bild als solches schlechthin aufgefasst werden, dessen Linien der Richtung der Geraden parallel sind.

Besteht also das Objekt in einem rechtwinkligen Kreuz, oder noch besser in einem Kreuzgitter, dessen Linien bezw. parallel und senkrecht zur Einfallsebene liegen, so werden die ersteren im zweiten Brennpunkte (dem der Sagittalstrahlen), die letzteren im ersten (dem der Meridianstrahlen) scharf erscheinen und manchmal sogar allein sichtbar sein und diese Erscheinung ist umgekehrt das charakteristische Merkmal und Erkennungszeichen von vorhandenem Astigmatismus. (S. Oertling, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. 1843.)

Anmerkung. Wie empfindlich dasselbe ist, mag an dem Beispiel der Reflexion an einer Kugelfläche gezeigt werden. Für diese gilt im Sagittalschnitt

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2 \cos i}{r}$$

und im Tangentialschnitt

$$\frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = \frac{2}{r \cos i},$$

daher für $s = t$

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{r \cos i} - \frac{2 \cos i}{r},$$

$$\frac{s' - t'}{s' \cdot t'} = \frac{de}{e^2} = \frac{2}{r} \cdot \sin i \cdot tg\, i.$$

Man sieht in letzterem Ausdruck am deutlichsten, in welchem Maasse der Astigmatismus caet. par. mit dem Einfallswinkel wächst; und zwar ist dies in so hohem Maasse der Fall, dass man nach einer Bemerkung von Dr. HUGO SCHROEDER[1]) mit geeigneten Mitteln an einem Flüssigkeitsniveau, etwa einem Quecksilberspiegel, den durch die Krümmung der Erde verursachten Astigmatismus der an ihr reflektirten Büschel noch bemerken könnte. In der That setzen wir den Erdradius

$$r = 6370000\, m \text{ und } i = 80°, \text{ so wird } \frac{de}{e_2} = 0{\cdot}00000175 \text{ rund} = 0{\cdot}000002\, m.$$

Beobachten wir die Erscheinung mit einem Fernrohr, dessen Objektiv 7·5 m Brennweite (ca. 50 cm Oeffnung) hat, also Dimensionen, die für unsere Zeit nicht mehr ungewöhnliche sind, so gilt für die Abbildung durch dieses die frühere Formel für die Tiefenvergrösserung

$$dx' = \frac{dx}{x^2} \cdot f^2.$$

Wenn der vordere Brennpunkt des Objektivs etwa im Spiegel liegt, oder das Objekt sehr weit entfernt ist, so können wir setzen $\frac{dx}{x^2} =$ unserem obigen $\frac{de}{e^2} = 0{\cdot}00000175$, also $dx' = 0{\cdot}000098\, m = 0{\cdot}1\, mm$ ca.

Eine Verschiebung des Bildortes von 0·1 nun würde man aber bei den angenommenen Dimensionen des Fernrohrs sehr wohl wahrnehmen können. Mit einem der modernen Riesenteleskope, etwa dem der Licksternwarte in Californien, würde die Differenz der Bildebenen 0·7 mm betragen, also sehr markant sein. Natürlich müsste das bewusste Quecksilberniveau entsprechend gross und völlig ruhig sein.

Bereich der collinearen Abbildung bei schiefer Brechung.

Als Kennzeichen der collinearen (optischen) Abbildungen hatten wir früher (pag. 39) hingestellt: dass jedem Punkte des einen Raumes ein — und nur ein — Punkt des anderen, jeder Linie des einen Raumes eine und nur eine solche des anderen entspreche. Bei einem räumlichen, unter endlichen Winkeln gebrochenen Elementarbüschel entspricht nun zwar gemäss dem Brechungsgesetze einem einfallenden Strahle nur ein gebrochener, einem Punkte im Objektivraum, aber, gemäss den vorstehenden Betrachtungen, zwei Linienelemente im Bildraum. Es findet also auch nicht einmal für die unendlich nahe um einen einfallenden und den entsprechenden gebrochenen Strahl gelegenen fadenförmigen Raumgebiete die Beziehung der Collinearität statt.

Unsere Betrachtungen zeigen uns aber auch, wie wir das Abbildungsgebiet zu beschränken haben, um auch zwischen conjugirten Punkten eine eindeutige Beziehung zu erhalten. Gemäss denselben werden die im ersten Hauptschnitt (in der Einfallsebene) unendlich nahe an einem mittleren einfallenden Strahl gelegenen Punkte A_1, B_1, C_1 ... durch Strahlen die im selben Hauptschnitt verlaufen und unendlich kleine Winkel mit l bilden eindeutig abgebildet in Punkte A_1', B_1', C_1', welche dem zu l conjugirten Strahle l' ganz nahe und ebenfalls im ersten Hauptschnitt liegen.

Andrerseits werden die im zweiten Hauptschnitt (senkrecht zur Einfallsebene) nahe an l gelegenen Punkte A_2, B_2, C_2 ... durch die in diesem

[1]) Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 7. 1881.

Hauptschnitt einfallenden Strahlen eindeutig abgebildet in Punkte A_2', B_2', C_2' . . . welche in dem senkrecht zur Einfallsebene durch l' gelegten Schnitt, ganz nahe an l' liegen.

In den so definirten, unendlich schmalen Flächenstreifen findet also jeweilig die Beziehung der Collineation d. h. eine »optische Abbildung« in unserem früheren Sinne, statt.

Dei Objektraum der einen Abbildung durchdringt den der anderen im einfallenden Hauptstrahle l, der Bildraum der einen den der anderen im gebrochenen l'. Im übrigen aber sind diese beiden Abbildungen sowohl räumlich getrennt, als auch in ihren Maassverhältnissen verschieden, daher auch gesondert zu behandeln.

Genau genommen, erstreckt sich auch ihr Bereich senkrecht zu den Axen nicht gleich weit. Denn während die Strahlenvereinigung von sagittalen Büscheln, ebenso wie die von paraxialen von zweiter Ordnung ist, fanden wir die der tangentialen Büschel nur von erster Ordnung. Während wir also das Gebiet der Abbildung durch erstere soweit abgrenzen können, dass nur die Quadrate der Büschelöffnungen oder der linearen Büscheldurchmesser nahe der brechenden Kugel gegen die Schnittweiten der Büschel verschwinden, müssen wir es im anderen Falle so beschränken, dass schon jene Durchmesser selbst die gleiche relative Kleinheit besitzen, wenn wir beidemal gleich vollkommene Strahlenvereinigung verlangen [1]).

Der angenommene mittlere Strahl repräsentirt — jeweilig vor oder nach der Brechung — die Axen der Abbildung, d. h. Linienelemente senkrecht zum einfallenden Strahl l werden durch die eine wie die andere Art von ebenen Büscheln, in Linienelementen senkrecht zum gebrochenen Strahl l' abgebildet. Für Gerade im zweiten Hauptschnitt — senkrecht zur Einfallsebene — folgt die Richtigkeit der Behauptung aus Symmetriegründen; das Bild einer zu l senkrechten Geraden kann nur eine Curve sein, deren Scheitel in l liegt, welche also bis auf Abweichung von der zweiten Ordnung jedenfalls mit einer zu l' senkrechten Geraden zusammenfällt. Das Bild einer in der Einfallsebene zu l senkrechten Geraden kann — und wird im Allgemeinen — eine Gerade sein, die mit l' einen endlichen Winkel bildet, wenn wir dieses Bild Punkt für Punkt nach den oben abgeleiteten Gesetzen construiren. Wir können uns jedoch auch hier — durch Betrachtungen, die denen analog sind, durch welche wir die Berechtigung der STURM'schen zum Hauptstrahl senkrechten Brennlinien erwiesen — überzeugen, dass eine durch einen mittleren Punkt dieser Linie gehende, in der Einfallsebene liegende, und zu l' senkrechte gerade Linie von jener anderen überall nur um Grössen zweiter Ordnung entfernt ist oder, was dasselbe, dass die Querschnitte der nach der wahren Bildlinie zielenden Büschel mit einer zur Einfall-

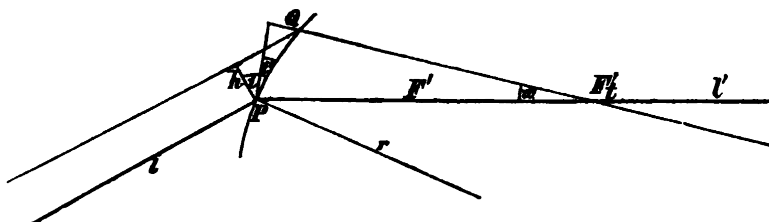
[1]) Die Abgrenzung des Geltungsbereichs der beiden Abbildungen ist oben nur näherungsweise vorgenommen. Eine genaue Discussion dieses Punktes würde uns hier zu weit führen. Es sei daher auf die eingehendere Erörterung LIPPICH's (l. c. pag. 172) hingewiesen und nur noch ein von diesem abgeleiteter Satz angeführt, welcher eine Verallgemeinerung der oben abgeleiteten Beziehungen involvirt.

Projicirt man irgend einen unendlich nahe an l verlaufenden Strahl a auf die beiden durch l gelegten Hauptebenen und sucht zu den Projectionen die bezw. in den Hauptebenen von l' gelegenen Strahlen, so sind diese die Projectionen des zu a gehörigen gebrochenen Strahls.

ebene und zu l' senkrechten, durch den auf l' gelegenen Bildpunkt gehenden Ebene — die Zerstreuungskreise jener Büschel in dieser Ebene — unendlich kleine Dimensionen haben gegenüber ihrer Entfernung von der Axe. Folglich kann man mit genügender Annäherung ihre Mittelpunkte als die Bildpunkte ansehen.

Als weitere und vollständig ausreichende Bestimmungsstücke der beiden Abbildungen, welche so um dieselben beiden Axen orientirt sind, haben wir die Oerter der Brennpunkte und die Werthe der Brennweiten aufzusuchen. Die ersteren haben wir bereits früher gefunden (Gleichung 5).

Die Brennweiten, welche bei paraxialen Büscheln bei einer einzigen brechenden Fläche der Grösse nach übereinstimmen mit diesen Brennpunktsabständen sind hier, wie schon oben bemerkt, nicht ohne weiteres diesen gleich



(Ph. 328.)

zu setzen[1]). Nehmen wir als Definition der Brennweiten die, dass sie gleich seien der Höhe h eines parallel zu der Axe des einen Raums einfallenden Strahls dividirt durch die trigonometrischen Tangente des Winkels u', unter welchem dieser Strahl nach der Brechung die Axe des anderen Raums schneidet, so sieht man, dass für Büschel der ersten Art (Fig. 323)

$$h = PQ \cdot \cos i; \qquad tg\, u' = -PQ \cdot \frac{\cos i'}{PF_t'},$$

ebenso

$$h' = PQ \cdot \cos i'; \qquad tg\, u = -PQ \cdot \frac{\cos i}{PF_t},$$

daher

$$f_t = \frac{h'}{tg\, u} = + \frac{n \cdot \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}$$

$$f_t' = \frac{h}{tg\, u'} = - \frac{n' \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i},$$

also beiläufig

$$\frac{f_t}{f_t'} = -\frac{n}{n'},$$

wie bei paraxialer Abbildung.

Für Büschel der zweiten Art wird, ganz wie bei paraxialen

$$f_s = -PF_s = \frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i}$$

---

1) Dieser Umstand ist von Manchen, wie z. B. auch von REUSCH, nicht beachtet worden.

$$f_s' = -PF_s' = -\frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i},$$

also auch hier

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}.$$

Mit diesen speciellen Werthen der Constanten sind auf die eine wie die andere Abbildung alle Gesetze zur Anwendung zu bringen, welche wir für collineare Abbildungen als allgemeingiltig erwiesen hatten; im Besonderen finden also auch dieselben Beziehungen zwischen den Grössen α, β und γ einerseits und $f:f'$ andrerseits hier statt wie dort.

Collineare Abbildung bei schiefer Brechung an beliebig vielen centrirten brechenden Flächen.

In diesem Falle bleibt jede Abbildungsart für sich bestehn, wofern — wie wir schon früher annahmen -- die betreffenden Flächen sämmtlich centrirt sind und die Axe der ersten Abbildung in einer Ebene liegt mit der gemeinsamen Centralen der Kugeln. Denn alsdann bleiben Büschel, die bei der ersten Brechung meridional oder sagittal waren, von gleichem Charakter bei allen folgenden Brechungen. Man hat es daher mit successiven Abbildungen gleicher Art zu thun. Der Bildraum und die Bildaxe der $k$ten Abbildung wird Objektraum bezw. dessen Axe für die $(k+1)$te Abbildung. Die Lage der Brennpunkte bestimmt sich für jede Fläche nach den obigen Formeln. Wenn also noch die Lage der Flächen selbst, etwa durch ihre Scheitel- oder Mittelpunktsabstände, gegeben ist, so erhält man ohne Schwierigkeit alle Elemente, die für die Zusammensetzung von Abbildungen nach den früher (pag. 50 ff.) aufgestellten Regeln erforderlich sind. Wir haben diese Regeln bereits unter Voraussetzung des hier vorliegenden allgemeineren Falls abgeleitet: dass die Axen der Objekt- und Bildräume der einzelnen Abbildungen beliebig gegen einander orientirt sind und nur die Bildaxe der $k$ten Abbildung coincidirt mit der Objektaxe der $(k+1)$ten.

Literatur.

Das Vorhandensein zweier verschiedener Brennpunkte bei solchen unter endlichem Winkel gebrochenen Büscheln soll zuerst D'ALEMBERT bemerkt haben (Opusc. math. Vol. III. 1764). In Anknüpfung an die speciellen Probleme der Brechung und Spiegelung an Kugelflächen wurde die Natur des einem homocentrisch einfallenden entsprechenden Büschels später von G. B. AIRY (1827) näher untersucht (Camb. Phil. Trans. Vol. III); die von ihm erhaltenen Ergebnisse blieben dann ein fester Bestandtheil der englischen Lehrbücher, zuerst desjenigen von CODDINGTON (3. Aufl. 1829), später der von POTTER (1847), GRIFFIN (1872), PARKINSON (1859) u. A.

In Deutschland lenkte unter dem gleichen Gesichtspunkte E. REUSCH — anscheinend unbekannt mit den Arbeiten seiner Vorgänger — die Aufmerksamkeit auf die Eigenschaften der durch schiefe Brechung an Kugelflächen astigmatisch gewordenen Büschel l. supra cit. (1857).

Inzwischen hatten SCHULTÈN (Mém. des sav. étrang. T. IV, pag. 203. 1836) und namentlich STURM (s. die Citate pag. 34) mit Nachdruck darauf hingewiesen, dass die Constitution eines Büschels nach beliebigen optischen Aenderungen nur eine Folge des MALUS-DUPIN'schen Satzes sei, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen.

Auf noch allgemeinere Voraussetzungen waren die Untersuchungen von HAMILTON, KUMMER und deren Schülern gegründet, die wir früher angegeben haben.

Auf die Arbeiten von STURM, KUMMER etc. stützen sich die von

H. HELMHOLTZ Physiol. Optik 1. Aufl., pag. 238. 1856 (rein analytisch mit Anwendung auf Prismen),

G. QUINCKE, Monatsber. Berl. Akad., pag. 498. 1862; auch POGG. Ann. 117, pag. 563 (experimentelle Verifikation der Sätze von KUMMER an einer einfachen Linse) und

G. KRECH, De luminis fascibus infinite tenuibus disquis. Dissert. Berlin 1863 (theoretische und experimentelle Unters. über die Orte der Brennlinien einer planconvexen Linse).

L. HERMANN, Gratulationsschrift, Zürich 1874. Fortsetzg. in Arch. f. d. ges. Physiologie 20, pag. 370. 1879, untersucht die Möglichkeit, den Astigmat. durch Combination mehrerer Linsen zu vermindern mit besonderer Berücksichtigung der bei den Augen der Säugethiere und Fische vorliegenden Verhältnisse. Der gleichen Anregung entsprangen noch zahlreiche andere Arbeiten, über welche seit 1879 MATTHIESSEN in den Jahresberichten über die Fortschr. d. Opthalmologie von MICHEL (Tübingen) referirt hat.

Durch die Form der Behandlung zeichnen sich aus

CL. MAXWELL, Lond. Math. Soc. 4 (1871—3); 6 (1874—5), ebenso wie

F. LIPPICH, l. supra cit. (1877), und Wiener Sitzber. 1879, pag. 1 (Gang der Lichtstrahlen in einer homog. Kugel m. Rücksicht auf die Entstehung des Regenbogens).

RAYLEIGH, Phil. Mag. 8, pag. 481. 1879; 9, pag. 40. 1880. (Combination gegen einander geneigter Linsen).

C. NEUMANN, Sitzber. Leipz. Akad. 1880, pag. 42. (Brechg. an einer belieb. krummen Fläche), und der vorerwähnte

L. MATTHIESSEN, Sitzber. d. bayer. Akad. d. Wiss. f. 1883, pag. 35. Acta math. 4, pag. 177. 1884. SCHLÖMILCH's Ztschr. f. Math. u. Phys. 33, pag. 167. 1888. BERLIN-EVERSBUSCH, Ztschr. f. vergl. Augenheilk. 6, pag. 103. 1889 u. a. a. O. (über die Unrichtigkeit des STURM'schen Theorems und die richtige Lagen-Bestimmung der Bildlinien). Von den speciellen Schülern dieses behandelte u. A.

L. GARTENSCHLÄGER, EXNER's Rep. 24, pag. 537. 1888 die Abbildung eines »astigmatischen« Objekts durch eine Linse für parallelen Durchgang der Strahlen durch diese).

A. GLEICHEN, WIED. Ann. 35, pag. 100. 1889, und »Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichts dargestellt nach neuen (von SCHELLBACH herrührenden) Methoden.« Leipzig 1889, unterscheidet treffend zwischen den rein geometrischen und den speciell optischen Voraussetzungen und Folgerungen.

Dass bei der schiefen Brechung die jeweilig zu den Hauptschnitten parallelen ebenen Partialbüschel eine collineare Abbildung bewirken, scheint ausser ABBE (Univ.-Vorlesgn.) nur LIPPICH bemerkt zu haben, welcher auch betont, dass alle wesentlichen Gesetze dieser Abbildung blosse Folgen des Bestehens jener Collinearität sind. S. CZAPSKI.

Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

(Theorie der sphärischen Aberrationen.)

Im Vorangehenden ist gezeigt, dass und in wie weit durch Brechung dünner Büschel an Kugelflächen eine Abbildung zu Stande kommt. Unter den gemachten Annahmen zeigte sich diese Abbildung als eine relativ sehr beschränkte: bei centraler Brechung war es nur ein fadenförmiger, die Axe des Systems umgebender Raum, in welchem allein eine »Abbildung« in unserem Sinne stattfand, und dieselbe kam nur zu Stande durch Büschel von unendlich kleiner Winkelöffnung. Die Strahlenvereinigung war dann von der zweiten Ordnung.

Bei schiefer Brechung war das Bereich der Abbildung noch mehr eingeengt; man konnte von einer solchen nur reden, wenn man jeweilig gewisse ebene (zweidimensionale) Büschel in Betracht zog. Die Strahlenvereinigung war für die eine Art von Büscheln sogar nur von der ersten Ordnung; um eine gleiche Genauigkeit der Strahlenvereinigung zu haben wie im anderen Fall, müsste die Oeffnung dieser Büschel also entsprechend noch mehr eingeengt werden. Das räumliche Büschel gab bei schiefem Einfall eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen zweier Raumgebiete eigentlich überhaupt nicht mehr. Diese, gewissermaassen eo ipso stattfindende Abbildung wäre nun für alle praktischen Zwecke gänzlich unzureichend. Die Bilder, welche sie ergiebt, sind ja einerseits unendlich klein bezw. es wird von einem gegebenen Objekt nur ein der Theorie nach unendlich kleiner Theil deutlich abgebildet. Andererseits können wir — unter Vorausnahme dieser später näher zu definirenden und zu erörternden Begriffe — auch schon jetzt schlechthin feststellen, dass die von »unendlich dünnen« Büscheln entworfenen Bilder unendlich lichtschwach wären und dass die »Bildpunkte« so enger Büschel, gemäss der Wellentheorie, als die Beugungswirkung entsprechend eng begrenzter Wellenflächen aufgefasst, statt Punkte vielmehr unendlich grosse Scheiben wären. Die von benachbarten Punkten des Objekts herrührenden Bildscheiben würden sich überdecken, statt eines scharfen Bildes, statt eines punktweisen Entsprechens würde also eine völlige Confusion entstehen, in welcher keinerlei Detail mehr erkennbar wäre.

Wenn wir andererseits die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel ohne weiteres steigerten, so würde, wie wir früher bereits flüchtig angedeutet haben, die Strahlenvereinigung im geometrischen Sinne mehr und mehr unvollkommen und aus diesem Grunde die Abbildung aufgehoben.

Aus diesem Dilemma zwischen anscheinend einander widersprechenden Anforderungen helfen wir uns auf drei, zum Theil zusammengehenden, Wegen. Der eine beruht auf der Unempfindlichkeit, d. h. beschränkten Sehschärfe unserer Augen, der zweite darauf, dass nach den Normen der physischen Optik die Grenzen der Beschränktheit für die eo ipso statthabende Abbildung füglich um ein beträchtliches Stück hinausgeschoben werden dürfen, der dritte und wichtigste endlich in der Möglichkeit, durch geeignete Combination optischer Systeme solche zu erhalten, an denen die früher constatirten Beschränkungen der

Abbildung zum Theil — und unter Umständen bis zu einem sehr erheblichen Grade — beseitigt sind.

ad 1) Alle Bilder sind in letzter Linie dazu bestimmt, dem Auge dargeboten zu werden. Dieses — selbst ein optischer Apparat, dessen nähere Einrichtung wir an späterer Stelle beschreiben werden — isi vermöge dieser seiner physikalischen und ebenso vermöge seiner anatomischen und physiologischen Natur auch seinerseits in seinen Leistungen mannigfach beschränkt. Unter anderem ist — unabhängig von aller weiteren Kenntniss seines Baues und seiner Funktionen — leicht die Thatsache festzustellen, dass das Unterscheidungsvermögen des Auges gewisse, wenn auch individuell etwas schwankende, Grenzen nicht übersteigt. Objekte — seien es selbst- oder mittelbarleuchtende, seien es ihrerseits optische Bilder, — welche dem Auge unter einem Sehwinkel dargeboten werden, der eine gewisse untere Grenze nicht erreicht, vermag es weder ihrer Form noch der Grösse nach von einander, also auch nicht von idealen »Punkten» zu unterscheiden[1]).

Die genannte Grenze mag ausser von dem Individuum noch von verschiedenen anderen Umständen (Helligkeit, Farbe des Objekts u. dergl.) abhängen — dies ist für uns hier ohne Belang — genug, es existirt eine solche. Ihr Vorhandensein aber entbindet uns von der Verpflichtung, behufs optischer Abbildung ideale Punkte herbeizuführen; wir können uns damit begnügen, das Bild aus Flecken bestehen zu lassen, deren Grösse nur unterhalb jener — wie gesagt von mehreren Umständen abhängigen — Grenze liegt.

Diese Erleichterung werden wir verschieden auslegen, je nachdem wir uns auf den Standpunkt der physischen oder der rein geometrischen Optik stellen. Gemäss letzterem würde hiernach eine Abbildung auch dann noch praktisch genügend sein, wenn die Strahlen nicht genau homocentrisch vereinigt werden, sondern statt eines Kegels ein Conoid bilden, dessen engste Einschnürung ein gewisses Maass nicht überschreitet. Statt des Bildpunktes würde dann der Querschnitt jener engsten Einschnürung, der »Kreis der kleinsten Verundeutlichung« functioniren. Demgemäss würde es erlaubt sein, bei jeder durch Brechung an sphärischen Flächen vermittelten Abbildung die Oeffnungen der wirksamen Büschel bis zu einer gewissen — von den Umständen des einzelnen Falls abhängigen — Grösse ohne weiteres zu vermehren.

Gemäss der Undulationstheorie würden diesem Schlusse Bedenken entgegenstehen. Denn bei ihm ist stillschweigend angenommen, dass auch in dem endlichen Querschnitt nicht homocentrischer Strahlen eine Lichtwirkung entstehe, ganz ebenso als wenn jeder Strahl schlechthin Träger von Licht sei. Diese Annahme, welche gewissen Untersuchungen in ganz ungerechtfertigter Ausdehnung zu Grunde gelegt ist, können wir aber durchaus nicht ohne weiteres anerkennen. Es bedarf besonderer, nach den Methoden der Diffraktionstheorie angestellter Untersuchung darüber, welcher Art die Lichtwirkung nicht homocentrischer Strahlen, d. h. nicht sphärischer Wellen auf irgend eine Einstellungsebene ist. Wir verdanken solche Untersuchungen Airy[2]) und mit besonderer Berücksichtigung der uns hier interessirenden Frage Lord Rayleigh[3]). Dieselben sind noch lange

---

[1]) S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. das von Helmholtz, 2. Aufl., § 18.
[2]) Cambridge Phil. Trans., vol. VI. 1838.
[3]) Phil. Mag. 9, pag. 410. 1879.

nicht so weit geführt, als für die Beantwortung dieser Frage nöthig wäre, indem sie sich auf die Bestimmung der Helligkeit des axialen Bildpunktes beschränken, die hier in erster Linie stehende Frage nach der Helligkeitsvertheilung ausserhalb der Axe aber noch ganz offen lassen. Sie führen uns jedoch mit einer wenig geänderten Auslegung ihrer Resultate auf dem zweiten der eingangs angeführten Wege zu einer zulässigen Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

ad 2) Statt nämlich nach der Helligkeit zu fragen, die eine Wellenfläche von gegebener Abweichung gegen die Kugelgestalt im Krümmungscentrum von deren Scheitel ergiebt, können wir umgekehrt nach der Deformation der austretenden Wellenfläche fragen, welche zulässig ist, wenn jene Helligkeit einen gewissen Bruchtheil der normalen nicht unterschreiten soll. In dieser Form hat in der That RAYLEIGH diese Frage behandelt. Er findet, dass die Deformation der Wellenfläche gegen die sphärische nicht mehr betragen darf, als $\frac{1}{4}\lambda$ Abstand am Rande bei Coincidenz der Scheitel, wenn die Helligkeit nicht geringer als ca. 0·8 der normalen sein soll.

Ist nun ein optisches System vollständig gegeben, so lässt sich, z. B. durch trigonometrische Verfolgung mehrerer vom Objektpunkt aus divergirender Strahlen durch dasselbe (gemäss den Formeln pag. 68—69), deren Wellenfläche als Normale zu diesen Strahlen construiren und obige Regel von RAYLEIGH führt dann zu einer Bestimmung über die Oeffnung, welche man dem System d. h. den es durchsetzenden Strahlenbüscheln geben darf, ohne eine merkliche Verschlechterung des Bildes gewärtigen zu müssen.

Die Frage nach der seitlichen Ausbreitung des Lichts bleibt hierbei, wie bemerkt, ausser Acht, ebenso wie die nach dem wahren, d. h. günstigsten Einstellungsort auf der Axe offen bleibt. Immerhin giebt obige Regel doch einen ziemlich guten Anhalt für die Beurtheilung der Verhältnisse im Grossen und Ganzen. RAYLEIGH berechnet, dass $df = \frac{\lambda}{\alpha^2}$, wenn df die Längsaberration, α die vom Bildpunkt aus gemessene halbe angulare Oeffnung des Systems und λ die Wellenlänge des wirksamen Lichts ist und findet in Uebereinstimmung damit, dass eine einfache planconvexe Linse von ca. 1 *m* Brennweite gegenüber parallel auf die convexe Seite fallendem Lichte noch merklich gute Bilder giebt, wenn das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite bei ihr nicht grösser als 1 : 18 ist; ein sphärischer Spiegel sogar, wenn dasselbe Verhältniss nicht grösser als 1 : 14.

In der That kann man ja für manche Zwecke ohne erheblichen Nachtheil optische Instrumente benützen, die ohne besondere Wahl aus »einfachen« Linsen und Spiegeln zusammengesetzt sind, ohne deren Oeffnungen übermässig einengen zu müssen. Und man hat sich ihrer Jahrhunderte lang bedient, ehe man die künstlichen Mittel zur Vervollkommnung derselben erfunden hatte.

ad. 3. Diese Vervollkommnung zu erreichen ermöglicht uns nun der dritte und letzte der oben erwähnten Auswege: Wir können optische Systeme so combiniren, dass, wiewohl jedes einzelne — im geometrisch-optischen Sinne — nur die gewöhnliche ganz beschränkte Abbildung ergiebt, bei dem resultirenden System jene Grenzen dennoch nach der einen oder der anderen Richtung hin, oder auch nach mehreren zugleich erheblich erweitert sind; sodass also ein System entsteht, welches homocentrische Abbildung entweder durch mehr oder minder weit

geöffnete Strahlenbüschel oder die eines grösseren Objektes durch relativ enge Büschel vermittelt.

Es mag aber gleich hier bemerkt werden, dass wir auch bei den nach dieser Richtung hinzielenden Bestrebungen auf Grenzen stossen, die unüberschreitbar sind. Je weiter wir versuchen, in der einen Richtung die Beschränkungen der Abbildung zurückzuschieben, um so enger sind sie dann stets in anderen Richtungen. Je weiter die Oeffnung der abbildenden Büschel sein soll, desto enger wird, nach der Seite und in der Tiefe, das Gebiet des gleich vollkommen abbildbaren Raumes, desto mehr ist die Abbildung beschränkt auf singuläre Stellen des Raumes und umgekehrt Die Bemühungen der Theorie und Praxis können dahin gehen, sich diesen durch die Natur der Brechung und der Kugelflächen gesetzten Grenzen möglichst zu nähern, aber es ist — das kann mit Sicherheit ausgesprochen werden — auch theoretisch unmöglich, mit den Mitteln der Dioptrik Abbildungen herzustellen, welche von jener idealen Vollkommenheit sind, die wir in unseren Berachtungen über die allgemeine collineare Abbildung voraussetzten — Abbildungen eines beliebig grossen Raumes durch beliebig weite Büschel. Es sei denn, dass wir, auf jeden eigentlichen optischen Effekt verzichtend, uns mit einer blossen Umlagerung des Bildraumes gegen den Objektraum begnügen, ohne jede weitere Veränderung desselben. Diesen letzteren Effekt liefert uns, wie wir früher sahen, die Spiegelung an Ebenen, ohne Einschränkungen irgend welcher Art.

Die Erweiterung der Abbildung kann, wie schon bemerkt, nach zwei Richtungen hin geschehen: erstens dahin, dass die Oeffnung der abbildenden Büschel eine möglichst weite wird; zweitens dahin, dass möglichst grosse Objekte abgebildet werden. Die erstere Aufgabe kommt ersichtlich darauf hinaus, die von ein- und demselben Punkte ausgehenden, innerhalb eines endlichen Raumwinkels liegenden centralen und schiefen Elementarbüschel durch geeignet angeordnete Spiegelungen oder Brechungen so zu modificiren, dass sie sämmtlich zuletzt wieder nach demselben (Bild-) Punkte convergiren. Bei der letzteren wird es sich zunächst nur darum handeln, in den einzelnen relativ engen Büscheln, die von verschiedenen Punkten eines Objekts ausgehen, wenigstens den Astigmatismus aufzuheben, um überhaupt eine eindeutige scharfe Abbildung mittels räumlicher Büschel zu erhalten. Diesen Anforderungen werden wir jedoch alsbald noch weitere nothwendig zu erfüllende beigesellen müssen.

Wir wenden uns der näheren Betrachtung dieser beiden Aufgaben zu. Um ihre Lösbarkeit zu übersehen müssen wir, namentlich den erstgenannten Punkt noch genauer studiren, als wir es bei der früheren Gelegenheit gethan haben; nämlich die im Allgemeinen mangelnde Homocentricität der von einem axialen Punkte innerhalb eines endlichen Winkelraums ausgegangenen Strahlen nach der Spiegelung oder Brechung an centrirten Kugelflächen, den sogen. »Kugelgestaltfehler« oder die

Sphärische Aberration für Axenpunkte.

Wir haben früher gesehen, wie der Weg eines Strahls analytisch bei der Brechung an einer Kugelfläche zu bestimmen ist. Wir fanden (pag. 69) zwischen den Abständen s, s' des Objekt- und Bildpunkts vom Scheitel S der brechenden Fläche und denen vom Einfallspunkt P, p und p' die Beziehung

$$n'\frac{s'-r}{p'}=n\frac{s-r}{p}, \tag{1}$$

welche nichts anderes war als eine Transformation der optischen Invariante

$$Q=n\cdot sin\, i=n'\, sin\, i'.$$

Hierin ist

$$p^2=(s-r)^2+r^2+2r(s-r)\cos\varphi,$$

ebenso

$$p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi,$$

wenn φ der (halbe) Oeffnungswinkel der brechenden Fläche, d. h. ihr Centriwinkel ist. Tragen wir diese Werthe oben ein, so wird

$$\frac{n'(s'-r)}{\sqrt{(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi}}=\frac{n(s-r)}{\sqrt{(s-r)^2+r^2+2r(s-r)\cos\varphi}}. \tag{2}$$

Entwickeln wir hier die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und den $\cos\varphi$ in die äquivalente Potenzreihe, so erhalten wir schliesslich nach geeigneten Reductionen s', die Schnittweite des gebrochenen Strahls auf der Axe ausgedrückt durch eine nach den Potenzen von φ fortschreitende Reihe; und da gleichen aber entgegengesetzten Werthen von φ offenbar gleiche Werthe von s' entsprechen, so enthält diese Reihe nur die geraden Potenzen von φ. Sie ist also von der Form

$$s'=s_0'+A\varphi^2+B\varphi^4+C\varphi^6+\dots \tag{3}$$

Hätten wir in der ursprünglichen Gleichung φ durch u ersetzt oder durch irgend eine andere den Einfallspunkt des auffallenden Strahls bestimmende Grösse, so hätten wir analoge Entwicklungen nach diesen Grössen erhalten, etwa nach u' die Reihe

$$s'=s_0'+\mathfrak{a}'u'^2+\mathfrak{b}'u'^4+\mathfrak{c}'u'^6+\dots \tag{4}$$

oder dergl.

Die Coëfficienten dieser Reihen sind nach obiger Anweisung zu entwickeln. Diese Arbeit ist eine ziemlich umständliche, aber wiederholt ausgeführt. Wir wollen hier nur die Coëfficenten der zweiten Potenzen herleiten, welche noch durch relativ sehr einfache Ausdrücke dargestellt sind und daher eine gewisse Uebersicht der von ihnen abhängigen Momente gestatten. Bei Systemen von relativ geringer Oeffnung, wie den Fernrohren ist das deren Quadrat proportionale Glied natürlich auch das numerisch bedeutendste, daher an sich von besonderem Interesse. Bei Systemen von sehr grosser Oeffnung, wie den Mikroskopobjektiven, gewährt die Betrachtung dieses zweiten Gliedes der Reihe allerdings geradezu gar keinen Anhalt zu irgend welchen Schlüssen. In diesem Falle, in welchem z. B. u oft nahe $=90°$ ist, gewährt aber die Reihenentwicklung überhaupt keinen Nutzen, während für die Theorie anderer Instrumente allerdings das dritte und auch das vierte Glied der Reihe fast stets noch mit herangezogen werden muss. Betreffs der Entwicklung dieser letzteren verweisen wir auf die vorhandene Literatur[1]).

[1]) Folgt am Schlusse dieses Abschnitts.

Das erste Glied der sphärischen Aberration auf der Axe.

Methode. Gehen wir nochmals auf den veränderten Ausdruck für die optische Invariante Q bei einer Brechung unter beliebigem endlichem Winkel zurück, den wir noch beiderseits durch r dividiren, also

$$Q = \frac{n(s-r)}{p \cdot r} = \frac{n'(s'-r)}{p' r}. \tag{1}$$

Diese Invariante muss sich auch ihrerseits als eine Potenzreihe darstellen lassen, mit irgend einer, die Einfallshöhe des Strahls bestimmenden Grösse, z. B. dem Oeffnungswinkel φ der brechenden Kugel, als Variablen. Das constante Glied dieser Reihe muss in jedem Falle $= Q_0$ sein, d. i. gleich der Invariante für paraxiale Strahlen. Die Coëfficienten der Potenzreihe selbst werden das eine Mal die Elemente des einfallenden, das andere Mal die des gebrochenen Strahls enthalten und zwar in genau gleichartiger Weise.

Wir können also ein Mal

$$Q = Q_0 + q\,\varphi^2 + \ldots,$$

das andere Mal

$$Q = Q_0 + q' \cdot \varphi^2 + \ldots$$

setzen.

Da wir uns hier auf die quadratischen Glieder beschränken wollen, so brechen wir die Entwicklung bei diesen ab. Alsdann folgt aber aus der Identität der linken Seiten beider Gleichungen, dass auch $q = q'$ sein muss.

Auf diesem Wege, welcher auch für die Berechnung aller anderen »Aberrationen« sehr vortheilhaft ist, gelangen wir in relativ einfacher Weise zu Invarianten für die höheren Glieder der Reihenentwicklung.

Entwicklung. Wir schreiben (1) in der Form

$$Q = n\,\frac{s}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\,\frac{s'}{p'}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{s'}\right), \tag{1a}$$

und entwickeln p gemäss dem eben angegebenen Ausdruck nach φ. Vernachlässigen wir hierbei alle Grössen, welche mit höheren Potenzen von φ als der zweiten multiplicirt auftreten, so erhalten wir

$$p = s\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n s_0}\,Q_0 \varphi^2\right),$$

worin s_0 der Grenzwerth von s für paraxiale Strahlen ist, welcher der für diese geltenden Gleichung

$$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right), \tag{1*}$$

genügt.

Hiernach ist die gesuchte Grösse

$$\frac{s}{p} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n s_0}\,Q_0 \cdot \varphi^2.$$

Ganz analog muss

$$\frac{s'}{p'} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n' s_0'}\,Q_0 \cdot \varphi^2$$

sein.

Es sind nun noch s und s' selber in eine Reihe nach φ zu entwickeln. Denken wir uns zu dem Zwecke diese Grössen erst nach u bezw. u' entwickelt, also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \cdot u^2 + \ldots .$$
$$s' = s_0' + \mathfrak{a}' u'^2 + \ldots ,$$

worin u selbst mit r, p und φ durch die Gleichung

$$\sin u = \left(\frac{r}{p}\right) \cdot \sin \varphi$$

zusammenhängt, so ergiebt letztere, unter Vernachlässigung von dritten Potenzen der Variablen

$$u = \left(\frac{r}{p}\right) \varphi$$

und, unter Vernachlässigung von Gliedern, die mit der vierten und höheren Potenzen von φ multiplicirt sind, folgt hieraus

$$u^2 = \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \cdot \varphi^2 ,$$

also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \varphi^2 = s_0 \left(1 + \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^3} \cdot \varphi^2\right),$$

endlich

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4} \varphi^2$$

und ganz ebenso

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4} \cdot \varphi^2 .$$

Demnach erhalten wir Q nach einigen Reductionen in den beiden Formen,

$$Q = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n} \cdot \frac{r^2}{s_0} + n\,\mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4}\right] \varphi^2$$

und

$$Q = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n} \frac{r^2}{s_0'} + n'\,\mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4}\right] \varphi^2,$$

woraus wir gemäss der eingangs angestellten Ueberlegung folgern

$$\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4} + \frac{Q_0^2}{n s_0} = \frac{2 n' \mathfrak{a}'}{(s_0')^4} + \frac{Q_0^2}{n' s_0'},$$

oder in unserer früher benützten Schreibweise

$$\Delta\left(\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4}\right) = - Q_0^2 \, \Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right). \tag{5}$$

Bei dieser Entwicklung ist ausdrücklich angenommen, dass auch das einfallende Büschel bereits mit sphärischer Aberration behaftet sei; andernfalls wäre $\mathfrak{a} = 0$ und obige Gleichung ergäbe ohne Weiteres den Werth von $\mathfrak{a}'$. In ihrer jetzigen Form könnte sie nur auf indirektem Wege dazu dienen,

aus den gegebenen Elementen des einfallenden Strahls — zu welchen auch α gehört — die des austretenden, also α', zu berechnen.

Die Werthe und Vorzeichen von α und von α' sind, wie aus ihren Einführungsgleichungen hervorgeht, ganz besonders charakteristisch für Art und Grösse der sphärischen Aberration. Es ist $\alpha = \frac{s - s_0}{u^2}$ und ebenso $\alpha' = \frac{s' - s_0'}{u'^2}$. Bei gleichem Oeffnungswinkel u des Büschels ist, also α ein unmittelbarer Ausdruck für die Differenz der Schnittweiten vom Rand- und Axenstrahl des Büschels, die sogen. Längs- oder Longitudinalaberration.

Bei einer einzelnen nach dem Lichte zu convexen Fläche und ebenso bei relativ dünnen Collektivlinsen ist, für parallel einfallendes Licht wenigstens stets, $s' < s_0'$. Man spricht dann von sphärischer »Untercorrektion«. Umgekehrt bei einer nach dem Lichte zu concaven Fläche oder dünnen Dispansivlinse.

Das einfallende Büschel mag homocentrisch sein oder in irgend welchem Grade selbst unter- bezw. übercorrigirt, durch eine einmalige collektive Brechung wird es — bei parallelem Einfall wenigstens stets — nach der Richtung der Untercorrection, durch eine einmalige dispansive Brechung nach der Richtung der Uebercorrection verändert.

Das Vorzeichen von α bezw. α' lässt nun unmittelbar erkennen, ob das betreffende Büschel unter- oder übercorrigirt ist. Denn mag der Vereinigungpunkt des Büschels reell oder virtuell sein, ein negativer Werth von α bezw. α' bedeutet Unter-, ein positiver Werth Uebercorrection.

Denkt man sich die Gesammtheit der Strahlen des betr. Büschels gezeichnet, etwa wie in Fig. 304, pag. 32, so erhält man als Einhüllende sämmtlicher Strahlen ein Stück von deren Brennfläche. Diese Brennfläche bildet nun, wie man sich leicht überzeugt, bei negativem Werthe von α (sphärischer Untercorrection) einen nach dem einfallenden Lichte hin offenen Kelch $>$, bei positivem α (Uebercorrection) einen umgekehrt gelegenen $<$.

Seitliche Aberration. Zerstreuungskreis. Bei einem nicht homocentrischen Büschel ist es innerhalb ziemlich weiter Grenzen a priori ganz ungewiss, an welche Stelle der Axe das eigentliche Bild zu verlegen sei, d. h. welche Stelle der Axe bei der Beobachtung faktisch als Bildort aufgefasst werde. Hierüber sind wohl mehrfache Hypothesen aufgestellt und mit mehr oder minder ansprechenden Wahrscheinlichkeitsgründen gestützt worden[1]), aber weder ist eine genügend exakte experimentelle Prüfung derselben erfolgt, noch sonst eine Einigkeit in diesem Punkte herbeigeführt worden.

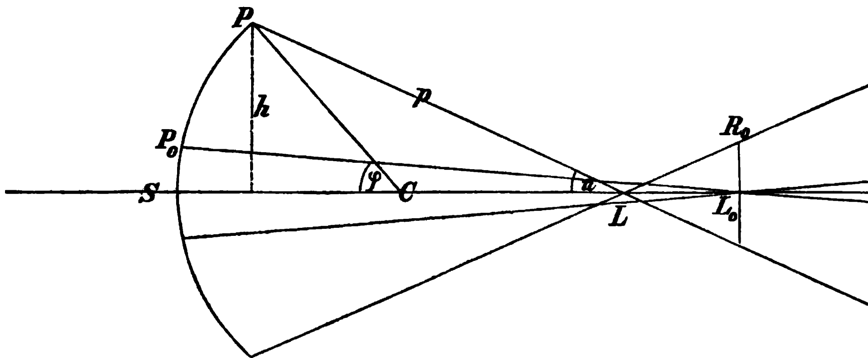
Wie ich schon früher hervorhob ist nach meiner Meinung die theoretische Lösung auch dieser Frage überhaupt nicht auf dem Boden der geometrischen, sondern dem der physischen Optik anzustreben, was bisher meines Wissens nirgends geschehen ist. Mir scheint gerade als sicher, dass nicht schlechthin die engste Einschnürung des austretenden Lichtbüschels als Bild aufgefasst wird, sondern dass es — wie wohl zuerst GAUSS hervorgehoben hat (s. weiter unten »Aberration höherer Ordnung«) — auf die Vertheilung der Intensität inner-

---

[1]) S. die in der Literaturübersicht angeführten Werke. Die meisten Autoren verlegen die Bildebene in die engste Einschnürung des Strahlenconoids. Vergl. auch CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 203. 1888.

halb des Lichtsflecks ankommt, welcher hier an Stelle eines Bildpunktes auftritt. Man nennt diesen Lichtfleck bekanntlich »Zerstreuungskreis«. Ohne weiteres zuzugeben ist nur, dass *caeteris paribus* die Grösse desselben das in letzter Linie entscheidende Maass für die in einem Büschel vorhandene sphärische Aberration bildet. Denn je grösser diese Lichtflecke sind, desto grösser ist, wenn ich so sagen darf, das Mosaik, als welches jedes Bild annähernd aufgefasst werden kann, d. h. desto weniger Detail ist im Bilde wiedergegeben. Auf die Wiedergabe des im Objekte vorhandenen Detail sind aber ganz vornehmlich die optischen Construktionen gerichtet.

Indem wir nun darauf verzichten, die wahre Grösse des Zerstreuungskreises bei gegebenem Gange der sphärischen Aberration eines Büschels zu bestimmen, begnügen wir uns vielmehr damit, ein Maass für dessen relative Grösse zu statuiren, indem wir die Fiction machen, das Bild werde im Vereinigungspunkte der paraxialen Strahlen, L_0 (Fig. 324), aufgefasst. Der sich bei dieser Annahme



(Ph. 324.)

ergebende Zerstreuungskreis, der Schnitt der in L_0 zur Axe senkrechten Ebene mit den äussersten Randstrahlen (dessen Halbmesser in der Figur $= R_0 L_0$ ist) übertrifft sicher den faktisch wahrnehmbaren, vielleicht um das doppelte oder vierfache[1]). Immerhin bietet er — oder auch ein gewisser festgesetzter Bruchtheil desselben — ein durchweg vergleichbares Maass für die Grösse der Aberration und gerade zu seiner Berechnung ist unsere Formel besonders geeignet.

Wir haben nämlich für den Durchmesser z des Zerstreuungskreises in einem Büschel von der Winkelöffnung $2u$

$$\tfrac{1}{2}z = (s_0 - s)\,u = -\,\mathfrak{a}u^3,$$

also

$$\frac{2n\mathfrak{a}}{s^4} = -\frac{nz}{u^3 s^4} = -\frac{nu\cdot z}{u^4 s^4} = -\frac{(nu)\cdot z}{h^4};$$

demnach wird unsere Aberrationsgleichung

$$\Delta\,(nu\cdot z) = h^4\,Q_0^2\,\Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right). \tag{6}$$

(Den Index 0, welcher darauf hinweisen sollte, dass sich die betreffenden Grössen für paraxiale Strahlen verstünden, können wir fortan wohl wieder weglassen ohne ein Missverständniss befürchten zu müssen.)

Das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Oeffnungswinkels eines Büschels (welcher letztere für kleine Winkel mit dem Winkel selbst identisch

---

[1]) Manche Autoren haben das eine, manche das andere angenommen, was bei einer Vergleichung der unten folgenden Zahlen mit den von Jenen erhaltenen zu beachten ist.

ist) hat ABBE die numerische Apertur des Büschels genannt. Dasselbe ist eine der wichtigsten Grössen in der Theorie der optischen Instrumente. Bezeichnen wir es mit a, so haben wir in obiger Gleichung ein Mittel zur Berechnung der Veränderung, welche das Produkt aus Apertur und Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration bei irgend einer, durch die Werthe von n, r, s und h gegebenen Brechung eines Büschels erfährt.

Objektives Maass der Bildverschlechterung durch Aberration. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung der sphärischen Aberration eines Systems ist nun aber nicht so sehr auf die Grösse des Zerstreuungskreises im Bilde gerichtet, noch weniger auf dessen Grösse in irgend einem Zwischenstadium der Bilderzeugung, wie es hier ermittelt ist. Sondern was namentlich zu wissen interessirt ist: der Einfluss den die mit irgend einer Brechung verbundene Aenderung der Aberration auf das Erkennen der Details des Objektes ausübt.

Der Zerstreuungskreis, in dem von k brechenden Flächen hervorgebrachten Bilde nimmt in diesem einen gewissen Raum ein. In welchem Grade dieser Zerstreuungskreis die Deutlichkeit des Bildes beeinflusst, erfahren wir, indem wir nach derjenigen Grösse im Objekte fragen, deren Bild nach denselben k Brechungen gleich dem Zerstreuungskreis wäre (also faktisch von diesem verdeckt wird), wenn diese Brechungen ohne Aberrationen erfolgten, aplanatische Abbildung ergäben.

Nach dem LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Satze ist nun (s. pag. 77) immer für kleine Winkel

$$n'u'y' = nuy,$$

auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn n, y und u sich auf das auf die erste Fläche einfallende Büschel beziehen, n', y' und u' auf das aus der letzten austretende. Demgemäss haben wir für die Grösse des Objektes z_0, dessen Bild nach der $k$ten Brechung $= z_k'$ ist

$$n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 z_0 = a_1 z_0$$

wenn n_1 und u_1 Brechungsexponent des ersten Mediums und halbe Winkelöffnung des einfallenden Büschels sind.

Die früher betrachtete Brechung sei die $k$te in irgend einem System; alsdann wird durch die angegebene Substitution

$$\Delta(z_0) = \frac{1}{a_1} h_k^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{7}$$

der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung herbeigeführte Verundeutlichung des Bildes, gemessen am Objekt selber.

Derselbe wird bequem berechenbar, wenn wir ihn durch Erweiterung mit h_1^4 auf die Form bringen

$$\Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n}\right)^4 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{8}$$

indem nämlich, wie leicht zu sehn, mit genügender Annäherung für die Verhältnisse der Höhen, in welchen der äusserste Randstrahl eines ziemlich engen

Büschels die einzelnen Flächen schneidet, dieselben für einen paraxialen Strahl geltenden Vethältnisse gesetzt werden können, also

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{s_k}{s'_{k-1}},$$

demnach

$$\frac{h_k}{h_1} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \cdot \frac{s_{k-1}}{s'_{k-2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{s_2}{s_1'}.$$

Um die Verundeutlichung des Objektes zu finden, welche durch alle k Flächen zusammen hervorgebracht, also nach der $k$ten Brechung thatsächlich vorhanden ist, hat man nur einfach die einzelnen Bilddeteriorationen zu summiren, also

$$Z_0^{(k)} = \sum \Delta(z_0) = a_1 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^4 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{8a}$$

Dieser Ausdruck ist im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahls ausserordentlich bequem zu berechnen. **Derselbe gilt ohne jede Einschränkung auf gegenseitigen Abstand oder Zahl der brechenden Flächen.**

Hervorzuheben ist, dass der Einfluss der sphärischen Aberration auf die Deutlichkeit der Abbildung mit der **dritten Potenz** der **numerischen Apertur** des einfallenden Büschels wächst.

Unendlich ferne Objekte. Bei solchen kann die Bildverschlechterung füglich nicht mehr in linearem, sondern muss in ihrem **angularen Betrage** angegeben werden. Für diesen, $\zeta_0 = \frac{z_0}{s_1}$, ergiebt sich leicht aus Gleichung (8) für jede Brechung

$$\Delta(\zeta_0) = h_1^3 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k, \tag{9}$$

also nach k Brechungen

$$\zeta_0^{(k)} = \sum \Delta(\zeta_0) = h_1^3 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \Delta\left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{9a}$$

Der Einfluss der sphärischen Aberration zweiter Potenz ist also bei teleskopischem Sehen, dem **Cubus der linearen Oeffnung** des Systems bezw. des einfallenden Büschels proportional.

Der zu summirende Theil der rechten Seite in (9a) ist, wie man sich leicht überzeugt, umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite des Gesammtsystems[1]). Bezeichnen wir also den Werth, den diese Summe für die Brennweite 1 des Gesammtsystems hat mit K, so ist

$$\zeta = \left(\frac{h_1}{f}\right)^3 \cdot K.$$

Die vom ersten Gliede der axialen sphärischen Aberration abhängige Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objeks ist also proportional der dritten Potenz der **relativen Oeffnung** des Systems. Der Faktor K hängt von der

---

[1]) Wenn wir voraussetzen, dass das System nicht selbst ein »teleskopisches« sei, gemäss unserer früheren Definition, sondern etwa nur ein Theil eines solchen, z. B. das Objektivsystem eines Fernrohrs.

specifischen Zusammensetzung des Systems ab, d. h. von den besonderen Werthen der Krümmungen, Brechungsverhältnisse, Abstände.

Der Winkelwerth des durch die sphärische Aberration verursachten Zerstreuungskreises ist, wie aus (9a) weiterhin zu schliessen ist, unabhängig von der absoluten Grösse der Brennweite des Systems bei gegebenem Constructionstypus.

Wenn daher die Optiker für Fernrohrobjektive des gleichen Typus die relative Oeffnung, d. h. das Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite $(2h:f)$ bei kleinen Dimensionen bis zu $\frac{1}{5}$ steigern, während sie es auf $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{20}$ einschränken bei den grossen Teleskopen, so sind die Gründe hierfür anderwärts zu suchen.

Man kann aus den Formeln (8a) und (9a), wenn dies ein Interesse bietet, auch leicht die im Bilde vorhandene Längsaberration berechnen, d. h. die Differenz der Schnittweiten, welche zwischen dem nach k Brechungen austretenden äussersten Rand- und dem Axenstrahl vorhanden wäre, wenn die Aberration nur der zweiten Potenz der Oeffnung proportional wäre. Man hat hierzu nur die Einführungsgleichung für den Zerstreuungskreis $\frac{1}{2}z = (s_0 - s)u$ zu berücksichtigen und den auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreis, gemäss der Lagrange-Helmholtz'schen Gleichung $n'u'y' = nuy$ wieder in das Bild zu proiciren.

Es wird bei Objekten in endlicher Entfernung

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'}\right)^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right) Z_0^{(k)} = -\frac{1}{2}\beta^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right) Z_0^{(k)}; \qquad (8b)$$

bei unendlich entfernten Objekten

$$(s' - s_0')_k = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{h}\right) f \zeta_0^{(k)}. \qquad (9b)$$

Die Formel (8a) wie (9a) haben eine praktische Bedeutung nur dann, wenn die Apertur der wirksamen Büschel eine so geringe ist, dass das erste Glied der sphärischen Aberration die den höheren Potenzen der Apertur proportionalen an Grösse erheblich übertrifft. Dies ist bei den Teleskopobjektiven gewöhnlich der Fall, weshalb auf diese Anwendung findende Formeln schon vor langer Zeit — wenn auch anfänglich unter einschränkenden Voraussetzungen — entwickelt und zur Berechnung solcher Objektive benützt worden sind.

In der Gestalt, welche wir oben diesen Formeln gegeben haben, gestatten dieselben, wie bereits bemerkt, besonders bequem, wenn man rechnerisch ein paraxiales Büschel durch ein System hindurch verfolgt, daneben den Einfluss jeder einzelnen Brechung auf die Grösse der Aberration zu verfolgen und auf diese Weise die Faktoren kennen zu lernen, von denen dieselbe in den verschiedenen möglichen Fällen vorzüglich abhängt. Dieser Vorzug geht verloren, wenn man die unter dem Summenzeichen angedeuteten Operationen ausführt und auf diese Weise eine Reihe bildet, deren Glieder aus den Radien, Brechungsverhältnissen und Scheitel-Abständen der brechenden Flächen zusammengesetzt sind. Doch gewährt eine solche Reihenentwicklung bei Systemen einfacherer Art wiederum den Vortheil, dass man die Wirkung des ganzen Systems mathematisch besser discutiren kann.

Aberration in einfachen Sonderfällen.

Die durch eine einzige Brechung hervorgerufene Aberration ist nach (8) dargestellt durch

$$\Delta(z_0) = (nu)^3 \left(\frac{s}{n}\right)^4 n^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right). \tag{10}$$

Dieselbe ist also gleich Null 1) wenn $s = 0$ ist, woraus auch $s' = 0$ folgt, also Objekt und Bild im Scheitel zusammenfallen. 2) Wenn $s = r$ ist, demnach auch $s' = r$ also Objekt und Bild im Mittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfallen, und 3) wenn $n's' = ns$, woraus folgt $s = r + \frac{n'}{n} r$; $s' = r + \frac{n}{n'} r$, d. i. in den aplanatischen Punkten der Kugelfläche. In diesem Falle, ebenso wie in den beiden vorangehenden sind auch die Aberrationen höherer Ordnung gleich Null, wie wir früher (pag. 68) bereits gefunden haben.

Im übrigen hängt das Vorzeichen der Aberration von dem des Faktors $\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right)$ ab, welchen wir auf die Form bringen können

$$\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} = \frac{n' - n}{n'^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{n' + n}{n}\frac{1}{s}\right).$$

Eine nähere Discussion zeigt, dass sowohl bei einer collektiven als bei einer dispansiven Brechung die Aberration je nach der Lage des leuchtenden Punktes positiv oder negativ, d. h. unter- oder übercorrigirt ist. Nur für ein unendlich entferntes Objekt ist $\Delta(z_0)$ bei einer collektiven Brechung stets positiv, bei einer dispansiven Brechung stets negativ.

Hat man es mit zwei durch einen endlichen Abstand getrennten Flächen zu thun, so werden die Verhältnisse schon etwas schwerer zu übersehen. Wir verzichten hier auf ein näheres Eingehen; wir wollen nur beiläufig darauf hinweisen, dass man sowohl unter Benützung der aplanatischen Punkte der beiden Flächen als auch unter Berücksichtigung des Umstandes, dass, wie eben bemerkt, die Aberration derselben Fläche je nach der Lage des Objektpunktes verschiedenes Vorzeichen hat, zwei Flächen so zusammensetzen kann, dass die Aberration des Gesammtsystems — etwa einer beiderseits an Luft grenzenden Linse — bei gegebener endlicher Brennweite gleich Null sei.

Die Aberration einer beiderseits an dasselbe Medium grenzenden Linse von verschwindender Dicke, deren Vorderfläche die Krümmung ρ, deren Hinterfläche die Krümmung ρ' und deren Substanz den relativen Index n gegen das umgebende Medium hat, für unendlich fernen Objektpunkt ergiebt sich aus (9a), gemessen durch den objektseitigen Winkelwerth des Zerstreuungskreises zu

$$\zeta = h^3 \left[\frac{n+2}{n}\varphi\rho^2 - \frac{2n+1}{n-1}\varphi^2\rho + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\varphi^3\right], \tag{11}$$

wenn $\varphi = (n-1)(\rho - \rho')$ die Stärke der Linse ist. Dieselbe wird also, in Funktion von ρ durch eine Parabel dargestellt, deren Axe senkrecht zur Axe der ρ-Werthe ist.

Damit die Brennweite oder Stärke der Linse bei gegebenem n dieselbe bleiben, muss $\rho - \rho' = k$ constant sein. Wenn man also ρ variirt, so ist vorausgesetzt, dass ρ' im gleichen Sinne und um den gleichen Betrag geändert werde, man bezeichnet eine solche gleichartige Variation von ρ und ρ' oft als »Durchbiegen« der Linse.

Die Aberration einer einfachen dünnen Linse ist ein Minimum für

$$\rho_{min} = + \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n-1} \frac{n}{n+2} \cdot \varphi$$

und beträgt dann

$$\zeta_{min} = (h\varphi)^3 \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2 4(n+2)} .$$

In der folgenden Tabelle sind für $n = 1{\cdot}5$ und $n = 2{\cdot}0$ die Werthe, die ζ bei verschiedener Form der Linse annimmt, zusammengestellt.

	$n = 1{\cdot}5$			$n = 2{\cdot}0$		
Gestalt der Linse:	ρ/φ	ρ^1/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$	ρ/φ	ρ^1/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$
Ebene Vorderfläche . . .	± 0	-2	$+9$	± 0	-1	$+4$
Gleichseitig	$+1$	-1	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$
Ebene Hinterfläche . . .	$+2$	± 0	$+\frac{7}{3}$	$+1$	± 0	$+1$
Günstigste Form (Aberration = Minimum)	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{15}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{8}$

Wie man sieht, nehmen die Aberrationen unter sonst gleichen Umständen mit wachsendem n rasch ab.

Wenn der Objektpunkt anders gelegen wäre, als oben angenommen, so würde die Aberration im wesentlichen dasselbe Gesetz befolgen. Nur würde z. B. das Minimum der Aberration dann bei einer anderen Gestalt stattfinden.

Indem wir die Discussion dieses Falles dem Leser anheimgeben, wollen wir nur noch die Aberration in einem System von beliebig vielen in Contakt befindlichen Linsen von zu vernachlässigender Dicke besprechen. Die Brennweiten der Linsen seien gegeben durch deren Reciproken, die »Stärken« $= \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k \ldots \varphi_p$. Die Krümmungen der dem Lichte zugewandten Flächen seien $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_k \ldots \rho_p$ die Brechungsindices der Linsen gegen das sie umgebende Mittel, (etwa Luft[1]) $= n_1, n_2 \ldots n_k \ldots n_p$.

Bei unendlicher Entfernung des Objekts ist dann die Aberration gemäss (9a)

$$\zeta_0^{(p)} = h_1^3 \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{n_k+2}{n_k} \varphi_k \rho_k^2 - \frac{2n_k+1}{n_k-1} \varphi_k^2 \rho_k - \frac{4n_k+1}{n_k} \varphi_k \rho_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l \right. \\ \left. + \left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right)^2 \varphi_k^3 + \frac{3n_k+1}{n_k-1} \varphi_k^2 \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l + \frac{3n_k+2}{n_k} \varphi_k \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l^2 \right] . \tag{12}$$

[1]) Die Fiction, dass alle Linsen sich in Luft befinden, ist auch dann erlaubt, wenn in Wirklichkeit zwei Medien verschiedenen Indicis aneinanderstossen, da man sich diese durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt denken kann, ohne an der Wirkung etwas zu ändern.

Wie man sieht besteht die ganze Summe aus lauter Gliedern von der Form $G_k = A_k\rho_k^2 + B_k\rho_k + C_k$. Das erste Glied dieser Art stellt die Aberration der ersten Linse gegenüber parallel einfallendem Lichte dar, die wir oben näher betrachtet haben. Das $k$te Glied stellt den Zuwachs der Aberration dar, den die $k$te Linse verursacht, auf welche die Strahlen aus der Entfernung $e_k = 1 : \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l$ einfallen, nämlich aus dem hinteren Brennpunkt des aus den voranstehenden $(k-1)$ Linsen gebildeten Systems. Die Coëfficienten dieser Glieder hängen daher ausser von n_k, ρ_k und φ_k auch noch von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}$ ab.

Der durch jede einzelne Linse bewirkte Zuwachs der Aberration wird also unter den gegebenen Umständen in Funktion ihrer Vorderkrümmung ebenfalls durch je eine Parabel dargestellt, deren Axe zur (Abcisse) Axe der ρ senkrecht steht, aber für die verschiedenen Linsen verschiedene Lage hat. Denkt man sich die Gesammtheit der Aberrationswerthe jeder Linse in dieser Weise graphisch dargestellt, so gewinnt man am besten einen Ueberblick über die Möglichkeit und die Bedingungen der Aufhebung der Aberration des Gesammtsystem durch gegenseitige Compensation.

Im Falle zweier Linsen z. B. ist nothwendig, dass die Aberration der zweiten Linse für die aus der Entfernung $\frac{1}{\varphi_1}$ einfallenden Strahlen entgegengesetzt gleich sei der der ersten Linse für parallel einfallende Strahlen. Dies wird im allgemeinen nur dann möglich sein, wenn die ersten Brennweiten der beiden Linsen entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die eine Linse collektiv, die andere dispansiv ist, während das Verhältniss der absoluten Grössen der Brennweiten ein beliebiges endliches sein kann. Alsdann aber ist die Aufhebung der Aberration auf unendlich viele Arten möglich, denn von dem grösseren der beiden Minimalwerthe der die Aberrationen darstellenden Parabeln an kommt jeder Ordinatenwerth in jeder Parabel zwei Mal vor. Von da an können daher zu jedem Aberrationswerth, d. h. jeder Form der einen Linse zwei Formen der anderen Linse angegeben werden, in welchen sie die Aberration der ersteren aufhebt.

Analytisch ist die Bedingung der aufzuhebenden Aberration 1. Ordnung in einem aus zwei Linsen bestehenden System, gemäss (12) dargestellt durch eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten.

Wir müssen uns ein näheres Eingehen auf diesen für die Theorie der Fernrohrobjektive wichtigen Fall wegen Mangel an Raum leider versagen, ebenso die Discussion der in Combinationen von 3 und 4 Linsen auftretenden Möglichkeiten.

Ausser einer vollständigen Aufhebung der Aberration durch gegenseitige Compensation kann man durch Anwendung mehrerer Linsen auch schon eine erhebliche Verminderung dieser Aberration bewirken. Ersetzt man z. B. eine einfache Linse von der Stärke $\Phi = (n-1)(P-P')$ durch k Linsen gleicher Substanz, gleicher Form (etwa alle gleichseitig oder dergl.) und gleicher Gesammtbrennweite, so dass also $\Sigma\varphi_k = \Phi$, so wird die Aberration der letzteren dargestellt durch einen Ausdruck von der Form $M\frac{1}{k^2} + N\frac{1}{k}$, worin M und N von der Substanz und Form der Linsen abhängen. Die Aberration des Gesammtsystems nimmt also mit wachsendem k schnell ab.

Wenn die Dicken der Linsen gegen deren Radien endlich, oder die Linsen durch grössere Intervalle getrennt sind, so erfahren alle diese Sätze erhebliche Modifikationen.

Ganz ebenso wie für einen unendlich fernen Punkt lässt sich aus Gleichung (8) bezw. (8a) für einen in endlichem Abstand gelegenen ein geschlossener Ausdruck für die Aberration ableiten, wenn das System gegeben ist. Dieser Ausdruck wird ganz gleichartig jenem, nur dass in seinen Coëfficienten ausser den das System als solches bestimmenden Grössen auch jene Entfernung s des Objektpunktes von der ersten brechenden Fläche auftritt. Für ein System dünner Linsen wird er also ebenso wie Gleichung (12) in einer Summe von Gliedern der Form $G_k' = A_k' \rho_k^3 + B_k' \rho_k + C_k' \rho_k$ bestehen. Durch ein System zweier Linsen von gegebener Brennweite lässt sich daher — analytisch wenigstens — der Bedingung genügen: die sphärische Aberration erster Ordnung für zwei Punkte auf der Axe zu heben. Es ergeben sich vier Lösungen, von denen natürlich noch fraglich ist, welche reell sind. Um die Aberration für drei Punkte zu heben, bedarf es mindestens dreier Variabelen, also bei gegebenen Werthen von n und φ dreier Linsen u. s. f. Um die Aberration erster Ordnung für ein endliches Stück der Axe gleichzeitig zu heben, müsste man demnach unendlich viele Linsen anwenden, mit anderen Worten: es ist praktisch unmöglich, auch nur diesen, relativ geringen Grad dioptrischer Vervollkommnung in einem endlichen Raumgebiet zu erreichen.

Wir begegnen also schon hier einer der Grenzen, auf welche wir pag. 99 hingewiesen haben. —

Die höheren Glieder der sphärischen Aberration auf der Axe. Das dem Quadrat der Apertur proportionale, erste Glied des Ausdrucks für die sphärische Aberration wird die letztere im Allgemeinen nur dann einigermaassen vollständig darstellen, wenn die Apertur im Verhältniss zu den Radien der brechenden Flächen sehr klein ist. Da aber aus mehreren Gründen das Bestreben der Constructeure von optischen Apperaten darauf gerichtet sein muss, die Apertur möglichst gross zu machen, so sind für eine Berechnung der Aberration in solchen Systemen auch die höheren Glieder der Entwickelung noch zu berücksichtigen.

Wie bereits früher erwähnt (pag. 100) hat die Darstellung der Aberration durch eine nach Potenzen der Einfallshöhe, des Einfallswinkels oder dergl. fortschreitende Potenzreihe einen Sinn und Werth überhaupt nur dann, wenn diese Variabele relativ klein ist, da bei grösseren Werthen entsprechend hohe Potenzen berücksichtigt werden müssten. Die Coëfficienten derselben werden aber bald so complicirt und enthalten zugleich so hohe Potenzen der verfügbaren Elemente (Radien und Dicken), dass an eine analytische Behandlung derselben kaum zu denken ist. Einer solchen Behandlung hat sich nur noch das der vierten Potenz der Apertur proportionale zweite Glied der Reihe zugänglich erwiesen, auf dessen Entwickelung wir jedoch hier aus Mangel an Raum auch verzichten, indem wir auf die Literatur verweisen (s. unten). Man erreicht natürlich eine vollkommnere Strahlenvereinigung, wenn man gleichzeitig mit dem ersten Gliede das zweite durch geeignete Wahl der Linsen-Krümmungen zum Verschwinden bringt.

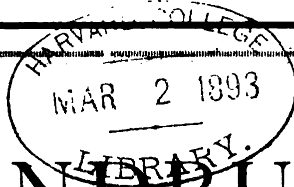
In einem System aus zwei Linsen ist dies bei den verfügbaren Werthen der Brechungsindices meist unmöglich; und auch dann, wenn mehr Linsen zur Verfügung stehen, ist es nicht von vornherein als das Beste zu erachten, wenn das erste und zweite Glied der Aberration ganz auf Null gebracht wird, ohne dass man die höheren Glieder mit berücksichtigt, da diese dann unter Umständen einen um so schädlicheren Einfluss ausüben können. Im Allgemeinen ist man vielmehr bei dieser, wie bei allen ähnlichen Aufgaben, welche auf eine Erweiterung der Abbildungsgrenzen gerichtet sind, gezwungen, ein gewisses Ausgleichungsverfahren anzuwenden: Man verzichtet darauf, den betreffenden Bildfehler in

aller Strenge aufzuheben, und sucht vielmehr zu erreichen, dass derselbe innerhalb des gegebenen Gebietes überall möglichst klein werde. Dabei kommen die im Eingange dieses Abschnittes genannten beiden Momente zu statten: die beschränkte Schärfe des Auges, welche es überflüssig macht, den »Bildpunkt« unter eine gewisse Grösse zu vermindern und die, wenn auch kleine, so doch endliche Länge der Lichtwellen, welche eine Summirung der Lichtstärke ergiebt, auch bei Elementarwellen, die um geringe Beträge gegen einander verzögert sind. Von diesem Ausgleichungsverfahren dürfte, in der Anwendung auf den vorliegenden Fall, die übersichliche Darstellung von Gauss eine Idee geben, welche dieser in einem Briefe an Brandes niedergelegt hat. Wir geben dieselbe daher hier wörtlich wieder (nach Gehlers, Physikal. Wörterb., Leipzig 1831, Art. Linsenglas, Bd. 6, pag. 437)[1].

. . . »Ich finde nämlich jetzt durch eine tiefer eindringende Untersuchung, dass die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrucke für die Längen-Abweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Axe abhängt, den möglichst kleinsten Total-Einfluss hat, wenn man das Objektiv so construirt dass diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Axe einfallen, und diejenigen, die in einiger Entfernung $= R \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$ auffallen würden, (wo $R =$ Radius des Objektivs ist,) in einem Punkte A sich vereinigen, wobei das Okular dann so steht, dass man denjenigen Punkt der Axe, wo die Strahlen, die in der Entfernung $= \sqrt{(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6})}\, R$ und $= \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6})}\, R$ von der Axe aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken Sie sich nämlich durch diesen Punkt eine auf die Axe senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je grösser der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objektes auf das Objektivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, dass die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muss. Hierbei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte für das zweckmässigste, hier nach denselben Principien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nämlich ds ein Element dieses Kreises, ρ die Entfernung des Elementes von A und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, dass $\int i\rho^2 ds$ als das Maass der Total-Undeutlichkeit zu betrachten sei, und mache dieses zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1) Construirte man das Objektiv so, dass dasjenige Glied der Längen-Abweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Axe abhängt, $= O$ wird, und setzte das Ocular so, dass A dahin fällt, wo die der Axe unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Werth dieses Integrals $= E$. 2) Stellte man aber bei derselben Einrichtung das Ocular so, dass das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann, (wobei A der Vereinigungsgunkt der in der Entfernung $= R\sqrt{\frac{1}{2}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4}E$; 3) dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vortheilhaftesten Stellung des Oculars das Integral $= \frac{1}{100}E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, dass nämlich mit dem Vereinigungspunkte der der Axe unendlich nahen Strahlen ein blos fingirtes Bild (von Strahlen aus grösserer Distanz von der Axe als der Halbmesser des Objektivs) vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste so genannte Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Axe) ist nämlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität; viel wichtiger ist, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objectivs unter sich besser zusammen gehalten werden, was bei jener Einrichtung

[1]) Siehe auch Werke 5, pag. 509.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).



HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PROF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, DR. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

DREIZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1892.

Handbuch der Physik. — Dreizehnte Lieferung.

am besten erreicht wird. Es thut mir leid, dass die Grenzen eines Briefes jetzt grössere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Calcül lässt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonnement übersieht man leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

Allgemein finde ich, dass immer bei der vortheilhaftesten Stellung des Oculars jenes Integral $= \frac{1}{4}E(1 - \frac{8}{3}\mu^2 + \frac{9}{5}\mu^4)$ wird, wenn das Objectiv so construirt ist, dass Strahlen aus der Entfernung μR von der Axe sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dieses ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und ist dann $= \frac{1}{180}E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60}E$ und für μ = unendlich klein $= \frac{1}{4}E$.«

Eine Ausführung der von Gauss angedeuteten Rechenoperationen veröffentlichte J. C. E. Schmidt[1]). Zu dem gleichen Resultate wie Gauss kam Bessel[2]) und Scheibner[3]); vergl. auch Schleiermacher[4]). In anderer Weise bestimmten die Lage und Grösse des sphärischen Zerstreuungskreises Kerber[5]) und von Hoegh[6]).

Wir haben wiederholt hervorgehoben, dass es zwecklos ist, Speculationen in dieser Richtung zu weit zu treiben, so lange man nicht auch auf die Phase der den Zerstreuungskreis schneidenden »Strahlen« d. h. Elementarwellen Rücksicht nimmt. Die Aufgabe, die Helligkeitsvertheilung in irgend einer Einstellungsebene eines mit spärischer Aberration behafteten Systems zu bestimmen, kommt in Wahrheit darauf hinaus: die Diffractionswirkung einer nicht spärischen, sondern nach bestimmtem Gesetze paraboloidischen, begrenzten Wellenfläche festzustellen, gehört also eigentlich nicht in das Gebiet der geometrischen, sondern der physischen Optik. Die erstere kann nur die Unterlagen für die weitere Behandlung liefern.

Bei Systemen von relativ grosser Oeffnung, wie den photographischen (Porträt-) Objectiven und namentlich den Mikroskopen genügt auch die Entwickelung des zweiten und dritten Gliedes der sphärischen Aberration nicht, um die thatsächlichen Verhältnisse selbst nur annähernd wiederzugeben. Eine Reihenentwickelung bis zu noch höheren Gliedern — und bei Mikroskopen würde sich dieselbe bis zu sehr hohen erstrecken müssen — würde aber ganz unverhältnissmässig complicirte Resultate liefern[7]), die keinerlei Uebersicht mehr gestatteten. In diesen Fällen ist man daher darauf angewiesen, sich von der Art der Strahlenvereinigung in einem gegebenen System dadurch zu überzeugen, dass man auf trigonometrischem Wege, gemäss den pag. 68/69 angegebenen Formeln eine genügende Anzahl der vom Objektpunkte aus divergirenden Strahlen durch die einzelnen Flächen verfolgt und so ihre Schnittpunkte mit der Axe nach der letzten Brechung bestimmt.

Die Einsicht, welche man auf diesem, gewissermaassen empirischen Wege in die Wirkungsweise der einzelnen Flächen und der Combinationen von solchen gewinnen kann, lässt sich natürlich sehr schwer weiter mittheilen, so dass

---

[1]) Lehrb. der analytischen Optik hrsg. v. Goldschmidt, Göttingen 1834, pag. 514 ff.

[2]) Astron. Unters., Königsberg 1841, Bd. I.

[3]) Abh. d. Leipz. Akad. 11, pag. 559. 1876.

[4]) Analytische Optik, Darmstadt 1842, Bd. 1, pag. 14 u. 378 ff.

[5]) Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 8, pag. 145. 1887; 10, pag. 147. 1889.

[6]) Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 117. 1888; vergl. dagegen Czapski, ibid., pag. 203, und Moser, pag. 223.

[7]) Vergl. z. B. Petzval, Bericht über opt. Unters., Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857, welcher zur Berechnung des nach ihm benannten photographischen Porträtobjectives die Reihenentwickelung bis zum neunten Grade trieb.

schliesslich Jeder darauf angewiesen bleibt, sich dieselbe durch eigene Erfahrung anzueignen. Auch sind die Resultate im einzelnen von wenig Interesse für weitere Kreise, sondern gehen fast ausschliesslich Diejenigen an, welche sich mit der rechnerischen Construction von optischen Systemen befassen.

Von Wichtigkeit ist nur — namentlich in praktischer Hinsicht — das allgemeine Ergebniss, welches solche Bemühungen geliefert haben: dass es möglich ist, auch in Büscheln von sehr grossem Oeffnungswinkel durch geeignete Combination einer relativ geringen Anzahl von brechenden Flächen die sphärische Aberration praktisch aufzuheben, d. h. auf ein so geringes Maass zu reduciren, dass ihr Einfluss auf die Bildschärfe unmerklich ist und jedenfalls geringer wird, als der anderer Faktoren, welche eine beliebige Steigerung der Bildschärfe ohnedies verhindern.

Bei Mikroskopen speciell kann der Oeffnungswinkel der vom Objekt divergirenden Strahlen nahezu 180° sein und er kann dies selbst in einem höher brechenden Medium als Luft — wodurch ja, wie ohne weiteres ersichtlich und später noch näher dargelegt werden soll, der dioptrische Werth des Büschels entsprechend gesteigert wird. Trotzdem ist eine durchaus befriedigende Aufhebung der sphärischen Aberration in solchen Systemen durch Combination von nicht mehr als 15 Brechungen, d. h. brechenden Flächen, möglich, mit welchen zugleich noch mehreren anderen wichtigen Bedingungen Genüge geleistet werden kann. Bei Systemen, deren Oeffnungswinkel nicht 180° in Luft übersteigt, genügen hierzu bereits 10—12 Brechungen.

II. Abbildung eines zur Axe senkrechten Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel.

Bedingung des Aplanatismus.

Mit der Aufhebung der sogen. sphärischen Aberration auf der Axe, d. h. mit der Einrichtung eines Systems brechender oder spiegelnder Flächen, dass die von einem auf der Axe gelegenen Punkte ausfahrenden Strahlen wieder in einem auf der Axe gelegenen Punkte — oder sehr kleinen Scheibchen — vereinigt werden, ist geometrisch und physisch (letzteres gemäss dem Satze vom kürzesten Lichtweg, pag. 30) die Abbildung des einen Punktes in den anderen gegeben. Da alle Functionen eines Linsensystems sich stetig ändern, so wird bei einem System von geringer Oeffnung mit der Abbildung eines auf der Axe gelegenen Punktes jedenfalls auch die — wenn auch entsprechend weniger scharfe — Abbildung eines ihm seitlich benachbarten und damit die eines zur Axe senkrechten den ersteren Punkt enthaltenden Flächenelements durch ebenso weit geöffnete Büschel *eo ipso* gegeben sein. In Systemen von erheblicher endlicher Oeffnung jedoch ist dies, wie eine nähere Betrachtung zeigt, durchaus nicht der Fall; es muss dann vielmehr in den Büscheln, welche die Abbildung des Axenpunktes vermitteln, eine ganz bestimmte Beziehung unter den conjugirten Strahlen vor und nach dem Durchgang durch das System bestehen, damit die Abbildung auch nur eines unendlich kleinen axialen Flächenstücks ermöglicht werde.

Von allgemeineren Fragen ausgehend, als uns hier beschäftigen, hatte CLAUSIUS in seiner bekannten Abhandlung über »die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung«[1]) nachgewiesen, dass, wenn die gesammte Energie, welche von einem Flächenelemente dq in einem Medium

[1]) POGG. Ann. 121, pag. 1. 1864 Mech. Wärmetheorie, 3. Aufl. I, pag. 315. 1887.

vom Brechungsindex n, innerhalb des unendlich kleinen Raumwinkels $d\omega$ ausgestrahlt wird, übertragen wird auf ein Element dq', in einem Medium vom Index n', dann die Beziehung stattfindet

$$\frac{n^2 \cos u \, d\omega}{n'^2 \cos u' \, d\omega'} = \frac{dq'}{dq}.$$

Hierin ist $d\omega'$ der unendlich kleine Raumwinkel, innerhalb dessen die Strahlung auf das Element dq' stattfindet, u und u' sind die Winkel, welche die Axen der Strahlenbündel mit den zugehörigen Flächennormalen bilden.

Für die Ableitung dieser Gleichung ist nur von dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und einigen anderen Beziehungen ganz allgemeiner Natur Gebrauch gemacht. Auch gilt dieselbe für einen viel allgemeineren Fall als den hier betrachteten, nämlich ganz unabhängig davon, durch welche Mittel die von dq ausgehenden Strahlen auf dq' concentrirt werden, ob dies z. B. durch continuirliche oder abrupte Aenderung der Strahlenwege geschieht, unabhängig auch von der gegenseitigen Lage der Elemente dq und dq' u. s. w. Es stellt diese Gleichung daher die allgemeinste Beziehung dar, welche zwischen den in sie eintretenden Grössen unter den angegebenen Umständen besteht und ebenso ist auch ihre Herleitung bei CLAUSIUS auf die denkbar allgemeinste Grundlage gestellt.

Angewandt auf ein optisches System mit einer Symmetriaxe, zu welcher dq und dq' senkrecht stehen, ergiebt die Gleichung als Bedingung für die Abbildung eines Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel die Beziehung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta = const,$$

welche wir alsbald auf einem anderen Wege herleiten wollen.

Direkter bewies denselben Satz v. HELMHOLTZ[1]) auf photometrischer Grundlage als Bedingung der Erhaltung der Leuchtkraft bei der Strahlung von dq innerhalb eines Kegelraums von der Oeffnung u auf dq' innerhalb der Oeffnung u'. Endlich hat auch HOCKIN[2]) einen Beweis geliefert, den kürzesten und einfachsten wohl, welcher möglich ist, indem er die Bedingung dafür aufsuchte, dass die optischen Längen zwischen conjugirten Punkten für zwei seitlich benachbarte Paare von Punkten auf allen innerhalb eines endlichen Winkelraums möglichen Weg je einander bis auf unendlich kleine Grössen gleich seien.

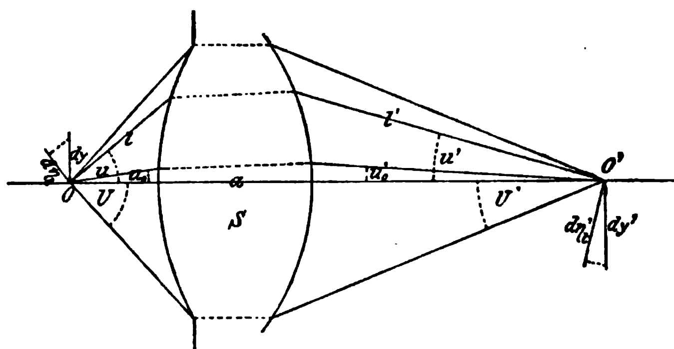
So werthvoll alle diese Herleitungen sind, namentlich durch die allgemeinere Bedeutung, welche sie dem Satze geben, so will ich mich doch damit begnügen, auf sie hingewiesen zu haben, den Satz selbst aber auf einem anderen Wege beweisen, welcher die uns hier in erster Linie interessirende dioptrische Bedeutung desselben deutlicher kenntlich macht, die bei jenen Ausführungen wohl fast ganz versteckt bleibt. Die Giltigkeit des Satzes zeigt sich auch unter diesem Gesichtspunkte als eine so weitgehende, dass er als eines der allgemeinsten Theoreme der Dioptrik bestehen bleibt.

Wir setzen auch unsererseits nichts weiter voraus, als dass ein optisches System ganz beliebiger Zusammensetzung vorliege, welches eine Symmetrieaxe besitzt, »centrirt« ist, und in welchem für die Punkte O und O' der Axe die sphärische Aberration aufgehoben ist. Ein bei O zur Axe senkrechtes Flächenelement dq werde (Fig. 325) durch die der Axe unendlich nahe verlaufenden Strahlen in das bei O' ebenfalls zur Axe senkrechte Element dq' abgebildet, so dass die lineare Lateralvergrösserung in diesen Elementen $\frac{dy'}{dy} = \beta_0$ ist. Die abbildenden Strahlen

1) POGG. Ann., Jubelbd., pag. 557. 1874.

2) Journ. R. Micr. Soc. Ser. 2, Vol. 4, pag. 337. 1884.

seien durch eine auf der Axe senkrechte kreisförmige Blende so begrenzt, dass überall nur Strahlen von der Maximalneigung U gegen die Axe in das System ein- und solche von der Maximalneigung U' aus ihm austreten können. Die Bedingung dafür, dass das Element dq durch alle von ihm innerhalb dieser Grenzen ausfahrenden Strahlen in dq' hinreichend deutlich abgebildet werde, kann dann offenbar auch so gefasst werden, dass diese Elemente durch alle Partial-Büschel, deren Axen bei der Incidenz irgend eine Neigung zwischen 0 und U haben — wenigstens bis auf unendlich kleine Abweichungen — mit gleicher Vergrösserung in einander abgebildet werden.



(Ph. 325.)

Wie wir wissen (pag. 94), repräsentirt nun jeder ein System unter endlichen Einfallswinkeln durchsetzender Strahl die Axe zweier räumlich und metrisch verschiedener collinearer Abbildungen: einer in der Einfallsebene des Strahls, im Meridianschnitt, und einer senkrecht dazu, im Sagittalschnitt verlaufenden. Beide sind auf unendlich schmale Streifen nahe der Axe beschränkt, in Bezug auf die abbildenden wie die zur Abbildung gelangenden Elemente. Wir sahen ferner, dass in einem centrirten optischen System sich dieses Verhältniss entlang dem gebrochenen Weg, den der Hauptstrahl durch dasselbe nimmt, fortsetzt. Innerhalb jeder Gruppe werden Linienelemente dy senkrecht zum einfallenden Hauptstrahl abgebildet in Linienelemente, welche unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von der zweiten Ordnung senkrecht auf dem gebrochenen Hauptstrahl stehen, wobei im Besonderen innerhalb jeder Partial-Abbildung die Beziehung fortbestehen bleibt

$$\beta \cdot \gamma = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{du'}{du} = \frac{n}{n'}\,.$$

Wir betrachten einen von O unter dem Winkel u gegen die Axe geneigt ausfahrenden Strahl l, welchem der unter dem Winkel u' gegen die Axe geneigte nach O' zielende Strahl l' entspricht. Wenn keine weiteren Annahmen gemacht werden als bisher geschehen, so kann u' jede beliebige stetige Function $f(u)$ von u sein, mit der einzigen Bedingung, dass sie für $u = 0$ selbst verschwindet, also dass $f(0) = 0$. Von den beiden Abbildungen, deren Objektaxe l und deren Bildaxe l' ist, werden sowohl Linienelemente, die zu l und l', als auch solche, die zur Axe a des ganzen Systems bei O senkrecht stehen, im Allgemeinen mit verschiedener Vergrösserung wiedergegeben, so dass also ein bei O zu a oder l senkrechter Kreis als eine zu a oder l' senkrechte Ellipse dargestellt wird.

Bei der senkrecht zur Einfallsebene sich vollziehenden Abbildung nämlich ist das Convergenzverhältniss conjugirter Strahlen in O und O', $\gamma_s = \frac{dv'}{dv}$, in folgender Weise zu bestimmen. Wir denken uns die Fig. 325 um den unendlich kleinen Winkel dw um die Axe a gedreht; dann sind die Winkel, welche

die Strahlen l und l' in ihrer neuen Lage mit den früheren einschliessen die in Betracht kommenden dv und dv', und es ist leicht zu sehen, dass

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{\sin u'}{\sin u}.$$

Die im Sagittalschnitt bei O und O' zu l und l' (und zur Zeichenfläche) senkrecht stehenden Linienelemente $d\eta_s$, $d\eta_s'$ ferner stehen auch senkrecht zu a, gehören also den Flächenelementen dq bezw. dq' an und sind folglich identisch mit dy bezw. dy'. Daher ist gemäss der Fundamentalgleichung $\beta\gamma = n/n'$ hier

$$\beta_s = \left(\frac{d\eta'}{d\eta}\right)_s = \left(\frac{dy'}{dy}\right)_s = \frac{n \sin u}{n' \sin u'}. \tag{1}$$

Es variirt also die Vergrösserung der Linienelemente im Sagittalschnitt mit dem Winkel u wie das Verhältniss $\sin u/\sin u'$. Damit β_s für alle Winkel u das gleiche sei, muss $\sin u/\sin u' = const$ sein, innerhalb der Grenzen 0 und U und da für $u = 0$, $dy'/dy = \beta_0$ ist, so ergiebt sich als Bedingung der Abbildung eines Paares zur Axe senkrechter Linienelemente durch sagittale Büschel verschiedener endlicher Axenneigung, dass

$$\beta_s = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const \tag{2}$$

sei, also

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n}\beta_0. \tag{2a}$$

Die in der Einfallsebene (im Meridianschnitt) gelegenen, zu l und l' bei O und O' senkrechten Linienelemente $d\eta_t$, $d\eta_t'$ sind nicht identisch mit den in diesem Schnitt gelegenen Elementen dy_t, dy_t' der Flächenelemente dq, dq', sondern bilden mit diesen bezw. die Winkel u, u'. Für erstere ist nach der Gleichung $\beta\gamma = n/n'$

$$\left(\frac{d\eta'}{d\eta}\right)_t = \frac{n\,du}{n'\,du'},$$

wo $du'/du = f'(u)$ die Derivirte von $u' = f(u)$ ist. Die zur Hauptaxe a senkrechten Elemente sind aber

$$dy_t = \frac{d\eta_t}{\cos u}, \qquad dy_t' = \frac{d\eta_t'}{\cos u'};$$

daher für diese[1]) das Vergrösserungsverhältniss

---

[1]) Genau genommen ist das Bild eines zu a senkrechten, also gegen l unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - u$ geneigten Linienelements nicht wieder ein zu a senkrechtes, d. h. gegen l' unter dem Winkel $\frac{\pi}{4} - u'$ geneigtes, sondern gemäss den Gesetzen der innerhalb dieses beschränkten Gebietes vorhandenen collinearen Abbildung eine Linie, welche der Bedingung genügt

$$\frac{n\,tg\,u'}{n'\,tg\,u} = \frac{dy_t'}{dy_t} \left(\text{statt } \frac{n\,tg\,u}{n'\,tg\,u'} = \frac{dy_t'}{dy_t}\right).$$

Dem gegenüber ist aber daran zu erinnern, dass einerseits die Strahlenvereinigung in Meridianschnittbüscheln überhaupt nur von der ersten Ordnung ist, d. h. dass von der Abbildung eines Elements in ein anderes nur in soweit die Rede sein kann, als man Zerstreuungskreise vernachlässigt, welche unendlich klein sind gegen die Dimensionen des abzubildenden Elementes selbst (vergl. pag. 86 u. 92). Mit derselben Annäherung muss man sich also bei der Lösung der ganzen Aufgabe begnügen, wenn dieselbe allgemein bleiben soll. Mit dieser Annäherung kann aber, wie leicht ersichtlich als Bild des zu a senkrechten Elements dy_t durch Meridionalbüschel entlang l das wie oben bestimmte ebenfalls zu a senkrechte Element dy_t angenommen werden. Die von den einzelnen Punkten von dy ausgehenden Strahlen durchstossen dy in Punkten, welche von der durch die oben angegebenen Beziehungen bestimmten Mittellage nicht weiter entfernt sind als bis auf Abweichungen, welche gegen die Grössen dy, dy' selber unendlich klein sind. Mit dieser Annäherung müssen wir uns hier begnügen.

$$\beta_t = \left(\frac{dy'}{dy}\right)_t = \frac{n \cos u\, du}{n' \cos u'\, du'} = \frac{n\, d(\sin u)}{n'\, d(\sin u')}. \tag{3}$$

Damit β_t unabhängig von u und für $u = 0$ gleich β_0, d. i. gleich dem Vergrösserungsverhältniss für paraxiale Strahlen sei, muss wiederum

$$\beta_t = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const, \tag{4}$$

also

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0$$

sein. Die Bedingung der Abbildung eines Paares von Linienelementen durch Büschel verschiedener endlicher Neigung zur Axe ist also für meridionale Büschel die gleiche wie für sagittale: Das Verhältniss der Sinus conjugirter Axenwinkel muss für die von den conjugirten Axenpunkten ausgehenden Strahlen innerhalb des betreffenden Winkelraums ein constantes sein. Der Werth der Constanten ist die Vergrösserung der paraxialen Strahlen β_0 multiplicirt mit dem Verhältniss der Brechungsexponenten des Objekt- und Bildmediums.

Abbe[1]), welcher zuerst den Sinussatz als die dioptrische Bedingung der Abbildung von Flächenelementen durch Büschel endlicher Oeffnung hingestellt hat, will den Begriff des »Aplanatismus« überhaupt eingeschränkt haben auf Punktepaare, welche neben der Bedingung der Strahlenvereinigung auch noch der obigen des constanten Sinusverhältnisses genügen. In diesem Sinne bleiben die früher (pag. 68) sogen. aplanatischen Punktepaare der Kugel, nämlich die im Scheitel, die im Mittelpunkt coincidirenden und die von letzterem in den Entfernungen $c = \frac{n}{n'} r$ und $c' = \frac{n'}{n} r$ gelegenen als solche bestehen, während z. B. die Brennpunkte des Ellipsoids, sowie der des Paraboloids und der unendlich ferne (für reflektirte Strahlen) diese Eigenschaft nicht besitzen.

Liegt der Objekt- oder Bildpunkt in unendlicher Entfernung, so wird die Bedingung des Aplanatismus, d. h. Erzeugung mässig ausgedehnter Bilder, wenn sphärische Aberration in der Axe aufgehoben ist,

$$\frac{h}{\sin u'} = const = f_0' \quad \text{bezw.} \quad \frac{h'}{\sin u} = const = f_0, \tag{4a}$$

wenn h und h' die Einfallshöhen von Strahlen bedeuten, welche parallel zur Axe einfallen bezw. austreten, u' und u die Neigungswinkel der ihnen conjugirten Strahlen, f_0 und f_0' die Brennweiten der paraxialen Strahlen. Wie man sich leicht überzeugt, ist dann die Brennweite der Partialbüschel im Meridianschnitt $f_t = f_0/\cos u$, also variabel mit u, während dieselbe im Sagittalschnitt $f_s = f_0 = const$ ist.

Die genaue Erfüllung der Sinusbedingung ist natürlich desto kritischer, je grösser der Winkel U oder U' und damit der Spielraum der überhaupt möglichen Abweichungen des Sinusverhältnisses von der Constanz ist. Bei Mikroskopobjektiven grösserer Apertur können diese Abweichungen bis zu 50 % und selbst mehr des Normalwerthes gehen. Um ebenso viel variirt dann die Vergrösserung durch die betreffenden Zonen des Objektivs. Unter solchen Umständen ist aber das brauchbare Sehfeld fast gleich Null, die Zerstreuungskreise eines Punktes ausser der Axe bei gleichzeitiger Abbildung durch auseinanderliegende Theile der Oeffnung werden von gleicher Grössenordnung wie seine Entfernung von der Axe, d. h. wie die Bildgrösse selbst.

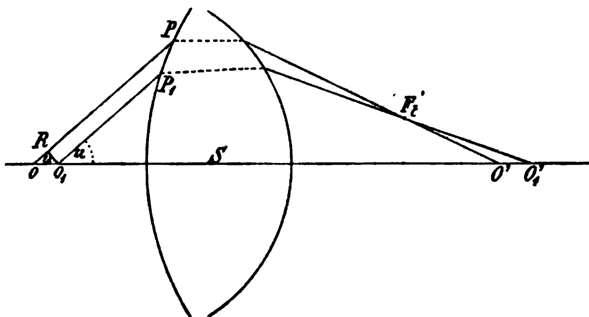
Abbe hat (l. c., pag. 310) ein frappantes experimentelles Kriterium für die

[1]) Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 420. 1873; und Rep. f. Exp. Physik 16, pag. 303. 1881.

Constanz des Sinusverhältnisses angegeben. Mittels desselben konnte er feststellen, dass in allen in Gebrauch befindlichen Mikroskopsystemen grösserer Oeffnung, woher sie auch stammen mochten, diese Bedingung sehr nahe erfüllt war, trotzdem sie damals den Optikern noch durchaus unbekannt war und diese sämmtlich ihre Systeme nur durch Tatonnement, — empirisch unter Controle des Auges — und nicht nach bewussten Regeln construirten. So unerlässlich ist ihre Erfüllung für eine befriedigende Wirkung in solchen Fällen.

Die Erfüllung der Sinusbedingung gewährleistet die Abbildung eines Paares von *Flächenelementen*. Ihre Erfüllung führt nicht die Abbildung *ausgedehnterer Flächen* herbei, wenn die Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel sehr gross sind, und sie ist im Widerspruch mit der Abbildung *mehr als eines* Paares von Flächenelementen an verschiedenen Stellen der Axe.

Denn was das erstere betrifft, so ist daran zu erinnern, dass wir uns von vornherein auf eine nur angenähert scharfe Abbildung beschränkt hatten, nämlich auf eine solche, bei welcher die Zerstreuungskreise unendlich klein von der ersten Ordnung gegen die Dimensionen des Bildes selbst sind. Mit wachsender Bildgrösse nehmen daher auch die Zerstreuungskreise zu und erreichen bei entsprechend grosser Oeffnung der abbildenden Büschel bald die für deutliches Sehen zulässige Grösse, auch wenn constantes Sinusverhältniss herrscht.



(Ph. 326.)

In Systemen geringerer Oeffnung kann das brauchbare Bildfeld entsprechend grösser sein.

Es ist andererseits unmöglich, dass ein System für zwei benachbarte Stellen der Axe zugleich aplanatisch sei. Hierzu müsste ja zunächst die *sphärische Aberration für zwei solche Punktepaare aufgehoben* sein, und diese Anforderung führt bereits auf eine Bedingung, welche der des Aplanatismus für eine Stelle der Axe widerspricht.

Zu ihrer Herleitung folgen wir dem sehr einfachen Gedankengange, mittelst dessen Hockin[1]) die letztere herleitete (Fig. 326). Wenn in dem Systeme S, sowohl für die Punkte $O\,O'$ als $O_1 O_1'$ die sphärische Aberration aufgehoben sein soll, so muss die optische Länge der von O und O_1 unter dem beliebigen Winkel u ($< U$) austretenden Strahlen bis O' bezw. O_1' die gleiche sein, als die der entsprechenden paraxialen Strahlen; es muss also zugleich

$$[OPO'] = [OSO'] \text{ und } [O_1 P_1 O_1'] = [O_1 S O_1']$$

sein. Beachten wir, dass von F_t' dem (ersten) Brennpunkt des unter dem Winkel u einfallenden Parallelstrahlenbüschels OPO_1P die optischen Längen bis zu jedem dieses Büschel normal schneidenden Ebene O_1R gleich sind, so ergiebt die Zerlegung der fraglichen Lichtwege in einzelne Abschnitte und die Subtraction der beiden obigen Gleichungen von einander

$$[OR] + [FO'] - [FO_1'] = [OO_1] - [O'O_1']$$

oder, wenn $OO_1 = dx$, $O'O_1' = dx'$ gesetzt werden,

$$n\,dx \sin^2 \frac{u}{2} = n'\,dx' \sin^2 \frac{u'}{2}.$$

---

[1]) l. c., pag. 340.

Nun ist für die paraxialen Strahlen

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = \frac{n'}{n} \beta^2.$$

Damit also für jeden Einfallswinkel u das Verhältniss dx'/dx dasselbe, d. h. die sphärische Aberration in den beiden Punktpaaren O, O' und O_1, O_1' zugleich aufgehoben sei, muss

$$\frac{n \sin (u/2)}{n' \sin (u'/2)} = \beta_0 = const \tag{5}$$

sein; es müssen dann also die Sinus der halben Axenwinkel in constantem Verhältnisse stehen — was im Widerspruch steht mit der durch (4) ausgedrückten Bedingung.

Man kann nach den Gleichungen (2) resp. (4) und (5) berechnen, welche Aberration in einem aplanatischen System — unabhängig von jeder weiteren Annahme über die Zusammensetzung und sonstigen Eigenschaften desselben — eintritt, wenn der Objektpunkt auf der Axe verschoben wird und andererseits, wie die Lateral-Vergrösserung eines für zwei benachbarte Axenpunkte aberrationsfreien Systems in beiden Hauptschnitten nach dem Rande hin variirt.

Ein solche Untersuchung ergiebt für den ersteren Fall, also für ein System, welches der Gleichung (4) genügt, dass, wenn der Objektpunkt auf der Axe im Sinne der Lichtbewegung verschoben wird, dann in dem conjugirten Bildpunkte stets sphärische Uebercorrection eintritt, wofern der Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel auf der Objektseite der grössere ist — und umgekehrt. Bezeichnet dx_0' die Verschiebung des Bildpunktes, welche der Verschiebung dx des Objektpunktes für paraxiale Strahlen entspricht, dx' dieselbe Verschiebung für Strahlen der Neigung u zur Axe, so findet man

$$dx' = dx_0' \left(\frac{\cos u'}{\cos u} - 1 \right).$$

Für grosse u und kleine u' kann daher dx' ein Vielfaches von dx_0' werden und es ist bei Werthen von $u > 57°$ der Zerstreuungskreis der so eingetretenen Aberration am Orte des Bildes der paraxialen Strahlen sogar grösser als der Zerstreuungskreis, welcher aus der blossen Focusdifferenz entspringt, wenn das Objekt im aplanatischen Objektpunkt verbleibt, das Bild aber in einer anderen als der conjugirten Ebene aufgefangen wird oder wenn das Objekt um dx verschoben und sein Bild in der ursprünglichen Ebene beobachtet wird.

Diese Erwägungen sind namentlich für die Theorie des Mikroskops von Belang, dessen stärkere Systeme in Folge dieser Verhältnisse nur bei einer bestimmten Bildentfernung (»Tubuslänge«) gute Bilder geben.

In einem Systeme andererseits, welches für zwei benachbarte Paare von Axenpunkten aberrationsfrei ist, welches also der Gleichung (5) genügt, wächst die Lateralvergrösserung eines zur Axe senkrechten Linienelements mit dem Neigungswinkel u des einfallenden Hauptstrahls im Sagittalschnitt nach der ebenfalls unschwer abzuleitenden Gleichung

$$\beta_s = \beta_0 \frac{\cos (u/2)}{\cos (u'/2)}$$

und in der Einfallsebene, im Meridionalschnitt, nach der Gleichung

$$\beta_t = \beta_0 \frac{\cos (u'/2)}{\cos (u/2)} \cdot \frac{\cos u}{\cos u'}.$$

Für den beim Mikroskop vorliegenden Fall, dass u' klein gegen u (β sehr gross) ist, wird annähernd

$$\beta_s = \beta_0 \cos (u/2); \qquad \beta_t = \beta_0 \frac{\cos u}{\cos (u/2)}$$

und

$$\frac{\beta}{\beta_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos u} + 1 \right).$$

Die Vergrösserung nimmt dann in beiden Hauptschnitten mit wachsendem u ab, jedoch in ungleichem Grade, so dass β_t im Verhältniss zu β_s immer kleiner wird. Einem Punkt der Objektebene, welcher in der seitlichen Entfernung dy von einem der aberrationsfreien Axen-

punkte sich befindet, entspricht in der Bildebene der paraxialen Strahlen eine Ellipse, deren Dimensionen bei endlicher Grösse von u auch in endlichem Verhältniss zu den Dimensionen des von den paraxialen Strahlen entworfenen Bildes selbst ($dy' = \beta_0 dy$) stehen. Die Halbmesser dieser Zerstreuungsellipse ρ_s, ρ_t stehen zu der Bildgrösse z. B. für $u = 60°$ in dem Verhältniss

$$\frac{\rho_t}{dy'} = 0{\cdot}42 \qquad \frac{\rho_s}{dy'} = 0{\cdot}13.$$

Bei einem Oeffnungswinkel von 0·1 hingegen (Fernrohre) ist die Differenz der Vergrösserungen auf dem Axen- und Randstrahl nur 0·1 §.

Das Resultat dieser Betrachtungen gipfelt also darin, dass gänzlich unabhängig von der Zusammensetzung eines optischen Systems und kraft der allgemeinen Gesetze, denen jede mit den Mitteln der Dioptrik hervorgebrachte Strahlenänderung und somit auch Strahlenvereinigung unterworfen ist, mit beliebig weit geöffneten Büscheln, entweder nur ein zur Axe senkrechtes Flächenelement oder ein unendlich kleines Stück der Axe selbst in ein entsprechendes scharf abgebildet werden kann. Die eine Anforderung steht im Widerspruch mit der anderen, und beide stehen im Widerspruch mit den Bedingungen collinearer Abbildung endlicher Räume bei endlichen Divergenzwinkeln. Denn für diese hatten wir gefunden (pag. 53/54)

$$\frac{tang\, u}{tang\, u'} = \frac{n'y'}{ny} = const.$$

Diese letztere Beziehung lässt sich andererseits als die geometrisch nothwendige Bedingung für die Abbildung auch nur zweier endlicher Ebenen in zwei entsprechende unter endlichen Divergenzwinkeln nachweisen, und es lässt sich dann weiter zeigen, dass wenn diese gegeben ist, mit Nothwendigkeit die Abbildung des ganzen unendlichen Raumes in einen entsprechenden, nach den Gesetzen der Collinearität folgt. Mit den Mitteln der Dioptrik jedoch ist, wie wir eben gesehen haben, die scharfe Abbildung auch nur eines unendlichen kleinen nach drei Dimensionen ausgedehnten Objektraumstücks unter grossen Divergenzwinkeln eine Unmöglichkeit.

Es bleibt uns der andere Theil des hier vorliegenden Problems zu behandeln übrig, nämlich wie weit es möglich ist, die von selbst gegebenen Grenzen der Abbildung dahin zu erweitern, dass mittelst enger (elementarer) Büschel endliche Flächen- oder Raumtheile abgebildet werden.

III. Abbildung ausgedehnter Flächen durch unendlich enge Büschel.

In Bezug auf diese fehlt es uns an Sätzen von gleicher Allgemeinheit als die Sinusbedingung für den vorher betrachteten Fall einer ist. Wir können daher nicht viel mehr thun als die Bedingungen zu formuliren, die man an eine solche Abbildung stellen muss.

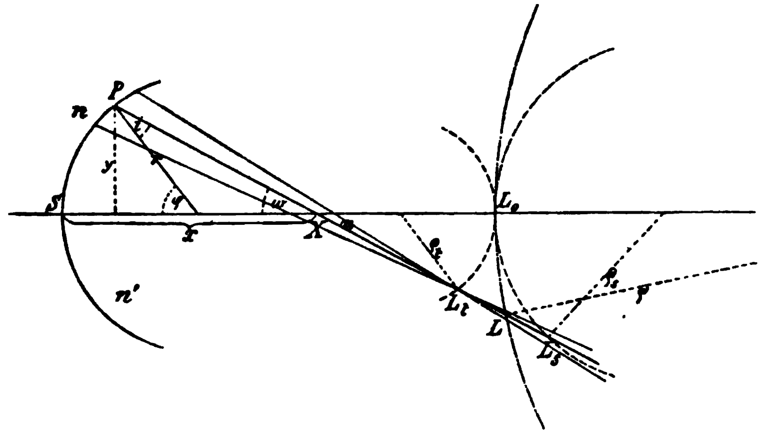
1) Astigmatismus. In erster Linie ist erforderlich, dass in den abbildenden Büscheln, auch wenn dieselben als unendlich dünne angenommen werden, der Astigmatismus gehoben sei. Andernfalls findet ja eine Abbildung, d. h. ein punktweises Entsprechen von Objekt- und Bildpunkten überhaupt nicht statt, sondern jedem Objektpunkte entsprechen zwei getrennte, zu einander und zur Büschelaxe senkrechte Linien, deren Grösse der Oeffnung des nach dem Bilde zu convergirenden Büschels und ihrer gegenseitigen Entfernung proportional ist.

Eine allgemeingiltige Bedingung für die Aufhebung des Astigmatismus in Büscheln, die von den verschiedenen Punkten eines endlichen Objektes ausgehen, ist meines Wissens noch nicht mathematisch formulirt worden. Praktisch

ist dieser Astigmatismus natürlich in allen Systemen grösseren Sehfeldes (Ocularen, Lupen, photographischen Objektiven) mehr oder minder gehoben — meist unwillkürlich, da die Combination von Brechungen verschiedenen Charakters, wie sie zur Erfüllung irgend welcher anderer an das Linsensystem gestellter Anforderungen nöthig und üblich ist, von selbst eine theilweise Compensation auch dieses Fehlers mit sich bringt.

Nur für die Aufhebung des Astigmatismus in zur Axe des Systems sehr schwach geneigten Büscheln lässt sich eine (algebraische) Bedingungs-Gleichung herleiten.

Ein Büschel von dem halben Oeffnungswinkel u falle gegen die Axe geneigt auf eine beliebige Fläche SP (Fig. 327). Der Hauptstrahl treffe die Fläche in der Höhe y über der Axe, letztere in der Entfernung $SX = x$ vom Scheitel, und unter dem Winkel w. Die halbe lineare Oeffnung des Büschels senkrecht zur Zeichnungsebene sei am Schnittpunkt



(Fig. 327.)

mit der brechenden Fläche $= h$, die Schnittweiten der sagittalen und tangentialen Büschel $= s$, bezw. t. Nach der Brechung seien die durch sie veränderten Grössen wie früher durch oberen Index unterschieden. Wir wollen dann als Maass für die durch den Astigmatismus hervorgerufene Bildverschlechterung den Durchmesser des zwischen den beiden Bildlinien gelegenen Zerstreuungskreises nehmen. Dieser liegt von den beiden Bildlinien bei L_s und L_t in Entfernungen, die sich verhalten wie die entsprechenden Schnittweiten $PL_s = s$ und $PL_t = t$ selber. Sein Radius r berechnet sich hiernach zu

$$\mathfrak{r} = h \cdot \frac{1/t - 1/s}{1/t + 1/s}.$$

Da bei geringer Neigung des Büschels zur Axe des Systems auch der Astigmatismus nur gering sein kann, wollen wir für $\frac{1}{t} + \frac{1}{s}$ den Mittelwerth $\frac{2}{s}$ setzen, so dass der Durchmesser des Zerstreuungskreises

$$2\mathfrak{r} = \mathfrak{d} = h\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right)s$$

wird.

Ist u der (unendlich kleine) halbe Oeffnungswinkel des Büschels, also $u = h/s$, so wird durch Multiplikation mit nu beiderseits

$$nu \cdot \mathfrak{d} = h^2 n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right),$$

daher

$$\Delta(nu \cdot \mathfrak{d}) = h^2 \Delta n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right).$$

Bezeichnet wieder $(\mathfrak{d}_0)_k$ bezw. $(\mathfrak{d}_0')_k$ den Durchmesser des Kreises im Objekt, dessen Bild gemäss den Fundamentalformeln nach Ort und Grösse der thatsächliche Zerstreuungskreis vor bezw. nach der Brechung des Büschels an der betrachteten ($k$ten) Fläche des Systems ist, so haben wir wie früher (pag. 105)

$$n_k' u_k' \mathfrak{d}_k' = n_1 u_1 (\mathfrak{d}_0)_k'$$

und

$$n_k u_k \mathfrak{d}_k = n_1 u_1 (\mathfrak{d}_0)_k,$$

also

$$\Delta(\mathfrak{d}_0) = \frac{h^2}{n_1 u_1} \Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right). \tag{1}$$

Den rechter Hand stehenden zweiten Faktor fanden wir aber früher (pag. 88) streng

$$\Delta n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = (n \sin i)^2 \Delta \left(\frac{1}{nt}\right).$$

In der hier berücksichtigten Näherung kann auf der rechten Seite

$$\sin i = i = w - \varphi = y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)$$

und t kann gleich s gesetzt werden, wo unter s auch die Schnittweite SL_0 eines von dem Axenpunkte desselben ursprünglichen Objekts ausgehenden paraxialen Büschels verstanden werden darf. Wir erhalten demnach

$$\Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_k^2}{n_1 u_1} y_k^2 \left[n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right]_k^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \tag{2}$$

und wenn wir wie früher mit h_1^2, und y_1^2, erweitern und die Invariante der Brechung für die Axenschnittpunkte des Hauptstrahls mit Q_x bezeichnen, also

$$Q_x = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'}\right),$$

so wird schliesslich

$$\Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_1^2 y_1^2}{n_1 u_1} \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 Q_x^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k. \tag{2a}$$

Hierin ist $\frac{y_k}{y_1}$ in ganz derselben Weise aus den $x_1 \ldots x_k'$ zu berechnen, wie $\frac{h_k}{h_1}$ aus den $s_1 \ldots\ldots s_k'$ (pag. 106).

Bei unendlich entfernten Objekten und $n_1 = 1$ ist der angulare Werth des auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreises

$$\Delta(\delta_0)_k = h_1 y_1^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 Q_k^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \tag{2b}$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\mathfrak{d}_0)_k = 0 \text{ bezw. } \sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\delta_0)_k = 0$$

wird die Bedingung für die Beseitigung des Astigmatismus in einem aus p Flächen bestehenden optischen System.

Ist der Astigmatismus in dieser Weise nicht nur für die der Axe nahen Theile des Objekts sondern für dessen ganze Ausdehnung gehoben, so ist damit eine Abbildung desselben innerhalb der hier gewählten Beschränkuug (nämlich auf enge Büschel) erreicht. Doch pflegt man an diese Abbildung noch zwei weitere Forderungen zu stellen, welche allerdings keine unbedingten sind und auch nicht immer gleich stark urgirt werden, sondern sich zum Theil nach dem Zwecke des Instruments richten, zum Theil bloss der Bequemlichkeit dienen.

Man wünscht nämlich oft noch

2) dass einem ebenen Objekte ein ebenes Bild entspreche und

3) dass das Bild in allen seinen Theilen dem Objekte ähnlich sei.

2) Wölbung des Bildes. Bedingungen der (annähernden) Bildebenung. Das durch die Brechung unendlich dünner Büschel in einem beliebigen optischen System hervorgebrachte Bild einer endlichen Ebene kann eine irgendwie gestaltete Rotationsfläche sein mit gleicher Axe als das System selbst und zwar entspricht, wenn der Astigmatismus in den wirksamen Büscheln nicht aufgehoben ist, den sagittalen und den tangentialen ebenen Partialbüscheln je eine besondere Bildfläche. Im Scheitel berühren beide Flächen einander und die Ebene des idealen Bildes. Von den Krümmungen, welche die Bildflächen in diesem Scheitel besitzen, lässt sich eine einfache Beziehung nachweisen.

Ein gegebenes System entwerfe von einer zur Axe senkrechten Ebene im Objektraume ein Bild, dessen Krümmungsradius im Scheitel $= \rho_0'$ sei. Analog sei ρ_0 der Krümmungsradius der Objektfläche, deren an der gleichen Stelle der Axe von demselben System entworfenes Bild eine Ebene ist, d. h. wenigstens im Scheitel die Krümmung Null hat. ρ und ρ' seien die Krümmungsradien eines beliebigen anderen Paares conjugirter Flächen, deren Scheitel an den gleichen Stellen der Axe liegen. Dann gilt

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho}\right) = \frac{1}{n'\rho'} - \frac{1}{n\rho} = \frac{1}{n'\rho_0'} = -\frac{1}{n\rho_0}, \tag{3}$$

wenn n und n' die Brechungsindices des Objekt- und Bildraumes sind.

Der Beweis ergiebt sich daraus, dass der Abstand einer Objekt- oder Bildfläche von der sie berührenden Ebene an irgend einer Stelle bis auf Glieder, die von den vierten und höheren Potenzen dieses Abstandes abhängen, gleich ist dem halben Quadrate der Entfernung dieser Stelle von der Axe dividirt durch den Krümmungsradius der betreffenden Fläche. Andererseits sind die der Axe parallelen Tangentialabstände zusammengehöriger Flächenpaare dioptrisch einander conjugirt gemäss der Formel für die Tiefenvergrösserung $\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2$, worin α das Verhältniss der eben genannten Axenentfernungen ist.

Es ist somit die Grösse $\pm\frac{1}{n\rho_0}$ oder $\mp\frac{1}{n'\rho_0'}$ das richtige Maass für das was man »Bildkrümmungsvermögen« eines Systems in Bezug auf zwei conjugirte Axenpunkte nennen könnte.

Jede Ebene, also auch diejenige, welche die Bildflächen im Scheitel berührt, schneidet aus den abbildenden unendlich dünnen Strahlenbüscheln, wie wir früher gesehen haben, Ellipsen heraus, deren Axen aber bei geringen Neigungswinkeln der Büschel als gleich gross angesehen werden können. Wenn man das Bild auf jener Ebene auffinge, so würden diese Schnitte die Zerstreuungskreise sein, als welche in Folge der Bildkrümmung die Bilder ausseraxialer Punkte in ihr erscheinen. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass die Zunahmen, welche der Durchmesser dieser Zerstreuungskreise bei einer Brechung erfährt, wenn man sie wie früher (pag. 105) auf die Objektseite zurückbezieht, einerseits proportional sind dem Bildkrümmungsvermögen und ausserdem proportional der numerischen Apertur und dem Quadrate der linearen Oeffnung h_0 des einfallenden Büschels. Nämlich

$$\Delta(\sigma_0)_k = n_0 u_0 h_0^2 \Delta\left(\frac{1}{n\rho_0}\right)_k = -n_0 u_0 h_0^2 \left(\frac{1}{n'\rho_0'}\right)_k, \tag{4}$$

wenn u_0 die halbe angulare Oeffnung des einfallenden Büschels ist.

Was nun endlich den Werth dieses Bildkrümmungsvermögens anbetrifft, so hängt derselbe von den Elementen des Linsensystems in folgender Weise ab (vergl. Fig. 327).

Wenn der Radius der brechenden Fläche, wie früher mit r, die Indices der an sie grenzenden Medien mit n und n' bezeichnet werden, wenn ferner die Axen der einfallenden Büschel die Axe des Systems in der Entfernung x vom Scheitel schneiden, die der gebrochenen in der Entfernung x' welche letztere mit x natürlich in der Beziehung steht, dass

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_0}\right)=Q_x=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x_0'}\right),$$

wenn endlich die Scheitel der Objektfläche von dem der brechenden um s_0, der der Bildfläche von derselben um s_0' entfernt ist, wobei wieder

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s_0}\right)=Q_s=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s_0'}\right),$$

so ist die durch die betreffende Brechung bewirkte Krümmungszunahme für die im Aequatorealschnitt gelegenen Strahlen

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho_s}\right)=\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{Q_x}{Q_x-Q_s}\right)^2\Delta\left(\frac{1}{ns_0}\right); \tag{5}$$

für die im Meridanschnitt gelegenen

$$\Delta\left(\frac{1}{n\rho_t}\right)=\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right)-3\left(\frac{Q_x}{Q_x-Q_s}\right)^2\Delta\left(\frac{1}{ns_0}\right). \tag{6}$$

Die Bildkrümmung hängt also ausser von den die Brechung selbst bedingenden Elementen n, n', r, s noch wesentlich mit von der Lage des Punktes ab, in welchem sich die Hauptstrahlen der abbildenden Büschel kreuzen.

Zur Ableitung dieser Gleichungen kann man ebenso verfahren, wie wir oben bei der Betrachtung der sphärischen Aberration (pag. 101 ff.) ausführlich auseinandergesetzt haben. Man entwickelt die Werthe der beiden Abschnitte in die ein Hauptstrahl s durch die Axe des Systems getheilt wird, nach Potenzen der Kugelöffnung φ und zerlegt dann die Ausdrücke für die Invarianten der Brechung schiefer sagittaler bezw. tangentialer Büschel nämlich

$$Q_s=\frac{n}{s}-\frac{n\cos i}{r}=\frac{n'}{s'}-\frac{n'\cos i'}{r} \quad \text{(pag. 85)}$$

und

$$Q_t=\frac{n\cos^2 i}{t}-\frac{n\cos i}{r}=\frac{n'\cos^2 i'}{t'}-\frac{n'\cos i'}{r} \quad \text{(pag. 86)}$$

in den constanten und den von φ^2 abhängigen Theil unter steter Vernachlässigung aller von noch höheren Potenzen von φ abhängigen Glieder. Die Gleichsetzung der Factoren von φ^2 führt nach einigen Reductionen auf die obigen Gleichungen.[1]) Der Vergleich der Formeln (5) und (6) — welche gemäss dem oben angeführten mit (4) zu combiniren sind — mit denjenigen, welche durch die sphärische Aberration in der Axe hervorgerufene Verundeutlichung des Objekts angeben, zeigt den nahen Zusammenhang beider Grössen. (Die pag. 105 mit Q_k bezeichnete Grösse ist der Werth, den die hier mit Q_s bezeichnete an der $k$ten Fläche hat.)

Die Bedingungen dafür, dass ein System centrirter brechender Flächen von einem in gegebener Lage befindlichen ebenen Objekt mittelst Strahlenbüschel beider Art, deren Axen sich an gegebener Stelle kreuzen, ein in erster Näherung, d. h. im Scheitel, ebenes (und damit zugleich anastigmatisches) Bild entwerfe, zerfällt also analytisch in die beiden Gleichungen

---

[1]) Zu denselben gelangte ZINKEN-SOMMER, Unters. über die Dioptrik der Linsen-Systeme. Braunschweig 1870 pag. 51 ff., auf anderem Wege, nachdem er schon vorher (POGG. Ann. 122, pag. 563. 1864) die für den ersten Hauptschnitt giltige Gleichung abgeleitet und die beschränkte Giltigkeit der von PETZVAL als allgemein hingestellten erwiesen hatte.

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad (5a)$$

und

$$\sum \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_x}\right)^2 \Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = 0, \qquad (6a)$$

wo die Summation über alle brechenden Flächen zu erstrecken ist[1]).

Bei einem System in Contakt befindlicher Linsen von kleiner, zu vernachlässigender Dicke (vergl. pag. 109), in deren gemeinsamem Scheitel sich die Hauptstrahlen der wirksamen Büschel kreuzen — wie ein solches in erster Näherung durch das Objektiv eines astronomischen Fernrohrs repräsentirt wird — werden alle $x = 0$, der Ausdruck $\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} = 1$, demnach die Bedingungen der Ebenheit

$$\sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad (5^*)$$

und

$$\sum \Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = 0. \qquad (6^*)$$

Der Ausdruck $\Delta \left(\frac{1}{ns}\right)$ lässt sich transformiren in

$$\Delta \left(\frac{1}{ns}\right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) - Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right);$$

Gleichung (6^*) geht daher in Verbindung mit (5^*) über in

$$\sum Q_s \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0. \qquad (6^*)$$

Denkt man sich, wie pag. 109, die Linsen alle in Luft befindlich und werden die Reciproken ihrer Brennweiten wieder mit φ, die Brechungsindices der Linsensubstanzen mit n bezeichnet, so lassen sich die Gleichungen (5^*) und (6^*) weiter transformiren in

$$\sum \left(\frac{1}{n} \varphi\right) = 0 \quad \text{und} \quad \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varphi = 0, \qquad (5^{**})$$

welche letztere in Verbindung mit (5^{**}) schliesslich in

$$\sum \varphi = \Phi = 0 \qquad (6^{**})$$

übergeht (wo Φ die Gesammtstärke des Systems bezeichnet).

Die letztere zeigt, dass unter den angenommenen Verhältnissen die Ebenung des Bildes sich nur bei einem, wie eine Planparallelplatte wirkenden System von der Brennweite ∞ erreichen lässt.

Der Betrag der Krümmung des von den Sagittalstrahlen herrührenden Bildes eines ebenen Objekts ist bei einem solchen System in Contakt befindlicher dünner Linsen

$$\rho_s' = \sum \Delta (\rho_s') = - \sum \frac{n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{n+1}{n} \varphi, \qquad (7)$$

in dem von den Tangentialstrahlen herrührenden Bilde

$$\rho_t' = \sum \Delta (\rho_t) = - \sum \frac{3n+1}{n} \frac{1}{f} = - \sum \frac{3n+1}{n} \varphi, \qquad (8)$$

also beide unabhängig vom Orte des Objekts und Bildes.

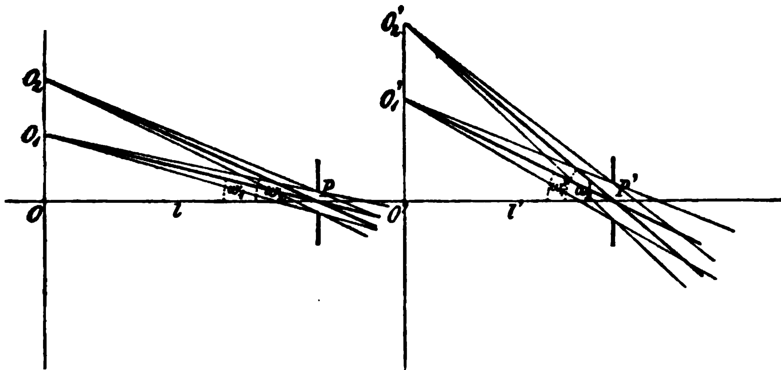
3) Verzerrung (Distortion) des Bildes. Bedingung der Orthoskopie. Dafür, ob das Bild eines Objektes diesem in allen seinen Theilen ähnlich sei,

---

[1]) J. Petzval, Bericht über opt. Unters., Sitzber. Wien. Akad. 24, pag. 97. 1857, glaubte in Gleichung (5a) allein die nöthige Bedingung gefunden zu haben. S. vor. Anm.

lässt sich ein Kriterium angeben, welches — wie der Sinussatz ohne Einschränkung mit Bezug auf die Grösse der wirksamen Büschelöffnungen — dasselbe in Bezug auf die Ausdehnung des Bildes und Objektes, welches also in voller Allgemeinheit giltig ist (Fig. 328).

Nehmen wir wieder den Fall an, der, wie wir später sehen werden fast in allen Arten optischer Instrumente verwirklicht ist, — dass die Hauptstrahlen (Axen) der vom Objekt $O O_1 O_2$ ausgehenden Strahlenkegel sich in einem Punkte P der Axe des Systems schneiden, die der bildformirenden Büschel ebenfalls in einem solchen Punkte P'. Die Entfernung der Objektebene von P, OP sei $= l$, die des Bildes bezw. einer es im Scheitel berührenden Ebene von P', $O'P' = l'$.



(Fig. 328.)

Sind dann $O_1 O_2$ zwei, von der Axe verschieden weit entfernte Punkte des Objekts, $O_1' O_2'$ die entsprechenden Punkte des Bildes bezw. deren Central-Projektionen von P' auf eine das Bild in O' berührende Ebene, dann ist

$$O O_1 = y_1 = l \, tg \, w_1 \qquad O' O_1' = y_1' = l' \, tg \, w_1'$$
$$O O_2 = y_2 = l \, tg \, w_2 \qquad O' O_2' = y_2' = l' \, tg \, w_2'.$$

Damit nun die Vergrösserung in den beiden betrachteten Ebenen constant, d. h. unabhängig von der Bild- und Objektgrösse selbst seien, muss

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2'} = \text{etc.}$$

sein; also

$$\frac{tg \, w_1'}{tg \, w_1} = \frac{tg \, w_2'}{tg \, w_2} = \text{etc.} \ldots = const., \tag{9}$$

d. h. das Verhältniss der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche entsprechende Hauptstrahlen im Bild und Objekt mit der Axe des Systems einschliessen, muss ein constantes sein. Ist dies der Fall, so heissen P und P', die Kreuzungspunkte der betreffenden Hauptstrahlen, die »orthoskopischen Punkte« des Systems.

Da aber für sehr kleine Winkel w, für welche die Bedingungen collinearer Abbildung erfüllt sind, nothwendig

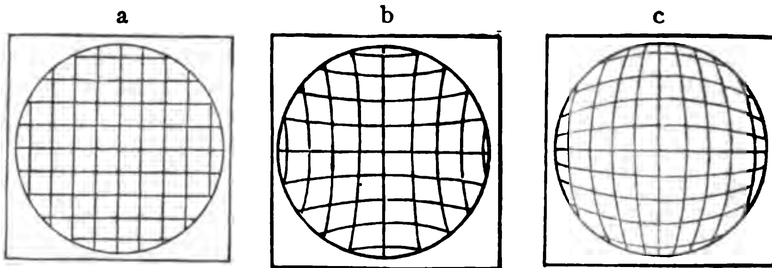
$$\frac{tg \, w_0'}{tg \, w_0} = \Gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B},$$

wo Γ das in den Punkten P und P' bestehende Convergenz-, B das in ihnen bestehende lineare Vergrösserungsverhältniss bezeichnet, so ist auch allgemein in den Punkten P, P'

$$\frac{tg \, w_k'}{tg \, w_k} = \frac{n}{n'} \frac{1}{B}. \tag{9a}$$

Wenn die Vergrösserung eines Instruments im ganzen Sehfeld constant ist so erscheint ein quadratisches Netz wie Fig. 329 a. Wächst die Vergrösserung nach dem Rande des Sehfelds, so wird das Aussehen des Bildes das von Fig. 329 b, nimmt sie mit wachsendem Parameter ab, so wird es das von Fig. 329 c.

Wie hieraus ersichtlich, können orthoskopische Punkte niemals zugleich »aplanatische« in dem hier angewandten Sinne sein. Bei der allgemeinen collinearen Abbildung dagegen sind alle conjugirten Punktepaare der Axe orthoskopische und aplanatische zugleich.



(Ph. 329.)

Auch für die Bedingung der Orthoskopie lassen sich Näherungsformeln angeben, welche für die nahe der Axe gelegenen Theile des Objektes und Bildes gelten und die Abweichung vom orthoskopischen Verhältniss, den »Faktor der Anorthoskopie« (Distortion) im Anschluss an die Durchrechnung eines paraxialen Strahles bequem zu berechnen gestatten. Doch gilt für die Distortion ebensowohl als für die Bildkrümmung eine Bemerkung analog zu derjenigen, welche wir bezüglich der sphärischen Aberration für Axenpunkte zu machen hatten (pag. 111): Wenn es sich darum handelt, Bilder von merklich grosser Ausdehnung zu erzeugen, so ist es von geringem Werthe, die Krümmung oder Distortion derselben nahe der Axe, in der Mitte des Sehfeldes, aufzuheben. Denn da die Entfernung einer Kugel von der sie berührenden Ebene proportional ist dem Quadrat des Abstandes von der Berührungsstelle, und da ebenso Disproportionalitäten der Vergrösserung, wenn ihr Grad der gleiche bleibt, desto mehr in Erscheinung treten, je weiter von der Mitte des Bildes man dasselbe betrachtet, so muss man vielmehr suchen, beide Arten von Fehlern, — wenn man sie nicht ganz heben kann — so über das ganze Bild zu vertheilen, dass sie möglichst wenig störend wirken, d. h. auffallen. Es kann dann sehr wohl eintreten, dass die gemäss den oben angegebenen Formeln berechnete Krümmung des Bildes oder die Disproportionalität der Vergrösserung nahe der Axe relativ gross ist, aber aus dem angegebenen Umstande trotzdem wenig erkennbar wird zu Gunsten entfernterer Stellen des Bildes, wo ein an sich geringer Grad von Krümmung oder Distortion auf die grösseren Bildmasse wirkend und dadurch gewissermaassen mit einem grossen Faktor multiplicirt, sehr auffallend in die Erscheinung treten würde.

Ein solches systematisches Ausgleichungsverfahren, ähnlich dem von Gauss bei der sphärischen Aberration angewandten, wurde von Schleiermacher[1]) für die ersten Glieder der Reihenentwickelung aller Arten von Aberrationen durchgeführt. In der Praxis ist es jedoch einfacher und sicherer, auf die trigonometrische Durchrechnung der wirksamen Büschel zu recurriren.

Bei Instrumenten, die nur zu Messungen dienen, ist es noch vortheilhafter, die vorhandenen Abweichungen von der richtigen Orthoskopie möglichst regelmässig zu gestalten und rechnerisch oder am fertigen Instrument empirisch

---

[1]) Analyt. Optik, Darmstadt 1842.

genau festzustellen, damit man sie bei den Messungen bequem in Rechnung ziehen könne.

IV. Abbildung ausgedehnter Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung.

Wir haben bisher das eine Mal diejenige Erweiterung der Abbildungsgrenzen betrachtet, welche durch Zusammenfügen der Partialabbildungen mehrerer von demselben Punkte der Axe ausgehender und wieder nach einem Punkte der Axe convergirender Elementarbüschel erreichbar ist. Die andere entsprechende Aufgabe war die, die Abbildungen solcher Elementarbüschel zusammenzusetzen, deren Hauptstrahlen sich zwar ebenfalls vor und nach der Brechung durch das System in einem Punkte seiner Axe schneiden, deren Spitzen aber auf einer von diesen Kreuzungspunkten um einen beliebigen endlichen Abstand entfernten Fläche liegen. Im ersteren Falle handelte es sich darum, die Abbildung eines — im Grenzfalle unendlich kleinen — Flächenelements durch beliebig weitgeöffnete Büschel herbeizuführen; im zweiten Falle wurden die Bedingungen gesucht, unter welchen die Abbildung eines endlichen Flächenstücks möglich ist, hier aber durch Büschel, die — *in thesi* — ihrerseits unendlich eng sind.

Dem praktischen Bedürfniss bei der Construction optischer Instrumente würde nun durch eine, an sich noch so vollständige Lösung weder des einen noch des andern Problems genügt werden. In der Wirklichkeit könnte man natürlich weder mit den — durch noch so weite Büschel vermittelten — Bildern von wirklichen Flächenelementen etwas anfangen, noch mit Bildern, die beliebig ausgedehnt aber durch unendlich enge Strahlenbüschel hervorgebracht wären. Es handelt sich hier vielmehr immer darum, Bilder endlicher Objekte durch Büschel endlicher Oeffnung zu erzielen und nur der Nachdruck, welcher auf den einen oder andern dieser beiden Faktoren gelegt wird, variirt innerhalb sehr weiter Grenzen von Fall zu Fall, je nach dem Zwecke und Charakter des Instruments von den Mikroskopobjektiven hoher Apertur auf der einen Seite durch die photographischen und Fernrohrobjektive hindurch bis zu den Lupen und Ocularen auf der andern Seite.

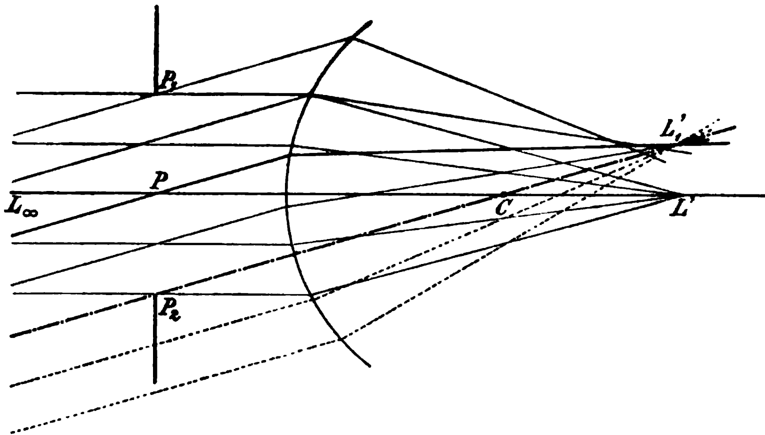
Hier finden nun von vornherein zunächst ähnliche Betrachtungen Anwendung wie die, mit welchen wir am Eingange dieses Abschnitts (pag. 96/97) die von selbst stattfindende Erweiterung der Abbildungsgrenzen nach beiden in Betracht kommenden Richtungen hin erläutert haben. Von selbst wird in Folge der dort aufgeführten beiden Momente — physiologische Unempfindlichkeit des beobachtenden Auges gegen mangelhafte Bildschärfe und Wellennatur des Lichtes — die genügend scharf abgebildete Fläche stets eine, wenn auch kleine, so doch endliche Ausdehnung haben, falls die Sinusbedingung erfüllt ist, und ohne weiteres wird man die Oeffnung der eine grössere Fläche abbildenden Büschel, wenn auch sehr eng, so doch endlich wählen dürfen, wenn die Bedingungen für die Abbildung derselben Fläche durch unendlich enge Büschel erfüllt sind; von selbst endlich wird man im letzteren Falle auch noch die jener ursprünglichen Fläche auf der Axe benachbarten hinreichend scharf abgebildet finden.

Um noch weiter zu gehen, um die Abbildung etwas grösserer Flächen durch relativ weite Büschel zu erzielen — wie sie z. B. Zweck und Aufgabe mehrerer zur Photographie dienender Systeme ist — ist man wieder fast ganz auf den Weg empirischen Suchens der hierzu geeigneten Linsencombinationen angewiesen, sei es, dass dieses auf dem Papiere, durch trigonometrische Verfolgung der wirksamen Strahlengruppen, sei es, dass es experimentell, durch systematische

Beobachtung des Endeffekts geschieht, den wirklich ausgeführte Versuchslinsen verschiedener Construction ergeben. Nur noch einen Schritt weiter hat die mathematische Theorie auf diesem Wege geführt.

Sphärische Aberration 1. Ordnung in schiefen Büscheln (Coma).

Vergegenwärtigt man sich nämlich die Hinweise, welche aus den oben entwickelten Eigenschaften der Aberrationen bereits zu entnehmen sind, so ist folgendes einzusehen: wenn in einem, von einem Axenpunkte aus divergirenden Büschel die dem Quadrat der Oeffnung proportionale sphärische Aberration aufgehoben ist, so wird ein zur Axe schwach geneigt einfallendes Büschel im allgemeinen keinen gleich scharfen Bildpunkt ergeben. Es wird ein solches Büschel, wie früher bereits wiederholt hervorgehoben, zunächst astigmatisch sein, selbst wenn es unendlich eng ist. Wenn aber auch der Astigmatismus gemäss Formel (2) pag. 123, aufgehoben wäre, so würde die Abbildung des ein wenig seitlich von der Axe gelegenen Punktes mittelst eines Büschels von der Oeffnung des axialen doch eine unvollkommene sein. Unterscheiden wir wieder die beiden



(Ph. 330.)

Strahlengruppen, welche in der Einfallsebene des (die Axe kreuzenden) Hauptstrahls und senkrecht zu ihr verlaufen. Für die letzteren wird bei geringer Neigung des Hauptstrahls die Strahlenvereinigung annähernd von derselben Vollkommenheit sein wie im Axenpunkte, weil sie im allgemeinen den gleichen Charakter hat wie die dort stattfindende (Symmetrie zum Hauptstrahl, vergl. das pag. 84 unten gesagte). Im ersten Hauptschnitt hingegen wird sich schon bei relativ geringer Neigung des Hauptstrahls die Deformation des Büschels bemerklich machen, welche der von vornherein niedrigeren Ordnung der Strahlenvereinigung in diesem Schnitte (vergl. pag. 86) entspricht.

Sei, um dies näher zu erläutern, L' (Fig. 330) das Bild eines Axenpunktes, erzeugt durch ein System, in welchem die Aberration 2. Ordnung für diesen Axenpunkt aufgehoben ist. Ganz grob schematisch können wir uns dies so vorstellen, als würden dann Strahlen, die von dem Objektpunkt innerhalb eines gewissen Winkelraumes ausgehen oder deren Büschelschnitt — bei unendlich fernem Objekt — unter einem gewissen Betrage bleibt, in L' zur strengen Vereinigung gebracht; in den diesen Winkelraum überschreitenden aber wäre diejenige sphärische Aberration vorhanden, welche den höheren Potenzen der Oeffnung entspricht. An irgend einer Stelle der Axe befinde sich die zu ihr concentrische Blende $P_1 P_2$, die gemäss ihrer Lage und Grösse die nöthige Abblendung des einfallenden

Büschels bewirkt. Ein Strahlenbüschel, welches von einem seitlichen Punkte des Objekts ausgehend diese Blende passirt, hat dann schon gegenüber der ersten und ebenso weiter gegenüber allen folgenden Flächen einen anderen Charakter als das der Axe parallele. Würde sein Hauptstrahl in Folge der besonderen Lage der Blende zufällig den Krümmungsmittelpunkt C der ersten Fläche passiren, so würde es durch diese Fläche allerdings noch ganz ebenso modificirt werden als das vorher betrachtete axiale. Dies würde sich dann aber schon an der nächsten Fläche anders verhalten, wenn nicht etwa alle Flächen concentrisch zur Blendenmitte sind. Im allgemeinen wird das seitliche Büschel schon die erste Fläche so treffen, dass sein Hauptstrahl nicht durch dessen Centrum geht. Ein dem Hauptstrahl parallel durch dieses Centrum gezogener Strahl $P_2 C$ (welcher unter Umständen dem wirklichen Büschel gar nicht angehört) markirt dann diejenige Axe symmetrisch, zu welcher — schematisch gesprochen — das einfallende seitliche Büschel die gleiche Ausdehnung haben dürfte wie das axiale, wenn die Strahlenvereinigung in dem durch diese Fläche hervorgebrachten Bilde des seitlichen Punktes den gleichen Charakter haben sollte wie im Axenpunkte. Thatsächlich fallen daher Strahlen ein, welche die Oeffnung dieses ideellen Büschels nach der einen Seite jedenfalls überschreiten, Strahlen also, auf welche die Aberrationen höherer Ordnung an der betreffenden Fläche anderen Einfluss haben, als auf dieses.

An jeder folgenden Fläche ist — je nach der Lage dieser Fläche, d. h. ihres Mittelpunkts zu der die Strahlen begrenzenden Blende — das Verhältniss der Oeffnung des für diese Fläche construirbaren ideellen Büschels zu der des thatsächlich herausgeblendeten ein anderes; aber an allen Flächen sind diese Verhältnisse im allgemeinen von einander verschieden und an jeder wird daher das schiefe Büschel anders modificirt als das axiale.

Wir haben also das Resultat, dass das von einem seitlichen Objektpunkte ausgehende, durch irgend eine Blende beschränkte Büschel im ersten Hauptschnitt einen anderen Charakter hat, als bei gleicher Apertur das von dem axialen Objektpunkte und auch als das von demselben seitlichen Punkte ausgegangene sagittale Büschel. Die Aberrationen höherer Ordnung haben auf seine Constitution nach der einen Seite seines Hauptstrahls hin höheren Einfluss, als in jenen Büscheln und als in ihm selbst nach der anderen Seite hin. Das Büschel wird also durch diese Brechungen unter schiefer Incidenz innerhalb des ersten Hauptschnitts unsymmetrisch. Seine Constitution wird im Allgemeinen diejenige sein, welche man erhält, wenn man in einem endlichen Büschel allgemeiner Art (Fig. 304) durch einen der Axe parallelen Schnitt einen Theil absondert. Der übrig gebliebene Theil kann die Axe selbst, d. h. die Spitze der Kaustik enthalten oder auch nicht; das hängt von den thatsächlichen Verhältnissen ab. Im Allgemeinen aber wird jedenfalls das durch meridionale Strahlen erzeugte Bild eines seitlichen Objektpunktes statt eines Punktes das Stück einer kaustischen Curve sein.

Dieses Curvenstück — von manchen Optikern »Coma« genannt — wird gebildet durch die ersten Bildpunkte der successive auf einander folgenden Elementarbüschel, in welche man sich das grössere Büschel zerlegt denken kann. Wir haben nun früher (pag. 85) die Orte der Bildpunkte dieser Elementarbüschel dadurch gefunden, dass wir die Gleichung $n \sin i = n' \sin i' = Q$, welche den Zusammenhang zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahls angiebt, nach dem Centriwinkel der brechenden Kugelfläche, φ, variirten. Die Gleichsetzung der von $d\varphi$ unabhängigen Glieder in dem Ausdruck für $dQ/d\varphi$ vor und nach der Brechung

ergab die, bis auf Grössen von der Ordnung $d\varphi$ genauen Gleichungen (3), (3a) und (3b) pag. 86, welche den Zusammenhang zwischen t und t' einerseits, den Constanten der brechenden Fläche r, n, n' und denen des Hauptstrahls i, i' andererseits feststellen. Um jetzt die Beschaffenheit des fraglichen Stückes der kaustischen Curve in erster Näherung zu ermitteln, liegt es nahe, die Variation der Grössen t, t' selber mit dem Winkel φ oder mit den Oeffnungswinkeln der ein- und austretenden Büschel u, u' zu bestimmen. Man erhält diese in consequenter Fortsetzung jenes zur Ermittelung der Grundbeziehung zwischen t und t' selber angewandten Verfahrens, indem man $dQ/d\varphi$ nochmals nach φ variirt und und in den Endgleichungen nur Grössen von der Ordnung $d\varphi$ berücksichtigt.

Setzen wir vorübergehend

$$\frac{1}{r}\frac{dQ}{d\varphi} = n\cos i\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right) = Q^*, \tag{1}$$

dann ergiebt sich nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^*}{d\varphi} = Q^{**} = -Q\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right)^2 + QQ^*\frac{1}{nt} + \frac{n\cos^3 i}{t^3}\frac{dt}{du}. \tag{2}$$

Sei in Fig. 331 $PA = t$; der Schnittpunkt des dem Strahl PA benachbarten Strahls QA mit seinem nächsten Nachbar RC sei B, also $QB = t + dt$. Daher $dt = QB - PA$ und dies in genügender Annäherung $= -(PE + DA)$, wenn D und E die Schnittpunkte der um A mit AB und AQ geschlagenen Bögen mit dem Strahl PA sind. Weiter ist $PE = r\sin i\, d\varphi$ und DA genügend nahe $= 2d\tau$, wenn wir CA mit $d\tau$ bezeichnen. Also

(Fig. 331.)

$$dt = -2d\tau - r\,d\varphi\sin i$$

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - r\frac{d\varphi}{du}\sin i = -2\frac{d\tau}{du} - \frac{t\sin i}{\cos i}.$$

Hiernach wird schliesslich nach einigen Zusammenziehungen

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3QQ^*\frac{1}{nt} - 2n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du} \tag{2a}$$

und ganz entsprechend kann man ohne weiteres auch

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} + 3QQ^*\frac{1}{n't'} - 2n'\frac{\cos^3 i'}{t'^3}\frac{d\tau'}{du'} \tag{2b}$$

setzen. Daher

$$\Delta\left(n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du}\right) = \frac{3}{2}QQ^*\Delta\left(\frac{1}{nt}\right) \tag{3}$$

für jede beliebige endliche Neigung der Hauptstrahlen, d. h. für jeden Betrag der Grössen i und i'. (Die in dieser Gleichung auftretende Grösse $d\tau/du$ hat bekanntlich die einfache geometrische Bedeutung, dass sie gleich dem Krümmungsradius der kaustischen Curve an der betrachteten Stelle C ist.)

Wenn in dieser Weise ein Büschel von der Oeffnung $PCR = 2du$ wirksam wäre, so würde es als Bild eines Punktes eine im ersten Hauptschnitt liegende Linie liefern. Als dieses Bild wollen wir die engste Einschnürung des wirksamen Büschels, bei C, ansehen. Seine Grösse ist

$$dl = d\tau \cdot du.$$

Bezeichnet man die Länge PQ des durch das einfallende Büschel in Anspruch genommenen Bogens der Kugelfläche mit dh (wo dann mit genügender Annäherung $PR = 2dh$ ist), so hat man weiterhin

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r\,d\varphi} = \frac{du}{dh},$$

was in Verbindung mit

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2}$$

ergiebt

$$\Delta\left(n\,\frac{\cos^2 i}{t^2}\,\frac{d\tau}{du}\right) = \Delta\left[n\left(\frac{du}{dh}\right)^2\frac{dl}{du^2}\right] = \frac{1}{dh^2}\,\Delta\,(n\,du\,dl).$$

Werden jetzt wieder mit $(dl_0)_k$ und $(dl_0)_k'$ die Grössen bezeichnet, welche die vor und nach der $k$ten Brechung vorhandenen Zerstreuungslinien, auf das Objekt zurückbezogen besitzen, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (3)

$$\frac{n_1 du_1}{dh_k^2}\,\Delta\,(dl_0)_k.$$

Daher ist schliesslich

$$\Delta(dl_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1 du_1)^2\left(\frac{dh_k}{n_1 du_1}\right)^2 Q_k Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k \tag{4}$$

oder, da

$$du_1 = \frac{dh_1 \cos i_1}{t_1}$$

$$\Delta(dl_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1 du_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^2\left(\frac{dh_k}{dh_1}\right)^2 Q_k Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k, \tag{4a}$$

worin

$$\frac{dh_k}{dh_1} = \frac{\cos i_1'/t_1'}{\cos i_2/t_2}\cdot\frac{\cos i_2'/t_2'}{\cos i_3/t_3}\cdot\ldots\ldots\frac{\cos i'_{k-1}/t'_{k-1}}{\cos i_k/t}, \tag{5}$$

ebenfalls für jede endliche Neigung des Büschels.

Lassen wir, wie früher, das Zeichen d weg, welches andeuten soll, dass die betreffenden Grössen unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so lautet der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung hervorgerufene Aenderung der auf das Objekt zurückbezogenen Grösse der Zerstreuungslinie l_0

$$\Delta(l_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1 u_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^2\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k. \tag{6}$$

Liegt das Objekt in unendlicher Entfernung, so ist die Winkelgrösse λ der auf dasselbe bezogenen Zerstreuungslinie gegeben durch

$$\Delta(\lambda_0)_k = \frac{3}{2}\,h_1^2\left(\frac{1}{\cos i_1}\right)^2\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_k \tag{7}$$

und die lineare oder angulare Grösse der durch alle p Brechungen zusammen hervorgerufenen Zerstreuungslinie, $l_0^{(p)}$ bezw. $\lambda_0^{(p)}$ wird wie früher erhalten, indem man über $\Delta(l_0)_k$ bezw. $\Delta(\lambda_0)_k$, von $k = 1$ bis $k = p$ summirt.

Wenn die wirksamen Büschel mit der Axe des Systems nur geringe Winkel bilden, ihre Hauptstrahlen wieder vor und nach der Brechung an der $k$ten Fläche die Axe in der Entfernung x bezw. x' vom Scheitel dieser Fläche unter dem

Winkel w bezw. w' und die Fläche selbst in der Höhe y über der Axe schneiden, so hat man wie früher

$$Q = n \sin i = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)y = y\,Q_x$$

und

$$Q^* = n \cos i\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right) = -n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) = -n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$$

zu setzen, wo s die Schnittweite des vom Axenpunkte des Objekts ausgegangenen Strahls vor der $k$ten Brechung ist, also in unserer früheren Bezeichnung hier im $Q^* = -Q_s$.

Daher wird schliesslich unter Weglassung des Index k

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 u_1)^2 y_1 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2\left(\frac{h}{h_1}\right)^2\left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{8}$$

oder auch

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 u_1)^2(n_1 w_1)\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2\left(\frac{x}{n_1}\right)\left(\frac{h}{h_1}\right)^2\left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{8 a}$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für $\Delta(\lambda_0)$.

Dieselben zeigen die Abhängigkeit des fraglichen Fehlers von der Apertur und Neigung des einfallenden Büschels und weisen ihrer mathematischen Form nach wieder auf die nahe Verwandtschaft mit den anderen bisher betrachteten Aberrationen hin.

In dem wiederholt betrachteten Sonderfalle, dass die Dicken und Entfernungen aller Linsen zu vernachlässigen sind und dass die Hauptstrahlen der Büschel durch den nahezu gemeinsamen Scheitel der Linsen gehen, ist

$$Q_x = nw = \ldots\ldots = n_1 w_1 = n_2 w_2 = \ldots = n_k w_k,$$

daher

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1)(n_1 u_1)^2\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2\left(\frac{h}{h_1}\right)^2 Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right) \tag{9}$$

$$\Delta(\lambda_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1)\, h_1^2\left(\frac{h}{h_1}\right)^2 Q_s \Delta\left(\frac{1}{ns}\right). \tag{10}$$

Es ist ausser von Abbe selbst noch von verschiedenen Anderen[1]) gezeigt worden, dass die Erfüllung der Bedingung $\Sigma\Delta(l_0) = 0$ in einem Linsensystem nichts anderes ist, als die Sinusbedingung für geringe Oeffnungen der abbildenden Büschel, dementsprechend auf algebraische Form gebracht.

Literatur.

Dass homocentrische Büschel die Eigenschaft der Homocentricität durch Reflexion an einer Kugelfläche verlieren, hat wohl zuerst Roger Bacon um d. J. 1600 (Tractatus de speculis, vergl. Wilde, Gesch. d. Optik I, pag. 99) klar ausgesprochen und erwiesen; in Bezug auf sphärische Linsen Kepler (Dioptrice 1611, Prop. 59), welcher darum auch bereits paraboloidische Flächen vorschlug, um diesem Mangel zu begegnen. Weitere Ausbildung der Lehre von der Abweichung wegen der Kugelgestalt — meist beschränkt auf die Betrachtung von Axenpunkten — durch die älteren Forscher:

Is. Barrow, Lectiones opticae, London 1649,

J. Gregory, Optica promota, London 1663,

J. Newton, Opticks. London 1704, lib. I, pars 1, prop. 7, Lect. opt. pag. 165,

Chr. Huyghens, Dioptrica. Op. posth. II, Amstelod. 1728,

R. Smith' u. Kästner's früher citirte Werke (s. pag. 37).

---

1) L. Seidel, nach S. Finsterwalder's. Literatur. K. Moser, Zeitschr. f. Instrkde. 7, pag. 320. 1887, ganz neuerdings nochmals von A. Kerber, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 12, pag. 121. 1891.

Ferner in besonderer Anwendung auf die Objective von Fernröhren durch:

L. EULER, Mém. Ac. Berlin von 1757, 1761, 1762, 1766 (mehrere Abhandlungen),

CLAIRAUT, Mém. Ac. Paris von 1756, 1757, 1762 (dto.),

KLINGENSTIERNA, Tentamen de defin. et corrig. aberrat. rad. lum. Petrop. 1762,

D'ALEMBERT, Opusc. math. IV. Paris 1764. Mém. Ac. Paris von 1764, 1765, 1767.

BOSCOVICH, Dissert. 5 ad Dioptricam pertinentes, Vindob. 1767,

BÉGUELIN, Mém. Ac. Berlin von 1762, 1763, 1769 und schliesslich

L. EULER, Dioptrice Petrop. 1769—71, 3 Bde.

Von den Leistungen aller dieser giebt eine übersichtliche Darstellung:

S. KLÜGEL in der Vorrede zu seiner Analytischen Dioptrik, Leipzig 1778, welche eine Bearbeitung des sehr umfangreichen EULER'schen Werkes ist. S. auch PRIESTLEY, Geschichte der Optik übers. v. KLÜGEL. Leipzig 1776.

Gleichzeitig mit KLÜGEL's Werk erschien eine wichtige Abhandlung über diesen Gegenstand von LAGRANGE, Théorie des lunettes, Mém. Ac. Berlin 1778.

In den ausserordentlich zahlreichen, diesem Jahrhundert angehörigen Bearbeitungen des vorliegenden Gegenstandes, wie auch schon bei EULER, CLAIRAUT u. A., wird meistens die sphärische Aberration in und ausser der Axe in Verbindung mit den im folgenden Capitel zu behandelnden chromatischen Abweichungen erörtert. Die wichtigsten dieser Abhandlungen und Werke sind:

J. F. W. HERSCHEL, On the aberration of compoud lenses and object glasses. Phil. Trans. von 1821, pag. 222, theilweise reproducirt in dess. Verf. On Light. Encycl. Metrop. 1827. D. Uebers. v. SCHMIDT, Stuttg. 1831, pag. 115. (Aberration für Axenpunkte unter Vernachlässigung der Linsendicken und -abstände. Resultat: Gleichung 12, pag. 109.)

G. SANTINI, Teoria degli strumenti ottici. Padova 1828, Bd. I, pag. 114—138 u. 235—242.

S. STAMPFER, Ueber die Theorie der achromat. Objective bes. der FRAUNHOFER'schen Jahrb. d. k. k. polyt. Inst. 13, pag. 52. 1828 und Unters. der v. Hrn. ROGER vorgeschlagenen Verbess. in der Constr. achrom. Fernröhre, ibid. 14, pag. 108. 1829.

J. J. LITTROW, Zeitschr. f. Phys. u. Math. von BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN, Bd. 3 u. 4 (mehrere Abhdlgn.), und Dioptrik, Wien 1830, pag. 50—70 (daselbst ausführl. Literaturverzeichniss am Schlusse).

G. W. BRANDES, Art. Linsenglas in GEHLER's Physik. Wörterbuch, Bd. 6, Leipzig 1831.

L. J. SCHLEIERMACHER giebt in POGG. Ann. 14, pag. 1. 1828, eine Uebersicht, in BAUMGARTNER u. v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. f. Phys. u. Math. 9, pag. 1, 161, 454; 10, pag. 171, 329, den Anfang desjenigen, was er in seiner »analytischen Dioptrik«, Darmstadt 1842 (nur Bd. 1 erschienen) fortgesetzt und ausgeführt hat. (Dies ist eine der vollständigsten Untersuchungen, welche jemals über diesen Gegenstand angestellt worden sind; sie überragt in der Tiefe der Problemstellung fast alle späteren Publikationen. Die analytischen Entwickelungen leider sehr schwerfällig und daher unübersichtlich; keine allgemeinen Resultate.)

I. A. GRUNERT, Optische Untersuchungen, Bd. 2, Leipz. 1847. (Discussion der versch. mögl. Fernrohrobjektivconstructionen.)

J. PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptr. Unters., Pesth 1843, desgl. Wiener Sitzber. 24, pag. 50. 1857; 26, pag. 33. 1858 (s. oben pag. 126).

L. SEIDEL, Zur Theorie der Fernrohrobjektive. Astr. Nachr. 35, pag. 302. 1852. (Sphär. Aberr. 1. Ordnung in der Axe ausgedrückt durch neue Variable: die relativen Neigungswinkel und Schnitthöhen eines paraxialen Strahls). Ders. Zur Dioptrik, Entwicklung aller Glieder dritter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahls durch ein System brechender Flächen bestimmen. Astr. Nachr. 43, pag. 289. 1855. (Vollständigste Darstellung aller Aberrationen dritter Ordnung: axiale Aberration, Coma, Astigmatismus, Bildwölbung, Verzerrung durch algebraische Formeln. Einheitliche strenge Behandlung. Dies wohl neben den Untersuchungen von ABBE und HELMHOLTZ über den Aplanatismus bei weitgeöffneten Büscheln die wichtigste auf diesem ganzen Gebiete). Auf ihr fussen

G. A. KELLER, Entwickelg. der Glieder 5. Ordng. Gekr. Preisschrift. München 1865 (Beschränkung auf die 1. Hauptebene), und aus neuester Zeit

S. FINSTERWALDER, Die von opt. Syst. grösserer Oeffnung u. Gesichtsfeldes erzeugten

Bilder. Abh. Münch. Akad. 17, pag. 519—587. 1891 (Untersuchg. der Brennfläche der von einem ausseraxialen Objektpunkt ausgegangenen Strahlen nach dem Durchgang durch ein centr. System. Zusammenhang der Durchstossungspunkte in der Diaphragmenebene mit denen in einem das Bild auffangenden Schirm. Intensitätsvertheilung im Zerstreuungsbilde bei verschiedener Lage der Blenden und der Schirmebene).

Die übrigen auf SEIDEL's Publikationen folgenden Abhandlungen nehmen merkwürdigerweise auf diese keinen Bezug und stehen ihr grösstentheils in der Schärfe und dem Umfang der Behandlung nach. Das sonst vortreffliche Werk von

O. F. MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici. Pisa 1859, fusst noch ganz auf den Arbeiten von LAGRANGE, SANTINI und BIOT, ohne Kenntniss selbst derer von GAUSS. Ferner

H. ZINKEN-SOMMER, Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme, Braunschweig 1870.

P. A. HANSEN, Dioptr. Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Kugelgestalt. Abh. Leipz. Akad. 10, pag. 697—784. 1874.

W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern etc. Leipzig 1874 (bes. § 4).

W. SCHEIBNER, Dioptr. Unters. insbes. über das HANSEN'sche Objectiv, Abh. Leipz. Akad. 11, pag. 541—620. 1876.

K. MOSER, Die Grundformeln der Dioptrik für den prakt. Gebrauch entwickelt. Sitzber. böhm. Akad., Prag 1881, insbes. pag. 22—28 (sehr aphoristisch, aber erschöpfend und elegant in der Entwickelung). Ergänzungen in dess. Verf. Die einfache achrom. Linse als Landschaftsobjektiv. EDER's Jahrb. f. Photogr. 1889, und Ueber Fernrohrobjektive, Zeitschr. f. Instrkde. 7, insbes. pag. 225—238. 1887.

L. BILLOTTI, Teoria degli strumenti ottici con applic. ai telesc. ed alla fotogr. celeste. Publ. del R. Osserv. di Brera. Milano 1883, insbes. pag. 87 ff.

A. KRAMER, Theorie der zwei- und dreitheiligen astron. Fernrohrobjektive, Berlin 1885 (schwerfällig).

Einen wesentlichen Beitrag zu dem Gegenstande des vorstehenden Kapitels lieferte jüngst

M. THIESEN, Beiträge zur Dioptrik. Sitzber. Berl. Akad. 35, pag. 799. 1890 (Bestimmung des Weges eines Lichtstrahls direkt aus dem Princip der schnellsten Ankunft. Resultate übereinstimmend mit den von SEIDEL erhaltenen, dessen Arbeiten auch TH. nicht gekannt zu haben scheint.)

S. CZAPSKI.

Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Theorie der Achromasie.

In den vorangehenden beiden Abschnitten ist immer von dem Brechungsexponenten eines Mediums schlechthin die Rede gewesen, als wenn derselbe eine eindeutige Constante des betreffenden Mediums wäre. Thatsächlich ist aber, wie bei früherer Gelegenheit bereits kurz erwähnt (pag. 23) der Brechungsexponent aller bisher untersuchten Substanzen von der Wellenlänge des Lichts abhängig gefunden worden, $n = f(\lambda)$. Die Auseinandersetzungen der vorigen Abschnitte darüber, auf welche Weise die geometrisch mögliche allgemeine optische Abbildung in Systemen centrirter Kugelflächen realisirt werden könne, sei es von selbst, sei es — in erweitertem Gebiete — durch geeignete Anordnung der wirksamen Flächen, sind daher erschöpfend nur für den besonderen Fall rein katoptrischer Systeme; denn bei der Reflexion ist $n' = -n$, also $n'/n = const$ für jedes λ. In dem allgemeinen Falle aber, dass Brechungen und Spiegelungen combinirt und auch in dem, dass nur erstere allein in dem betrachteten System wirksam sind, wird durch die Variabilität der Brechungsexponenten mit der Wellenlänge eine entsprechende Variation aller Faktoren der Abbildung

mit der Wellenlänge (Farbe) des angewandten Lichts bedingt. Ebensowohl die Grundfaktoren der Abbildung durch eine, und in Folge dessen auch durch beliebig viele brechende Flächen (pag. 73 ff.) — also die Lage der Brennebenen und die Grössen der Brennweiten jedes Systems — zeigten sich uns früher abhängig von den Brechungsexponenten der Medien, als auch die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Ausdrücke für die verschiedenen Bildfehler. Beide sind also in dioptrischen Systemen Functionen der Wellenlänge. Infolgedessen werden, wie schon NEWTON, der Entdecker der Dispersion, für die einfachsten Fälle nachwies[1]), von einem Objekte, welches zu gleicher Zeit Licht verschiedener Wellenlänge ausstrahlt, durch ein dioptrisches System Bilder entworfen, deren Lage auf der Axe, Vergrösserung und qualitative Eigenschaften im Allgemeinen sämmtlich mit der Farbe variiren.

Man bezeichnet diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge als chromatische Aberrationen oder Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung.

Dieselben bilden für den wesentlichen Zweck der optischen Systeme: deutliche Bilder zu erzeugen, ein ebenso grosses und unter Umständen sogar ein vergleichsweise noch stärkeres Hinderniss, als z. B. die Variation der Schnittweiten etc. der von einem Objektpunkt ausgegangenen Strahlen mit der Oeffnung des Büschels oder mit seiner Neigung gegen die Axe, d. h. als die im vorigen Abschnitt unter dem Gesammtnamen »sphärische Aberrationen« (oder Abweichungen wegen der Kugelgestalt der abbildenden Flächen) zusammengefassten Bildfehler. Und jener Zweck der optischen Instrumente würde offenbar bei allen dioptrischen Systemen nur sehr unvollkommen erreicht, wenn es nicht möglich wäre, durch geeignete Anordnung und Wahl der das System constituirenden Einzelelemente diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge zu compensiren — ganz analog und insbesondere auch gleichzeitig mit den entsprechenden Variationen der Strahlen von einerlei Farbe mit Apertur und Neigung des Büschels. Man bezeichnet die Ausführung dieser Compensation als Achromatisirung und ihr Ergebniss als »Achromasie«.

Da alle Eigenschaften eines Linsensystems, einschliesslich der sogen. Aberrationen, mit von dessen Medien und daher auch von der Wellenlänge abhängen, so kann in Bezug auf sie alle Achromasie erstrebt bezw. hergestellt werden. In diesem Sinne kann man, wie von den chromatischen Fehlern, so auch von einer Achromasie der Bildorte, der Vergrösserung, der Brennweiten und ebenso der Verzerrung, Bildwölbung etc. sprechen. Es ist aber — aus Gründen, die im Verlaufe der weiteren Darstellung von selbst hervortreten werden — die Herstellung aller dieser verschiedenen Arten der Achromasie für die Erzeugung deutlicher, d. h. anscheinend von dem Einflusse der Chromasie befreiter Bilder keineswegs gleich wichtig, geschweige denn stets die gleichzeitige Erreichung aller Arten von Achromasie erforderlich. Man kann sich vielmehr praktisch stets mit einer theilweisen Achromasie begnügen, welche sich nur auf gewisse — je nach den sonstigen Bedingungen des Falles verschiedene — Bildeigenschaften erstreckt. Die chromatischen Variationen einiger Bildeigenschaften, wie die der Wölbung, des Coma, des Astigmatismus sind z. B. bisher stets ausser Acht gelassen worden, d. h. man hat sich stets damit begnügt, den betreffenden Bildfehler nur für eine Farbe aufzuheben.

Die Vermehrung der Zahl der Flächen, aus welchen das System zusammengesetzt werden

[1]) Optice lib. I, pars 1, prop. 7. Lect. opt. 261.

müsste, um auch diese Eigenschaften zu achromatisiren, würde mit der durch sie bedingten Lichtschwächung (durch Reflexionen und Absorptionen), Gewichtserhöhung etc. viel unangenehmer werden, als jene relativ wenig bemerkbaren Fehler es sind.

Wir betrachten zuerst die

Variation der Fundamentaleigenschaften von Linsensystemen mit der Wellenlänge des Lichts und die Bedingungen ihrer Compensation (Achromasie.)

Die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems lässt sich (nach pag. 67 u. 76) bestimmen aus der Wirkung bezw. den Grundfaktoren der einfachsten Partialsysteme, in welche es zerlegt gedacht werden kann, also schliesslich der einzelnen, je zwei Medien trennenden Flächen (von manchen Autoren »einfache Diopter« genannt). Dementsprechend kann auch die Variation der Wirkung des gesammten Systems mit der Farbe berechnet werden aus den Variationen, welche an den einzelnen Dioptern stattfinden. Man hat nur die a. a. O. gefundenen Ausdrücke für die Brennweiten und Brennpunktsorte nach den n zu variiren. Die Variationen der Brennweiten und Brennpunktsabstände der einzelnen Diopter aber ergeben sich einfach zu

$$\frac{df}{f} = \frac{ds_F}{s_F} = \frac{dn}{n} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}$$

und

$$\frac{df'}{f'} = \frac{ds_{F'}}{s_{F'}} = \frac{dn'}{n'} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)}. \tag{1}$$

wenn der der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Brechungsexponent dies- und jenseits der brechenden Fläche mit $n + dn$ bezw. $n' + dn'$ bezeichnet wird. Hat man auf diese Weise[1]) die Grössen df/f und df'/f' für das ganze System bestimmt, dann ist das der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Bild eines Objektes, welches vom vorderen Brennpunkte des Systems für λ, F_λ, um x, von dem für $\lambda + d\lambda$, $F_{\lambda+d\lambda}$, um $x + dx$ absteht, von dem der letzteren Wellenlänge entsprechenden hinteren Brennpunkte des Systems $F'_{\lambda+d\lambda}$, um die Strecke $x' + dx'$ entfernt, wobei dx' sich aus der Fundamentalformel

$$x \cdot x' = ff'$$

ergiebt zu

$$dx' = x'\left(\frac{df}{f} + \frac{df'}{f'} - \frac{dx}{x}\right). \tag{1a}$$

Die Vergrösserungen des Systems in Richtung zur und senkrecht zu der Axe sowie das Convergenzverhältniss in konjugirten Punkten für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ lassen sich dann ebenso einfach mit den Werthen derselben Grössen für die Wellenlänge λ in Beziehung setzen durch Variation der anderen unter (I) auf pag. 54 zusammengestellten Grundgleichungen. Wenn

$$\alpha_{\lambda+d\lambda} = \alpha + d\alpha; \quad \beta_{\lambda+d\lambda} = \beta + d\beta \quad \text{und} \quad \gamma_{\lambda+d\lambda} = \gamma + d\gamma$$

gesetzt wird, so findet man

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dx'}{x'} - \frac{dx}{x}$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{df}{f} - \frac{dx}{x} = \frac{dx'}{x'} - \frac{df'}{f'} \tag{1b}$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dx}{x} - \frac{df'}{f'} = \frac{df}{f} - \frac{dx'}{x'}.$$

---

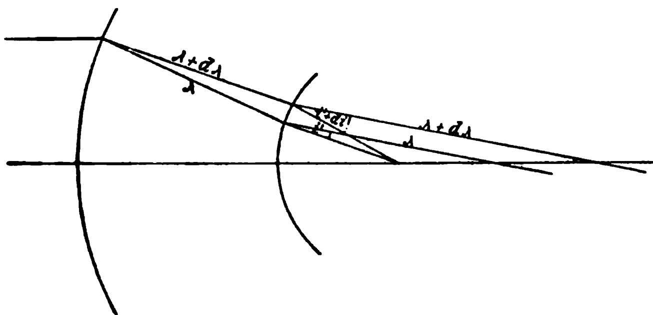
[1]) Interessante graphische Behandlungen dieser und verwandter Aufgaben von F. KESSLER, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 1. 1884.

Diese Gleichungen geben den Einfluss an, den die relativen Variationen der Brennweiten und der x, x' d. h. indirekt auch der Brennpunktsorte auf die entsprechenden der Grössen α, β, γ haben.

Schon bei einem zweifachen Diopter z. B. einer beiderseits von Luft begrenzten Linse endlicher Dicke (vergl. pag. 79) bietet sich die Möglichkeit einer Achromatisirung der Brennweiten oder der Brennpunktsorte dar — und bei einer solchen sogar unabhängig von der Dispersion ihrer Substanz — da in den beiden Radien und der Dicke genügend Elemente gegeben sind, um eine der Gleichungen

$$\frac{df}{f} = \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_2}{f_2}\frac{d\Delta}{\Delta} = 0$$
$$d(f_1 - \sigma) = df_1 - d\sigma = df_1 - \sigma\left(\frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1'}{f_1'} - \frac{d\Delta}{\Delta}\right) = 0 \tag{2}$$

oder eine der entsprechenden für zweite Brennweite und zweiten Brennpunkt geltenden zu erfüllen. Durch graphische Darstellung kann man sich dies der verbreiteten Meinung widerstreitende Ergebniss[1]) leicht veranschaulichen. Ein zur Axe paralleler weisser Strahl (Fig. 332) wird durch Brechung z. B. an einer convexen Fläche in ein dichteres Medium nach der Axe zu gebrochen und zwar desto mehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Es kann nun — wie man sich leicht überzeugt — Lage und Krümmung einer darauf folgenden Fläche so gewählt werden, dass die Strahlen sie unter desto geringeren Incidenzwinkeln treffen, je brechbarer sie sind und dies in solchem Verhältniss, dass die austretenden Strahlen verschiedener Wellenlänge entweder einander parallel austreten, wie in Fig. 332, (Gleichheit der Brennweiten), oder nach demselben Punkte hin convergiren (Achromasie in Bezug auf die Brennpunkte).



(Ph. 332.)

Statt einer einzigen dicken Linse in Luft wählt man zu demselben Zwecke vortheilhafter zwei dünne, durch einen grösseren Abstand getrennte Linsen. Im Grenzfalle, bei unendlich dünnen Linsen, fanden wir (pag. 81)

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - D\varphi_1\varphi_2,$$

worin D der Linsenabstand (bei etwas dickeren Linsen der Abstand der einander zugewandten Hauptpunkte) ist. Bei einer einzigen dünnen Linse in Luft war

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) = (n-1)k \qquad \text{und} \qquad \frac{df}{f} = \frac{dn}{n-1} = \frac{1}{\nu},$$

wenn wir die Grösse $\frac{n-1}{dn}$, das Reciproke des sogen. Zerstreuungsverhältnisses der Linsensubstanz, mit ν bezeichnen; daher ergiebt sich als Bedingung für die Constanz von φ oder f in Bezug auf λ nach einigen Umformungen die, dass

[1]) Wie ich nachträglich bemerkte, ist dasselbe schon von KESSLER (a. a. O.) gefunden worden.

$$D = \frac{1}{2} \frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_2 + \nu_1}, \tag{3}$$

sei, also bei gleichem Material (ν) der beiden Linsen einfach

$$D = \frac{f_2 + f_1}{2} \tag{3a}$$

Dies ist die Bedingung, welcher, wie wir später sehen werden, die aus einfachen Linsen bestehenden Oculare in erster Linie genügen müssen.

Sind die beiden dünnen Linsen ganz aneinander gerückt, so dass $D = 0$ gesetzt werden kann, so ist die Brennweite (hier zugleich Brennpunktsabstand) des ganzen Systems gegeben durch

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2;$$

soll nun (4)

$$d\varphi = dn_1 k_1 + dn_2 k_2 = 0$$

sein, so müssen die Krümmungsdifferenzen der Linsenflächen

$$k_1 = \rho_1{}' - \rho_1{}'' \quad \text{und} \quad k_2 = \rho_2{}' - \rho_2{}''$$

den Bedingungen genügen

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{dn_2}{dn_1} \quad \text{oder} \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{4a}$$

und zwar bestimmt sich aus den beiden obigen Bedingungsgleichungen (4) (denen des »Maasstabs« und der Achromasie)

$$k_1 = \frac{1}{f} \frac{1}{dn_1} \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}; \quad k_2 = -\frac{1}{f} \frac{1}{dn_2} \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}. \tag{4b}$$

Es lässt sich also in diesem Falle eine Achromasie der Grundfaktoren der Abbildung nur dann erreichen, wenn ν_1 nicht gleich ν_2, d. h. die Zerstreuungsverhältnisse der Linsensubstanzen von einander verschieden sind. Erst die durch CHESTER MORE HALL (1729) vorbereitete, dann durch KLINGENSTIERNA (1754) und DOLLOND (1757) sicher gestellte Erkenntniss, dass dies bei vielen Substanzen thatsächlich der Fall sei — was NEWTON und anfangs auch EULER in Abrede gestellt hatten — gab die Unterlage dafür, eine Achromasie überhaupt zu erstreben[1]).

Man sieht aus Gleichung (4) und (4a) ferner, dass die beiden zu einem achromatischen System combinirten Linsen stets Brennweiten von entgegengesetzten Vorzeichen erhalten müssen; die eine Linse muss eine collektive (positives f), die andere eine dispansive (negatives f) sein. Soll z. B. die Brennweite des ganzen Systems positiv sein, so muss die der sie constituirenden positiven Linse natürlich kürzer sein als die der dazu gehörigen negativen und als diejenige des Gesammtsystems. Das Zerstreuungsvermögen der negativen Linse muss dann das grössere sein, so dass durch diese Linse trotz ihrer geringeren Stärke die Dispersion der anderen compensirt wird, ohne dass zugleich deren collektive Fundamentalwirkung mit aufgehoben wird; bei negativer Gesammtbrennweite umgekehrt. Je verschiedener die Zerstreuungsvermögen der Linsensubstanzen sind, mit desto geringeren Krümmungen lässt sich *caet. par.* die Achromasie eines Systems von gegebener Brennweite erreichen. —

---

[1]) Näheren Bericht über die sehr merkwürdige Geschichte der Achromasie geben PRIESTLEY Geschichte etc. der Optik. Uebers. von KLÜGEL, Leipzig 1776, pag. 243, 520. BARLOW und BREWSTER in ihren Artikeln »Optics« in der 7. u. 8. Aufl. der Encypl. Brit. pag. 408, bezw. pag. 175. 1823. Letzterer auch in seinem Leben NEWTON's, übers. v. GOLDBERG, Leipz. 1833, pag. 19 u. pag. 45—56. Man sehe ferner WILDE, Gesch. d. Optik, Bd. 2, pag. 71. LITTROW, Dioptrik, pag. 457 und LÖWENHERZ, Zeitschr. f. Instrkde. 2, pag. 275. 1882.

Handelt es sich darum, in einem System nicht für einzelne oder alle Grundfaktoren Achromasie herbeizuführen, sondern nur für eine bestimmte Lage des Objektes und Bildes, so kann man hier, ganz analog wie für die Berechnung der einer Wellenlänge entsprechenden Elemente zwei Wege einschlagen: Entweder man ermittelt die in dem Gesammtsystem stattfindende Variation der Grundfaktoren der Abbildung und hieraus nach den Formeln (1) bis (1b) die Variation der in Frage stehenden besonderen Grössen — oder man ermittelt diese letztere Variation direkt aus den Gleichungen, welche die gesuchten Grössen selbst (Bildpunkte, Vergrösserungs-, Convergenzverhältniss) für die besondere Lage des Objektes zu berechnen gestatten. Die hierzu dienenden Gleichungen schliessen die früheren, zur Ermittelung der Variation der Grundfaktoren dienenden, als besonderen Fall ein (in welchem $s = \infty$); sie sollen daher hier entwickelt werden und zwar wollen wir wiederum die Verundeutlichung des Bildes feststellen, welche durch die chromatische Aberration — und zwar zunächst der paraxialen Strahlen — verursacht wird.

Die Schnittweiten s, s' vor und nach der Brechung an einer Fläche vom Radius r, welche beiderseits von Medien begrenzt ist, deren Brechungsindices für die Wellenlänge λ bezw. n und n' sind, stehen bei paraxialen Strahlen i dem Zusammenhang, dass (pag. 71)

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) = Q$$

ist. Ihre Variationen beim Uebergang von der Wellenlänge λ zur Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ werden daher durch Variation von Q nach λ erhalten. Es ist nun

$$[dQ]_\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) dn + \frac{n}{s^2} ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) dn' + \frac{n'}{s'^2} ds'$$

oder

$$Q \frac{dn}{n} + \frac{n}{s^2} ds = Q \frac{dn'}{n'} + \frac{n'}{s'^2} ds'$$

also

$$Q\Delta\left(\frac{dn}{n}\right) = -\Delta\left(\frac{n}{s^2} ds\right). \tag{5}$$

Ueber den Ort, an welchem ein chromatisches Bild aufgefasst wird und daher auch über die Grösse des durch die chromatische Aberration hervorgerufenen Zerstreuungskreises, welcher an Stelle eines scharfen Bildpunktes auftritt, befindet man sich in einer ähnlichen Unsicherheit, wie bei dem der sphärischen Aberration (vergl. pag. 103). Da die Farben, in welche weisses Licht durch Dispersion zerlegt wird, physiologisch einen sehr ungleichen, ja sogar mit der Intensität der Lichtquelle und auch individuell erheblich schwankenden Effekt haben, so sind dieselben für die thatsächliche Auffassung des Bildortes und die Beurtheilung der Grösse des Zerstreuungskreises sehr ungleichwerthig — analog der Ungleichwerthigkeit der unter verschiedener Axenneigung nach dem Bilde convergirenden Strahlen von einerlei Farbe bei der sphärischen Aberration[1]). Für ihre Bewerthung sind die Unterlagen nur durch experimentelle Vergleiche der physiologischen Eindruckstärken verschiedenwelligen Lichts zu beschaffen. Solche Untersuchungen wurden zuerst von FRAUNHOFER[2]) ausgeführt und in neuerer Zeit

---

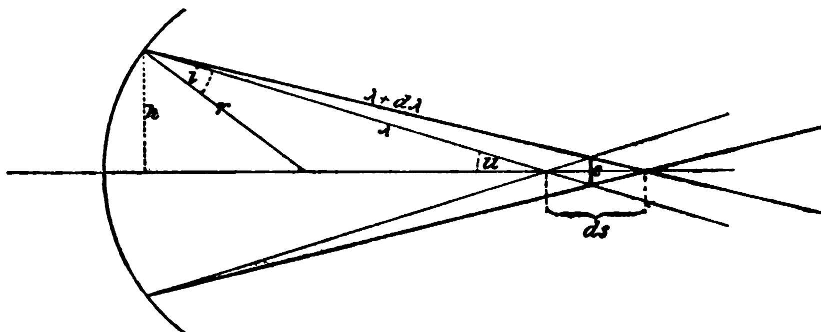
[1]) S. HELMHOLTZ, Physiol. Optik 1. Aufl., pag. 132.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. (für 1814/15) pag. 213. 1817. Ges. Schriften Münch. 1888 pag. 18, vergl. auch C. A. STEINHEIL und L. SEIDEL, Abh. Münch. Akad. 5, pag. 1, abgedruckt in A. STEINHEIL und E. VOIT, Handb. d. angew. Optik Leipz. 1891, pag. 248.

von VIERORDT[1]), E. BRODHUN[2]) und A. KÖNIG[3]). Wir werden auf dieselben bald zurückzukommen haben. Für den Augenblick können wir diese Details unberücksichtigt lassen, indem wir nur die beiden einzelnen Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ beachten, von denen wir annehmen wollen, dass sie physiologisch gleichwerthig seien und den Zerstreuungskreis berechnen, welcher von ihnen allein verursacht wird. Die geringste Einschnürung des nach dem Bilde eines Punktes zu convergirenden Lichtbüschels findet dann (s. Fig. 333) in der Mitte zwischen den beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Bildpunkten statt und ihr Durchmesser c ist bis auf Grössen von höherer als der zweiten Ordnung

$$c = \pm ds \cdot u \qquad \text{bezw.} \qquad c' = ds' \cdot u',$$

wenn u bezw. u' der halbe Oeffnungswinkel des nach dem Objekt- bezw. Bildpunkte hin convergirenden Büschels ist. Das Vorzeichen von c ist an sich willkürlich. Wir



(Ph. 333.)

wollen es, wie bei der sphärischen Aberration, so wählen, dass es bei einer collektiven Brechung positiv wird, also, indem λ als unabhängige Variable gedacht wird, oben das positive Vorzeichen annehmen.

Wie früher auf das Objekt zurückbezogen, ist vor und nach der betrachteten $k$ten Brechung

$$n_k u_k c_k = n_1 u_1 (c_0)_k \qquad \text{und} \qquad n_k' u_k' c_k' = n_1 u_1 (c_0)_k,$$

daher, da

$$u_k = \frac{h_k}{s_k} \qquad \text{und} \qquad u_k' = \frac{h_k}{s_k'}.$$

$$ds_k = \frac{c_k}{u_k} = (c_0)_k \frac{n_1 u_1}{n_k u_k^2} = (c_0)_k (n_1 u_1) \frac{s_k^2}{n_k h_k^2}$$

und ebenso

$$ds_k' = \frac{c_k'}{u_k'} = (c_0)_k' \frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'^2} = (c_0)_k' (n_1 u_1) \frac{s_k'^2}{n_k' h_k^2}$$

Tragen wir diese Werthe von ds_k und ds_k' in (5) ein, so wird nach einigen Umformungen

$$\Delta(c_0)_k = -\frac{h_k^2}{n_1 u_1} Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k$$

oder für die Rechnung bequemer

$$\Delta(c_0)_k = -(n_1 u_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k, \tag{6}$$

---

[1]) POGG. Ann. 137, pag. 200. 1869. Die Anwendung des Spectralapparates etc. Tübingen 1871, pag. 45 ff.

[2]) Beiträge z. Farbenlehre, Inaug. Diss. Berlin 1887.

[3]) Beitr. z. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. Festschrift für v. HELMHOLTZ, Leipzig. 1891, auch separat u. d. T. Ueber den Helligkeitswerth der Spektralfarben bei verschied. absol. Intensität. S. auch v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 2. Aufl., pag. 428 ff. (daselbst weitere Literaturangaben).

die durch die Brechung an der $k$ten Fläche bewirkte Zunahme des auf die Objektseite bezogenen chromatischen Zerstreuungskreises.

Seine ganze Grösse nach der $p$ten Brechung ist, wenn er vor der ersten Brechung = Null war

$$c_0^{(p)} = \sum \Delta (c_0)_k = -(n_1 u_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k. \tag{6a}$$

In angularem Maasse, bei unendlich fernem Objekt in Luft, beträgt derselbe

$$\gamma_0^{(p)} = \sum \Delta (\gamma_0)_k = + h_1 \sum Q_k \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \tag{7}$$

oder, wenn wir den Werth, welchen die rechtsstehende Summe für eine Brennweite des Gesammtsystems = 1 annimmt, mit G bezeichnen

$$\gamma_0^{(p)} = + \left(\frac{h_1}{f}\right) \cdot G. \tag{7a}$$

Die durch die Chromasie bewirkte Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also bei gegebener Construction eines Systems dem Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite einfach proportional und — wie die durch sphärische Aberration bewirkte — in ihrem Winkelwerth von der Grösse der Brennweite selbst unabhängig.

Man kann aus dem gemäss (6a) oder (7) berechneten Zerstreuungskreis, ebenso wie bei der sphärischen Aberration, auch wieder rückwärts die nach der $k$ten Brechung vorhandene Längsaberration berechnen, nämlich

$$ds_p' = (s'_{\lambda+d\lambda} - s_\lambda')_p = -\left(\frac{n_1 u_1}{n_p' u_p'}\right)^2 \left(\frac{n_p'}{n_1 u_1}\right) c_0^{(p)} = -\frac{n_p'}{n_1 u_1} \beta^{(p)2} c_0^{(p)}.$$

Bei unendlich fernem Objekt ist diese Längsaberration zugleich die Variation des Brennpunkts und zwar

$$ds_p' = ds_F' = + \left(\frac{f'}{h_1}\right) f' \cdot \gamma_0^{(p)}.$$

Wie wir vorhin sahen, lässt sich die chromatische Aberration für den Axenpunkt schon bei einem zweifachen Diopter aufheben; bei einem aus drei und mehr Flächen zusammengesetzten Systeme ist man daher im Allgemeinen im Stande, die chromatische und sphärische Aberration für Axenpunkte durch geeignete Wahl der Krümmungen jener Flächen gleichzeitig aufzuheben.

Noch einfacher als die Variation des Bildortes mit der Farbe lässt sich die der Lateral- und Angularvergrösserung bestimmen.

Die Lateralvergrösserung bei der Brechung an einer einzelnen, der $k$ten, Fläche ist nach pag. 76

$$\frac{y_k'}{y_k} = \beta_k = \frac{n_k s_k'}{n_k' s_k},$$

also für ein System von p Flächen

$$\beta^{(p)} = \frac{y_p'}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{y_2'}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_k'}{y_k} \cdot \ldots \cdot \frac{y_p'}{y_p}$$

oder

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_p'} \left(\frac{s_1'}{s_1}\right) \left(\frac{s_2'}{s_2}\right) \ldots \left(\frac{s_k'}{s_k}\right) \ldots \left(\frac{s_p'}{s_p}\right),$$

daher

$$\frac{d\beta}{\beta} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k + \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_p'}{n_p'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s} - \frac{dn}{n}\right)_k = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s-r}\right)_k. \tag{8}$$

In gleicher Weise ist das Convergenzverhältniss für ein System von p Flächen

$$\frac{u_p'}{u_1} = \frac{u'}{u} = \gamma^{(p)} = \left(\frac{s_1}{s_1'}\right) \cdot \left(\frac{s_2}{s_2'}\right) \cdots \left(\frac{s_k}{s_k'}\right) \cdots \left(\frac{s_p}{s_p'}\right),$$

daher

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -\sum \left(\frac{ds}{s}\right)_k, \tag{9}$$

eine Gleichung, die auch schon in Verbindung mit (8) aus $\beta\gamma = -(n/n')$ folgt.

Für die praktische Anwendung der vorstehenden Gleichungen (6) bis (9) ist vorausgesetzt, dass ein paraxialer Strahl der Weltenlänge λ von dem gegebenen Objektpunkte aus durch wiederholte Anwendung der Grundformel $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$ und $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ auf die einzelnen Flächen des Systems durch dieses verfolgt sei.

Verfolgt man in derselben Weise einen aus ∞ (parallel zur Axe) einfallenden Strahl durch das System, so erhält man aus den Schnittweiten vor und nach der Brechung an den einzelnen Flächen die Brennweite des Bildraums, wie leicht ersichtlich, zu

$$f' = \frac{h}{tg\,u'} = \frac{h_1}{(h_p/s_p')} = \left(\frac{s_1'}{s_2}\right) \cdot \left(\frac{s_2'}{s_3}\right) \cdots\cdots \left(\frac{s'_{p-1}}{s_p}\right) \cdot s_p';$$

daher die Variation der hinteren Brennweite mit der Farbe aus den analogen Variationen der Einzelschnittweiten

$$\frac{df'}{f'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k \tag{10}$$

und ganz ebenso die relative Variation der vorderen Brennweite df/f aus den Elementen, die sich bei der Durchrechnung eines in entgegengesetzter Richtung, von der Bildseite her, durch das System tretenden Strahls ergeben.

Sekundäres Spectrum.

Die bisherigen Erörterungen fussen auf der Thatsache, dass der Brechungsexponent n jedes Mediums eine Function der Wellenlänge sei, ohne weiter auf die Natur dieser Function Rücksicht zu nehmen. Die genaue Beschaffenheit derselben ist trotz der zahlreichen, seit NEWTON über sie angestellten experimentellen und speculativen Untersuchungen noch nicht endgültig festgestellt (s. den. Art. Dispersion). Von ihr hängen nun gewisse Erscheinungen sekundärer Natur ab, welche mit jeder Art von Achromasie verbunden sind, und deren allgemeiner Charakter sich auch schon auf Grund desjenigen, was bisher über die Gesetze der Dispersion bekannt ist, mit genügender Sicherheit kennzeichnen lässt.

Während nämlich NEWTON und u. A. auch noch WOLLASTON annahmen, dass die relative Dispersion verschiedener Substanzen in allen Theilen des Spectrums eine constante sei, haben schon CLAIRAUT, BLAIR, dann durch eine Reihe kritischer Experimente BOSCOVICH[1]) und schliesslich, entsprechend seiner exakten Beobachtungsmethode ganz unwiderleglich, FRAUNHOFER[2]) erwiesen, dass dies nicht der Fall sei: dass vielmehr bei Spectren, welche mit Prismen verschiedener Substanz entworfen werden, die Ausdehnung der einzelnen Farbenbezirke in einem sehr variablen Verhältniss zur Gesammtausdehnung stehe, oder genauer: dass das Verhältniss der Dispersionen (Differenzen der Brechungsexponenten für verschiedene Wellenlängen) in verschiedenen Theilen des Spectrums von Substanz zu Substanz erheblich variire. So zeigte FRAUNHOFER[3]), dass das Verhältniss der Disper-

[1]) Ueber diese drei vergl. BREWSTER, Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 300 und 353.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. für 1814/15, pag. 209. Ges. Schriften pag. 14.

[3]) a. a. O. Tab. IV.

sionen zweier Gläser am rothen Ende des Spectrums (von Linie B bis Linie C) zu demjenigen am violetten Ende (Linie G bis Linie H) variiren könne von 1·9 zu 2·3 oder etwa wie 1 : 1·2; die gleichen Verhältnisse bei Glas und Wasser von 2·6 zu 3·7 oder fast wie 1 : 1·5 u. dergl. mehr.

Daraus folgt, dass, wenn man n als Function von λ darstellen will — etwa als eine Potenzreihe — in dieser jedenfalls $dn/d\lambda$ noch Function von λ bleiben muss. Eine genauere Discussion des über Dispersion vorliegenden Beobachtungsmaterials führt dazu[1]) — wenn überhaupt — dann eine Potenzreihe mit wenigstens drei Coëfficienten zur vollständigen Darstellung der Dispersion aller Substanzen anzunehmen, wenn auch die vieler Substanzen durch eine zweiconstantige Reihe bereits sehr vollkommen dargestellt wird[2]).

Die Form des betreffenden Ausdrucks ist gewöhnlich (nach CAUCHY und BRIOT)

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \ldots \qquad (11)$$

Die Achromasie — sei es der Brennpunkte oder Brennweiten, Bildpunkte oder Convergenzverhältnisse, welche mit einem Paar Linsen bewirkt wird deren Substanzen nicht zufällig proportionale Coëfficienten b, c, d besitzen, ist nun in Folge der Abhängigkeit der Differentialquotienten $dn/d\lambda$ oder dn/dl (wo $l = 1/\lambda^2$) von λ bezw. l, stets eine unvollständige. Ihr Charakter ist im allgemeinen der, dass die Achromasie (Identität) des fraglichen Elementes immer nur für je zwei Wellenlängen vorhanden ist; von der Stelle λ an, für welche die Variation = Null gemacht und daher ein (Maximum oder) Minimum ist, ist paarweise nach beiden Seiten des Spectrums hin für je eine Stelle der einen Spectralhälfte das betreffende Abbildungselement identisch mit dem für eine Stelle der andern Spectralhälfte. Dieser besondere Charakter der Unvollkommenheit der Achromasie — von BLAIR »secundäres Spectrum« genannt — entspringt allein der zufälligen besonderen Beschaffenheit des Dispersionsverlaufs in den bekannten Substanzen, namentlich in den Gläsern, und ist kein naturnothwendiger Es giebt vielmehr im Gegentheil auch Glasarten und andere Substanzen, deren Combination einen wesentlich anderen Gang des secundären Spectrums herbeiführt; so die neuen Borat- und Phosphatgläser, welche das Jenaer Glaswerk seit 1884 fabrikatorisch herstellt[3]).

Ich habe a. a. O. eine einfache Methode angegeben, um die Grösse des secundären Spectrums, d. h. der Focusdifferenz zweier zu einem System combinirter unendlich dünner Linsen aus den Dispersionswerthen zu berechnen, wenn festgesetzt ist, für welche Wellenlängen das System gleiche Brennweiten (und Brennpunkte) haben soll.

Ist nämlich das System so construirt, dass die Brennweite für die Wellenlänge λ_a gleich ist der für die Wellenlänge λ_b, so haben wir nach Gleichung (4) mit ein wenig veränderter Bezeichnung

$$\varphi_a = \frac{1}{f_a} = (n_a' - 1)k' + (n_a'' - 1)k'' = \varphi_b = \frac{1}{f_b} = (n_b' - 1)k' + (n_b'' - 1)k'',$$

woraus sich

$$k' = (\rho_1' - \rho_2') \qquad \text{und} \qquad k'' = (\rho_1'' - \rho_2'')$$

berechnen zu

[1]) CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 6, pag. 341 1886.

[2]) vergl. z. B. WÜLLNER, Lehrb. d. Exper. Physik 2, pag. 156, Leipz. 1882 u. W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichts in Gläsern, Leipz. 1874, § 1.

[3]) Vergl. CZAPSKI a. a. O. und das Productionsverzeichniss des Jenaer Glaswerks.

$$k' = \frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n'}\,\frac{1}{\nu' - \nu''} \quad \text{und} \quad k'' = -\frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n''}\,\frac{1}{\nu' - \nu''},$$

wenn hier

$$\Delta n' = n_b' - n_a'; \qquad \Delta n'' = n_b'' - n_a''$$

$$\nu' = \frac{n' - 1}{\Delta n'} \quad \text{und} \quad \nu'' = \frac{n'' - 1}{\Delta n''}$$

bedeutet. Die Brennweite der Combination für eine andere Wellenlänge λ_x ist dann gegeben durch

$$\varphi_x = \frac{1}{f_x} = (n_x' - 1)k' + (n_x'' - 1)k''.$$

Demnach

$$\varphi_a - \varphi_x = (n_a' - n_x')k' + (n_a'' - n_x'')k''$$

$$\varphi_b - \varphi_x = (n_b' - n_x')k' + (n_b'' - n_x'')k''$$

oder

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{n_a' - n_x'}{\Delta n'} - \frac{n_a'' - n_x''}{\Delta n''}\right) = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{a,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{a,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right)$$

und

$$\frac{f_x - f_b}{f} = \frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{b,\,x}}{\Delta n'_{a,\,b}} - \frac{\Delta n''_{b,\,x}}{\Delta n''_{a,\,b}}\right). \tag{12}$$

A. a. O. habe ich die Grösse des nach diesen Formeln berechneten sekundären Spectrums für mehrere Combinationen von Glasarten angegeben und z. Th. graphisch dargestellt. Es ist z. B. bei der Combination eines Silicat-Crownglases englischer Art mit einem mittelschweren Flintglas $\left(\nu' = 60{\cdot}2,\ \nu'' = 36{\cdot}2,\ \text{wenn } \nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}\right)$ bei der Brennweite 1 und einer solchen Achromatisirungsweise, dass $f_F = f_C$:

$$f_{G'} - f_F = f_{G'} - f_C = +\,0{\cdot}00179$$

$$f_D - f_F = f_D - f_C = -\,0{\cdot}00046$$

$$f_{A'} - f_F = f_{A'} - f_C = +\,0{\cdot}00113.$$

Mit Hilfe einer Dispersionsformel wie (11) erhält man für einige Jenaer Glasarten folgende Tabelle der Abweichungen:

Werthe der Differenzen $f_\lambda - f_{0{\cdot}55\mu}$ in Tausendteln von $f_{0{\cdot}55\mu}$.

λ in Mikron	0·77	0·73	0·69	0·65	0·61	0·57	0·53	0·49	0·45	0·41
S. 60 — O. 103	+ 1·79	+ 1·39	+ 0·98	+ 0·58	+ 0·25	+ 0·03	+ 0·04	+ 0·44	— 1·51	+ 3·70
S. 30 — S. 7	+ 0·88	+ 0·69	+ 0·48	+ 0·29	+ 0·12	+ 0·02	+ 0·03	+ 0·21	+ 0·71	+ 1·69
S· 30 — S. 8	— 0·04	— 0·02	— 0·01	± 0·00	± 0·00	± 0·00	+ 0·01	+ 0·04	+ 0·21	+ 0·79

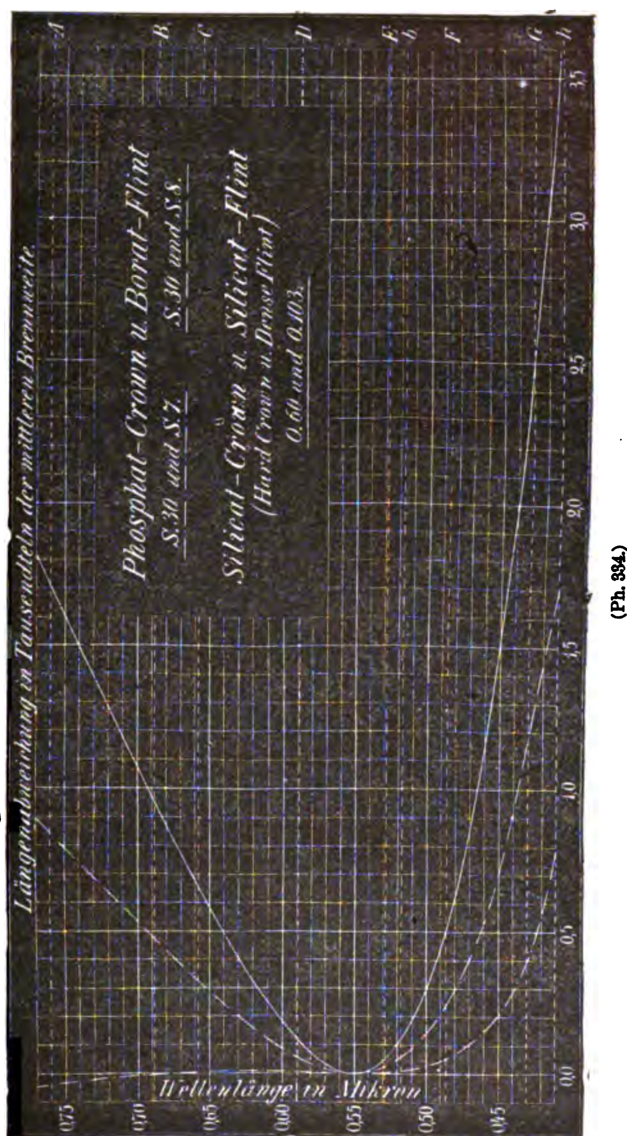
Fig. 334 veranschaulicht den Verlauf der Focusdifferenzen bei diesen drei Combinationen.

Die Constanten der hier angenommenen Gläser sind nach dem Productions-Verzeichniss der Jenaer Glasschmelzerei folgende:

Fabr. No.	Chemische Charakter	n_D	$n_F - n_C$	$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \nu$	$n_D - n_{A'}$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
O. 60	Calcium-Silicat-Crown	1·5179	0·00860	60·2	0·00553 0·648	0·00605 0·708	0·00487 0·566
O. 103	Gewöhnl. Silicat-Flint	1·6202	0·01709	36·2	0·01034 0·605	0·01120 0·714	0·01041 0·609
S. 30	Schweres Barium-Phosphat-Crown . . .	1·5760	0·00884	65·2	0·00570 0·644	0·00622 0·708	0·00500 0·565
S. 7	Borat-Flint	1·6086	0·01375	44·3	0·00864 0·628	0·00974 0·708	0·00802 0·583
S. 8	Borat-Flint	1·5736	0·01129	50·8	0·00728 0·645	0·00795 0·704	0·00644 0·571

Mit A' ist die rothe Kalilinie ($\lambda = 0{\cdot}7677$), mit G' die blaue Wasserstofflinie H_γ ($\lambda = 0{\cdot}4341$) bezeichnet. Die in kleiner Schrift unter die Beträge der partiellen Dispersion gesetzten Zahlen sind die Verhältnisse dieser partiellen Dispersionen zur gesammten ($n_F - n_C$).

Obige Tabelle giebt ein Bild von der Grösse und dem Gange des secundären Spectrums bei binären Combinationen aus älteren Gläsern und von der Veränderung seiner Grösse und seines Ganges, die durch Anwendung mancher von den neuerdings hergestellten Glasarten möglich geworden ist. Ihr Inhalt stimmt im wesentlichen überein mit den Resultaten, welche H. C. VOGEL[1]), HASSELBERG[2]), M. WOLF[3]) u. A. durch direkte Messungen der Focusdifferenzen von Fernrohrobjektiven erhalten haben.



(Ph. 394.)

Da, wie wir oben bemerkten, die verschiedenen Theile des Spectrums sehr verschiedene Helligkeit besitzen, so ist es sehr wichtig, die Achromasie, d. h. das sekundäre Spectrum, so zu gestalten, dass es möglichst wenig störend wirkt, also die hellsten Strahlen in einem möglichst engen Raum vereinigt werden. Ein rationelles Verfahren hierzu gab bereits FRAUNHOFER an; doch führte dasselbe nicht zu befriedigender Uebereinstimmung mit der praktischen Erfahrung, vielleicht in Folge der Ungenauigkeit seiner Bestimmung der relativen Helligkeiten der Spectralbezirke. Er schlug nämlich vor, alle Dispersionsverhältnisse *pro rata* ihrer Lichtmenge (Produkt aus Helligkeit und Ausdehnung des betreffenden Spectralbezirks) in Rechnung zu ziehen. Ein ähnliches Verfahren wandten STEINHEIL und SEIDEL an (a. a. O.). In besserer Uebereinstimmung mit der Erfahrung

[1]) Monatsber. Berl. Akad. 1880, pag. 433. Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 22, pag. 142. 1888.

[2]) Mél. math. et astr. de l'Acad. de Petersb. 6, pag. 669. 1888.

[3]) WIED. Ann. 33, pag. 212. 1888. Ausführliche Referate über diese Arbeiten dieser drei Forscher in Ztschr. f. Instkde. 8, pag. 246; 9, pag. 16.

ist der von SCHEIBNER[1]) gewählte Modus: das Verhältniss *dn'/dn* als Grenzwerth (Differentialquotienten) aus empirischen Dispersionsformeln der beiden Substanzen abzuleiten und zwar für die Wellenlänge der hellsten Stelle des Spectrums λ = ca. 0·55 μ[2]). Dies ist in obiger Tabelle geschehen. Fast dasselbe Ergebniss wird erhalten, wenn man die Identität der zu achromatisirenden Grösse (Bildort, Bildgrösse etc.) für die *C*- und *F*-Linie (rothe und grüne Wasserstofflinie H_α, H_β) herstellt.

Die letzteren Regeln gelten für Instrumente, deren Bilder direkt vom Auge wahrgenommen werden sollen (dessen Chromasie natürlich mitbestimmend ist). Sollen die Bilder in anderer Weise wirken, z. B. auf photographische Platten so ist deren Empfindlichkeit nach Wellenlänge und Intensität in analoger Weise zu berücksichtigen.

Eine Achromasie höherer Ordnung, bei welcher also statt für je zwei für je drei Wellenlängen Identität der Bilder nach Ort oder Grösse vorhanden ist, lässt sich bei binären — aus zwei Linsen zusammengesetzten — Systemen, wie bemerkt, nur erreichen durch Anwendung einiger von den neuen Jenaer Glasarten[3]); unter Benutzung der gewöhnlichen Glasarten nur dadurch, dass man das System aus mindestens drei Linsen zusammensetzt, deren Substanzen hinreichend verschiedene Dispersionsverhältnisse besitzen[4]). Es ergeben sich die entsprechenden Krümmungsmaasse der (als verschwindend dünn und in Contakt befindlich vorausgesetzten) drei Linsen k', k'', k''' einfach durch Auflösung der drei Gleichungen, welche hier an Stelle der oben betrachteten zwei Bedingungsgleichungen für die Achromasie treten. Es ist wohl kaum nöthig, dieselben hier aufzuführen. Ich will nur bemerken, dass man zu relativ sehr grossen Krümmungsmaassen kommt, wenn man die Dispersionsverhältnisse der drei Substanzen nicht angemessen auswählt[5]).

Die durch das secundäre — oder im letzteren Falle tertiäre und bei noch weiter gehender Achromatisirung quaternäre etc. — Spectrum hervorgerufenen Zerstreuungskreise sind, ebenso wie die des primären Spectrums der relativen Oeffnung (Verhältniss von Oeffnung zu Brennweite) des Systems proportional. Von erheblich grösserem Einfluss auf die Achromasie der Bilder als diese von den höheren Gliedern der Dispersionsformeln abhängigen Fehler ist schon bei mässigen relativen Oeffnungen (des Systems) die

Variation der von der Kugelgestalt herrührenden (sphärischen) Aberrationen mit der Wellenlänge,

insbesondere der schlechthin so genannten »sphärischen Aberration«, nämlich derjenigen für Axenpunkte. Wenn diese Aberration für eine bestimmte Wellenlänge λ_0 aufgehoben ist, so wird sie es im allgemeinen nicht zugleich auch für

---

[1]) Abh. Sächs. Akad. 11, pag. 565. 1876.

[2]) Nach den Messungen von A. KÖNIG wandert das Maximum der Helligkeit im Sonnenspectrum bei zunehmender Gesammtintensität desselben von λ = 0·53 μ bis λ = 0·61 μ.

[3]) Früher wurde in Ermangelung geeigneter fester Körper wiederholt die Anwendung von Flüssigkeiten zwischen gekrümmten Platten oder Glaslinsen vorgeschlagen und versucht von S. BLAIR, Trans. Edinb. Soc. 3, pag. 3. 1791. BARLOW, Phil. Trans. 1828, pag. 105, 313, auch ibid. 1829, 1831, 1833.

[4]) Dies wohl zuerst von BOSCOVICH hervorgehoben, Diss. quinque ad dioptric. pertin. Wien 1764.

[5]) Ueber solche und verwandte Bestrebungen speciell auf dem Gebiete der Fernrohroptik hat A. SAFARIK, Vierteljahrschr. d. astr. Ges. 17, pag. 13. 1882, über eben solche auf dem Gebiete der Mikroskopoptik E. ABBE, Ber. über die 1876er Ausstellung wiss. App. in London, Braunschweig 1878, Bd. 1., pag. 415, zusammenfassend berichtet.

andere Wellenlängen sein. Gewöhnlich besteht dann vielmehr wegen der stärkeren Dispersion bei den (dispansiven) Flintgläsern in dem System sphärische Uebercorrection für kürzere und sphärische Untercorrection für grössere Wellenlängen als λ_0. Diese »chromatische Differenz der sphärischen Aberration« (nach der Bezeichnung ABBE's) ist nun, wie leicht einzusehen, gleichbedeutend mit einer »sphärischen Differenz der chromatischen Aberration«, d. h. einer Variation der letzteren von Zone zu Zone. In dem vorgedachten Falle würde bei richtiger chromatischer Correction der centralen Zone eine nach dem Rande der Oeffnung hin wachsende chromatische Uebercorrection eintreten (Schnittweite der kurzwelligen Strahlen grösser als die der langwelligen). Bei Systemen von erheblicher Oeffnung kann diese Uebercorrection — und die sphärische Differenz der chromatischen Aberration über haupt — so stark werden, dass in manchen Zonen gar keine paarweise Coincidenz der Bildpunkte mehr eintritt, so dass der Charakter der Aberration dort ganz der einer einfachen uncorrigirten Linse wird. Bei mässiger Oeffnung tritt nur eine mit der Distanz der betrachteten Zone von der bestcorrigirten wachsende Verschiebung des Minimums der Bildweite gegen den Rand des Systems hin nach den langwelligen (Uebercorrection) gegen die centrale Zone hin nach den kurzwelligen Strahlen (Untercorrection) ein.

Die auf diese Weise eintretende chromatische Aberration kann, wie bemerkt, schon bei mässigen Oeffnungen von erheblich grösserer Bedeutung werden als die secundäre Aberration in Folge der Disproportionalität der Zerstreuungsverhältnisse in verschiedenen Theilen des Spectrums. Um sie möglichst unschädlich zu machen, muss man, wenn man sie nicht ganz beseitigen kann, die beste chromatische Correction nicht in die centrale Zone des Systems legen, sondern in eine passend zwischen dieser und dem Rande gelegene — so nämlich, dass der Zerstreuungskreis, welcher durch die dann nach der Mitte hin zunehmende Untercorrection hervorgerufen wird, etwa von gleicher Grösse (aber entgegengesetztem Charakter) wird, als der, von der nach dem Rande zu wachsenden chromatischen Uebercorrection herrührende[1]). Die maximale Grösse dieser entgegengesetzt gleichen und sich überdeckenden Zerstreuungskreise bleibt dann erheblich unter derjenigen, welche bei centraler chromatischer Correction eintreten würde — da ja die sphärische Aberration für je eine Wellenlänge, welche ihre Ursache ist, selbst bei kleinen Oeffnungsverhältnissen schon mit der dritten Potenz der Apertur wächst.

Diese Verhältnisse, aut welche ich hier nicht noch näher eingehen will, kann man sich durch graphische Darstellung (Fig. 335a und b, Taf. I) veranschaulichen[2]).

[1]) S. z. B. KERBER, Centr.-Zeitg. f. Opt. u. Mech. 7, pag. 157. 1886, welcher findet dass die chromatische Correctur in der Zone $h = 0{\cdot}866\,h$ stattfinden müsse.

[2]) In diesen beiden Figuren sind der Deutlichkeit wegen die (langwelligen) rothen Strahlen nur auf der einen Seite der Axe angegeben, die (kurzwelligen) blauen nur auf der anderen Seite. Beide stellen Systeme vor, welche sphärisch für eine mittlere Wellenlänge — etwa Grüngelb, als der optisch intensivsten Stelle des Spectrums — corrigirt sind, für roth aber sphärisch unter-, für blau übercorrigirt. Chromatisch ist jedoch das System Fig. 335a in der centralen Zone (Axe) corrigirt; Fig. 335b für die Randzone. Im ersteren Falle haben die Randstrahlen, im letzteren Falle die nach der Axe zu gelegenen eine unverhältnissmässig grosse chromatische Längsabweichung ($c \cdot a$; $c' \cdot a'$) und bewirken einen ihrer Axenneigung entsprechenden Zerstreuungskreis. Der letztere wird am kleinsten bei chromatischer Correctur in einer mittleren Zone. Man kann z. B. offenbar die Oeffnung des Systems Fig. 335b so weit vermehren, dass seine Randstrahlen einen Zerstreuungskreis von gleicher Grö sse und Lage hervor bringen, als seine Axenstrahlen, ohne die chromatische Correction des gesammten Systems gegen vorher zu verschlechtern.

Die sphärische Aberration sucht man natürlich, wenn sie nur für eine Wellenlänge erreicht werden kann, für diejenige herzustellen, welche — je nach der Bestimmung des Instruments physiologisch, thermisch oder chemisch — den intensivsten Eindruck macht.

GAUSS[1]), welcher auf diese Umstände besonders nachdrücklich hinwies, gab auch bereits eine Construction für Fernrohrobjektive an, bei welcher die sphärische Aberration für zwei Wellenlängen und die chromatische für mindestens zwei Zonen des Systems gehoben ist. (Erster Vorschlag hierzu von D'ALEMBERT. Seitdem ist diese Construction und ähnliche mehrfach Gegenstand der Diskussion und Neuberechnung gewesen[2]), insbesondere ist eine analoge auch für Mikroskopobjektive angewandt worden[3]), bei welchen sie, entsprechend deren grösserer Apertur, auch überwiegende Vortheile gewährt, zumal, wenn gleichzeitig durch geeignete Wahl der Glasarten auch das secundäre Spectrum beseitigt ist[4]).

Variation des Aplanatismus mit der Wellenlänge. Damit neben der durch die Aufhebung der sphärischen Aberration herbeigeführten Abbildung eines axialen Objektpunkts noch die eines ihm seitlich benachbarten, d. h. die eines zur Axe senkrechten Flächenelements stattfinde, musste bei Systemen grosser Apertur der Bedingung genügt sein (pag. 118), dass für das betreffende Paar von Axenpunkten

$$\frac{n_1 \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = const$$

sei. Damit bei solchen Systemen die Abbildung eines Flächenelements für mehrere Wellenlängen zugleich stattfinde, muss für diese auch die entsprechende Constanz der Sinusverhältnisse conjugirter Strahlen gleichzeitig bestehen. Soll z. B. Aplanasie für zwei unendlich benachbarte Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ vorhanden sein, so muss zu obiger Gleichung für λ noch die durch deren Variation nach λ sich ergebende hinzutreten:

$$\frac{du}{tang\, u} + \frac{dn}{n} = \frac{du'}{tang\, u'} + \frac{dn'}{n} + \frac{d\beta}{\beta} \tag{13}$$

oder

$$\Delta\left(\frac{du}{tang\, u}\right) = -\Delta\left(\frac{dn}{n}\right) - \frac{d\beta}{\beta}.$$

ABBE[5]) hat Systeme, welche frei von sekundärem Spectrum und zugleich aplanatisch für mehrere Farben sind, als »apochromatische« bezeichnet und solche auf mehreren Gebieten praktisch realisirt.

Es würde nach Erfüllung von (13) jedoch noch eine für alle Zonen constante Verschiedenheit der Vergrösserung bestehen (Fig. 336, Taf. I), welche nach dem Rande des Sehfeldes zu wachsend in Geltung tritt. Soll auch diese in Wegfall kommen, so muss $d\beta = 0$ sein, und wenn $du = 0$ gesetzt, d. h. ein originäres oder sonst aberrationsfreies Objekt vorausgesetzt wird, so geht (13) in die Bedingung über

$$\frac{du'}{tang\, u'} = \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'}. \tag{13a}$$

Die Grösse $\frac{du'}{tg\, u}$ und die chromatische Längsabweichung kann aus den Elementen, welche den Weg eines beliebig geneigten Strahls im Hauptschnitt eines centrirten Systems bestimmen,

[1]) Zeitschr. f. Astronomie v. LINDENAU 4, pag. 345, Werke 5, pag. 507.

[2]) Eine (nicht ganz einwandsfreie) Zusammenstellung der Ergebnisse nebst Literaturnachweisen gab H. KRÜSS, Zeitschr. f. Instrkde. 8, pag. 7, 53, 83. 1888.

[3]) E. ABBE, Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 812. 1879.

[4]) E. ABBE, Sitzber. med. naturw. Ges. Jena f. 1887, pag. 107.

[5]) l. c. pag. 114.

bequem von Fläche zu Fläche berechnet werden, so dass man nicht nöthig hat, die ganze Durchrechnung für jede Wellenlänge besonders auszuführen. Man hat nämlich zur Verfolgung eines Strahls beliebiger Wellenlänge durch irgend eine Fläche gemäss pag. 68/69 das Schema

(a) $\frac{s-r}{r} \cdot \sin u = \sin i$ woraus $\frac{du}{\tang u} + \frac{ds}{s-r} = \frac{di}{\tang i}$ (a')

(b) $\frac{n}{n'} \sin i = \sin i'$ „ $\frac{di}{\tang i} + \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} = \frac{di'}{\tang i'}$ (b')

(c) $u + (i' - i) = u'$ „ $du + di' - di = du'$ (c')

(d) $\frac{r \sin i'}{\sin u'} = s' - r$ „ $\frac{di'}{\tang i'} - \frac{du'}{\tang u'} = \frac{ds'}{s'-r}$ (d')

daher schliesslich $\Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right) = -\Delta\left(\frac{du}{\tang u}\right) - \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)$

folgt. Ist also du und ds gegeben und der Strahl von der Wellenlänge λ festgelegt, so werden nach dem rechtstehenden Schema ds' und du' sehr einfach berechnet.

Die chromatischen Variationen der übrigen Kugelgestaltfehler: der Bildkrümmung, des Astigmatismus und der Orthoskopie sind selten Gegenstand der Untersuchung, bezw. ihre Aufhebung Gegenstand der Bemühungen gewesen. Allein die letztere, die Orthoskopie, muss bei manchen Gattungen von Instrumenten von der Variation mit der Wellenlänge unabhängig gemacht werden. Die Bedingung hierfür folgt ohne weiteres aus der entsprechenden Grundbedingung. $\frac{n \tang w}{n' \tang w'} = B$ (pag. 127).

Die Literatur über diesen Abschnitt ist theils im Text, theils in der dem vorigen Abschnitt angehängten Uebersicht mit aufgeführt worden. Da die sphärischen und chromatischen Fehler dem Zweck der optischen Instrumente, scharfe Bilder zu erzeugen, gleich hinderlich sind, so sind dieselben auch meistens im Connex mit einander behandelt worden. S. Czapski.

Prismen und Prismensysteme.

Der Specialfall, dass die die verschiedenen brechenden Medien trennenden Flächen sämmtlich die Krümmung Null haben, Ebenen sind, bietet ein hervorragendes praktisches Interesse und soll daher im Folgenden besonders diskutirt werden.

I. Weg eines einzelnen Strahls.

Derselbe ist innerhalb der Einfallsebene durch das Brechungsgesetz und durch die pag. 25 und 26 abgeleiteten Hilfssätze auch in Bezug auf eine beliebig anzunehmende andere Grundebene völlig bestimmt. Sind ϑ und φ die Winkel, welche die Projection eines Strahles auf eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene mit dem Strahl selbst bezw. mit jener Normalen bildet, ϑ' und φ' dieselben für die Projection des gebrochenen Strahls, i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so war ausser der Grundgleichung

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

noch

$$n \cdot \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \quad (1)$$

und

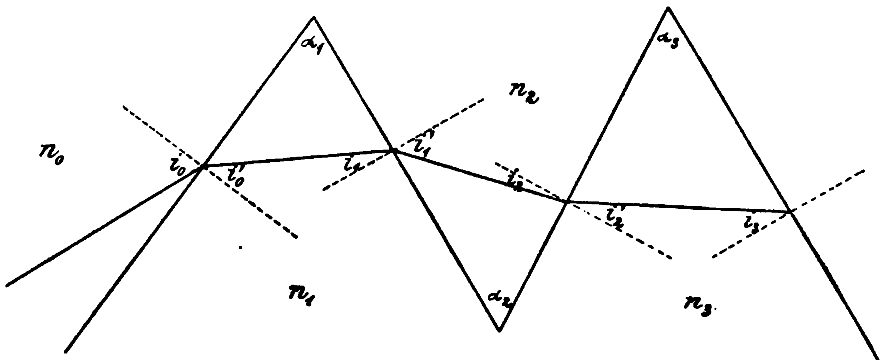
$$n \cdot \sin \varphi \cos \vartheta = n' \sin \varphi' \cos \vartheta',$$

daher aus ϑ und φ auch ϑ' und φ' ohne weiteres berechenbar.

Von den vielen graphischen Constructionen, welche für die Lösung dieser Aufgabe angegeben worden sind[1]), will ich nur die von REUSCH[2]) erwähnen, welche aus Fig. 300, pag. 26, fast unmittelbar zu entnehmen ist. Man schlage um den Einfallspunkt O Halbkugeln mit den Radien n und n' nach dem zweiten Medium zu. Den Punkt P, in welchem die Verlängerung des einfallenden Strahls die erstere Halbkugelfläche trifft, proicire man parallel der Einfallsnormalen auf die zweite Halbkugel nach P', dann ist P' ein Punkt des gebrochenen Strahls.

Liegen mehrere brechende Ebenen vor, so genügen die gleichen Formeln und auch die angegebene graphische Construction, wenn man für erstere als Projectionsebene die zur Schnittlinie je zweier auf einander folgender Ebenen senkrechte den »Hauptschnitt« der beiden Ebenen annimmt und beachtet, dass der Winkel, welchen der an der ersteren Fläche gebrochene Strahl mit jener Ebene bildet, derselbe ist, wie derjenige, welchen er beim Einfall auf die zweite Fläche mit dieser bildet, dass also stets $\vartheta_{k+1} = \vartheta_k'$. Zur Bestimmung von φ_{k+1} aus φ_k' muss der Neigungswinkel der beiden brechenden Ebenen α_k und der zweier auf einander folgender Hauptschnitte gegeben sein. Da die Richtung des Strahls dieselbe bleibt, er mag an einer gegebenen Fläche selbst oder an einer zu dieser parallelen gebrochen werden, so kann für die Construction wie Berechnung der Richtungsänderung durch Brechung in einem Prismensystem angenommen werden, dass dessen sämmtliche Flächen sich selbst parallel bis zum Einfallspunkte verschoben seien. Man hat alsdann für die analytische Verfolgung des Strahlenweges nur eine Reihe sphärische Dreiecke aufzulösen[3]).

Besonders einfach ist der, auch am häufigsten vorliegende Fall, dass die Hauptschnitte aller brechenden Ebenenpaare zusammenfallen, also alle Ebenen auf diesem einen Hauptschnitt senkrecht stehen. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen fasst man unter der Bezeichnung **Prisma** zusammen, ihre Schnittlinie heisst brechende Kante, der Winkel α, den sie einschliessen, brechender Winkel des Prismas.



(Ph. 337.)

Der Weg eines Strahls durch ein solches Prismensystem bestimmt sich, wenn der Strahl im Hauptschnitt verläuft, folgendermaassen (Fig. 337).

Die Einfalls- und Brechungswinkel des Strahls an den einzelnen Ebenen

---

[1]) RADAU, POGG. Ann. 118, pag. 452. 1863. LOMMEL, ebendort 156, pag. 578. 1876; KESSLER, Jahresb. Gew.-Schule Bochum f. 1880. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 29, pag. 69. 1884. Alle diese behandeln auch den Weg eines Strahls durch ein Prisma.

[2]) REUSCH, POGG. Ann. 117, pag. 241. 1862.

[3]) S. z. B. HERSCHEL, Light. D. Uebers. pag. 82.

seien wie früher mit i_k, i_k' bezeichnet und als positiv gerechnet, wenn man den Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit seiner Normalen zur Deckung zu bringen. Die brechenden Winkel α_k der Prismen rechnen wir als positiv, wenn sich ihre Scheitel von einem mit dem Strahle sich Bewegenden und auf die Zeichnungsebene Blickenden links befinden. Die Ablenkung endlich, welche ein Strahl erfährt, rechnen wir als positiv, wenn man den einfallenden Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muss, um ihn mit dem austretenden zur Deckung zu bringen.

Der Weg des Strahls im Hauptschnitt ist dann bestimmt durch das Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcl} & n_1 \sin i_0' = n_0 \sin i_0 & \text{und} & \varepsilon_0 = i_0 - i_0' \\ & i_1 = i_0' - \alpha_1 & & \\ (2) & n_2 \sin i_1' = n_1 \sin i_1 & & \varepsilon_1 = i_1 - i_1' \quad (3) \\ & i_2 = i_1' - \alpha_2 & & \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & n_p' \sin i_p' = n_p \sin i_p & & \varepsilon_p = i_p - i_p' \end{array}$$

daher ist die Gesammtablenkung $\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=0}^{k=p} \varepsilon_k = i_0 - i_p' - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \alpha_k.$

$\sum_{k=1}^{k=p} \alpha_k$ ist nichts anderes als der Winkel der letzten gegen die erste brechende Fläche $= \alpha_{1,p}$, also

$$\varepsilon^{(p)} = i_0 - i_p' - \alpha_{1,p}.$$

Diese Ablenkung ist ein Minimum für denjenigen Einfallswinkel i_0, für welchen unter den gegebenen Verhältnissen (n, α)

$$\frac{\delta \varepsilon^{(p)}}{\delta i} = 0 \quad \text{also} \quad \delta i = \delta i_p' \tag{4}$$

ist (natürlich vorausgesetzt, dass $\delta^2 \varepsilon / \delta i^2$ einen positiven Werth hat).

Zur Berechnung von $\delta i_p'$ in Funktion von δi_0 dient das aus (2) abzuleitende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta i_0' &= \frac{n_0}{n_1} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \delta i_0 \\ \delta i_1' &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \delta i_1, \quad \text{worin} \quad \delta i_1 = \delta i_0' \\ &\cdots\cdots \\ \delta i_p' &= \frac{n_p}{n_p'} \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \delta i_p, \quad \text{worin} \quad \delta i_p = \delta i'_{p-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

also schliesslich

$$\delta i_p' = \frac{n_0}{n_p'} \frac{\cos i_0}{\cos i_0'} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \cdot \cdots \cdot \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \cdot \delta i_0. \tag{6}$$

Das Verhältniss der Cosinus von Einfalls- und Brechungswinkel an je einer Fläche $\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}$, ist eine Function des Einfallswinkels i_k und des relativen Brechungsexponenten der beiden wirksamen Medien. Bezeichnen wir Produkte durch das Zeichen Π, so ist bei der Minimalablenkung, wo also $\delta i_p' = \delta i_0$

$$n_0 \Pi (\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = n_p' \Pi (\cos i_k')_{k=0}^{k=p} \tag{7}$$

oder, da fast stets erstes und letztes Medium Luft, $n_0 = n_p' = 1$ ist

$$\Pi (\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi (\cos i_k')_{k=0}^{k=p} \text{[1]}. \tag{7a}$$

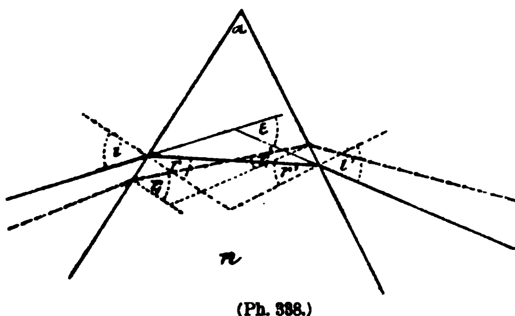
[1]) HERSCHEL, a. a. O. pag. 89.

Wenden wir die letztere Gleichung auf ein einziges, beiderseits vom gleichen Medium umgebenes Prisma an, bei welchem wir der Symmetrie wegen die äusseren Einfallswinkel mit i und i', die inneren mit r und r' bezeichnen (Fig. 338), so muss hier bei der Minimalablenkung

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos i' \cdot \cos r \quad \text{oder} \quad \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'}, \tag{7b}$$

sein. Der Quotient $\cos i/\cos r$ ist nun, wie ersichtlich, dieselbe eindeutige Function von i und n, als der Quotient $\cos i'/\cos r'$ von i' und n. Man hat daher aus $f(i, n) = f(i', n)$

$$i = \pm i'. \tag{7c}$$



(Ph. 338.)

Eine unmittelbare Betrachtung zeigt aber, dass beim einfachen Prisma das Minimum der Ablenkung eines Strahls stattfindet, wenn dieser das Prisma symmetrisch durchsetzt, also wenn $i = -i'$, $r = -r'$ ist. Denn gehe ich unter Voraussetzung eines solchen Verlaufs des Strahls vom Innern des Prismas aus, so ist die Ablenkung, die der Strahl an der einen Fläche erfährt, $\varepsilon = (i - r)$ ebenso gross und trägt zu dem Endeffekt im gleichen Sinne bei als die an der andern Fläche, $\varepsilon' = i' - r'$. Bei einem anderen Strahlengang (s. Fig. 338) ist stets der eine der Winkel r gegenüber der symmetrischen Lage um ebenso viel grösser, als der andere kleiner, da ja dem absoluten Betrage nach stets $[r] + [r'] = \alpha$. Nach dem pag. 26 bewiesenen Satze wächst aber die Ablenkung eines Strahls durch Brechung *caet. par.* mit dem Einfallswinkel immer schneller. Der Zunahme δr des einen Winkels entspricht also eine grössere Zunahme der Ablenkung $\delta\varepsilon$ an dieser Fläche, als die Abnahme $\delta\varepsilon'$ beträgt, welche der gleichgrossen Abnahme $\delta r'$ des anderen inneren Einfallswinkels entspricht. Der verbleibende Ueberschuss der Gesammtablenkung $\delta\varepsilon + \delta\varepsilon'$ ist bei kleinen Werthen δr von der zweiten Ordnung, also in erster Näherung gleich Null, aber, wie gerade diese Betrachtungsweise zeigt, positiv und stetig wachsend bis zu den grössten möglichen Werthen von r oder r'.

Diese grössten Werthe entsprechen den Werthen $\sin i$ bezw. $\sin i' = \pm 1$, d. h. streifendem Ein- bezw. Austritt des Strahls. Ein Prisma, bei welchem der ein- und der austretende Strahl die Flächen streifen, hat den Grenzwinkel $\bar{}$, welcher durch die Beziehung $n \sin \bar{\alpha}/2 = 1$, bestimmt ist und nicht gesteigert werden darf, damit überhaupt noch durch das Prisma mittelst blosser Brechung an seinen beiden Flächen Licht hindurchtreten könne. Derselbe beträgt z. B. für

$n =$	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
$\bar{\alpha} =$	100° 34′	91° 10′	83° 37′	77° 22′	72° 4′	67° 30′	63° 30′	60° 0′
$\bar{\varepsilon} =$	79° 56′	88° 50′	96° 23′	102° 38′	107° 56′	112° 30′	116° 30′	120° 0′

Die Ablenkung des Strahls in diesem Falle — bei welchem ebenfalls symmetrischer Durchgang desselben, also Minimalablenkung stattfindet, beträgt $\bar{\varepsilon} = 180° - \bar{\alpha}$ und ist oben mit angegeben.

Bei der Minimalablenkung überhaupt ist

$$r = -r' = \frac{\alpha}{2}; \quad \varepsilon_0 = 2i - \alpha; \quad i = \frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2},$$

also wegen $\sin i = n \sin r$

$$\sin\frac{\varepsilon_0+\alpha}{2} = n\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{8}$$

Diese Gleichung liegt dem FRAUNHOFER'schen Verfahren der Brechungsexponentbestimmung zu Grunde.

Die Einfalls- bezw. Austrittswinkel auf jeder Seite des Prismas können zwischen 90° und demjenigen Werthe variiren, welchem auf der andern Seite der Winkel 90° entspricht. Innerhalb dieser Grenzen kann also jeder Winkel sowohl als Einfallswinkel vorkommen, als auch — mit dem entgegengesetzten Vorzeichen — als Austrittswinkel. Die Ablenkung $\varepsilon = i - i' - \alpha$ ist für irgend ein Werthepaar $i = p$ und $i' = -q$ dieselbe wie für das Werthepaar $i = q$ und $i' = -p$. Es kommt also innerhalb der durch das Minimum (bei symmetrischem Strahlengang) und das Maximum (bei streifendem Ein- oder Austritt) gegebenen Grenzen jeder Betrag der Ablenkung in zwei Stellungen des Prismas vor, welche ihrerseits symmetrisch zu der Stellung der Minimalablenkung liegen — die Richtung des einfallenden Strahls als fest gedacht.

Allgemein ist bei einem einzelnen Prisma

$$\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\alpha) = n\sin\frac{1}{2}\alpha\frac{\cos\frac{1}{2}(r+r')}{\cos\frac{1}{2}(i+i')}\,. \tag{8a}$$

Besonders einfach und übersichtlich werden diese Verhältnisse bei einem System von Prismen, deren brechende Winkel sehr klein sind, so dass deren Sinus den Bogen selbst gleich gesetzt werden können. Alsdann ist nämlich für je ein solches Prisma in Luft bei kleinen Einfallswinkeln stets

$$\varepsilon = (n-1)\,\alpha \tag{9}$$

und bei einem System von p solchen Prismen ebenso

$$\varepsilon(p) = \sum(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{k=p}(n_k-1)\alpha. \tag{9a}$$

Wenn der betrachtete Strahl nicht im Hauptschnitt des Prismensystems verläuft, so ist seine Verfolgung, wie wir oben andeuteten, etwas umständlicher. Versteht man unter ϑ und φ die Winkel, welche die Projection des Strahls auf den Hauptschnitt eines Prismas mit dem Strahl bezw. der Einfallsnormalen bildet, dann haben wir bei einem solchen Prisma in Luft gemäss den Gleichungen (1), wenn n der Brechungsindex des Prismas ist, an der ersten Fläche:

$$n\sin i_1' = \sin i_1, \tag{1a}$$

$$\frac{\sin\vartheta_1'}{\sin\vartheta_1} = \frac{1}{n}, \tag{1b}$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1'} = \frac{n\cos\vartheta_1'}{\cos\vartheta_1}\,. \tag{1c}$$

Da für die zweite Fläche des Prismas die Projectionsebene dieselbe ist, so hat man $\vartheta_2 = \vartheta_1'$, demnach folgt aus

$$\frac{\sin\vartheta_2'}{\sin\vartheta_2} = n, \tag{1b'}$$

dass $\vartheta_2' = \vartheta_1$ ist, d. h. der austretende Strahl gegen den Hauptschnitt des Prismas ebenso stark geneigt ist, als der eintretende. Bezeichne ich daher kurz mit ϑ den betreffenden Winkel in Luft, mit ϑ' den im Prisma so wird durch

$$n\sin\varphi_1'\cdot\cos\vartheta' = \sin\varphi_1\cos\vartheta \tag{1c'}$$

und

$$\sin\varphi_2'\cos\vartheta = n\sin\varphi_2\cos\vartheta'$$

in Verbindung mit (1b) und der Beziehung $\varphi_2 = \varphi_1' - \alpha$ der Weg der Projection des Strahls auf den Hauptschnitt innerhalb dieses bestimmt.

Die Ablenkung η, welche die Projection eines Strahls auf den Hauptschnitt erfährt, ist nun dasselbe wie die Projection der Ablenkung E des Strahls selbst auf den Hauptschnitt, es ist dann $\cos\frac{1}{2}E = \cos\frac{1}{2}\eta\cdot\cos\vartheta$, demnach erstere stets kleiner als letztere. Ihr Minimum η_0 findet, ganz ebenso wie das eines wirklichen Strahls, statt, wenn die Projection in dem Hauptschnitt symmetrisch verläuft, also, wenn $\varphi_1 = -\varphi_2' = \frac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)$; sie ist daher aus (1c') bestimmt gemäss

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)\cdot\cos\vartheta = n\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\cos\vartheta'. \qquad (10)$$

Für $\vartheta = 0$ wird die Bestimmungsgleichung und alle in sie eintretende Grössen dieselben, wie für einen Strahl im Hauptschnitt, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)_{\vartheta=0} = n\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha). \qquad (8)$$

Daher allgemein, für andere Werthe von ϑ

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha)\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}. \qquad (10a)$$

Nun ist stets $\vartheta' < \vartheta$, also $\cos\vartheta'/\cos\vartheta > 1$, daher auch stets

$$\sin\tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) > \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha).$$

Folglich hat *a fortiori* das Minimum der Ablenkung eines ausserhalb des Hauptschnitts verlaufenden Strahls einen grösseren Betrag als das eines im Hauptschnitt verlaufenden[1]).

Krümmung der Spectrallinien. In Folge dieser Verhältnisse werden Strahlen, die von den Punkten einer zur Prismenkante parallelen Geraden ausgehen und unter verschiedenen Winkeln gegen den Hauptschnitt des Prismas verlaufen (z. B. sich alle in einem Punkte — etwa in der Pupille des Beobachters — kreuzen) verschiedene Ablenkung erfahren. Die geringste Ablenkung erfährt derjenige Strahl, welcher mit jenem Kreuzungspunkt in demselben Hauptschnitt des Prismas liegt, die anderen desto grössere Ablenkung, je grössere Winkel sie beim Einfall mit dem Hauptschnitt bilden. Wenn diese Strahlen die Axen von Büscheln sind, deren Spitzen in jener Geraden liegen, so wird das Bild der Geraden im Sehfeld gekrümmt erscheinen, einen Bogen bilden, dessen Scheitel in dem durch den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (z. B. der Pupille des durch das Prisma blickenden Auges) gehenden Hauptschnitt liegt[2]).

Die Ablenkungen der von einer zur Prismenkante parallelen Geraden aus in verschiedenen Neigungen zum Hauptschnitt einfallenden Strahlen werden nach Cornu[3]) durch dieselbe Formel dargestellt, wie die Ablenkung des im Hauptschnitt verlaufenden Strahls, wenn man dem brechenden Medium in Bezug auf jeden Strahl an Stelle von n den Brechungsexponenten

$$n_\vartheta = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\,tang^2\vartheta}$$

zuertheilt.

Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Prismensysteme, deren Hauptschnitte zusammenfallen, und auf Strahlenbüschel, deren Axen in diesem Hauptschnitt verlaufen.

---

[1]) Vergl. Reusch a. a. O., pag. 245; Heath, Treatise, pag. 31.

[2]) Genauere Berechnung der Bildkurve bei Ditscheiner, Wiener Sitzber. 51, pag. 368. 1865; Pogg. Ann. 129, pag. 336. 1866; und Hepperger, Wien. Sitzber. 92, pag. 109. 1885.

[3]) Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. de l'Ec. norm. (2) 1, pag. 231. 1872. vergl. auch Christie, Note on the curvature of lines in the spectrum an the method of correcting it. Monthly Not. 34, pag. 263. 1875. Bemerkgn. hierzu v. Simms ibid. pag. 363. Crova, Etudes des aberrations des prismes et de leur influence sur les observations spectroscopiques. Ann. de chim. et de phys. (5) 22, pag. 513. 1881.

II. Abbildung durch Prismensysteme.

Beziehungen zwischen conjugirten Punkten. Astigmatismus.

Die Modificationen, welche ein von einem leuchtenden Punkte ausgehendes breites oder enges Büschel bei normaler wie schiefer Incidenz durch Brechung an einem Systeme von Ebenen — wie ein Prismensatz ein solches vorstellt — erfährt, werden ohne weiteres aus denjenigen bei der Brechung an Kugelflächen abgeleitet, indem man deren Radien sämmtlich gleich Null setzt. Die Möglichkeit einer Abbildung durch solche Brechungen, sowie deren Grenzen und Fehler lassen sich unmittelbar aus den früher angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall übertragen.

Bei senkrechter Incidenz des Haupstrahls ist die Abbildung in dem ihn umgebenden fadenförmigen Raume symmetrisch um ihn. Zwischen den Scheitelabständen von Objekt und Bild findet bei jeder Brechung die Beziehung statt (vergl. pag. 75 unten)

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

Das Convergenzverhältniss in conjugirten Punkten ist constant $\gamma = n/n'$, ebenso die Lateralvergrösserung $\beta = +1$. In der That repräsentirt eine brechende Ebene und ebenso ein System von solchen den in einem früheren Abschnitt (pag. 58) hervorgehobenen Fall der »teleskopischen« Abbildung.

Die Abbildung bei normaler Incidenz ist auf unendlich kleine Büschelöffnungen beschränkt. Ein homocentrisches Büschel endlicher Oeffnung ergiebt eine Kaustik[1]), deren beide Theile die geometrischen Oerter der ersten und zweiten Brennpunkte der von jenem Punkte ausgegangenen schiefen Elementarbüschel sind, in welche man das ganze Büschel zerlegt denken kann.

Die Abbildung kann für mehrere Ebenen eine solche bei normaler Incidenz natürlich nur dann bleiben, wenn diese sämmtlich einander parallel sind oder sehr kleine Winkel mit einander bilden. Andernfalls wird die Axe der Abbildung zu den Normalen der folgenden Flächen geneigt und wir haben es zu thun mit der

Abbildung bei schiefer Incidenz des Hauptstrahls. Das Büschel erfährt dann die pag. 82—95 beschriebene astigmatische Veränderung. Die Abbildung zerfällt in zwei getrennte, auf je eine — zur Einfallsebene senkrechte (sagittale) und ihr parallele (tangentiale) — Ebene beschränkte mit verschiedenen Grundfaktoren[2]). Die, in dem vorliegenden Falle, sehr leicht auch unmittelbar abzuleitenden Beziehungen zwischen den Scheitelabständen conjugirter Punkte und den Convergenzverhältnissen in ihnen folgen aus Gleichung (1) und (2) für den Sagittalschnitt zu

---

[1]) S. Literatur über Kaustiken, oben pag. 32, ferner u. A. O. RÖTHIG, Probleme der Brechung etc., pag. 49. Leipzig 1876. J. RITZ, Beob. u. Berechn. über Brechung homoc. Lichts an n parall. Ebenen. Progr. Handelsschule, München 1879. TAIT, Light, pag. 87.

[2]) Die Richtung der Brennlinien ist hier ebenso wie in dem allgemeineren früher behandelten Falle bestimmt: als senkrecht zum Hauptstrahl und in, bezw. senkrecht zu der Einfallsebene gelegen — bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Die genauere Ermittelung derselben — analog zu den gleichartigen pag. 35 erwähnten Untersuchungen von MATTHIESSEN für Brechung an Kugelflächen — haben für den Fall eines Prismas in Luft, REUSCH a. a. O. und besonders P. ZECH, Ztschr. f. Math. u. Physik 24, pag. 168. 1879, vorgenommen.

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

und

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{n'},$$

also identisch mit den Beziehungen für senkrechte Incidenz des Hauptstrahls.

Im Tangentialschnitt wird gemäss Gleichung (3b) auf pag. 86

$$\frac{n'}{t'} = \frac{n}{t} \cdot \frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} \quad \text{oder} \quad t' = \frac{n'}{n} \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} t$$

und (12)

$$\gamma_t = \frac{du'}{du} = \frac{t}{t'} \frac{\cos i'}{\cos i} = \frac{n \cos i}{n' \cos i'}.$$

Ein homocentrisches Büschel ($t = s$) erhält also durch die einmalige Brechung unter den Winkeln i, i' die astigmatische Differenz

$$(t' - s') = \frac{n'}{n} t \left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} - 1\right). \tag{13}$$

Die Gleichungen (11) und (12) für die Bildorte gestatten den Astigmatismus zu berechnen, welchen ein Büschel durch die Brechung in einem System von p-Prismen erhält[1]).

Man hat hierzu zwei Systeme von je $2(p+1)$ Gleichungen, nämlich für die

Sagittalstrahlen Tangentialstrahlen

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} s_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} s_k \\ s_{k+1} = s_k' - d_{k+1} \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \qquad \left| \begin{array}{l} t_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} t_k \dfrac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \\ t_k = t'_{k-1} - d_k \end{array} \right|_{k=0}^{k=p} \quad (15)$$

worin d_k der von dem betreffenden Hauptstrahl in dem Prisma zurückgelegte Weg ist und s_0 bezw. t_0 sowie n_0 die auf das erste, s_p', t_p', $n_{p+1} = n_p'$ die auf das letzte das Prismensystem begrenzende Medium bezogenen Werthe der betreffenden Grössen sind.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt, wenn wir $n_0 = n_p' = 1$ also ein beiderseits von Luft begrenztes Prismensystem annehmen,

$$s_p' = s_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k}, \tag{14a}$$

unabhängig von den i_k, i_k' und

$$t_p' = t_0 \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=0}^{k=p} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k}^{k=p}, \tag{15a}$$

daher für $s_0 = t_0 = a$

$$t_p' - s_p' = a \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=0}^{k=p} - 1\right] - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k}{n_k} \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k}^{k=p} - 1\right]. \tag{16}$$

In dem oben betrachteten Falle der Minimalablenkung verschwindet der Faktor von a; die astigmatische Differenz wird dann unabhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes; sie hängt aber dann noch wesentlich mit von den Grössen d_k ab und verschwindet mit diesen[2]). Bei endlicher Grösse der d_k ist der

[1]) Es ist hier bequemer, diesen Astigmatismus direkt durch die Differenz der letzten Schnittweiten selbst zu bemessen und nicht — wie früher und wie das auch an sich rationeller wäre — nach der Differenz der Reciproken von s und t.

[2]) Vergl. die analogen Untersuchungen von A. GLEICHEN, Ztschr. f. Math. u. Phys. 34, pag. 161. 1889 (von denen ich erst nach Abschluss der meinigen (1886) Kenntniss erhielt).

Astigmatismus relativ zur Bild- oder Objektentfernung desto geringfügiger, je grösser diese sind und wird gleich Null bei unendlich entferntem Objekte — wie denn auch die unmittelbare Betrachtung zeigt, dass parallelstrahlige (telecentrische) Büschel durch die Brechung an Ebenen keine anderen Modificationen erfahren als solche ihrer Richtung und ihres Querschnitts. Hierin liegt ein wesentlicher Vortheil der Anwendung telecentrischer Büschel bei allen spectroskopischen Untersuchungen.

Das Bild eines vertikalen zur Kante der Prismen parallelen Spaltes in einem Spectroskop würde allerdings gemäss dem pag. 89/90 ausgeführten (vergl. Fig. 322) auch bei nicht aufgehobenem Astigmatismus scharf bleiben, wenn man das Beobachtungsfernrohr auf dasselbe entsprechend einstellte. Nur die horizontalen Endlinien des Spaltes würden verwaschen erscheinen. Doch bietet die Anwendung telecentrischer Büschel bei messenden Untersuchungen den weiteren Vortheil, dass man es alsdann nur mit Richtungen und deren Aenderungen zu thun hat, und dass man unabhängig wird von den gegenseitigen Entfernungen des Prismensystems, Collimators und Beobachtungsfernrohrs.

Uebrigens kann man den bei nicht telecentrischen Büscheln auftretenden Astigmatismus benützen, um mit Hilfe eines guten Prismas Collimator und Fernrohr auf ∞ einzustellen, ohne ein GAUSS'sches Ocular zu Hilfe zu nehmen. Geht man nämlich von der Stellung der Minimalablenkung des Prismas aus zu grösseren Einfallswinkeln, so muss man das Ocular des Fernrohrs herausziehen, um den vertikalen Spalt des Collimators deutlich sichtbar zu behalten, wenn derselbe von dem Objektiv zu weit entfernt war und hineinschieben, wenn er demselben näher als der Brennpunkt war. Beim Uebergang zu kleineren Einfallswinkeln umgekehrt (vergl. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, I. Aufl., pag. 257). Ein ähnliches Verfahren wurde von SCHUSTER vorgeschlagen. Phil. Mag. (5) 7, pag. 95. 1879.

Bei einem einfachen Prisma in Luft ist

$$s' = s_0 - \frac{d}{n}, \tag{14}$$

unabhängig von den Winkeln des Hauptstrahls

$$t' = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}\left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}\, t_0 - \frac{d}{n}\right), \tag{15*}$$

also unter Vernachlässigung der Dicken

$$t' = t_0\, \frac{\cos^2 r \cdot \cos^2 i'}{\cos^2 i \cdot \cos^2 r'}$$

oder

$$t'\left(\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i'} - 1\right) = t_0\left(\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i} - 1\right); \tag{15**}$$

welche Gleichung das vorhin Gesagte erklärt.

Scheinbare Grösse der Bilder von Spalten.

Ein zum Hauptschnitt des Prismensystems senkrechter Spalt wird von demselben in seiner scheinbaren Länge unverändert abgebildet, denn wie wir gesehen haben, tritt jeder Strahl — also auch der Hauptstrahl des abbildenden Büschels — unter demselben Winkel gegen den Hauptschnitt aus dem Prismensystem aus, unter welchem er in dasselbe einfiel. Die scheinbare Breite des Spaltes aber wird durch das Prismensystem im Allgemeinen verändert, d. h. die angulare Breite des Spaltbildes gesehen von der Austrittsstelle an der letzten Fläche des Systems ist im Allgemeinen verschieden von der scheinbaren Breite des Spaltes selbst, gesehen vom Einfallspunkte des Büschels an der ersten Fläche. Der Zusammenhang beider Grössen wird dargestellt durch Gleichung (6) des vorigen Abschnitts, also bei einem Prismensystem in Luft ($n_0 = n_p' = 1$ angenommen)

$$\delta i_p' = \delta i' = \delta i_0 \prod \left(\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}\right)_{k=0}^{k=p}. \tag{17}$$

Aus dem dort Angeführten folgt, dass die scheinbare Breite des Spaltes ungeändert dieselbe ist im Bilde wie im Objekt, wenn der Hauptstrahl das Prismensystem im Minimum der Ablenkung durchsetzt, wenn also

$$\Pi\,(\cos i_k)_{k=0}^{k=p} = \Pi\,(\cos i_k')_{k=0}^{k=p}. \qquad (17^*)$$

In anderen Stellungen des Prismensystems kann die scheinbare Breite des Spaltes sowohl vermindert als vergrössert werden. Sie erscheint unendlich klein bei jeder Stellung des Prismensystems, bei welcher einer der Einfallswinkel $i_k = \frac{\pi}{4}$ ist, und jedesmal unendlich vergrössert, wenn einer der Austrittswinkel $i_k' = \pi$ ist, ausser wenn beides zugleich vorkommt.

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist

$$\delta i' = \delta i_0 \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos r \cdot \cos i'}$$

oder

$$\frac{\delta i'}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i'} - 1}} = \frac{\delta i_0}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i} - 1}}. \qquad (17a)$$

Hieraus folgt nebenbei, dass bei einem solchen Prisma

$$\delta i' : \delta i_0 = \sqrt{t_0} : \sqrt{t'}.$$

Die scheinbare Breite des Spaltes, betrachtet durch ein einfaches Prisma, wächst also von derjenigen Stellung, bei welcher der Hauptstrahl streifend einfällt — bei welcher sie $= 0$ ist — stetig bis zu derjenigen Stellung, wo der Hauptstrahl aus dem Prisma streifend austritt, in welchem Falle jene Breite $= \infty$ wird.

Planparallele Platten.

Dieselben bilden nur einen Specialfall der Prismen, nämlich denjenigen, wo der brechende Winkel gleich Null ist. Es ist daher der Einfallswinkel an irgend einer Fläche stets gleich dem Brechungswinkel an der vorangehenden. Haben erstes und letztes Medium gleiches n, so ist der austretende Strahl parallel dem eintretenden, ganz gleich, welches die Folge der brechenden Schichten ist. Der austretende Strahl ist gegen den einfallenden nur seitlich verschoben. Der Austrittspunkt des Strahls aus der $k$ten Platte ist von dem in diese Platte einfallenden Strahl um die Strecke

$$e_k = \frac{d_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'}$$

entfernt, wenn d_k die Dicke der Platte, i_k und i_k' Einfalls- und Brechungswinkel an ihrer vorderen Fläche sind. Der schliesslich austretende Strahl ist also von dem einfallenden um

$$e^{(p)} = \sum e_k = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{d_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'} \qquad (18)$$

entfernt.

Auf dieser Wirkung planparalleler Platten beruht das von Helmholtz erfundene Ophthalmometer, bei welchem die Austrittswinkel zweier unter verschiedenem Winkel einfallender Strahlen durch entgegengesetzt gleiche Drehungen zweier Glasplatten identisch gemacht werden[1]).

[1]) H. Helmholtz, Gräfe's Arch. f. Ophthalm. 2, pag. 3. 1854. Physiol. Opt. 1. Aufl., pag. 8. S. auch A. König, Ztschr. f. Instrkde. 3, pag. 153. 1883.

III. Die von Prismensystemen entworfenen Spectra.

Ausdehnung des Spectrums.

Wenn von einem leuchtenden Punkte oder Spalte Licht verschiedener Wellenlänge ausgeht, so wird das Bild desselben der Verschiedenheit des Brechungsexponenten entsprechend auch verschieden stark abgelenkt, ja sogar — gemäss den Gleichungen (14) (15) und (17) — in verschiedener Entfernung und verschiedener Breite erscheinen. Sehen wir von diesen letzteren Veränderungen zunächst ab, so ist die Variation der Ablenkung bestimmt durch ein System von Gleichungen, die ebenso wie (5) aus (2) abgeleitet werden, indem ausser Einfalls- und Brechungswinkeln auch die Brechungsindices, und zwar mit λ. als variabel angenommen werden. Also:

$$\left|\begin{array}{l} n_{k+1}\cos i_k'\,di_k' + \sin i_k'\,dn_{k+1} = n_k\cos i_k\,di_k + \sin i_k\,dn_k \\ \text{wo} \qquad di_{k+1} = di_k' \end{array}\right|_{k=0}^{k=p} \tag{19}$$

Hieraus ergiebt sich für di_p', wenn wieder $n_0 = n_p' = 1$ und $dn_0 = dn_p' = 0$ angenommen wird und der Kürze wegen die Produkte der Cosinus der Einfalls- bezw. Brechungswinkel einfach mit Π resp. Π' bezeichnet werden

$$di_k' = di_0\,\frac{\Pi_0^p}{\Pi'^p_0} - \sum_{k=1}^{k=p}\frac{\Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_{k-1}}\,dn_k\sin\alpha_k, \tag{19a}$$

oder

$$di_k'\Pi'^p_0 = di_0\Pi_0^p - \sum_{k=1}^{k=p} dn_k\sin\alpha_k\Pi_{k+1}^p\Pi'^{k-2}_0. \tag{19b}$$

Man kann das System (19) auch in die Form bringen:

$$\left|\begin{array}{l} n_{k+1}\cos i_k'\,di_k' = n_k\cos i_k\,di_k - n_k\sin i_k\left(\dfrac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \dfrac{dn_k}{n_k}\right) \\ di_k = di_k' \end{array}\right|_{k=0}^{k=p} \tag{20}$$

und hieraus, indem man der Kürze wegen

$$n_k\sin i_k\left(\frac{dn_k'}{n_k'} - \frac{dn_k}{n_k}\right) = M_k,$$

setzt, ableiten

$$di_p'\Pi'^p_0 = di_0\Pi_0^p - \sum_{k=0}^{k=p} M_k\Pi_{k+1}^p\Pi'^{k-1}_0. \tag{20a}$$

In diesen Gleichungen ist stets $\Pi_m^p = 1$, wenn $m > p$ und $\Pi'^l_0 = 1$, wenn $l > 0$[1]).

Für das **Minimum der Ablenkung** ist nach Gleichung (7a) $\Pi_0^p = \Pi'^p_0$, also die Zunahme der Dispersion durch das Prismensystem $di_p' - di_0 = di' - di$ gegeben durch

$$di' - di = -\sum_{k=1}^{k=p} dn_k\sin\alpha_k\Pi_{k+1}^p\Pi'^p_{k-2} \tag{19*}$$

oder

$$di' - di = -\sum_{k=0}^{k=p}\frac{M_k\Pi'^{k-1}_0}{\Pi_0^k} = -\sum_{k=0}^{k=p}\frac{M_k\Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_k}. \tag{20*}$$

Das Minimum der Ablenkung findet u. A. statt, wenn die Ablenkung gleich Null, d. h. das Prismensystem ein sogen. geradsichtiges (euthyoptrisches, *P. à vision directe*) ist. Auf ein solches haben also (19*) und (20*) jedenfalls Bezug.

---

1) Aehnliche Entwickelungen s. bei E. Block, Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen. Diss. Dorpat 1873.

Nur bei dieser Stellung des Prismensystems ist die Zunahme der Dispersion $(di' - di)$ unabhängig von der beim Eintritt der Büschel in das System bereits vorhandenen (di).

Bedingung der Achromasie. Das Prismensystem verursacht keine Zunahme der Dispersion, es ist »achromatisch« wenn

$$di(\Pi'^{p}_{0} - \Pi^{p}_{0}) - \sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0 \tag{20**}$$

also, falls beim Eintritt in das Prismensystem keine Dispersion vorhanden war, $di = 0$ ist, wenn

$$\sum_{k=1}^{k=p} M_k \Pi^{p}_{k+1} \Pi'^{k-1}_{0} = 0,$$

d. h.

$$\sum n_k \sin i_k \left(\frac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{dn_k}{n_k}\right) \Pi (\cos i_k)^{p}_{k+1} \Pi (\cos i_k')^{k-1}_{0} = 0 \tag{21}$$

ist.

In letzterem Falle bewirkt das Prismensystem nur eine Ablenkung der Hauptstrahlen, welche für alle Wellenlängen die gleiche und durch Gleichung (3) bestimmt ist.

Jeder der beiden zuletzt erwähnten Effekte: Dispersion ohne Ablenkung des Strahls mittlerer Wellenlänge und Ablenkung ohne Dispersion lässt sich bereits mit einem aus zwei Einzelprismen zusammengesetzten System erreichen; diese Prismen können sogar aus der gleichen Substanz bestehen, wenn man keine anderen einschränkenden Bedingungen stellt. Stellt man als solche aber die, dass die einander zugewandten Prismenflächen einander parallel seien (damit man die Prismen durch einen Kitt fest mit einander verbinden könne, wodurch zugleich die Lichtverluste an diesen Flächen erheblich gemindert werden), so müssen die Substanzen der Prismen verschiedenes Zerstreuungsvermögen haben, damit der eine oder andere Effekt erreichbar sei. Nur in dem, den thatsächlich vorliegenden Verhältnissen meist sehr fernliegenden Grenzfalle unendlich kleiner Prismen- und Einfallswinkel lassen sich die in Betracht zu ziehenden Verhältnisse bequem übersehen. In den praktisch vorkommenden Fällen muss man daher gewöhnlich die weniger übersichtlichen Gleichungen (3) und (20*) bezw. (21) anwenden.

Für kleine Prismen- und Brechungswinkel hatten wir die Ablenkung

$$\varepsilon(p) = \sum_{k=1}^{k=p} (n_k - 1)\alpha_k \tag{9a}$$

gefunden, also bei einem aus zwei Prismen zusammengesetzten System

$$\varepsilon = (n_1 - 1)\alpha_1 + (n_2 - 1)\alpha_2.$$

Die Dispersion, welche ein solches System hervorruft, kann daher direkt durch die Aenderung der Ablenkung, die es hervorbringt, ausgedrückt werden

$$d\varepsilon = dn_1 \alpha_1 + dn_2 \alpha_2.$$

Wie man sieht, sind dies Gleichungen von ganz derselben Form wie sie für die Möglichkeit einer Achromasie von Linsensystemen (pag. 140) in Betracht kamen. In der That war historisch (KLINGENSTIERNA, DOLLOND, CLAIRAUT, BOSCOVICH etc.) die Möglichkeit und Art und Weise der Achromatisirung von Prismensystemen maassgebend für die von Linsencombinationen. Man hat also für ein achromatisches Prismenpaar $(d\varepsilon = 0)$ die Winkel α_1 und α_2 so zu wählen, dass

$$\alpha_2 : \alpha_1 = - dn_1 : dn_2$$

und wenn dabei eine bestimmte Ablenkung ε hervorgebracht werden soll, so bestimmen sich α_1 und α_2 — wie früher bei einem Linsensystem von der Stärke $\varphi = 1/f$ die Grössen — k_1 und k_2 zu

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{dn_1(\nu_1 - \nu_2)}; \quad \alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{dn_2(\nu_1 - \nu_2)}. \tag{22}$$

Soll umgekehrt die Dispersion $d\varepsilon$ ohne Ablenkung erzielt werden, so muss sein

$$\alpha_1 = -\frac{d\varepsilon}{dn_1}\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}; \quad \alpha_2 = +\frac{d\varepsilon}{dn_2}\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}, \tag{23}$$

wo wie früher

$$\nu = \frac{n-1}{dn}$$

gesetzt ist.

Das secundäre Spectrum hat auf die durch solche dünne Prismen hervorgerufene Dispersion oder die mittelst ihrer hergestellte Achromasie einen ganz analogen Einfluss wie bei Linsen; einer Brennpunktsdifferenz dort entspricht eine Winkelabweichung hier. Es braucht deshalb auf diese Verhältnisse hier nicht nochmals eingegangen zu werden. —

Die bei dünnen Prismen von unendlich kleinen Winkeln stattfindenden Verhältnisse werden oft ohne weiteres auf Prismen von endlichen Winkeln übertragen. Dies ist aber, wie hier ausdrücklich bemerkt werden mag, ganz unzulässig. Insbesondere die Grösse und der Gang der Dispersion hängen schon bei einer einzigen Brechung in erheblichem Grade von dem Einfallswinkel ab, und werden bei den weiteren Brechungen, wie wir oben gesehen haben, auch noch mit durch den vorher erhaltenen Betrag bedingt. Es sind daher, wie eine genauere Untersuchung zeigt, weder die von zwei Prismen gleicher Substanz aber verschiedenen endlichen Winkels — selbst in gleicher Stellung, z. B. der der Minimalablenkung — hervorgebrachten Spectra einander »proportional«, noch haben solche von Prismen verschiedener Substanz immer verschiedenen Gang, wenn die wahren Dispersionen dieser Substanzen in den verschiedenen Theilen des Spectrums disproportional sind; sondern es hängen diese Verhältnisse eben sehr von dem Betrage und der Folge der Brechungen ab. Man kann daher, wie schon bemerkt, sehr wohl Prismenpaare aus optisch gleichen Substanzen herstellen, welche nur geradsichtig oder nur achromatisch sind, und im ersteren Falle eine endliche Dispersion, im letzteren Falle eine endliche Ablenkung haben (ersteres sogar, indem man einem solchen Prisma ein anderes genau gleiches mit umgekehrter Kante derart gegenüberstellt, dass der Strahl unter demselben Winkel in dieses einfällt, unter welchem er aus jenem austrat). Es folgt hieraus aber keineswegs, dass z. B. im letzteren Falle kein secundäres Spectrum vorhanden sei[1]). Nur wenn zwei Prismen von gleicher Substanz und gleichem Winkel mit einander so zusammengestellt werden, dass die inneren und äusseren Flächen je einander parallel sind, so dass das Prismenpaar gewissermaassen eine planparallele Platte wird, verschwinden nothwendig immer gleichzeitig Ablenkung, Dispersion und secundäres Spectrum.

Bei einem Prisma von endlichem Winkel in Luft bestimmt sich die Dispersion aus (19) oder (20) zu

$$di' \frac{\cos r}{\cos r'} = di \frac{\cos i}{\cos i'} - \frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'}. \tag{24}$$

Im Minimum der Ablenkung, wo $i = -i'$, $r = -r'$ wird die Zunahme der Dispersion, unabhängig von der beim Eintritt vorhandenen

$$di' - di = -2\frac{dn}{n} tg\, i = -d\varepsilon. \tag{24*}$$

War beim Eintritt des Büschels in das Prisma keine Dispersion vorhanden, $di = 0$, so ist für jede beliebige Stellung des Prismas die Dispersion beim Austritt

$$di' = -\frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'}; \tag{24a}$$

dieselbe wächst also von einem gewissen, zwischen streifendem Eintritt und Minimalablenkung liegenden Minimum stetig mit dem Austrittswinkel des mittleren Strahls bis zu dem, bei streifendem Austritt erreichten Werthe ∞[2]).

---

[1]) Diese Verhältnisse hebt z. Th. schon BREWSTER hervor (Treatise on new philos. Instruments, Edinburgh 1813, pag. 361 ff.), wie ich nachträglich gefunden habe.

[2]) Vergl. MOUSSON, POGG. Ann. 112, pag. 428. 1861. THOLLON, Compt. rend. 89, pag. 93. 1879.

Diese Ausbreitung in einen grösseren Winkelraum ist aber keineswegs genügend, um eine entsprechende Leistungsfähigkeit des Prismas oder Prismensystems zu verbürgen. Als Maass dieser darf der kleinste Unterschied der Wellenlänge gelten, den benachbarte Spectrallinien haben dürfen, damit sie durch das Prismensystem eben noch getrennt werden können. Hierzu ist erstens vom geometrisch optischen Standpunkte eine gewisse

Reinheit des Spectrums erforderlich. Durch das Prismensystem werden von dem lichtgebenden Spalte so viele Bilder entworfen, als in seinem Lichte Wellenlängen vorhanden sind. Wenn die Breite der Spaltbilder $\delta i'$ grösser ist als die Dispersion di' für einen bestimmten Unterschied $d\lambda$ der Wellenlängen, so decken sich die Spaltbilder der Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ zum Theil, und das Spectrum erscheint entsprechend unrein. Als Maass der Reinheit R des von einem gegebenen Prismensystem gelieferten Spectrums können wir also nach Helmholtz[1]) das Verhältniss

$$R = \frac{di'}{d\lambda} : \frac{\delta i'}{\delta i} \tag{25}$$

annehmen. Wir haben hierfür nach (17) und (19a) — $di_0 = 0$ vorausgesetzt —

$$R^{(p)} = -\sum_{k=1}^{k=p} dn_k \sin \alpha_k \frac{\Pi'^{k-2}_0}{\Pi^k_0} \tag{25 a}$$

oder nach (17) und 20a)

$$R^{(p)} = -\sum_{k=0}^{k=p} \frac{M_k \Pi'^{k-1}_0}{\Pi^k_0}. \tag{25 b}$$

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist hiernach

$$R^{(1)} = -\frac{dn \cdot \sin \alpha}{\cos i \cdot \cos r'}. \tag{25*}$$

Der Vergleich dieses letzteren Ausdrucks mit dem für die Dispersion (24 a) eines einfachen Prismas lehrt, dass die Reinheit des von einem solchen gelieferten Spectrums von einem zwischen streifendem Austritt und Minimalablenkung gelegenen Minimum an nach beiden Seiten stetig zunimmt und bei streifendem Einfall (von der dicken Seite des Prismas her) sich dem Werthe ∞ nähert.

Das Trennungs-(Auflösungs-)Vermögen eines Prismensystems hängt jedoch, nach den Grundsätzen der Undulationstheorie betrachtet, nicht allein von der Winkeldifferenz ab, welche durch die Dispersion den verschiedenfarbigen Bildern des Spaltes ertheilt wird, sondern wesentlich mit von der Breite der Büschel, welche die Abbildung des Spaltes vermitteln. Ohne hier auf diesen Gegenstand — welcher in einem anderen Abschnitt dieser Darstellung ausführlich behandelt wird — näher einzugehen, mag nur soviel bemerkt werden, dass das Bild einer selbstleuchtenden Linie, vermittelt durch Büschel, deren Breite, senkrecht zur Richtung der Linie $= q$, und deren Wellenlänge $= \lambda$ ist, — durch welche optische Mittel auch immer es erzeugt sein mag — niemals wieder eine Linie, sondern immer ein Streifen ist, dessen Helligkeit nach den Rändern allmählich abfällt. Zurückbezogen auf das Objekt — wie wir dies früher bei der Berechnung der Aberration gethan haben — ist die Länge des Bildes (Höhe des Streifens) nahezu gleich der der ursprünglichen Linie, die Ausbreitung

[1]) Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 259. Helmholtz nimmt als Maass für die Reinheit des Spectrums die Grösse $R^* = (di'/d\lambda) : \delta i'$, so dass sein R^* gleich unserem $(R/\delta i)$. Uns lag jedoch näher, in R eine nicht sowohl für das Spectrum, als für das es erzeugende Prismensystem charakteristische Grösse zu definiren.

des Lichtes senkrecht dazu, also die Breite des Bildes nur eine Function von q und λ und zwar *caet. par.* mit wachsendem q abnehmend, mit wachsendem λ wachsend. Von zwei benachbarten Lichtlinien — seien dieselben reell als Objekte vorhanden oder virtuell, z. B. durch Dispersion, aus einer einzigen entstanden — entwirft das optische System als Bilder zwei solche Streifen, welche sich bei ungenügender Grösse von q oder unzureichender Kleinheit von λ zum Theil decken. Die Intensität des Bildes in diesen sich deckenden Theilen ist gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbilder an den betreffenden Stellen.

Eine genauere Betrachtung des Verlaufs der Intensität in den Einzelbildern nach den Grundsätzen der Diffractionstheorie zeigt nun, dass bei solcher Superposition zweier — und zwar einander gleich vorausgesetzter — Spaltbilder eine merkliche Intensitätsverminderung zwischen den beiden den Bildmitten entsprechenden Intensitätsmaximis (nämlich auf etwa 0·8 dieser) erst dann vorhanden ist, wenn der Winkel di', unter welchem die beiden Bilder (Spectrallinien) von der die Büschel begrenzenden rechteckigen Oeffnung aus erscheinen, grösser ist als derjenige, unter welchem die Wellenlänge λ des wirksamen Lichtes aus einer dem Querdurchmesser der Oeffnung q' gleichen Entfernung gesehen erscheint, also wenn

$$di' > \frac{\lambda}{q'}\ ^{1)}. \tag{26}$$

Mit der Brechung eines parallelstrahligen Büschels durch ein Prismensystem ist nun im Allgemeinen auch eine Veränderung seines Querschnitts im Hauptschnitt verbunden, welche nach obigem neben der Breite der in das System eintretenden Büschel hier mit in Anschlag zu bringen ist.

Durch jede Brechung an einer Ebene wird nämlich, wie leicht ersichtlich, der Querschnitt q des Büschels in dem Verhältniss der Cosinus der Brechungswinkel geändert, also

$$\frac{q_k'}{q_k} = \frac{\cos i_k'}{\cos i_k}.$$

Da für ein Prismensystem $q_{k+1} = q_k'$, so haben wir für die Veränderung der Breite eines Büschels durch die Brechung in einem solchen System

$$\frac{q_p'}{q_0} = \frac{q'}{q} = \frac{\Pi(\cos i')_0^p}{\Pi(\cos i)_0^p} = \frac{\Pi'^p_0}{\Pi^p_0} = \frac{\delta i}{\delta i'}, \tag{27}$$

— wie übrigens auch aus dem LAGRANGE-HELMHOLTZ'schen Satze unmittelbar gefolgert werden könnte.

Damit das durch die Dispersion auf die Winkeldifferenz di' gebrachte Linienpaar getrennt erscheinen könne, muss also die Breite des abbildenden — aus dem Prismensystem austretenden — Büschels, q', der Bedingung (26) entsprechen.

Diese geht demnach, unter Berücksichtigung von (25) und (27) in die bemerkenswerthe Beziehung über

$$q > \frac{\lambda}{R\,d\lambda} \quad \text{oder auch} \quad R > \frac{\lambda}{q\,d\lambda}. \tag{27a}$$

Für q darf nicht der Querschnitt des in das Prismensystem überhaupt eingetretenen Büschels, also die Grösse $b_0 \cdot \cos i_0$ gesetzt werden (wo b_0 die von dem Büschel getroffene Länge der ersten Prismenfläche ist), sondern nur derjenige Theil desselben, welcher nicht durch die Begrenzung einer der folgenden Flächen nachträglich eine Abblendung erfährt — was wohl zu beachten ist.

Bei einem dreitheiligen symmetrischen Prismensatz *à vision directe*, wie solche häufig an-

---

[1]) RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 9, pag. 266. 1879.

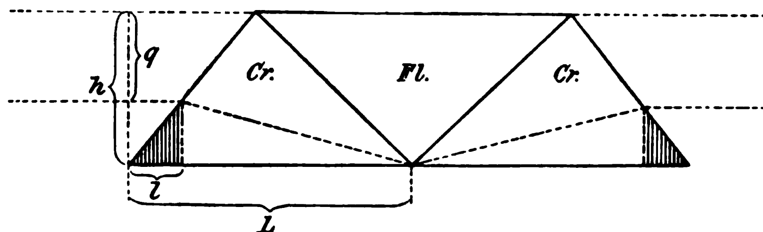
gewandt werden, ist z. B. das Verhältniss dieses nutzbaren Querschnitts q zu dem thatsächlichen, d. h. zu der Höhe der Prismen, h, in dem Verhältniss (s. Fig. 339)

$$\frac{q}{h} = \frac{\cos i_0 \cos i_1}{\cos i_0 \cos i_1 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \varepsilon_0}$$

oder der unbenützbare Theil der Höhe, $h-q$, zum benutzbaren in dem Verhältniss

$$\frac{h-q}{q} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \varepsilon_0}{\cos i_0 \cdot \cos i_1}.$$

Man kann daher die Prismen durch einen zur Einfallsrichtung des Büschel senkrechten Schnitt um den unbenützten Theil verkürzen. Es kann auf diese Weise der Prismensatz an

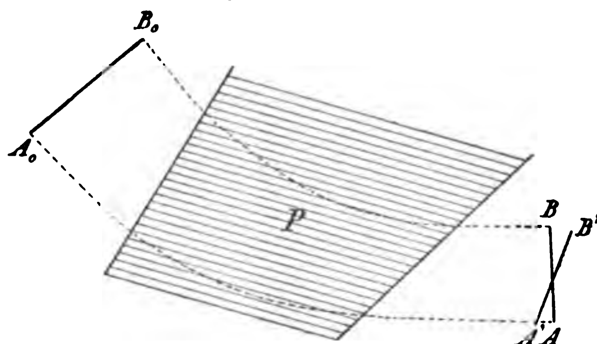


(Ph. 339.)

seiner breiteren Basis beiderseits um Stücke l verkürzt werden, welcher zur unverkürzten Länge dieser Basis L in dem Verhältniss stehen

$$\frac{l}{L} = n \cdot tg\, i_0' \cdot \sin \varepsilon_0.$$

Der combinirte Einfluss von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismensystems lässt sich nach RAYLEIGH[1]) unmittelbar aus den Principien der Undulationstheorie berechnen und in ganz allgemeiner Form darstellen. Wird durch die Brechung in dem System P die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ des einfallenden Lichtes in die Lage AB gebracht, so ist sowohl der Lichtweg von A_0 bis A, als auch derjenige von B_0 bis B ein Minimum, und beide sind einander gleich, also



(Ph. 340.)

$$\int_{A_0}^{A} n\, dl = \int_{B_0}^{B} n\, dl.$$

Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A' B'$ übergeführt (Fig. 340). Die Wege, welche die Strahlen derselben hierbei beschreiben, sind nun allerdings verschieden von den der Wellenlänge λ entsprechenden. Die Wegunterschiede sind aber vermöge der Minimumeigenschaft der Wege $A_0 \ldots A$ und $B_0 \ldots B$ bis auf Grössen höherer Ordnung verschwindend gegen die Wege selbst. Die optischen Längen von A_0 bis A' und B_0 bis B' können daher für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entlang denselben geometrischen Wegen berechnet werden wie für λ.

Die Differenz der optischen Längen von A_0 und B_0 nach A und B ist daher für $\lambda + d\lambda$ gleich

$$\int_{B_0}^{B} dn\, dl - \int_{A_0}^{A} dn\, dl$$

und diese Grösse dividirt durch den Querschnitt des austretenden Bündels, AB

[1]) l. c., pag. 271.

$= q'$ ist gleich dem Winkel, den die beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Wellenflächen mit einander einschliessen, d. h. gleich der Dispersion di'.

Bei einem System von Prismen gleicher Substanz z. B. ist hiernach die Dispersion

$$di' = dn \frac{e_2 - e_1}{q'}, \tag{28}$$

wo e_2 und e_1 die von den äussersten Randstrahlen des Büschels in Glas zurückgelegten Strecken sind. Geht der eine dieser Randstrahlen durch lauter Prismenkanten, so ist $e_1 = 0$, daher

$$di' = dn \frac{e}{q'}. \tag{28a}$$

Stehen die Prismen alle im Minimum der Ablenkung, so bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis. Die Dispersion ist also hier unabhängig von der Zahl und den brechenden Winkeln der einzelnen Prismen ausgedrückt.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spectrum auflösen könne, deren angularer Abstand $di' = \vartheta$ ist, muss nach dem oben ausgeführten

$$q' > \frac{\lambda}{\vartheta},$$

daher

$$e > \frac{\lambda}{dn}, \tag{29}$$

wo dn die den beiden Linien entsprechende Differenz der Indices ist. Es ist z. B. die zur Auflösung der Haupt-Doppellinie des Natriumlichtes nothwendige Basisdicke eines Prismas aus englischen Extradense Flint ($n_D = 1{\cdot}650$ $n_D - n_c = 0{\cdot}0055$) in der Stellung der Minimalablenkung fast genau gleich 1 *cm*.

Die Helligkeit des Spectrums an irgend einer Stelle desselben hängt davon ab, von wie viel Wellenlängen Licht an diese Stelle gelangt. Bei irgend einer Breite des Spaltes δi kommt nun an eine Stelle seines Bildes $\delta i'$ Licht von denjenigen Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$, deren Dispersion di' gleich der Breite jenes Spaltbildes $\delta i'$ ist. Die Helligkeit h' des Spaltbildes für irgend eine homogene Farbe ist nun, da seine Höhe bei der Brechung in dem Prismensystem unverändert bleibt, umgekehrt proportional der Breitenänderung des Spaltes durch die Brechung, also, wenn h die ursprüngliche Helligkeit des Spaltes selbst ist,

$$h' : h = \delta i : \delta i'.$$

Die Helligkeit des Spectrums für die Wellenlänge λ ist daher, wenn wir annehmen, dass die Intensität in ihm von λ bis $\lambda + d\lambda$ constant sei

$$H = h' \cdot d\lambda = h \frac{\delta i}{\delta i'} d\lambda,$$

worin $d\lambda$ durch die Bedingung bestimmt ist, dass das ihm entsprechende $di' = \delta i'$ sei. Daraus folgt unter Benützung des Ausdrucks (25) für die Reinheit des Spectrums, dass das betreffende

$$d\lambda = \frac{\delta i}{R}$$

ist, und

$$H = \frac{\delta i}{\delta i'} \frac{h \cdot \delta i}{R} = \frac{h \delta i}{di'/d\lambda}. \tag{30}$$

Im Minimum der Ablenkung ist $\delta i = \delta i'$ also

$$H = \frac{h \delta i}{R}, \tag{30*}$$

d. h. die Helligkeit des Spectrums — abgesehen von den durch Reflexion und Absorption des Lichtes beim Durchgang durch das Prismensystem erlittenen Verlusten — ist dann direkt proportional der Helligkeit des in den Spalt eindringenden Lichtes und umgekehrt proportional der Reinheit des Spectrums[1]).

Durch die Anwendung eines Fernrohrs zur Beobachtung der Spectra werden die meisten der oben bewiesenen Relationen, namentlich die über Reinheit, Helligkeit und Auflösungsvermögen von Prismensystemen nicht wesentlich berührt. Voraussetzung hierbei ist natürlich, dass die Apertur des Fernrohrs die des Prismensystems übersteigt, anderenfalls wäre für die Bestimmung der Helligkeit und des Trennungsvermögens die erstere statt der letzteren maassgebend. Im übrigen erscheint das durch ein Fernrohr gesehene Spectrum nur ebenso verändert, wie jedes andere Objekt, wovon an anderer Stelle näher die Rede sein wird[2]). Man kann die von Prismen erzeugten Spectren aber auch in anderer Weise beobachten, wenn die wirksamen Büschel nicht telecentrische sind, durch eine Lupe oder dergl. Aus den oben angeführten Gründen verwendet man die Prismen alsdann im Minimum der Ablenkung.

Die Helligkeit des Spectrums wird, ausser durch diese geometrischen Umstände, noch durch die mit jeder Reflexion und Brechung verbundenen, sowie die beim Durchgang durch die Prismen (durch Absorption) erfahrenen Lichtverluste verändert. Die durch theilweise Reflexion des Lichtes für das Spectralbild verloren gehenden Mengen lassen sich aus den Winkeln, unter denen, und den Brechungsexponenten der Medien, an denen jene Reflexionen stattfinden nach den sogen. FRESNEL'schen Intensitäts-Formeln berechnen. Die Grösse des Lichtverlustes durch Absorption hängt von der Grösse des in dem fraglichen Medium zurückgelegten Weges und von dessen Absorptionsvermögen ab. Hiernach lassen sich für einfachere Fälle allgemeine Regeln ableiten[3]).

IV. Die üblichsten Constructionsformen.

Es sind dies

1) Das einfache Prisma, dessen Eigenschaften wir wiederholt näher betrachtet haben. Seine Dispersion in der Stellung der Minimalablenkung wächst nach (24a), welche Gleichung auch die Form erhalten kann

$$d\varepsilon = -2dn \frac{\sin \alpha/2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha/2}}$$

mit dem brechenden Winkel des Prismas, α, ist daher nach dem pag. 154 ausgeführten auf einen mässigen Spielraum beschränkt. Bei einem 60° Prisma von schwerem Flintglase beträgt dieselbe von C bis F ca. 2°. Man verwendet deshalb zur Erziehung einer grösseren Dispersion oft

2) Viele gleiche Prismen, die sämmtlich in der Stellung der kleinsten Ablenkung sich befinden. Es ist dann natürlich auch die Ablenkung des ganzen Systems ein Minimum und sogar das kleinste mit demselben erreichbare. Um diese Minimalstellung während der Beobachtung für jede betrachtete

[1]) Diese Sätze wurden für ein einzelnes Prisma zuerst bewiesen von HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 260.

[2]) vergl. auch F. LIPPICH, Centr. Zeitg. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 49. 1881.

[3]) S. PICKERING, Am. Journ. of Sci. 45. 1868. Phil. Mag. (4) 36, pag. 39. 1868; s. auch F. LIPPICH, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 2, pag. 61. 1881; ROBINSON, Observatory 1882, pag. 53; KRÜSS, Ztschr. f. Instrkde. 5, pag. 185. 1885.

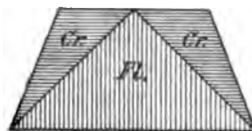
Spectralregion automatisch herzustellen, sind seit O LITTROW[1]) mancherlei sinnreiche Mechanismen in Anwendung gebracht worden[2]).

3) Von LITTROW rührt auch der Vorschlag her, dasselbe Prismensystem Licht mehrmals durchsetzen zu lassen. LITTROW liess das Büschel in sich selbst reflectiren; später zog man nach dem Vorschlag von C. A. YOUNG und LOCKYER vor, die Prismen so viel mal höher zu machen als das Büschel sie durchsetzen soll und führte es durch je zwei Reflexionen senkrecht zum Hauptschnitt aus einer Etage in die andre über[3]).

4) Wenn die Prismen durch Lufträume von einander getrennt sind, so ist der Lichtverlust durch partielle Reflexionen ein relativ grosser. Ausserdem müssen solche Prismen durch besondere mechanische Vorrichtungen in die gewünschte Stellung (z. B. der Minimalablenkung für irgend eine Wellenlänge) gebracht bezw. in derselbsn festgehalten werden, und endlich ist für manche Anwendung die hier mit der Dispersion Hand in Hand gehende Ablenkung unbequem. Allen drei Uebelständen hilft die von AMICI (1860) erfundene Combination von Prismen verschiedenen Brechungs- und Zerstreuungsvermögens mit verkitteten (parallelen) zugewandten Flächen ab, bei welchen die Ablenkung für irgend eine mittlere Wellenlänge aufgehoben ist, während ein gewisser Betrag von Dispersion bestehen bleibt. Wir haben die Theorie dieser geradsichtigen Prismen oder P. »*à vision directe*« oben näher betrachtet.

AMICI verwendete zuerst ein Flintglasprisma zwischen zwei mit ihrer Kante entgegengesetzten gleichen Prismen von Crownglas eingekittet (s. Fig. 339 oben). Andere suchten die Dispersion zu steigern durch Anwendung zweier Flintglasprismen und dreier Crownglasprismen. Derartige Combinationen sind oft beschrieben worden (s. die Literaturübersichten in den Werken von KAYSER und SCHEINER).

5) Wo auf die Geradsichtigkeit der Prismencombination kein besonderer Werth gelegt wird kann man die Dispersion erheblich steigern, indem man nach einer von RUTHERFURD[4]) wieder aufgenommenen Idee BROWNING's einem Prisma von hohem Zerstreuungsvermögen einen Winkel giebt, bei welchem (gemäss pag. 154) aus Luft überhaupt kein Strahl mehr durchtreten könnte und an dieses beiderseits Prismen von möglichst niedrigem Zerstreuungsvermögen ansetzt (Fig. 341), welche gerade ausreichen, um den Durchtritt des Lichtes zu ermöglichen, die Dispersion aber nur wenig herabsetzen. Gegenüber einem einfachen Prisma bieten diese nach RUTHERFURD benannten — 3- oder 5-fachen — Prismensätze den Vortheil erheblich grösserer Dispersion bei wenig vermehrtem Lichtverlust, da nur zwei Reflexionen an Luftgrenzen vorkommen. Ausserdem verändern sich die stark zerstreuenden Flintgläser leicht an der Luft, wogegen sie hier durch die aufgekitteten Crown-



(Ph. 341.)

---

1) Ber. Wien. Akad. 47, pag. 26. 1862. Amer. Journ. (2) 35, pag. 413.

2) S. z. B. Browning Monthly Not. 30, pag. 198 u. 214. 1871. H. KRÜSS, Ztschr. für Instrkde. 5, pag. 232. 1885; 8, pag. 388. 1888; 10, pag. 97. 1890. An ersterer Stelle discutirt K. des näheren die Vortheile und Bedingungen der Anwendung solcher Mechanismen. S. auch die Lehrbücher der Spectralanalyse von SCHELLEN, 2. Aufl., Braunschw. 1883, pag. 223, H. KAYSER, Berlin 1883, pag. 39; v. KONKOLY, Halle 1890, pag. 175 und SCHEINER, Leipzig 1890, pag. 82 ff., wegen der verschiedenen Arten der Adoptirung solcher und der im folgenden anzuführenden Apparate an die jeweilig in Frage stehende Beobachtungsmethode.

3) S. die angeführten Lehrbücher der Spectralanalyse.

4) Amer. Journ. of Sci. (3) 35, pag. 71, 407. 1865.

prismen geschützt sind, und endlich finden die Brechungen unter geringeren Winkeln statt, als bei einfachen Prismen von etwa 60°, wodurch die Ansprüche an die Ausführung der Flächen entsprechend geringere werden.

Da die Grösse der Dispersion wesentlich von der Differenz der Zerstreuungsvermögen der angewandten Substanz abhängt, manche Flüssigkeiten aber sich durch ausserordentlich hohes Zerstreuungsvermögen auszeichnen, so wendet man mit Vortheil oft mit Flüssigkeiten gefüllte Hohlprismen an. Früher diente hierzu meist der Schwefelkohlenstoff, auf den Brewster die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Von den vielen anderen Flüssigkeiten, die später vorgeschlagen worden sind, sei nur der von Wernicke[1]) empfohlene Zimmtsäureäthyläther genannt. Mit diesem ist ein Rutherfurdsches Prismensystem construirbar, welches etwa dreimal so starke Dispersion besitzt, als ein einfaches Prisma aus schwerem Flint. S. Czapski.

Die Begrenzung der Strahlen und die von ihr abhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente.

Bei einer Abbildung, wie der pag. 40 ff. betrachteten — wo alle von je einem Punkte des Objektes ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, vereinigt werden — wäre es völlig gleichgiltig, welche von allen möglichen Strahlen thatsächlich die Abbildung bewirken. Wenigstens würden Lage, Grösse und dioptrische Vollkommenheit des Bildes hierdurch gar nicht berührt. Die Betrachtungen der folgenden Abschnitte jedoch haben gezeigt, dass bei den uns vorzüglich zu Gebote stehenden Verwirklichungsweisen optischer Abbildung es sehr wohl darauf ankommt, an welcher Stelle die spiegelnden und brechenden Flächen von den Strahlenbüscheln getroffen werden, sowie welche Neigungen zur optischen Axe und welche Oeffnungen diese Büschel haben. Der Giltigkeitsbereich einer Abbildung, sowohl als die Möglichkeit und die Mittel zu seiner Erweiterung erwiesen sich als wesentlich durch die genannten Momente mit bedingt.

Für andere bald zu erwähnende Eigenschaften der optischen Bilder würden dieselben aber selbst dann eine Rolle spielen, wenn die Abbildung jene ideal vollkommene eines unendlichen Raumes in einen anderen eben solchen wäre. Wir werden im Folgenden meist stillschweigend die Voraussetzung gelten lassen, dass die Abbildung zwar nicht jene geometrisch aber doch eine dioptrisch vollkommene sei, welche den Bedingungen und Einschränkungen unterliegt, die wir in dem betreffenden Abschnitt dieser Darstellung statuirt haben; also wenn sie mittels weiter Büschel erfolgt, dass in diesen die sphärischen und chromatischen Aberrationen aufgehoben und das Sinusgesetz erfüllt sei; wenn mittelst enger Büschel, dass diese frei von Astigmatismus seien, und dass ihre Axen im Objekt- und Bildraum constantes Tangentenverhältniss besitzen; dass ebenen Objekten ebene Bilder entsprechen u. s. w. Die Einschränkungen, welche die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten Beziehungen durch die in Wirklichkeit stets vorhandenen Unvollkommenheiten der Abbildung erfahren, sind — für die Praxis zwar oft wichtig genug — doch zu specieller Natur, um sie in dieser allgemeinen Uebersicht näher zu berücksichtigen.

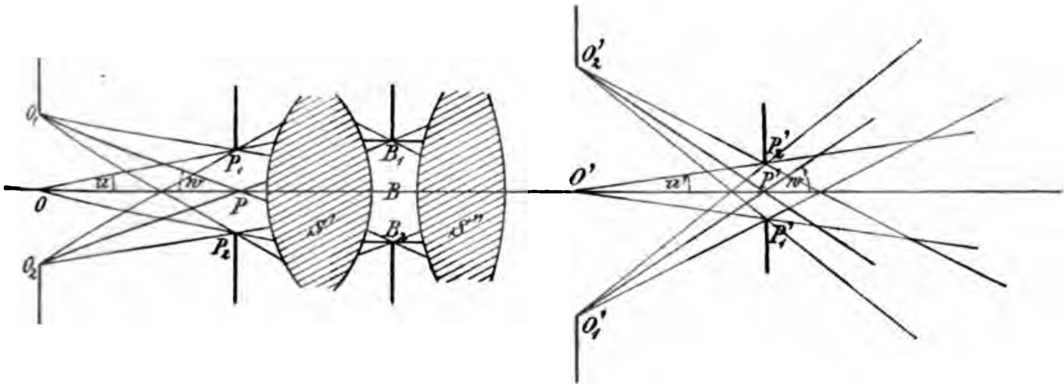
[1]) Zeitschr. f. Instrkde. 1, pag. 353. 1881. S. auch Zenger, ibib., pag. 263. Thollon, Compt. rend. 86, pag. 329, 395. 1878. Journ. de phys. 8, pag. 73. 1879.

In Wirklichkeit ist nun der Raum, innerhalb dessen ein optisches Instrument von Strahlen durchsetzt werden kann, immer beschränkt. Schon die Oeffnungen der Linsen sind selbstverständlich stets begrenzte, endliche, und bei den zu subjektivem Gebrauche bestimmten Instrumenten wird oft durch die Pupille des Beobachters eine weitere Begrenzung eingeführt. Statt dieser, sozusagen natürlichen Begrenzungen werden aber meistens — mit Rücksicht auf die oben erwähnten und die unten näher zu beschreibenden Wirkungen derselben — noch andere eigens vorgesehen, um die Leistung des Instrumentes nach dieser oder jener Richtung zu beeinflussen. Wir wollen vor der Hand diese Begrenzungen (Blenden, Diaphragmen) als kreisförmig und concentrisch zur Axe des Instrumentes annehmen.

Der nächste und unmittelbare Effekt aller Blendungen ist der doppelte, erstens die Oeffnungen der abbildenden Büschel und zweitens die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Objekttheils einzuschränken. Die Art und das Maass dieser Beschränkungen hängen von der Anordnung und Grösse der Blenden und von der Beschaffenheit des optischen Apparates ab.

Feststellung der wirksamen Blenden.

Begrenzung der Oeffnung. Oeffnungswinkel. Sei ein Objekt $O_1 O O_2$ (Fig. 342) in bestimmter Lage gegeben, so findet man zunächst diejenige von den



(Ph. 342.)

vorhandenen Blenden, welche die Oeffnung der abbildenden Büschel am meisten einschränkt, folgendermaassen: Die Blenden B mögen irgendwo zwischen den Linsen des Systems S liegen, im speciellen Falle auch ganz vor oder ganz hinter dem System; der irgend einer von ihnen nach dem Objekte zu vorangehende Theil des Systems sei S', der ihr nach dem Bilde hin folgende S''. Ich denke mir nun jede vorhandene Blende durch das ihr zugehörige S' nach der Objektseite hin abgebildet — was sowohl theoretisch als experimentell ohne weiteres ausführbar ist — nach $P_1 P P_2$. Dann ist die für die Oeffnung der abbildenden Büschel bezw. des Systems maassgebende Blende diejenige[1]), deren Bild $P_1 P_2$ von O aus unter dem

[1]) Da das vom Objektpunkt 0 ausgegangene Büschel in den Medien bis zum Bildraum im Allgemeinen mit sphärischer Aberration behaftet ist, so kann auch der Fall eintreten, dass ein in einem solchen Medium gelegenes Diaphragma Strahlen von einer gewissen Convergenz abblendet, ohne zugleich die stärker geneigten auszuschliessen. Man betrachte daraufhin z. B. Fig. 304, pag. 32. Das Büschel wird durch ein solches Diaphragma gewissermaassen zerklüftet, indem dann eine oder mehrere Zonen in ihm fehlen. Die Oeffnung des Büschels wollen wir jedoch auch in solchen Fällen bis zu derjenigen Zone rechnen, von welcher aus alle stärker geneigten abgeblendet sind und wollen das für sie maassgebende Diaphragma entsprechend bestimmen.

kleinsten Sehwinkel erscheint. Dieser Winkel selbst $= 2u$ heisst der Oeffnungswinkel des Systems. (Wenn das Objekt im Unendlichen liegt, so tritt an die Stelle der angularen Oeffnung des Systems dessen lineare.) Denn durch aplanatische Brechung bezw. Bilderzeugung wird niemals das Nebeneinander, die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels geändert; also ist derjenige Strahl OP_1, welcher im Objektraum nach dem Rande des Bildes irgend einer Blende hinzielt derselbe, welcher den Rand B_1 der Blende selbst passirt. Das Bild der nämlichen Blende B, durch den ihr nachfolgenden Theil S'' des Systems in den Bildraum projicirt, nach $P_1'P'P_2'$, erscheint dann aus demselben Grunde von dem centralen Bildpunkte O' aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel als jede andere.

Offenbar ist $P_1'P_2''$ nach Lage und Grösse gleich dem Bild, welches das ganze System S von einem mit P_1P_2 identischen Objekt entwerfen würde. Wegen des eindeutigen Zusammenhanges zwischen den Punkten eines Objektes und seines Bildes muss jeder Strahl, der beim Austritt aus dem System durch ein Bild geht, vor der Brechung durch die conjugirte Stelle von dessen Objekt gegangen sein und umgekehrt. In so weit also in dem System S nur regelmässige Brechungen und Spiegelungen in Frage stehen, leistet für die Begrenzung der nach dem Bilde zielenden Büschel eine Blende an der Stelle und von der Grösse P_1P_2 genau dasselbe, wie eine solche von der Grösse und an der Stelle von $P_1'P_2'$ und beide eben soviel als die thatsächliche Blende B_1B_2.

Die Blende, welche für ein Objekt in einer Stellung auf der Axe wirksam ist, braucht es nicht zugleich für eine andere Lage desselben zu sein; wir denken uns daher stets die Lage des Objektes fixirt oder auf einen so kleinen Spielraum beschränkt, dass die Blenden ihre Funktionen behalten — wie es ja für die wichtigsten Instrumente (Mikroskop und Fernrohr) thatsächlich der Fall ist.

Die für den centralen Punkt des Objektes wirksame Blende ferner braucht nicht zugleich für die von dessen seitlichen Punkten ausgehenden Büschel wirksam zu sein. Wir wollen dies aber hier der einfacheren Uebersicht wegen ebenfalls annehmen. Es ist dann P_1P_2 die gemeinsame Basis aller vom Objekte ausgehenden, $P_1'P_2'$ die aller nach dem Bilde hinzielenden Büschel. ABBE[1]) hat die nach dem Objekt bezw. Bildraum projicirten Bilder der wirksamen Blende Oeffnung und Oeffnungsbild und später — nach Analogie der beim Auge geltenden Verhältnisse und Bezeichnungen — die Pupillen des Instrumentes genannt und zwar die erstere Eintritts-, die letztere Austrittspupille. Die physische Blende selbst bezeichnete er später oft als die Iris[2]).

Bei Objekten, welche nicht von selbst innerhalb des ganzen wie oben bestimmten Oeffnungswinkels des Instrumentes Licht ausstrahlen, sondern von einer anderen begrenzten Lichtquelle beleuchtet werden, kann es vorkommen, dass statt der im Instrumente vorhandenen Blenden die Lage und Grösse jener Lichtquelle maassgebend wird für die Oeffnung der abbildenden Strahlenbüschel. Es ist dies, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, immer dann der Fall, wenn die Lichtquelle bezw. ihr durch ein Beleuchtungssystem und das Objekt selbst modificirtes Bild vom Objekt aus unter kleinerem Sehwinkel erscheint als die Eintrittspupille. Die Lichtquelle vicarirt dann ihrer Lage und Grösse nach für die Eintrittspupille.

---

1) Beiträge zur Theorie des Mikroskops etc. MAX SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 419. 1873.

2) Letztere Bezeichnung kann heute leicht zu Missverständnissen Anlass geben, da gegenwärtig in optischen Instrumenten vielfach Blenden von variabler Oeffnung gebraucht und als »Irisblenden« bezeichnet werden.

Begrenzung des Objekts. Gesichtsfeld. Die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Theiles des Objekts ist im allgemeinen ebenfalls durch irgend welche Blenden begrenzt. Man findet diejenige, welche hierfür wirksam ist, indem man sich wie vorher alle vorhandenen Blenden nach dem Objektraum hin durch den ihnen voranstehenden Theil S' des System proicirt denkt. Diejenige, deren so construirtes Bild von dem Mittelpunkt der Eintrittspupille, P, aus unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, ist dann die hier maassgebende. Dieser Sehwinkel selbst $= 2w$ heisst der **Gesichtsfeldwinkel** des Systems. Das Bild derselben Blende, durch den ihr nachfolgenden Theil des Systems nach dem Bildraum hin projicirt, erscheint dann von dem Mittelpunkt der Austrittspupille, P', aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel, als alle anderen.

Wenn diese Blende in dem Raum, in welchen sie projicirt ist, nicht mit dem in diesem Raum erzeugten Bilde — also im Objektraum mit dem Objekte — **zusammenfällt**, so erfahren Objekt bezw. Bild statt einer scharfen eine **allmähliche Begrenzung**, indem dann ein immer grösserer Theil der von den seitlichen Punkten ausgehenden Büschel abgeblendet wird. Wiewohl dieser Fall in mehreren optischen Instrumenten vorliegt, wollen wir doch hier zunächst den einfacheren betrachten, dass die Begrenzung des Bildes durch eine in ihm selbst oder in der Ebene eines ihm vorangehenden Zwischenbildes (also event. im Objekt selbst) liegende Blendung stattfinde. Wenn das Objekt von selbst nur eine geringe Ausdehnung besitzt, so ersetzt es seinerseits die Gesichtsfeldblende im Objektraum.

Man kann nach diesen Festsetzungen die Gesammtheit aller durch das System tretenden Büschel in jedem Raume mit ganz gleichem Rechte auf zwei Arten zusammenfassen (vergl. Fig. 342): ein Mal als solche, welche ihre gemeinsame Basis in einer der Pupillen und ihre Spitzen in der Objekt- bezw. Bildebene haben, und das andere Mal als solche, welche umgekehrt ihre gemeinsame Basis im Objekt bezw. Bild (oder irgend einem Zwischenbild) und ihre Spitzen in der zugehörigen Pupille haben. M. a. W.: Für ein nach Lage und Ausdehnung der Eintrittspupille gleiches Objekt ist — vermöge der im Systeme vorhandenen Blenden — das ursprüngliche Objekt als Eintrittspupille, dessen Bild als Austrittspupille wirksam. Dieselbe Blende, welche in dem einen Fall die Oeffnungen der wirksamen Büschel begrenzt, ist im anderen Falle für die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Objektes maassgebend; Oeffnungswinkel und Gesichtsfeldwinkel vertauschen also in den beiden Fällen ihre Functionen.

Durch die gegenseitige Entfernung zweier Paare von conjugirten Ebenen und die Vergrösserung in ihnen ist eine Abbildung vollständig bestimmt. Wenn daher Ein- und Austrittspupille, sowie die Bilder der Gesichtsfeldblende in Objekt- und Bildraum gegeben sind, so kann durch Rechnung oder Construction zu jedem Strahl der conjugirte gefunden werden, ohne dass man das System selbst weiter zu berücksichtigen hätte.

Hauptstrahlen. Strahlengang.

Die Strahlen, welche von dem Objekte nach dem Mittelpunkte P der Pupille gehen — und deren conjugirte im Bild- und allen Zwischenräumen — sind bei der angenommenen kreisförmigen Gestalt der Blenden, also der Büschelbasis, die Symmetrieaxen der von den betreffenden Objektpunkten ausgehenden Büschel. Sie sind daher sozusagen auch die »optischen Schwerpunktslinien« dieser Büschel und in mehreren Beziehungen die Repräsentanten der Büschel als Ganzes, z. B.

für deren Richtungen. Wir wollen sie als die Hauptstrahlen bezeichnen[1]). Die nach einer Bildebene hin convergirenden Büschel werden von jeder ihr parallelen Ebene je in einem Kreise geschnitten, dessen Mittelpunkt auf dem Hauptstrahl liegt und auf der Schnittebene den Ort des — unscharfen oder »Zerstreuungs-« — Bildes vorstellt. Der Verlauf der Hauptstrahlen im Instrument bildet das, was man des näheren als Strahlengang bezeichnet. Der Winkel, den die äussersten Hauptstrahlen mit einander einschliessen, ist also der Gesichtsfeldwinkel, und wir wollen das Gesichtsfeld in gleicher Weise auch in den Fällen bestimmt sein lassen, wo eine allmähliche Abblendung der seitlichen Büschel stattfindet (wie beim GALILÄI'schen Fernrohr, bei den Lupen und dergl.)

Bei der Betrachtung der Abbildungsfehler war stillschweigend stets eine gewisse Begrenzung, sowohl der Apertur, als des Gesichtsfeldes vorausgesetzt und von dem Maasse dieser Begrenzung zeigten sich die Bildfehler stets abhängig. So die Aberrationen in der Axe von der Apertur (dem Oeffnungswinkel) allein, die Aberrationen für seitliche Punkte — Astigmatismus, Coma, — sowie Distortion, und Wölbung auch vom Gesichtsfeldwinkel und dem Orte der Pupillen.

Die von der Pupillenlage und dem Strahlengang abhängigen Eigenschaften der Instrumente.

1) Bei Instrumenten, welche zur subjektiven Beobachtung dienen, ist die Lage der Pupillen maassgebend für den Umfang der Sichtbarkeit des Bildes. Die Pupille des Auges muss zusammenfallen mit der Austrittspupille des Instrumentes, damit das ganze von dem Instrumente entworfene Bild auf ein Mal übersehen werde, und sie muss jener an Grösse mindestens gleich sein, damit alle von den Bildpunkten ausgehenden Strahlen ins Auge gelangen können. Nur wenn die Pupille des Auges sich an dieser Stelle befindet, wirkt dieselbe sicher nicht ihrerseits als Gesichtsfeldblende. Hingegen hängt es dann immer noch von ihrer Grösse ab, ob sie nicht als Aperturblende maassgebend wird. Da letzteres, wie wir sehen werden, niemals schadet, so bleibt allein der erstere Moment zu berücksichtigen. Die Austrittspupille wird daher auch oft als Augenkreis, ihr Mittelpunkt als Augenort bezeichnet. (Daneben sind noch die Benennungen RAMSDEN'scher und BIOT'scher Kreis in Gebrauch.)

2) Die Pupillen sind ferner die Centren der Perspective, unter welcher Objekt und Bild dem Instrument dargeboten bezw. von ihm abgebildet werden. Denn Punkte des Objektraumes, welche auf einer durch die Mitte der Eintrittspupille gehenden Geraden, d. h. auf einem Hauptstrahl des Objektraumes liegen, werden im Bilde dargestellt als Punkte, die auf dem conjugirten Hauptstrahl des Bildraumes liegen, erscheinen also von der Austrittspupille aus aufeinanderliegend. Sie erscheinen ebenso auch bei objektiver Darstellung der Bilder durch Projection auf einen Schirm. Denn dieser letztere kann zwar immer nur einer zur Axe senkrechten Ebene des Objektraumes conjugirt sein; Punkte, die in anderen Ebenen liegen, erscheinen daher als Zerstreuungskreise. Aber wegen der oben erwähnten Eigenschaft der Hauptstrahlen als optische Schwerpunktslinien der Büschel liegen die Mitten jener Zerstreuungskreise, welche in solchem Falle als Bildorte aufgefasst werden, immer auf diesen Hauptstrahlen.

Aus diesem Grunde müssen die Pupillen die orthoskopischen Punkte

---

[1]) Als Hauptstrahlen werden manchmal auch solche bezeichnet, welche nach bezw. von den Hauptpunkten gehen. Diese haben aber natürlich eine Bedeutung nur für graphisch-construktive Behandlung optischer Probleme — was angesichts häufiger Missverständnisse dieses Sachverhalts hervorgehoben zu werden verdient.

des Systems sein, wenn das Bild dem Objekte ähnlich, unverzerrt, sich darstellen soll.

Der Gegensatz zwischen den orthoskopischen und den früher betrachteten aplanatischen Punkten eines Linsensystems, sowie die Bedeutung des Strahlenganges überhaupt, das Verhältniss der Pupillen zu dem Objekt und Bild, für welches sie wirksam sind und die oben ausgesprochene Reciprocität dieses Verhältnisses treten ganz besonders auffallend in Erscheinung bei dem früher (pag. 119) erwähnten Experiment, mittelst dessen ABBE[1]) das charakteristische Convergenzverhältniss der Strahlen in aplanatischen Punkten beobachtet und die Allgemeinheit seines Bestandes in allen Systemen grösserer Apertur constatirt hat. Da nämlich die aplanatischen Punkte kraft der Bedingung des Aplanatismus (constantes Sinusverhältniss der in ihnen sich kreuzenden Büschelstrahlen) dem specifischen Merkmal orthoskopischer Punkte (constantes Tangentenverhältniss der in ihnen sich kreuzenden Hauptstrahlen) widersprechen, so muss ein aplanatisches System eine, diesem ihm eigenthümlichen Convergenzverhältniss gemäss voraus zu bestimmende, Verzerrung des Bildes ergeben, sobald es eine von dem aplanatischen Punkte entfernte Ebene durch Strahlenkegel abbildet, deren Hauptstrahlen sich in diesem aplanatischen Punkte kreuzen.

Die specifische Art dieser Verzerrung lässt sich genügend kennzeichnen, indem man die Umgestaltung bestimmt, die ein System paralleler Gerader bei einer derartigen Abbildung erleidet, oder indem man umgekehrt die Gestalt derjenigen Curven aufsucht, welche sich im Bilde als parallele Gerade darstellen. Eine leicht auszuführende Rechnung, auf die hier vorliegenden Voraussetzungen angewandt, ergiebt das Resultat: Irgend eine Schaar paralleler Geraden in einer zur optischen Axe senkrechten Ebene bildet sich durch ein aplanatisches System als eine Schaar von Ellipsen über derselben Hauptaxe, aber mit verschiedenen Nebenaxen ab (die unendlich entfernte Gerade als einschliessender Halbkreis) und eine bestimmte Schaar von Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und gleichen Nebenaxen, aber verschieden grosser Hauptaxe wird im Bild als ein System von parallelen Geraden wiedergegeben. Hierbei ist der Vereinfachung wegen angenommen, dass der Convergenzwinkel der Strahlen im aplanatischen Punkte auf der Bildseite als verschwindend klein angesehen, hier also der Sinus der Tangente gleichgesetzt werden könne. Die für das Gesetz des Aplanatismus am meisten charakteristische Erscheinung erhält man, wenn als Objektfiguren zwei Schaaren von Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkten und senkrecht sich schneidenden Hauptaxen genommen werden, beide entworfen nach der Gleichung

$$y = \frac{e}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2},$$

wo e — die gemeinsame Nebenaxe in beiden Schaaren — den Abstand der Objektebene von dem betreffenden aplanatischen Focus darstellt, und wenn zugleich die Werthe von a in beiden Schaaren nach der Formel

$$a = \frac{e \cdot u}{\sqrt{l - u^2}}$$

gleichen Zunahmen des u entsprechend — z. B. für die Beträge $u = 0;\ 0{\cdot}2;\ 0{\cdot}4;\ 0{\cdot}6;\ 0{\cdot}8$ etc. gewählt werden. Diese Figur (siehe Fig. 343 auf Taf. I.) ergiebt, nachdem der gemeinsame Mittelpunkt aller Curven in die Axe, die Ebene der Zeichnung senkrecht zur Axe und in den richtigen Abstand e vom aplanatischen Focus gebracht ist, als Bild 2 Schaaren von äquidistanten Parallelen, die sich rechtwinklig schneiden. Die krummlinig begrenzten, nach aussen hin immer weiter sich ausdehnenden und immer stärker deformirten Felder der Objektfigur stellen sich im Bild sämmtlich als congruente quadratische Felder dar; die Kreuzung der Hyperbeln, die nach aussen hin unter immer spitzer bezw. stumpfer werdenden Winkeln erfolgt, wird allenthalben als eine rechtwinklige Kreuzung wiedergegeben, und auch die entfernteren Curven beider Hyperbelsysteme, deren Aeste in der Figur überhaupt keinen Durchschnitt ergeben, vielmehr sichtlich divergent verlaufen (z. B. die beiden für $u = 0{\cdot}8$) erscheinen im Bild unter rechtwinkliger Kreuzung, ihre Durchschnittspunkte aber freilich — entsprechend dem mathematischen Imaginären — in einem Abstand von der Mitte des Bildes, zu welchem kein vom Luftraum ausgehender Lichtstrahl mehr gelangen kann.

---

[1]) CARLS, Repert. 16, pag. 303. 1881.

Die Beobachtung dieser Erscheinung kann mit Mikroskop-Objektiven von nicht allzu kurzer Brennweite — bis zu etwa 3 *mm* — herab und genügender Apertur hinreichend deutlich mit blossem Auge erfolgen, indem man die Figur gut geebnet (auf ein Brettchen geklebt) auf den Tisch des Mikroskops legt, den Mittelpunkt der Curven in die Axe rückt und den Tubus mit dem zu erprobenden Objektiv so weit hebt, dass der Einstellungspunkt des letzteren den richtigen Abstand e von der Zeichnung erhält (beistehende Figur ist für einen Abstand $e = 12{\cdot}5$ *mm* entworfen). Damit dann noch der wesentlichen Bedingung genügt werde, dass die aplanatischen Punkte für die Abbildung der Zeichnung Pupillenmittelpunkte werden, ist nichts weiter nöthig, als dass die Pupille des Auges, mit welchem die Erscheinung beobachtet wird, annähernd an die Stelle des aplanatischen Bildpunktes gebracht werde. Dies ist genügend nahe der Fall, wenn man nach Entfernung des Oculars aus dem Tubus des Mikroskops vom offenen Ende desselben her mit blossem Auge auf das dann über dem Objektiv schwebend erscheinende Luftbildchen der Zeichnung herabsieht. Bei Objektiven mit sehr kurzer Brennweite, welche dieses Bildchen zu klein werden lassen, muss man zur Beobachtung ein schwach vergrösserndes Hilfsmikroskop benützen, welches in den Haupttubus eingeschoben und auf das Bild eingestellt wird. Es muss dann allerdings besonders darauf Bedacht genommen werden, dass eine den Strahlengang begrenzende Blende in diesem Hilfsmikroskop wenigstens annähernd an einer solchen Stelle sich befindet, an welcher ihr Ort dem aplanatischen Focus des zu beobachtenden Objektivs conjugirt ist.

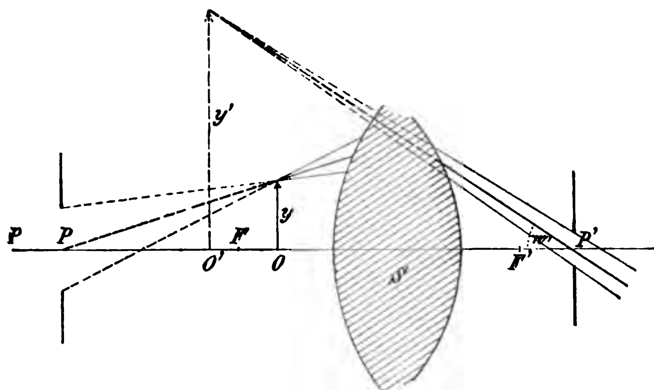
3) Der Oeffnungswinkel oder die angulare Apertur im Objekt- und ebenso im Bildraum hängt nach dem oben gesagten nur von dem Gesichtswinkel ab, unter welchem die Ein- bezw. Austrittspupille vom Objekt bezw. Bild aus erscheint. Wenn aber in einem Instrument die Möglichkeit vorliegt, dass das Objekt eine variable Lage auf der Axe einnehme, — und diese Möglichkeit ist natürlich niemals ganz ausgeschlossen — so ist die Lage der Pupillen auf der Axe maassgebend dafür, ob, in welchem Maasse und in welchem Sinne sich dabei die Oeffnungen der abbildenden Büschel verändern. Denn da die Pupille nach Lage und Grösse die Basis der Strahlenbüschel in dem betreffenden Raume ist so wird offenbar bei einer gewissen Annäherung, z. B. des Objektes an die Eintrittspupille, der Oeffnungswinkel unter sonst gleichen Umständen desto stärker sich ändern, je näher bereits die Pupille am Objekt liegt. Da ausserdem die Pupille im Sinne des Lichteinfalls sowohl vor als hinter dem Objekt liegen kann — dies hängt ganz von der Lage der Aperturblende und des Objektes zu dem Vordertheil S' des Systems ab — so kann einer Bewegung der Objektes im Sinne des Lichteinfalles ebensowohl eine Vergrösserung als eine Verminderung der Büschelöffnungen entsprechen.

4) Vergrösserungskraft. An und für sich kann, wie wir früher (pag. 47) gesehen haben, jedes optische System, jede Vergrösserung β (und jeden Werth des Convergenzverhältnisses γ) in conjugirten Punkten hervorbringen. Nur die Lage der physischen Bestandtheile des Systems könnte hierin eine Beschränkung verursachen, indem sie etwa die Annäherung des Objektes an den vorderen Brennpunkt verhinderte. Diese durch das Verhältniss der wirklichen Bild- und Objektdimensionen definirte aktuelle oder objektive Vergrösserung spielt unmittelbar überall da eine Rolle, wo das Bild auf einen Schirm projicirt wird (Photographische Objektive, Projectionsmikroskop etc.), oder wo die linearen Dimensionen des in Luft projicirten Bildes eines endlich entfernten Gegenstandes einer Ausmessung unterworfen werden sollen (das vom Objektiv allein entworfene Bild bei allen optischen Messinstrumenten, Mikrometermikroskop, mit Messeinrichtung versehenes Fernrohr etc.).

In den zur Unterstützung des Sehens bei subjektiver Beobachtung bestimmten Instrumenten jedoch bildet den Maassstab für die Leistung eines Instrumentes

in Bezug auf vergrössernde Wirkung offenbar nicht die lineare Grösse des Bildes selbst, sondern seine Grösse auf der Netzhaut des beobachtenden Auges oder was auf dasselbe hinauskommt, der Sehwinkel, unter dem es von der *A.-P.*[1]) des Instrumentes — und der mit dieser in Coincidenz zu bringenden *E.-P.* des Auges — aus erscheint. Insofern ist also der Strahlengang im Instrument — mag er durch die zu diesem gehörigen Blenden oder, wie bei der einfachen Lupe durch die Stellung des Auges selbst bestimmt sein — mit maassgebend für die (subjektive) Vergrösserung, die dasselbe leistet.

Der Sehwinkel w', unter welchem das Objekt y von der *A.-P.* des Instrumentes aus erscheint, lässt sich aus der Lage der Pupillen und Bilder gegen einander ohne weiteres berechnen. Sind die Entfernungen des Objektes von der *E.-P.* $PO = \xi$, die des Bildes von der *A.-P.* $P'O' = \xi'$, die derselben von den Brennpunkten der entsprechenden Räume $FO = x$, $F'O' = x'$, endlich die Abstände der Pupillen von denselben Brennpunkten $FP = X$, $F'P' = X'$, so ist (Fig. 344)



(Ph. 344.)

$$tang\, w' = \frac{y'}{\xi'} \quad \text{und} \quad tang\, w = \frac{y}{\xi},$$

daher

$$\frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{tang\, w'}{tang\, w} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \Gamma. \tag{1}$$

Wenn das System in Bezug auf die Pupillen orthoskopisch ist, so ist Γ eine Constante und gleich dem Werth, den es für paraxiale Strahlen hat, d. i.

$$\Gamma_0 = -\frac{X}{f'};$$

daher

$$tang\, w' = \frac{y'}{\xi'} = \frac{y}{\xi}\, \Gamma = -\frac{y}{\xi}\frac{X}{f'}. \tag{2}$$

Nun ist $\xi = x - X$; tragen wir diesen Werth ein und berücksichtigen wir, dass $x \cdot x' = f \cdot f' = X \cdot X'$ ist, also

$$\frac{x}{X} = \frac{X'}{x'},$$

so wird

$$\frac{tang\, w'}{y} = \frac{1}{f'} \frac{1}{1 - \frac{X'}{x'}} \tag{3}$$

und weiter, wenn X' klein ist gegen x'

$$\frac{tang\, w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right). \tag{3a}$$

---

[1]) Wir schreiben im folgenden der Kürze wegen die sehr häufig vorkommenden Worte »Eintrittspupille« mit *E.-P.* und »Austrittspupille« mit *A.-P.*

Das Verhältniss des Sehwinkels, unter welchem ein Objekt von der *A.-P.* aus durch das Instrument erscheint, zur Grösse dieses Objektes ist nach ABBE[1]) das richtige Maass für dessen Vergrösserungswirkung. Diese Vergrösserung stellt sich hier dar als bestimmt durch ein Hauptglied, die reciproke hintere Brennweite des Systems, welche wir früher bereits als die »Stärke« des Systems ($1/f' = \varphi'$) bezeichneten. In zweiter Linie sind auf die Vergrösserung von Einfluss der Abstand der *A.-P.* vom hinteren Brennpunkt, und die Entfernung des Bildes von demselben. Mit Ausnahme einiger besonderer Fälle wird ersterer Abstand stets sehr klein oder ganz Null sein. Letztere Entfernung ist dann identisch mit der Entfernung des Bildes vom Auge, hängt also von dem Accomodationszustande (der Sehweite) dieses ab. Diese Sehweite aber ist gegenüber der Entfernung $F'P' = X'$ stets sehr beträchtlich; daher ist das Correctionsglied $\frac{X'}{x'}$ in den meisten Fällen ein sehr kleiner echter Bruch. Die reciproke Brennweite des Systems allein bildet also im Wesentlichen das Maass für den Sehwinkel, unter welchem die Längeneinheit durch das System hindurch erscheint, d. h. für das Vergrösserungsvermögen V des Systems. Sie bildet denjenigen Theil des Vergrösserungsvermögens, welcher von den rein zufälligen Umständen — Lage der *A.-P.* zur hinteren Brennebene, Sehweite des Beobachters — unabhängig ist. Wenn die *A.-P.* des Systems in dessen hinterer Brennebene liegt, so ist für jede Sehweite bezw. Bildentfernung die Grösse $\varphi' = 1/f'$ das genaue Maass der Vergrösserung; ebenso ist es dies bei jeder Lage der *A.-P.* gegen F' für einen weitsichtigen Beobachter. In jedem Falle aber ist der Einfluss dieser beiden Faktoren ein sehr kleiner. Der Winkel, unter welchem ein Instrument die Längeneinheit erscheinen lässt, hängt daher im wesentlichen nur von dem Instrument und nicht von dem Beobachter ab.

Im Allgemeinen ist es üblich, die Vergrösserung eines Instrumentes anders zu bestimmen, und zwar in einer Art, bei welcher die Sehweite des Beobachters wesentlicher Faktor ihres Maasses wird. Wir geben von den verschiedenen, hierfür vorgeschlagenen — und im Endresultat auf dasselbe hinauskommenden Definitionen diejenige, welche dem Sinne des Wortes »Vergrösserung« am getreuesten ist. Danach ist die Vergrösserung eines — nach Art der Mikroskope wirkenden — Instrumentes zu bemessen nach dem Verhältniss der Sehwinkel (bezw. deren trigonometrischer Tangenten), unter welchen ein Mal das Bild des Gegenstandes im Instrument, und dann der Gegenstand selbst dem unbewaffneten Auge erscheint, wenn beide sich in der gleichen Entfernung l vom Auge befinden, oder was dasselbe ist, nach dem Verhältniss der Netzhautbilder in beiden Fällen. Bezeichnen wir die so definirte Vergrösserung mit N, so ist

$$N = \frac{y'}{l} : \frac{y}{l} = \left(\frac{y'}{y}\right)_l = (\beta)_{\xi'=l}. \tag{4}$$

Hiernach ist diese Vergrösserung auch das Grössenverhältniss des in der Entfernung l von der *A.-P.* liegenden (oder auf diese Entfernung proicirten) Bildes zu dem Objekte, also ein Sonderfall der linearen (objektiven) Vergrösserung.

Um vergleichbare Werthe zu erhalten, musste man eine gewisse gemeinsame Normalentfernung l annehmen, wofür man die sogen. »Weite des deutlichen Sehens« $l = 250$ *mm* gewählt hat. Es ist das diejenige Entfernung vom Auge, in welche etwa Normalsichtige kleine Gegenstände zu bringen pflegen, wenn sie

[1]) Note on the proper definition of the amplifying power of a lens or lens system. Journ. R. Micr. Soc. (2) 4, pag. 348. 1884.

dieselben längere Zeit zu betrachten haben; eine Entfernung, in welcher solche Gegenstände unter einem nicht allzu kleinen Sehwinkel erscheinen, auf welche aber von einem normalen Auge längere Zeit ohne erhebliche Anstrengung accomodirt werden kann.

Diese Definition, welche auch noch auf verschiedene andere Ausdrucksweisen gebracht werden kann, hat zweifellos den Vorzug grosser Anschaulichkeit für sich. Da Jeder eine Vorstellung davon hat, in welcher Grösse ihm z. B. 1 *mm* in der Entfernung von 250 *mm* erscheint, so gewinnen auch die so bemessenen Vergrösserungsziffern, 100, 200, 1000, sofort eine anschauliche Bedeutung. Wiewohl daher für den praktischen Gebrauch mit Vortheil an dieser Bestimmungsweise festgehalten werden kann, so verdient vom wissenschaftlichen Standpunkte aus doch jedenfalls die von Abbe den Vorzug. Da nämlich, wie wir eben gesehen haben, der Sehwinkel, unter welchem das Bild im Instrument erscheint, von der Accomodationsweite so gut wie unabhängig ist, so kann man N auch bezeichnen als das Verhältniss dieses constanten Sehwinkels zu demjenigen, unter welchem das Objekt aus der Entfernung l erscheint. Also ist

$$N = \frac{tg\, w'}{y/l} = \frac{tg\, w'}{y} \cdot l = \frac{l}{f'} = l\,V. \tag{5}$$

Nach der üblichen Definition ist also die Vergrösserung das l-fache der nach Abbe bestimmten. Insofern die Sehweite verschiedener Beobachter (Kurz- und Weitsichtiger) verschieden ist, der Werth von l also im gleichen Maasse variirt, bringt die übliche Definition die Thatsache zum Ausdruck, dass der subjektive Nutzen, den ein Vergrösserungsinstrument einem Beobachter gewährt, proportional ist der Mindestentfernung, auf welche er accomodiren kann — für Weitsichtige also grösser ist als für Kurzsichtige. In der Abbe'schen Definition hingegen ist unter Vergrösserung nur derjenige Theil der Wirkung ausgedrückt, welcher von dem Instrument als solchem abhängt. Es verhalten sich daher beide Bestimmungsweisen zu einander wie die nach dem conventionellen und die nach dem absoluten Maasssystem geschehenden in anderen Gebieten der Physik.

Beide Definitionen fallen zusammen, wenn das Objekt sich in unendlicher Entfernung befindet. Alsdann kann die Grösse des Objektes nicht anders bemessen werden, als nach dem Sehwinkel, unter welchem es erscheint, und zwar von der *E.-P.* aus, falls diese nicht etwa selbst im Unendlichen liegt. Die (angulare) Vergrösserung von Teleskopen ist, wie wir früher bereits hervorgehoben haben, identisch mit dem Convergenzverhältniss des Systems in den Pupillen $= \Gamma$.

Das eigentliche Gegenstück zu dem was man als Vergrösserung auffasst in den nach Art eines Mikroskops wirkenden Apparaten bildet die Vergrösserung, in welcher Projectionssysteme sehr entfernte Gegenstände abbilden, z. B. das Objectiv eines Fernrohrs, dieses für sich betrachtet. Hier ist von Interesse das Verhältniss der linearen Bildgrösse zu dem Sehwinkel, unter welchem von der *E.-P.* des Instrumentes aus das Objekt erscheint, also das Verhältniss $y'/tg\, w$.

Bei den früheren Bezeichnungen ist

$$\frac{y'}{tg\, w} = f\left(1 - \frac{x'}{X'}\right) = f\left(1 - \frac{X}{x}\right). \tag{6}$$

Liegt die *E.-P.* in der vorderen Brennebene, so wird $X = 0$, also $\frac{y'}{tg\, w} = f$; ebenso, wenn das Objekt sehr entfernt wird, in welchem Falle die Bildebene

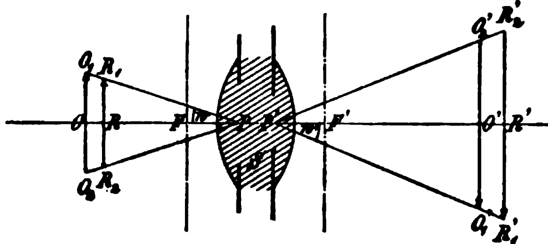
sich ja mehr und mehr der hinteren Brennebene nähert, und obige Beziehung mit der Definition der vorderen Brennweite zusammenfällt.

Bei geodätischen Messungen will man oft aus der Grösse des Bildes eines bekannten Gegenstandes (Messlatte) auf die Entfernung des letzteren einen Schluss ziehen. Diese Entfernung ξ, gemessen von der Eintrittspupille des Systems, ist

$$\xi = \frac{y}{tg\, w}.$$

In solchen Fällen ist es vortheilhaft, zur Bestimmung von $tg\, w$ sich der einfacheren Formel $tg\, w = y'/f$ bedienen zu können; zu diesem Zwecke muss man also die *E.-P.* des Instruments in dessen vorderen Brennpunkt verlegen.

5) Der Strahlengang ist endlich von grosser Wichtigkeit in den zahlreichen Fällen, in denen optische Instrumente dazu dienen, um aus den Grössen der Bilder, die sie entwerfen, die Grösse von deren Objekten zu ermitteln, also zu Messungen. Da die Bilder niemals wirklich dioptrisch vollkommen sind, da ferner das Auge des Beobachters die Fähigkeit der Accommodation für verschiedene Entfernungen besitzt, und da dasselbe endlich eine beschränkte Sehschärfe hat, so wird die Einstellung auf das Bild immer einer gewissen Unsicherheit unterliegen. Mit anderen Worten es wird im Allgemeinen die Ebene, welche der Netzhaut des beobachtenden Auges bei dessen momentanem Accommodationszustand conjugirt ist, die Pointirungsebene, mehr oder minder weit entfernt sein von der Ebene, in welcher das schärfste Bild des anvisirten Objektes liegt, der Bildebene. Der Messung — mag dieselbe mittelst körperlicher Marken (Fäden oder dergl.) oder mittelst der Bilder selbst (Heliometer) erfolgen — wird daher im Allgemeinen nicht das wahre, sondern das Zerstreuungsbild des gemessenen Gegenstandes in der Pointirungsebene unterworfen. Die Grösse desselben ist nach dem oben Ausgeführten bestimmt durch den Gang der Hauptstrahlen. Denn da auf diesen die Mitten der Zerstreuungskreise unscharfer Bildpunkte liegen, so bestimmen die Durchstossungspunkte der Hauptstrahlen mit der Pointirungsebene unmittelbar die Bildgrösse. In der Pointirungsebene $O_1'O_2'$ (Fig. 345) wird O_1' als Bild jedes Punktes O_1, R_1 aufgefasst, welcher auf dem zu $O_1'P'$ im Objektraum conjugirten Hauptstrahle liegt, somit $O_1'O_2'$ als Bild von O_1O_2 oder auch von R_1R_2. Umgekehrt wird das Bild desselben Punktes O_1 in O_1' oder R_1' und das Bild von O_1O_2 in $O_1'O_2'$ oder $R_1'R_2'$ aufgefasst, je nachdem die Pointirungsebene sich in O' oder R' befindet.



(Ph. 345.)

Nun ist (Fig. 345)

$$y' = \xi' \cdot tg\, w'; \quad y = \xi \cdot tg\, w,$$

wenn y die Ordinate des Objektes, ξ sein Abstand von der Eintrittspupille P und w die Neigung des Hauptstrahles gegen die Axe ist; analog y' die in der Pointirungsebene aufgefasste Bildgrösse, ξ' der Abstand der Pointirungsebene von der Austrittspupille P' und w' der zu w conjugirte Winkel. Daher wird die in der Pointirungsebene gemessene Vergrösserung

$$[\beta] = \frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{tg\, \omega'}{tg\, \omega}. \tag{1}$$

Nehmen wir das Tangentenverhältniss in den Pupillen als constant, d. h.

orthoskopische Abbildung an, so ist $tg\,w'/tg\,w = \Gamma$ auch das Convergenzverhältniss der Paraxialstrahlen in P und P' und dies $\Gamma_0 = \frac{n}{n'}\frac{1}{B}$. Also

$$[\beta] = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \Gamma = \frac{n}{n'}\frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{1}{B}. \tag{2}$$

Diese Formel zeigt, dass und wie die beobachtete Vergrösserung abhängt von der Lage der Pupillen zu Objekt- und Messungsebene, sowie von der Vergrösserung in ersteren — und nur von diesen Faktoren.

Es können nun in der Praxis zwei Fälle vorkommen: erstens der, dass die Entfernung der Pointirungsebene von der Austrittspupille — bezw. dem abbildenden System überhaupt — fixirt ist; alsdann sind Schwankungen der Objektentfernung möglich, welche auf die Bestimmung von β einwirken. Dies ist z. B. beim Mikrometermikroskop der Fall. Oder umgekehrt, die Entfernung des Objektes vom System ist als unveränderlich anzusehen, die der Pointirungsebene aber ist Variationen unterworfen (z. B. beim Fernrohr durch den Einfluss der Temperaturschwankungen auf das Objektiv und Tubusrohr, durch veränderte Oculareinstellung u. dergl.). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle vorliegt, wird man suchen, die Einrichtung des Instruments so zu treffen, dass die Entfernung des Objektes von der Eintritts- oder die der Pointirungsebene von der Austrittspupille ihren Einfluss auf die Messung von β verliert. Und dies ist, wie ABBE[1]) gezeigt hat, in der That möglich.

Führen wir noch die Entfernungen der Pupillen und Objekt- bezw. Bildebenen von den Brennebenen der betreffenden Räume ein, X, X' und x, x', so haben wir

$$\xi' = x' - X'; \quad \xi = x - X$$

und nach den Fundamentalformeln

$$\Gamma = -\frac{f}{X'} = -\frac{X}{f'};$$

daher

$$[\beta] = \frac{x' - X'}{x - X}\Gamma = -\frac{(x' - X')}{f'\left(\frac{x}{X} - 1\right)} = -\frac{\frac{x'}{X'} - 1}{x - X}f. \tag{3}$$

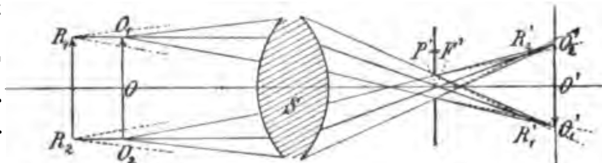
Je nachdem also die Eintritts- oder die Austrittspupille in unendliche Entfernung verlegt, d. h. X oder $X' = \infty$ — je nachdem das System nach der Bezeichnung ABBE's nach der Objekt- oder Bildseite »telecentrisch« gemacht — wird, ist

$$[\beta] = \frac{\xi'}{f'} \tag{4a}$$

unabhängig von der Objektentfernung, oder

$$[\beta] = \frac{f}{\xi} \tag{4b}$$

unabhängig von der Lage der Pointirungsebene.



(Ph. 346.)

Dies ergiebt sich auch, wie ein Blick auf die vorstehende Figur (Fig. 346) zeigt, unmittelbar daraus, dass die Hauptstrahlen im ersteren Falle im Objektraum, im letzteren im Bildraum parallel zur Axe verlaufen.

Bei der gewöhnlichen Einrichtung der zu Messungen dienenden optischen Instrumente liegen die Pupillen nahe deren Hauptebenen oder Knotenebenen.

---

[1]) Ueber mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878.

Alsdann ist Γ oder $B = 1$ und $[\beta] = \frac{\xi'}{\xi}$. Bei der hier betrachteten singulären Art von Strahlenbegrenzung wird $\Gamma = \infty$ bezw. $= 0$; β wird ganz unabhängig von J bezw. B und tritt dafür in unmittelbare Abhängigkeit von der Brennweite des abbildenden Systems.

Verwirklicht aber wird diese Art des Strahlenganges einfach dadurch, dass die Aperturblende im ersteren Falle in die hintere, im letzteren Falle in die vordere Brennebene gesetzt wird, oder wenn zwischen die Linsen des Systems dann an eine Stelle, die jenen Ebenen conjugirt ist in Bezug auf den zwischen beiden befindlichen Theil des Systems. Wie dies in den einzelnen Arten optischer Instrumente am zweckmässigsten einzurichten ist, kann erst erörtert werden, wenn wir die Construction derselben des näheren besprochen haben.

Metrische Beziehungen zwischen Pupillen und Bildern.

Die pag. 57 entwickelten Abbildungsgleichungen, bezogen auf conjugirte Punkte, enthalten alle hier in Frage kommenden Beziehungen im Keime. Insbesondere geben die Gleichung II* die Beziehungen zwischen der Vergrösserung β_0, welche in dem einen Paar von conjugirten Punkten, z. B. in den Pupillen, besteht und den Abscissen, der Vergrösserung und dem Convergenzverhältniss in dem anderen Paare, also in Objekt- und Bildpunkt. Aus diesen Gleichungen folgt u. a. eine direkte Beziehung zwischen der linearen Vergrösserung β in Objekt- und Bildpunkt, derjenigen B in den Pupillen und den Abscissen der ersteren bezogen auf die letzteren ξ, ξ', nämlich

$$\frac{\xi_0'}{\xi_0} = \frac{n'}{n} \cdot \beta_0 B_0. \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich zunächst nur auf die für paraxiale Strahlen geltenden Bildorte und Bildgrössen, was durch die Indices angedeutet ist. Es kann nun entweder, wie wir gesehen haben (pag. 116 ff.), das Bild ausgedehnt und die Pupillen — wenigstens im Verhältniss zu ihren Abständen ξ, ξ' — klein sein oder umgekehrt letztere erhebliche Grösse haben und Bild und Objekt entsprechend kleiner sein.

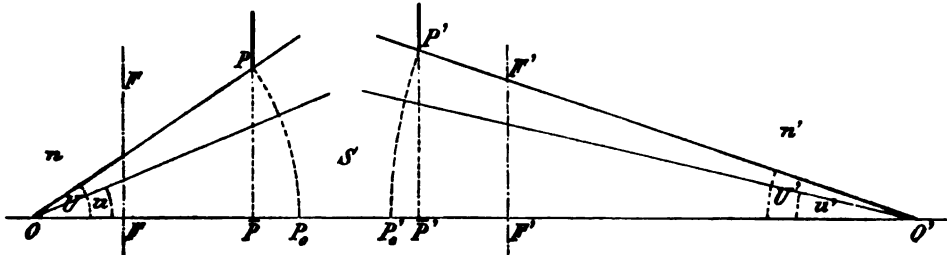
Im ersteren Falle wird bei einem möglichst vollkommen wirkenden System das Bild eines ebenen Objektes selber eben, d. h. $\xi' = \xi_0'$, und die Vergrösserung in Objekt und Bild $\beta = y'/y$ constant, also auch $= \beta_0$ sein. In den Pupillen kommt dann aber von selbst nur der Grenzwerth von B oder doch ein ihm sehr nahe liegender in Betracht. Die Gleichung (1) bleibt daher hier ohne weiteres in der Form bestehen

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{n'}{n} \beta \cdot B. \tag{1a}$$

In dem anderen Falle — Abbildung kleiner Objektflächen durch weitgeöffnete Büschel — kann man nicht ebenso einfach aus der Grösse der vorliegenden endlichen Maassstücke auf die in Gleichung (1) eintretenden Grenzwerthe oder auf ihre gegenseitigen Beziehungen einen Schluss ziehen. In Objekt und Bild zwar wird bei sehr geringer Ausdehnung derselben eine erhebliche Verzerrung und Krümmung kaum eintreten können. In den Pupillen aber besteht erstere gerade vermöge der Bedingung des Aplanatismus (s. oben pag. 175) in beträchtlichem Maasse und eine starke Krümmung ist erfahrungsmässig ebenfalls stets vorhanden. In Folge dessen variiren ξ', ξ und B mit dem Divergenzwinkel u der vom Objekt ausgehenden Büschel. In dem allgemeinsten Fall, dass *E.-P.* und *A.-P.* beides Bilder einer zwischen den Bestandtheilen des Systems gelegenen physischen Blende sind, sind beide als gekrümmte (Rotations-) Flächen anzunehmen, für deren Gestalt keinerlei An-

haltspunkte vorhanden sind. Ihre Orte und Grössen sind also nur durch die Grenzwerthe, d. h. die Ränder definirt.

Bezeichnen wir mit p, p' die sich allein der Messung unmittelbar darbietenden Halbmesser der ganzen *E.-P.* und *A.-P.*, mit B ihr Verhältniss p'/p, mit ξ_U, ξ_U' die Länge der von Objekt- und Bildpunkt nach den Rändern der



(Ph. 347.)

Pupillen gezogenen Strahlen, mit $[\xi_0]$, $[\xi_0']$ aber die (messbaren) Entfernungen der durch die Pupillenränder gehenden Ebenen von Objekt und Bild, so haben wir (Fig. 347)

$$\xi_U = p/\sin U; \qquad \xi_u' = p'/\sin U',$$

also

$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{\sin U}{\sin U'}.$$

Wenn O und O' aplanatische Punkte sind, so ist das Verhältniss der Grenzwinkelsinus — wie das der Sinus irgend welcher anderen einander congugirten Winkel —

$$\frac{\sin U}{\sin U'} = \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta.$$

Also wird

$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{n'}{n} \beta B_U = \frac{n' y' p'}{n y p} \tag{2}$$

für die Entfernungen der Pupillen**ränder** von Objekt und Bild.

Wenn die Pupillen als **Kugelflächen** angenommen werden, so würde dieselbe Beziehung innerhalb der ganzen Ausdehnung derselben, d. h. für jedes u und p gelten. Messen wir aber in den durch die Pupillenränder definirten **Ebenen**, deren Entfernungen von Objekt und Bild bezw.

$$[\xi_0] = p/tg\, U \qquad \text{und} \qquad [\xi_0'] = p'/tg\, U'$$

sind, so wird das Verhältniss dieser

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{p'}{p} \frac{tg\, U}{tg\, U'}$$

und dies vermöge des Sinussatzes

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n' p_U'}{n p_U} \beta \frac{\cos U'}{\cos U} = \frac{n'}{n} \beta B_U \frac{\cos U'}{\cos U}. \tag{3}$$

Dieselbe Beziehung gilt *mutatis mutandis*, wenn man statt der Gesammtgrössen der Pupillen in den durch ihre Ränder definirten Ebenen die Axenentfernungen entsprechender, d. h. auf conjugirten Strahlen liegender Punkte misst, p_u, p'_u; nämlich

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n} \frac{p_u'}{p_u} \beta \frac{\cos u'}{\cos u} = \frac{n'}{n} \beta [B_u] \frac{\cos u'}{\cos u}. \tag{3a}$$

Für den Grenzwerth $[B_0]$ endlich von $[B_u]$ bestimmt sich das Verhältniss der Cosinus als $= 1$ und es wird

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n} \beta [B_0],$$

d. h. dieselbe Gleichung, welche auch in jeder anderen Schirm- oder Pointirungsebene gilt (vergl. pag. 181).

Wir untersuchen noch die Verhältnisse in einigen besonderen Fällen.

Teleskopische Systeme. Hier ist für paraxiale Strahlen die lineare sowohl als die angulare Vergrösserung dieselbe für alle Stellen der Axe; also $\beta_0 = B_0 = const$ und $\gamma_0 = \Gamma_0 = const.$ Wenn ein solches teleskopisches System aplanatisch ist für die unendlich fernen Punkte, so wird der Ausdruck der Sinusbedingung bei ihm der, dass

$$\frac{h'}{h} = const$$

sein muss, wo h' die Höhe über der Axe ist, in welcher ein Strahl aus dem System austritt, dessen conjugirter in der Höhe h in das System eintrat. Diese parallel der Axe ein- und austretenden Strahlen sind die Hauptstrahlen für die Abbildung der Pupillen; sonach ist

$$\frac{h'}{h} = \frac{p'}{p} = B$$

ebenfalls constant, d. h. unabhängig von dem Werthe von p innerhalb der ganzen aplanatisch abbildenden Oeffnung des Systems. Bei unendlich fernen Objekten ist, wie oben ausgeführt, die Vergrösserung identisch mit dem Convergenzverhältniss der Hauptstrahlen in den Pupillen, Γ. Diese wird somit aus dem linearen Vergrösserungsverhältniss in den Pupillen, B, gemäss dem HELMHOLTZ-LAGRANGE-schen Satze berechnet zu

$$\Gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{B} = \frac{n}{n'} \frac{p}{p'} \text{ [1]}, \tag{4}$$

wo für p und p' beliebige zusammengehörige Werthe genommen werden können, die Messung von p und p' aber bei telecentrischem Strahlengange ausgeführt werden muss.

Systeme mit endlicher Brennweite. Bei diesen sind von Interesse die beiden besonderen Fälle, dass entweder die bildformirenden Büschel eng und die vom Objekt divergirenden relativ weit sind (Mikroskop) oder umgekehrt die ersteren weit und die letzteren eng (lichtstärkere photographische Objektive). Es ist oft wünschenswerth, im ersteren Falle die numerische Apertur der vom Objekt ausgehenden Büschel aus der Lage und Grösse der *A.-P.*, im anderen Falle die der bildformirenden aus der Lage und Grösse der *E.-P.* zu ermitteln, da beim Gebrauche dieser Systeme das eine Mal die *A.-P.*, das andere Mal die *E.-P.* bequem zugänglich ist. Nehmen wir in dem beim Mikroskop verwirklichten Falle die Convergenz der bildseitigen Büschel als so gering an, dass die Sinus für die Tangenten gesetzt werden können, so ist (Fig. 347)

$$p' = [\xi_0'] \sin U' = [\xi_0'] \frac{n \sin U}{n'} \frac{1}{\beta} = [\xi_0'] \frac{a}{n'} \frac{1}{\beta}.$$

Ist nun die Ebene der *A.-P.* von der hinteren Brennebene des Systems um X' entfernt, d. h. $F'P' = X'$, der Bildpunkt O' von derselben um x', $F'O' = x'$, also $[\xi_0'] = x' - X'$, so wird unter Berücksichtigung, dass $\beta = \frac{x'}{f'}$,

---

[1] Diese Beziehung wurde für paraxiale Strahlen schon von LAGRANGE aufgestellt und ihre Benutzung zu dem hier erwähnten Zwecke empfohlen. Mém. Acad. Berlin 1803, pag. 3.

$$p' = \frac{x' - X'}{x'} \frac{a}{n'} f' = a \cdot \frac{f'}{n'} \left(1 - \frac{X'}{x'}\right),$$

folglich, wenn n', wie es fast stets der Fall ist, $= 1$ angenommen wird

$$a = \frac{p'}{f'} \frac{1}{1 - \frac{X'}{x'}}. \tag{5}$$

Wenn x' gross ist gegen X', insbesondere wenn die *A.-P.* geradezu in der hinteren Brennebene liegt, also $X' = 0$ ist, wird einfach

$$a = \frac{p'}{f'}. \tag{5a}$$

Dies gilt natürlich ebenso in Bezug auf das ganze Mikroskop, wie für das Objektiv eines solchen allein, wofern nur die Divergenzwinkel nach dem Bilde zu klein genug sind, um deren Sinus für die Tangenten setzen zu können.

Für den anderen Fall, wo die Projection des Bildes wie bei photographischen Objektiven stattfindet, hat man ganz entsprechend bei analoger Bezeichnung

$$p = [\xi_0] \frac{n' \sin U'}{n} \beta = \frac{[\xi_0]}{x} \frac{f}{n} a' = \left(1 - \frac{X}{x}\right) \frac{f}{n} a',$$

also

$$a' = \frac{n}{1 - \frac{X}{x}} \frac{p}{f}. \tag{6}$$

Hier ist n stets $= 1$ und wenn nun wieder X sehr klein ist gegen x, so wird einfach

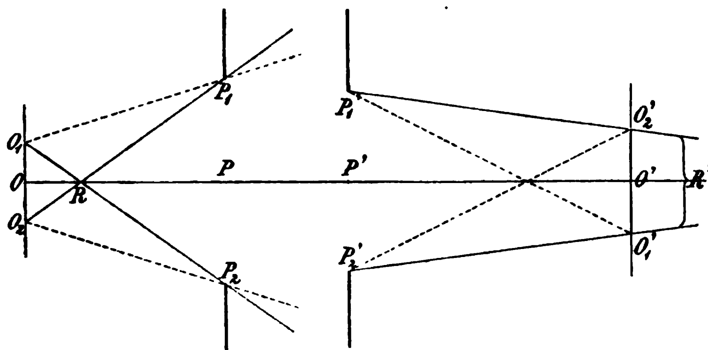
$$a' = \frac{p}{f}. \tag{6a}$$

Die von der Apertur der Systeme abhängigen Eigenschaften.

1) Penetrationsvermögen. Tiefe der Bilder.

Wir haben bei demselben die beiden Fälle zu unterscheiden, dass das Bild auf einen physischen Schirm — z. B. einer photographischen Platte — entworfen und auf diesem betrachtet wird, oder ob das Instrument subjektiver Beobachtung dient. Im letzteren Falle spielt die Accommodationsfähigkeit des Auges mit eine Rolle, im ersteren kommen nur die geometrischen und dioptrischen Verhältnisse in Betracht. Den von ihnen abhängigen Theil des Penetrationsvermögens bezeichnet man als Focustiefe. Wir betrachten zuerst diese.

Focustiefe. Auf dem Schirm S kann nur eine Ebene des Objektes möglichst scharf — wir wollen hier annehmen durch wirklich monocentrische Büschel — abgebildet sein. Den in anderen Ebenen des Objektraums gelegenen Punkten R (Fig. 348) entsprechen, wie wir früher gesehen haben, bei einem aplanatischen System grösserer Oeffnung überhaupt keine Bildpunkte mehr, sondern die von ihnen ausgehenden Büschel sind im Bildraum mit sphärischer Aberration behaftet und zwar die vom vorderen Brennpunkt des



(Ph. 348.)

Systems entfernteren mit Unter-, die näheren mit Uebercorrection. Trotzdem ist auch in den extremsten Fällen — bei beliebig grosser Apertur der einfallenden Büschel — der Zerstreuungskreis, in welchem das Büschel die Bildebene schneidet, völlig bestimmt.

Ist nämlich $z = O_1 O_2$ die — ganz gleich ob reelle oder virtuelle — Projection der *E.-P.*, $P_1 P_2$, auf die Objektebene von R aus, so ist der dem Punkte R entsprechende Zerstreuungskreis in der Bildebene, $O_1' O_2' = z'$ das Bild von z, welches gemäss der in den Ebenen O' und O bestehenden Vergrösserung zu berechnen ist, also $z' = \beta \cdot z$. Denn laut Annahme werden die Punkte der Ebene O durch Büschel welche innerhalb der gegebenen Apertur liegen in Punkte der Ebene O' abgebildet. Die von R nach der *E.-P.* zielenden Strahlen sind zugleich Strahlen dieser von Punkten der Ebene O ausgehenden weitgeöffneten Büschel; wir können sie als Axen von unendlich dünnen Büscheln gelten lassen, welche ihre Spitzen in den betreffenden Punkten von O haben. Die Spitzen der conjugirten Büschel, d. h. die Durchstossungspunkte der conjugirten Strahlen mit der Ebene O' sind daher identisch mit den nach den Abbildungsgesetzen den Punkten des Kreises $O_1 O_2$ entsprechenden Bildpunkten. Es folgt hieraus u. a., dass, wie auch der Charakter und Grad der sphärischen Ueber- oder Untercorrection in den Büscheln des Bildraums in der Nachbarschaft aplanatischer Stellen sein mag, doch jedenfalls die Durchstossungspunkte der von je einem Punkte R ausgehenden Strahlen mit der Objekt- und Bildebene in diesen dieselbe Reihenfolge und sogar proportionale Abstände von einander haben.

Nun ist, wenn wir wie früher $PO = \xi$, $P'O' = \xi'$, den Winkel $P_1 OP = u$ setzen und OR, die Focusdifferenz im Objektraum, mit $\Delta\xi$ bezeichnen

$$OO_1 = \frac{1}{2} z = \Delta\xi \cdot tg\, P_1 RP = \Delta\xi \cdot \frac{\xi}{\xi + \Delta\xi}\, tg\, u. \tag{1}$$

Für einen in demselben Abstand $\Delta\xi$ auf der anderen Seite der Objektebene gelegenen Punkt haben wir ganz entsprechend

$$\frac{1}{2} z = \Delta\xi \frac{\xi}{\xi - \Delta\xi} \cdot tg\, u \tag{2}$$

— abgesehen von dem hier nicht in Betracht kommenden Vorzeichen.

Daher ist

$$z' = 2\beta \cdot \Delta\xi \frac{\xi}{\xi \pm \Delta\xi} \cdot tg\, u, \tag{3}$$

der einem Objektabstand $\pm \Delta\xi$ entsprechende Zerstreuungskreis im Bildraum.[1])

Wenn $\Delta\xi$ gegen ξ nicht zu vernachlässigen ist, so hängt die Grösse des Zerstreuungskreises nicht nur von dem Oeffnungswinkel, d. h. der scheinbaren Grösse der *E.-P.* gesehen vom Objekt aus ab, sondern auch von ihrer Lage. Je nachdem dann die *E.-P.* hinter oder vor dem Objekte liegt ist der Zerstreuungskreis eines seinerseits in gewisser Entfernung $\Delta\xi$ hinter der Objektebene ge-

---

[1]) Diese Formel weicht von derjenigen, die von Abbe (s. z. B. Beschreibung eines neuen stereoskop. Oculars. Carl's Repert. 17, pag. 220. 1880) angegeben und nach ihm von den meisten anderen Schriftstellern über diesen Gegenstand wiederholt worden ist darin ab, dass hier die trigonometrische Tangente auftritt, wo in jenen der Sinus. Die Differenz erklärt sich aus einer strengeren Rücksichtnahme auf die Voraussetzung des Aplanatismus für die scharf eingestellte Ebene. Macht man diese Voraussetzung nicht, so lässt sich über den Zerstreuungskreis überhaupt nichts mehr feststellen — ausser wenn der Winkel u so klein ist, dass *sin* und *tang* nahezu gleich gross sind.

legenen Punktes im Bilde grösser oder kleiner als der eines ebenso weit vor dem Objekt liegenden — entsprechend der Zu- oder Abnahme der wirksamen Apertur, die dann bei Annäherung oder Entfernung des Objektpunktes vom System eintritt. Unter sonst gleichen Umständen, z. B. bei zwei Systemen gleicher Constructionsart (diese nur in Bezug auf die relative Lage der Blenden nöthig), welche mit gleichen Oeffnungswinkeln ein Objekt in gleicher Vergrösserung abbilden, aber verschiedene Brennweite, — d. h. verschiedenes ξ — besitzen, ist jener Einfluss des Blendenortes grösser bei dem Systeme kleinerer Dimension (von kürzerem ξ). Bei einem solchen wächst also die Unschärfe der von der scharf eingestellten Ebene aus nach vorn gelegenen Objekte schneller als die der nach rückwärts gelegenen, (vorn und hinten immer im Vergleich zur Richtung des einfallenden Lichts zu verstehen).

Während die lineare Grösse des Zerstreuungskreises das Maass für die absolute Unschärfe im Bilde ist, kann man als Maass der durch ihn hervorgerufenen Verundeutlichung des Bildes (Unlesbarmachung einer Schrift oder dergl.) sein Verhältniss zu der Vergrösserung ansehen, in welcher die betreffende Objektebene auf die wahre Bildebene projicirt wird. Die Bildgrösse ist hierbei natürlich von Mitte zu Mitte entsprechender Zerstreuungskreise zu rechnen. Da diese Mitten auf den Hauptstrahlen liegen, so entspricht zwei Punkten die auf demselben durch P gehenden Hauptstrahl liegen derselbe Bildpunkt in der Ebene O'. Hieraus folgt, dass die Vergrösserung, mit der die durch R gehende Ebene in O' unscharf abgebildet wird, $[\beta]$, sich zu der von O, β, umgekehrt verhält, wie die Abstände der Punkte R und O von der Pupille, also

$$\frac{[\beta]}{\beta} = \frac{\xi}{\xi \pm \Delta\xi} \tag{4}$$

und

$$\frac{z'}{[\beta]} = 2\Delta\xi \cdot tang\, u. \tag{5}$$

Die durch Focusdifferenz bewirkte Verundeutlichung des Bildes hängt also weder von der Vergrösserung noch von der Lage der *E.-P.* noch endlich von dem Sinne der objektseitigen Focusdifferenz ab, sondern nur von der absoluten Grösse der letzteren und von dem Oeffnungswinkel des abbildenden Systems.

Wenn die Focusdifferenz klein ist gegen die Entfernung der *E.-P.* vom Objekte so wird einfacher

$$z' = 2\beta \cdot \Delta\xi \cdot tang\, u \tag{6}$$

Wenn das betreffende System nicht zur Darstellung objektiver Bilder (auf einem Schirm) benützt wird, sondern als Hilfsmittel des Sehens, subjektiv, so ist auch nicht mehr die absolute lineare Grösse des Zerstreuungskreises maassgebend für die Unschärfe im Bilde, sondern sein scheinbarer, angularer Werth. Dieser ist $\varepsilon' = z'/\xi'$, wenn ξ' die Entfernung des Bildes von der *A.-P* ist. Da β die auf die gleiche Entfernung bezogene lineare Vergrösserung ist, so ist $\xi/\beta = V = tg\, w'/y$ die Vergrösserung des Systems im subjektiven Gebrauch, somit wird

$$\varepsilon' = \frac{z'}{\xi'} = 2\, V \cdot \Delta\xi \cdot tang\, u \tag{7}$$

und die Tiefe im Objekt, welcher ein Zerstreuungskreis von der maximalen Grösse ε' im Bilde entspricht, d. h. die Focustiefe ist

$$2\Delta\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{V \cdot tang\, u} \tag{8}$$

oder $= \Delta\xi_\varepsilon$ beiderseits von der scharf eingestellten Objektebene.

Die Tiefe hängt also wesentlich mit von ε' ab, d. h. davon, welche Zerstreuungskreise das Auge des Beobachters verträgt, oder wie gross diese sein dürfen, ehe das Auge den Eindruck der Unschärfe erhält. Diese Sehschärfe ist

individuell verschieden und hängt von mehreren Momenten physikalischer und physiologischer Natur ab (Intensität des Bildes, Farbe, Erregungszustand, Stelle der Netzhaut etc.), auch von der Beschaffenheit des beobachteten Bildes, seiner Struktur, Intensitätsdifferenzen u. s. w. Mittleren Verhältnissen entsprechen Sehschärfen von 1′ bis 5′. Im übrigen aber hängt die Focustiefe nur ab von seinem Vergrösserungsvermögen (Brennweite) und Oeffnungswinkel. Der Constructionstypus, die Zusammensetzung des Systems aus Objektiv und Ocular und die Vertheilung der Functionen auf diese sind völlig ohne Einfluss auf sie.

Das Reciproke der Focustiefe ist das Maass für die Einstellungsgenauigkeit (Focussirungsempfindlichkeit) eines Systems. Denn offenbar ist man desto besser im Stande, die richtige Lage eines Systems gegen Objekt und Bild zu finden (d. h. diejenige Lage, bei welcher es ein gegebenes Objekt an bestimmter Stelle abbildet) je grösser der Zerstreuungskreis ist, welcher bei einer bestimmten Verschiebung des Objekts gegen das System — oder umgekehrt — entsteht.

Accommodationstiefe. Bei den zu subjektiver Beobachtung benutzten Instrumenten, in welchen das Bild nicht auf einem physischen Schirm sondern in der Luft schwebend beobachtet wird kommt bei der Betrachtung dieses Bildes, ebenso wie bei der eines körperlichen Objektes, die Accommodation des Auges der Auffassung der Tiefe noch zu Hilfe. An den Bereich, welcher vermöge der Accommodation scharf übersehen werden kann, gliedert sich dann beiderseits derjenige, in welchem trotz der Focusdifferenz die Zerstreuungskreise noch unter der Grenze der Sichtbarkeit bleiben. Die gesammte Sehtiefe ist also die Summe der Accommodations- und der Focustiefe.

Bei Systemen grösserer Apertur wird jedoch, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, streng genommen überhaupt nur eine einzige Ebene scharf abgebildet, d. h. mit wachsender Apertur beschränkt sich der Bildraum in Folge der ausserhalb der aplanatischen Punkte von selbst nothwendig eintretenden Aberrationen immer mehr, so dass im Bilde immer weniger Spielraum für die Accommodation bleibt. Durch diesen Umstand wird die Accommodationstiefe — welche ohnehin mit wachsender Vergrösserung in immer geringerem Maasse zur Tiefenwahrnehmung beiträgt — in noch höherem Grade als es die betreffenden Formeln ausdrücken, verringert[1]).

Wir können nun diejenige Tiefe des Objektraums berechnen, welche durch Accommodation bei ungeänderter Einstellung sichtbar gemacht würde, wenn den Punkten jenes Objektraumtheils scharfe Bildpunkte entsprächen. Ist diese Tiefe geringer als diejenige, innerhalb welcher die Zerstreuungskreise durch Aberration das zulässige Maass erreichen, so ist sie in der oben angegebenen Weise als wirksam anzusehen; ist sie aber grösser als jene, so ist die Gesammttiefe derjenige Raum, innerhalb dessen die Summe der durch Aberration und Focusdifferenz herbeigeführten Zerstreuungskreise den festgesetzten Grenzwerth erreicht.

Ist ξ_N' die Entfernung des sogen. »Nahepunkts« vom Auge, d. h. die kleinste Entfernung, auf welche dieses scharf accommodiren kann, ξ_F' der Abstand des

[1]) Auf diesen Umstand und nicht auf einen solchen physiologischer oder psychischer Natur ist wohl auch die neuerdings von NELSON statuirte »Paralysirung der Accommodation« zurückzuführen. S. Journ. R. Soc. (2), pag. 331. 1892.

Fernpunkts von demselben, so ist nach DONDERS das rationelle Maass für das Accommodationsvermögen[1]) des Auges die Grösse

$$A = \frac{1}{\xi_N'} - \frac{1}{\xi_F'} . \tag{9}$$

Folglich ist der Spielraum der Accommodation im Bildraum

$$\xi_F' - \xi_N' = \Delta \xi_A' = A \cdot \xi_N' \cdot \xi_F'. \tag{10}$$

Insoweit die Bilder der paraxialen Strahlen mit denen der stärker geneigten zusammenfallen, entspricht der Entfernung $\Delta \xi'$ zweier Bilder der Abstand $\Delta \xi$ ihrer Objekte gemäss

$$\frac{\Delta \xi'}{\Delta \xi} = \frac{n'}{n} \beta_N \cdot \beta_F, \tag{11}$$

wo β_N, β_F die linearen Vergrösserungen sind, welche in den Entfernungen ξ_F', ξ_N' bestehen. Daher ist die objektseitige Accommodationstiefe

$$\Delta \xi_A = \frac{n}{n'} A \cdot \frac{\xi_N'}{\beta_N} \cdot \frac{\xi_F'}{\beta_F} . \tag{12}$$

Wenn β_N und β_F nicht viel von einander unterschieden sind, so kann man für jedes von ihnen einen Mittelwerth β_M setzen, der genau genommen $= \sqrt{\beta_N \cdot \beta_F}$ ist und ebenso für ξ_N' und ξ_F' den Mittelwerth ξ_M', der genau genommen $= \sqrt{\xi_N' \cdot \xi_F'}$ ist, so dass

$$\Delta \xi_A = \frac{n}{n'} A \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_M^2 . \tag{13}$$

Bei Instrumenten, deren *A.-P.* sehr nahe am hinteren Brennpunkt liegt, ist auch sehr nahe $\xi' = x'$, daher $\xi'/\beta = \frac{1}{V} = f'$ und es wird

$$\Delta \xi = \frac{n}{n'} A \cdot f'^2 = \frac{n}{n'} \frac{A}{V^2} . \tag{14}$$

Bei Instrumenten für subjektive Beobachtung ist also die gesammte Sehtiefe, auch das Penetrationsvermögen des Systems genannt, gleich der Summe der Focustiefe $\Delta \xi_\varepsilon$ und der Accommodationstiefe $\delta \xi_A$. In welchem Maasse diese beiden Momente zur Wahrnehmung der Tiefendimensionen beitragen, wird am besten durch eine tabellarische Uebersicht erläutert[2]), in welcher für ein System (Mikroskop) von der numerischen Apertur $n \sin u = 0{\cdot}5$ und trocken liegendes Objekt d. h. für einen Oeffnungswinkel von 100° in Luft die Werthe von $\Delta \xi_\varepsilon$, $\Delta \xi_A$, die Grösse des auf einmal übersehbaren Objektfeldes $2y$ und das Verhältniss dieses zu $\Delta \xi_\varepsilon$ und $\Delta \xi_A$ aufgeführt sind bei verschiedenen Vergrösserungen und unter den Annahmen, dass $\varepsilon = 5'$, $A = \frac{1}{300}$, $\xi_M = 250$ *mm* ($\xi_N = 166$; $\xi_F = 375$) und dass das angulare Sehfeld im Bilde $tg\, w' = 0{\cdot}5$ ist

β	$2 \Delta \xi_\varepsilon = \frac{1}{tang\, u} \frac{\xi'}{\beta} \cdot \varepsilon$	$\Delta \xi_A = \frac{n}{n'} A \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)^2$	$y = 2 \frac{\xi'}{\beta} tg\, w'$	$\frac{\Delta \xi_\varepsilon}{y}$	$\frac{\Delta \xi_A}{y}$
10	0·0617	2·08	25 *mm*		$\frac{1}{12}$
30	0·0206	0·231	8·3 „		$\frac{1}{12}$
100	0·0062	0·021	2·5 „		$\frac{1}{120}$
300	0·0021	0·0023	0·83 „	$\frac{1}{405}$	$\frac{1}{360}$
1000	0·00062	0·00021	0·25 „		$\frac{1}{1200}$
3000	0·00021	0·00002	0·083 „		$\frac{1}{3600}$

[1]) S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. v. HELMHOLTZ, pag. 121.

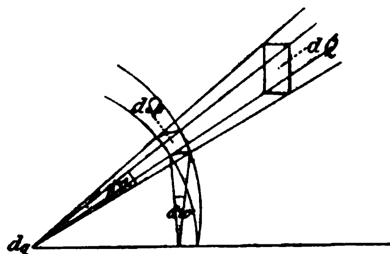
[2]) ABBE, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Oculars. CARL's Rep. f. Exper. Physik 17, pag. 216. 1880.

Bei den Vergrösserungen unter 100 würde allerdings die Pupille des Auges einen Theil der *A.-P.* abblenden und damit die wirksame Apertur des Systems verringern, seine Focustiefe im subjektiven Gebrauch also für diesen Fall entsprechend erhöhen. Die betreffenden Zahlen haben daher nur schematischen Werth.

»Die der optischen Abbildung inhärente Uebervergrösserung der Tiefendimension bringt also ein mit wachsender Vergrösserung immer ungünstiger werdendes Verhältniss zwischen Tiefe und Breite des der Accommodation zugänglichen Objektraums hervor; während dieser bei 10facher Vergrösserung ungefähr die Verhältnisse eines ziemlich dicken Buches zeigt, gleicht es schon bei 500facher Vergrösserung nur noch dem einzelnen Blatt aus diesem Buch. — Der andere Bestandtheil der Sehtiefe zeigt hingegen ein wesentlich abweichendes Verhalten, weil in Bezug auf ihn der Effekt der Uebervergrösserung gerade compensirt wird durch die der Vergrösserung des Mikroskopes proportional gehende Verengerung der Strahlenkegel, welche aus dem Ocular zum Auge gelangen. Für die Grenzen des vollkommen scharfen Sehens, durch wechselnde Accommodation, ist es offenbar gleichgültig, ob die Pupille enge oder breite Strahlenbüschel empfängt; das Anwachsen der Zerstreuungskreise beim Ueberschreiten des Nahpunktes oder Fernpunktes erfolgt aber proportional dem Durchmesser der abbildenden Strahlenbüschel. In Folge dieses Umstandes bewahrt, trotz der Uebervergrösserung der Tiefendimension, der kraft Focustiefe erkennbare Körperraum ein ganz constantes Verhältniss zwischen Breite und Dicke, so lange derselbe Oeffnungswinkel in Betracht ist und so lange eine bestimmte Grenze der zulässigen Undeutlichkeitskreise festgehalten wird. — Aus dem angeführten Beispiel ist ersichtlich, dass bei den geringen Vergrösserungen die Focustiefe auf alle Fälle sehr zurücktritt gegenüber der Accommodationstiefe; während umgekehrt unter sehr hohen Vergrösserungen die Wirksamkeit der Accommodation mehr und mehr zurückbleibt hinter dem zwar kleinen aber sich constant erhaltenden Effekt der Focustiefe.«

2) Die Helligkeit der Bilder in optischen Instrumenten.

Alle bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf die geometrischen Eigenschaften des Strahlenverlaufs in den optischen Instrumenten. Wir wollen nunmehr die Intensitätsverhältnisse der Wirkungen, welche optische Apparate vermitteln, ins Auge fassen. Wir erinnern zu diesem Zwecke an die Grundbegriffe, welche in der Lehre von der Intensität der Lichtwirkungen, der Photometrie, überhaupt in Geltung stehen.



(Ph. 349.)

Photometrische Grundbegriffe. Nach dem sogen. photometrischen Grundgesetz ist die Lichtmenge dL, welche ein leuchtendes Flächenelement dq einem anderen in der Entfernung r befindlichen dQ in der Zeiteinheit zusendet

$$dL = k \cdot dq \cdot dQ \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\Theta}{r^2}, \tag{1}$$

wenn ϑ, Θ die Winkel sind, welche die Normalen der Flächenelemente dq, dQ (Fig. 349) mit der Richtung r einschliessen und k ein Faktor, welcher die specifische Intensität der von dq ausgehenden Lichtwirkung bemisst. Die Definition dieses Faktors ist aus obiger Gleichung (1) oder einer der folgenden ihr äqui-

valenten zu entnehmen, wenn rechter Hand alle Grössen = 1 gesetzt werden. Man kann in dieser Gleichung die Grössen

$$\frac{dq \cos \vartheta}{r^2} = d\omega \qquad \text{oder} \qquad \frac{dQ \cos \Theta}{r^2} = d\Omega$$

aussondern, welches die Projectionen des Elements dq auf eine mit dem Radius 1 um dQ geschlagene Kugel bezw. die des Elements dQ auf eine um dq geschlagene sind, d. h. die Raumwinkel, unter welchen dq vom Orte von dQ aus bezw. dQ von dq aus erscheinen. Dann wird Gleichung (1)

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos \vartheta \cdot d\Omega = k \cdot dQ \cdot \cos \Theta \cdot d\omega. \qquad (1a)$$

Man sieht also, dass die Gestalt, Lage und Entfernung des leuchtenden Elements dq für die von ihm ausgehende Lichtwirkung nur insofern von Einfluss ist, als dieselbe den Sehwinkel verändert, unter welchem das Element dq von dem Orte der Wirkung aus erscheint, und ebenso ist Gestalt, Lage und Entfernung des beleuchteten Elements nur nach Verhältniss des Sehwinkels, unter dem es vom lichtstrahlenden Elemente aus erscheint, maassgebend für die Strahlungswirkung, die es erfährt.

Von der Beleuchtung, die ein Element dQ von einer ausgedehnten leuchtenden Fläche erfährt, nehmen wir an, dass es die einfache Summe der Lichtwirkungen sei, die jedes Element jener Fläche für sich auf dQ ausüben würde. Aus dieser Annahme und dem photometrischen Grundgesetz können wir den Satz folgern, dass zwei verschiedene Lichtquellen von ungleicher Grösse, Gestalt und Lage an einem Orte O genau dieselbe Wirkung hervorbringen, von dem aus gesehen sie sich so aufeinander projiciren, dass jede von O nach ihnen hingezogene Richtungslinie beide in Punkten gleicher Leuchtkraft trifft.

Diese Leuchtkraft k ist nach Gleichung (1a) diejenige Lichtmenge, welche eine gleichförmig leuchtende Fläche von der Grösse Eins auf eine andere von ihr aus sich unter dem körperlichen Sehwinkel Eins darbietende bei senkrechter Incidenz strahlen würde, oder umgekehrt diejenige, welche auf eine Fläche von der Grösse Eins von einer andern sich dieser unter dem Sehwinkel Eins darbietenden gestrahlt würde. Sie hängt von der physischen Beschaffenheit des strahlenden Körpers (Oberflächenbeschaffenheit, Temperatur etc.) ab und, wenn dies ein nur mittelbar lichtstrahlender Körper ist, auch von der Beleuchtung, unter der er selbst sich befindet. Bei glühenden festen Körpern scheint k nahezu eine Constante in Bezug auf ϑ zu sein. Bei anderen aber und namentlich bei den mittelbar — durch diffuse Reflexion, Difffaction oder dergl. — strahlenden wird k im allgemeinen jede beliebige Function des Ausstrahlungswinkels sein können, also sowohl von seiner Grösse, als dem Azimut der Strahlungsrichtung abhängen[1]).

Man hat zu unterscheiden zwischen der (objektiven) Beleuchtungsstärke, welche von einer leuchtenden Fläche an einem Orte O hervorgebracht wird, und der (scheinbaren) Helligkeit, mit welcher eine solche Fläche von einem Beobachter gesehen wird. Unter ersterer versteht man die Lichtmenge, welche unter den gegebenen Umständen die Flächeneinheit erhalten würde, wenn bei der Strahlung auf deren verschiedene Theile die Verhältnisse genau dieselben wären wie bei der Bestrahlung des betrachteten Elements dQ; mit anderen Worten,

---

[1]) Wir haben von dieser Function den Faktor $\cos\vartheta$ getrennt, um die folgende Beweisführung zu erleichtern. Dies ist im gegebenen Falle wohl zu berücksichtigen.

die vom Element dQ im Verhältniss zu seiner Fläche erhaltene Lichtmenge. Die von dq in dQ bewirkte Beleuchtungsstärke ist also einfach

$$dB = k \cdot \cos\theta \cdot d\omega. \tag{2}$$

Die Helligkeit des Lichteindrucks, den ein Beobachter in seinem Auge von einer Fläche erhält denkt man sich, gemäss der allgemeinen angenommenen Ansicht wonach dieser durch die Reizung getrennter und einzeln zu erregender Elemente des Sehnervs vermittelt wird, entsprechend dem Grade der Erregung der percipirenden Elemente. Wir setzen diese Erregung einfach proportional der Lichtmenge, welche je einem derselben durch den optischen Apparat des Auges zugeführt wird, wobei wir die Möglichkeit der thatsächlich bestehenden ungleichen Empfindung der Netzhaut an verschiedenen Stellen und in verschiedenen Zuständen sowie der Diproportiònalität zwischen Reizstärke und Empfindungsgrösse überhaupt gänzlich offen lassen, da die Berücksichtigung dieser Momente nur für gegebene individuelle Fälle erfolgen könnte und überdies in das physiologische Gebiet gehört. Bei einem flächenhaft ausgedehnten Bilde des betrachteten Gegenstandes auf der Netzhaut ist hiernach das Maass der Helligkeit, in welcher der Gegenstand dem Beobachter erscheint, die auf der Netzhaut bewirkte Beleuchtungsstärke.

Hieraus folgt u. a., dass eine selbstleuchtende Fläche (deren $k = const$) in jeder Entfernung gleich hell erscheint, in welcher sie überhaupt noch eine endliche Flächenausdehnung besitzt. Denn da die Grösse des Netzhautbildes proportional ist dem körperlichen Sehwinkel ω, unter welchem der Gegenstand — genau genommen vom vorderen Knotenpunkte des Auges, bei einigermaassen erheblichen Entfernungen aber mit genügender Annäherung von seiner Pupille aus — erscheint, so können wir die Helligkeit H, in der eine Fläche gesehen wird, gleich dem Quotienten aus jenem Sehwinkel in die auf die Pupille gestrahlte gesammte Lichtmenge L setzen, also $H = L/\omega$.

Diese Lichtmenge ist aber nach Gleichung (1 a) bei einer in ihren verschiedenen Theilen und in verschiedenen Richtungen gleichmässig leuchtenden Fläche ebensowohl das Produkt aus Flächengrösse und räumlichem Sehwinkel der Pupille von der Fläche aus, als das Produkt aus Pupillengrösse und räumlichem Sehwinkel der Fläche von der Pupille aus — beide Produkte noch mit dem Faktor k multiplicirt. Folglich ist

$$L = kp_0^2\pi \cdot \omega \text{ und } H = kp_0^2\pi,$$

wo p_0 der Halbmesser der Augenpupille ist. Also ist H unabhängig von der Entfernung der Fläche.

Bei verschiedener Pupillenöffnung ist die nach der Netzhaut übergeführte Lichtmenge *caet. par.* dieser Oeffnung, also dem Quadrate ihres Durchmessers proportional.

In den verschiedenen Theilen der lichtstrahlenden Fläche kann, damit obige Betrachtung Geltung behält, k beliebig verschiedene Werthe besitzen; nur muss es für jede Stelle der Fläche constanten Werth haben innerhalb derjenigen Sehwinkel, unter denen die Pupille des Beobachters von der Fläche aus in den verschiedenen Entfernungen erscheint. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen auch bei nichtleuchtenden Flächen erfüllt sein, so dass obiger Satz eine ziemlich weitgehende Giltigkeit besitzt. Vorausgesetzt ist bei seiner Ableitung ferner, dass die Pupillenöffnung bei Betrachtung der Fläche in der Nähe dieselbe sei, als wenn dieselbe fern ist, und es ist die Absorption des Lichtes durch das zwischen Fläche und Auge befindliche Medium vernachlässigt.

Wenn aber ein Objekt sich dem Auge unter einem Sehwinkel darbietet, bei welchem dieses Grösse und Gestalt desselben nicht mehr unterscheiden kann, bei welchem das Objekt also in physiologischer Beziehung einem Punkte gleich ist, so verliert die obige Bestimmungsweise der Helligkeit ihre natürlichen Unterlagen und ihren Sinn. Man nimmt in solchem Falle an, dass nur ein Nervenelement oder die Mindestzahl der getrennt erregbaren gereizt werde. So lange dies Verhältniss gewahrt bleibt, ist der Reiz, d. h. die Helligkeit des Bildes, der gesammten auf die Netzhaut bezw. die Pupille des Auges gelangenden Lichtmenge proportional zu setzen. Die Helligkeit eines unter so kleinem Sehwinkel erscheinenden Gegenstandes ist also bei verschiedener Entfernung desselben vom Auge umgekehrt proportional dieser Entfernung und ausserdem natürlich proportional der Pupillenöffnung.

Die scheinbare Helligkeit der Bilder bei subjektiver Beobachtung. Wir können uns nach diesen Vorbemerkungen zur Bestimmung der photometrischen Verhältnisse der von optischen Instrumenten entworfenen Bilder wenden. Dieselben Normen, nach welchen die Intensität der Wirkung realer Körper im Objektraum bemessen wird, sind anzuwenden für die Bestimmung derselben im Bildraum. Hier wie dort wird diese Wirkung — dieselbe mag nun in der Erregung eines Sehorgans oder in der Beleuchtung anderer Objekte bestehen — völlig und in gleicher Weise bestimmt sein durch die geometrischen Bedingungen (Ausdehnung, Lage etc. der strahlenden und bestrahlten Flächen) einerseits und durch die specifische Intensität der Strahlung andererseits.

Die Aenderung in den geometrischen Verhältnissen, welche bei der Abbildung eintritt, ist in den voranstehenden Abschnitten erschöpfend behandelt. Wenn das Objekt nach seiner Grösse und Lage zum Linsensysteme und der Bereich, innerhalb dessen es Licht aussendet, gegeben ist — letzteres durch Lage und Grösse der *E.-P.* — so ist bei einem gegebenen System auch Lage und Gestalt des Bildes bestimmt, sowie der Bereich, innerhalb dessen dieses seinerseits Licht ausstrahlt oder empfängt — letzteres durch die *A.-P.* nach ihrer Grösse und ihrer Lage zu jenem Bilde.

Um die Lichtwirkung des Bildes in Vergleich zu setzen mit der des Objektes bleibt also nur noch zu untersuchen, welche Modifikation die specifische Intensität der strahlenden Elemente bei der Abbildung erfährt.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass das Bild subjektiv betrachtet wird, dass es also vor der *A.-P.* des Instruments liegt und von dieser aus angesehen wird. Die Intensität der vom Objekt ausgehenden Strahlung nehmen wir für dessen verschiedene Elemente und innerhalb des wirksamen Oeffnungswinkels als bekannt an. (Wie sich dieselbe bestimmt, wenn das Objekt nicht selbstleuchtend ist, sondern von einer anderen Lichtquelle — sei es direkt, sei es mit Hilfe von hierzu dienenden besonderen optischen Vorrichtungen — bestrahlt wird, ergiebt sich zum Theil aus dem Nachfolgenden.) Wir setzen ferner voraus, dass das abbildende System aplanatisch sei für die betrachteten conjugirten Flächen in O und O'.

Sei dq (Fig. 349) ein der Axe bei O sehr nahes Element des Objektes, k die Intensität der von ihm ausgehenden Strahlung in einem beliebigen Azimut v und in einer Richtung, welche mit der Axe des Systems den Winkel u einschliesst. Die Lichtmenge, welche dq nach einem in dieser Richtung gelegenen Element dQ der *E.-P.* sendet, ist dann gemäss dem photometrischen Grundgesetz Gleichung 1a)

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos u \cdot d\Omega, \qquad (3)$$

wo $d\Omega$ der körperliche Sehwinkel ist, unter welchem das betreffende Element der Eintrittspupille von dq aus erscheint. Ich begrenze dieses Element nun in der Weise, dass seine Projection auf die um dq geschlagene Kugel vom Radius Eins zwischen zwei unendlich benachbarte Meridiane und zwei benachbarte Breitenkreise fällt — die Axe des optischen Systems hierbei als die Axe jener Kugel gedacht. Dann ist

$$d\Omega = \sin u \cdot du \cdot dv,$$

somit

$$dL = k \cdot dq \cdot \cos u \cdot \sin u \cdot du \cdot dv \ldots \quad (4)$$

Von dem zu dq der Lage und Grösse nach conjugirten Bildelemente dq' wird dem entsprechenden Elemente der *A.-P.* eine Lichtmenge dL' zugestrahlt, welche der Form nach durch einen ganz analogen Ausdruck gegeben ist, nämlich

$$dL' = k' \cdot dq' \cdot \cos u' \cdot \sin u' \cdot du' \cdot dv' \ldots \quad (5)$$

Hierin ist $dv' = dv$ zu setzen; denn bei allen Brechungen bleiben die Strahlen innerhalb der Meridiane, in welchen sie sich einmal befinden. Der Winkel u' ist bestimmt als der zu u conjugirte; dq' ist das nach Maassgabe der in O und O' bestehenden Linearvergrösserung β entworfene Bild von dq, also

$$dq' = \beta^2 \cdot dq.$$

Um nun dL' in Beziehung zu dL zu setzen, wollen wir zunächst einmal die — von der Wirklichkeit abweichende — Annahme machen, dass die im Systeme zum Bilde mitwirkenden Flächen ausschliesslich diejenige Wirkung ausüben, welche zur Bilderzeugung beiträgt, dass also die durch Spiegelung hierzu beitragenden nur spiegeln und weder durch Brechung noch durch Absorption einen Theil des Lichts in sich aufnehmen und hierdurch für das Bild verloren gehen lassen. Ebenso dass bei allen mitwirkenden Brechungen keinerlei Lichtverlust durch regelmässige und diffuse Reflexion erfolge und endlich, dass bei dem Durchgange des Lichtes durch die verschiedenen Medien keine Absorptionen stattfinden. Alsdann wird das gesammte von dq zu dem Pupillenelement gestrahlte Licht dL unverändert von dem Bildelement dq' nach der *A.-P.* übergeführt, d. h. es ist dann

$$dL' = dL; \quad (6)$$

somit

$$k \cdot dq \cdot \cos u \cdot \sin u \cdot du \cdot dv = k' \cdot dq' \cdot \cos u' \cdot \sin u' \cdot du' \cdot dv$$

oder (6a)

$$k \cdot dq \cdot d(\sin^2 u) = k' \cdot \beta^2 dq \cdot d(\sin^2 u')$$

Bei einem aplanatischen System ist aber nach Gleichung (4), pag. 118

$$d(\sin^2 u) = \beta^2 \left(\frac{n'}{n}\right)^2 d(\sin^2 u'),$$

worin β dieselbe Constante ist wie oben; folglich bestimmt sich

$$\frac{k'}{k} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2. \quad (7)$$

Wie also auch k und k' einzeln innerhalb des gegebenen Oeffnungswinkels variiren mögen, ihr Verhältniss ist in jeder Richtung dasselbe und dieses Verhältniss ist gänzlich unabhängig von allen Momenten, welche für das abbildende System oder das von ihm entworfene Bild sonst bestimmend sind; es hängt vielmehr allein ab von den Brechungsexponenten der Medien, innerhalb welcher sich Objekt und Bild befinden[1]).

[1]) In dem obigen ist der Beweis für die Gültigkeit einer Beziehung in dem engeren hier betrachteten Gebiete gegeben, welche von Kirchhoff und Clausius für einen allgemeineren Fall nachgewiesen ist. Helmholtz (Pogg. Ann. Jubelbd., pag. 557. 1874) geht davon aus, dass $k' : k = n'^2 : n^2$ sei und beweist hieraus den Sinussatz als Bedingung des Aplanatismus.

Die Intensität der Strahlung irgend eines Bildelementes in irgend einer Richtung ist also überall proportional der Strahlungsintensität des correspondirenden Objektelements in der conjugirten Richtung und zwar stets im Verhältniss des Quadrats des relativen Brechungsexponenten des Bildmediums zum Objektmedium. Da der Bereich, innerhalb dessen eine Strahlung überhaupt stattfindet durch die *A.-P.* bestimmt ist — und zwar durch diese genau ebenso wie die Strahlung einer selbständig leuchtenden Fläche durch ein physisches Diaphragma — so sind nunmehr alle Elemente gegeben, um die Strahlungswirkung des Bildes an irgend einer Stelle zu berechnen.

Die für die Ableitung der Intensitätsbezeichnung gemachte, der Wirklichkeit widersprechende Annahme (6) ist auf das Resultat ohne wesentlichen Einfluss; sie diente nur dazu, die Uebersicht der Verhältnisse zu erleichtern. In Wirklichkeit wird mit jeder zur Bilderzeugung mitwirkenden Reflexion und Brechung, sowie mit jedem Durchtritt der Strahlen durch ein Medium ein Lichtverlust verbunden sein, welcher von der Beschaffenheit der betreffenden Substanzen und den geometrischen Verhältnissen (Einfallswinkel bezw. Länge des vom Strahl in jedem Medium zurückgelegten Weges) abhängt. Dieser Lichtverlust wird also im allgemeinen auch eine Function des Winkels u sein. Er lässt sich aber nicht allgemein angeben, sondern ist in jedem einzelnen Falle und für jede einzelne Strahlungsrichtung aus den Constructionsdaten des Systems zu berechnen. Denken wir uns diese Function μ, welche denjenigen Bruchtheil des einfallenden Lichtes angiebt, welcher in einem gegebenen System zwischen Objekt und Bild für letzteres verloren gegangen ist, den Verlustfaktor, irgendwie bestimmt, so hat man statt $L' = L$ vielmehr $L' = (1 - \mu) \cdot L$ zu setzen, und hieraus folgt durch dieselben Schlüsse wie oben

$$\frac{k'}{k} = (1-\mu)\left(\frac{n'}{n}\right)^2. \qquad (7\,a)$$

Man wird bei subjectiver Beobachtung schwerlich einen Fall realisiren können, in welchem $n' > n$ ist, man hat vielmehr meistens $n' = n = 1$ oder in den sogen. Immersionssystemen sogar $n' < n$. Da μ natürlich ein echter Bruch ist, so folgt aus der letzten Gleichung, dass die Intensität der Strahlung im Bilde auch im günstigsten Falle der entsprechenden des Objektes nicht einmal gleich sein könne, sondern auch dann noch durch die sozusagen zufälligen aber unvermeidlichen Lichtverluste beim Durchgange durch das System vermindert ist.

Mit Rücksicht hierauf müsste man sagen, dass durch optische Systeme — welcher Art auch immer — niemals eine Condensation des Lichtes in Bezug auf die specifische Intensität hervorgebracht wird, sondern im Gegentheil stets eine Verdünnung, Attenuation, desselben.

Für die Berechnung der Helligkeit, in welcher das Bild von der *A.-P.* aus erscheint und ihr Verhältniss zu der Helligkeit, in welcher etwa das Objekt unter den gegebenen Umständen der Beleuchtung etc. dem unbewaffneten Auge erscheinen würde, sind in den oben abgeleiteten Beziehungen alle nöthigen Bestimmungsstücke enthalten. Weitere Folgerungen lassen sich in Bezug auf sie jedoch nur ziehen, wenn gewisse vereinfachende Annahmen gemacht werden.

Wenn die specifische Intensität k innerhalb des ganzen Oeffnungswinkels u constant ist — wie bei selbstleuchtenden festen Körpern sehr nahe der Fall — so ist auch k' eine Constante innerhalb des Winkels u'. Die Helligkeit des Bildes ist dann, wie wir oben gesehen haben, einfach proportional der Fläche der Austrittspupille, mit welcher die Augen-

pupille in Coincidenz gebracht ist — jedoch nur so lange, als letztere grösser ist wie erstere. Wenn hingegen die Augenpupille die kleinere ist, so blendet sie den überschiessenden Theil der *A.-P.* ab und wirkt selbst als *A.-P.* des Instruments.

Bezeichnet also H_0 die Helligkeit, mit welcher das unbewaffnete Auge das Objekt sieht — oder in welcher ihm ein an Leuchtkraft völlig gleiches und nur in allen Theilen proportional vergrössertes Bild erscheinen würde — und H die Helligkeit des durch das Instrument gesehenen Bildes, so ist

$$\frac{H}{H_0} = \frac{p'^2}{p_0^2}, \tag{8}$$

wenn p' den Halbmesser der *A.-P.*, p_0 den der Augenpupille bezeichnet.

Bei den nach Art des Mikroskops wirkenden Systemen fanden wir den Halbmesser der *A.-P.*, p', sehr nahezu

$$p' = \frac{f'}{n'} a,$$

wo $a = n \cdot \sin u$ die Apertur des in das System eintretenden Büschels bezeichnet. Da wir stets $n' = 1$ setzen können, so haben wir $p' = a \cdot f'$. Also

$$H = H_0 \frac{a^2 \cdot f'^2}{p_0^2} = H_0 \frac{a^2}{V^2 p_0^2} = H_0 \frac{a^2 l^2}{N^2 p_0^2}, \tag{9}$$

wenn V die absolute, N die lineare auf die Entfernung l bezogene Vergrösserung des Systems ist.

Die »Normalvergrösserung« V_0 bezw. N_0, bei welcher das Bild in gleicher Helligkeit erscheint, wie das Objekt dem blossen Auge (natürlich in Luft) erscheinen würde, ist hiernach

$$V_0 = \frac{a}{p_0} \text{ bezw. } N_0 = \frac{a \cdot l}{p_0}. \tag{10}$$

Bei derselben Apertur a ist unter verschiedener Vergrösserung

$$H : H_0 = V_0^2 : V^2 = N_0^2 : N_0^2, \tag{11}$$

solange $V > V_0$ bezw. $N > N_0$; hingegen ist

$$H = H_0 \text{ wenn } V \leqq V_0 \text{ bezw. } N \leqq N_0. \tag{11a}$$

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist also höchstens gleich der des Sehens mit blossem Auge, und zwar dann, wenn die Vergrösserung gleich oder kleiner als die Normalvergrösserung ist.

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist bei ungeänderter Apertur umgekehrt proportional der Flächenvergrösserung, solange diese grösser als die Normalvergrösserung ist[1]).

Bei gegebener Vergrösserung ist die Helligkeit des Bildes proportional dem Quadrate der Apertur der einfallenden Büschel.

Man erhält hiernach folgende zusammengehörige Werthe der Apertur der (conventionellen) Vergrösserung und Helligkeit, wenn man den Radius der Augenpupille $p_0 = 1{\cdot}5$ *mm* annimmt

	$H = H_0$	$H = \frac{1}{4} H_0$	$H = \frac{1}{9} H_0$	$H = \frac{1}{16} H_0$
$a = 0{\cdot}5$	83·3	166·7	250·0	333·3
1·0	166·7	333·3	500·0	666·7
1·5	250·0	500·0	750·0	1000·0

Die Vergrösserungszahlen der zweiten Spalte ($H = \frac{1}{4} H_0$, also $p_0 = 0{\cdot}75$ *mm*) kann man, wie wir später sehen werden, sehr annähernd als diejenigen der unverminderten Deutlichkeit des Bildes bezeichnen; sie sind beim Mikroskop,

[1]) HELMHOLTZ, l. c., pag. 567. ABBÉ, M. SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 438. 1873.

wo künstliche Beleuchtung anwendbar ist, von weit grösserer Bedeutung als diejenigen der unverminderten Objekt-Helligkeit.

Bei teleskopischen Systemen fanden wir (pag. 184) die angulare Vergrösserung gleich dem Reciproken der linearen Vergrösserung in den Pupillen

$$\Gamma = \frac{p}{p'} \quad \text{also} \quad p' = \frac{p}{\Gamma}.$$

Daher ist hier

$$H = H_0 \frac{p^2}{p_0^2} \frac{1}{\Gamma^2}, \tag{12}$$

d. h. es spielt hier die lineare Oeffnung genau dieselbe Rolle wie bei mikroskopischen Systemen die numerische Apertur. Die Normalvergrösserung Γ_0 ist $= p/p_0$. Somit kommen bei unverminderter Helligkeit des Bildes auf je 3 *mm*, behufs Einhaltung normaler Deutlichkeit auf je 1·5 *mm* Oeffnung eine Vergrösserungsziffer.

Wir können daher das allgemeine Resultat dieser Betrachtung dahin aussprechen: In so weit flächenhaft ausgedehnte Objekte in Frage stehen, ist die Leistung optischer Instrumente — von welcher Construction und welchen Anwendungsgebietes auch dieselben sein mögen — darauf gerichtet und zugleich beschränkt, die Objekte dem Auge im Bilde unter vergrössertem Sehwinkel darzubieten, aber in höchstens der gleichen Helligkeit.

Wird aber das System zur Beobachtung von Sternen benützt, welche wegen ihrer grossen Entfernung sich auch bei der von dem Teleskop gelieferten Vergrösserung wie leuchtende Punkte darstellen, so tritt für diese der andere Begriff der Helligkeit in Kraft, wonach dieselbe der gesammten zum Bildpunkte übergeführten Lichtmenge proportional ist. So lange also die Vergrösserung Γ des Teleskops kleiner ist als die Normalvergrösserung Γ_0 — die *A.-P.* grösser als die Augenpupille — reducirt sich die wirksame (Halb-) Oeffnung des Systems auf $\Gamma \cdot p_0$, und die Helligkeit des Sternbildes im Teleskop ist Γ^2 mal grösser als die des direkt gesehenen Sternes. Wenn die Vergrösserung den Werth Γ_0 oder einen grösseren hat, so ist die Helligkeit im Bilde dauernd $(p/p_0)^2$ mal grösser als mit freiem Auge. Man kann also, beide Fälle zusammenfassend, auch sagen, die Helligkeit des Sternbildes ist um so viel grösser als die des direkt gesehenen Sternes, wie die wirksame Oeffnung des Systems die der Augenpupille übertrifft[1]).

Da der Himmelsgrund, von welchem sich die beobachteten Sterne abheben, gemäss dem obigen durch das Teleskop höchstens in gleicher Helligkeit erscheinen kann als mit blossem Auge, so wird ausser der absoluten Helligkeit des Sternbildes auch der Helligkeitsunterschied zwischen dem Stern und dem Untergrund mit wachsender Vergrösserung immer grösser. In Folge dessen werden Sterne durch Teleskope proportional dem Quadrate ihrer wirksamen Oeffnung sichtbarer gemacht. Da die Helligkeit des Himmelsgrundes bei weiterer (Ueber-) Vergrösserung noch proportional dem Quadrate dieser abnimmt, die des Sternes aber hierbei constant bleibt, so ist bei Uebervergrösserung die Sichtbarkeit des Sternes noch vermehrt. Dies Verhältniss geht aber nicht ins Unbegrenzte weiter, da von einer gewissen Vergrösserung an das Sternbild — theils in Folge

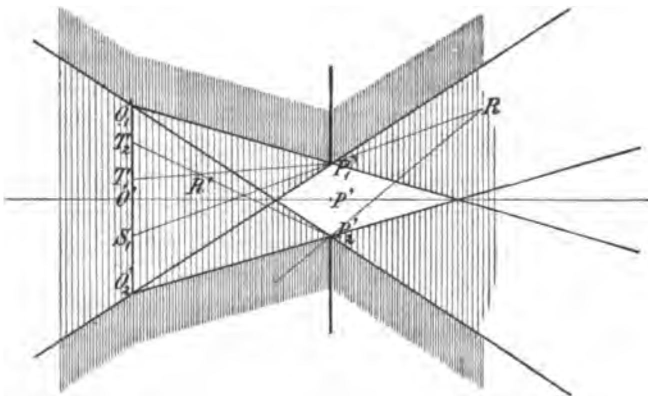
---

[1]) Hierbei ist vernachlässigt, dass sich in Wirklichkeit die Pupille bei Beobachtung des helleren Sternbildes zusammenzieht, beim Sehen mit blossem Auge aber in dunkler Nacht eine viel grössere Oeffnung als 3 *mm* annimmt.

der Aberrationsreste, theils unabhängig von solchen in Folge der Beugung — flächenhaft ausgedehnt wird. —

Wenn die Leuchtkraft des Objektes nicht nach einfachen Regeln bestimmt ist, so lassen sich, wie schon bemerkt, auch keine weiteren Beziehungen als die früher angegebenen zwischen der Helligkeit des direkt gesehenen Objektes bezw. eines bei unveränderter Leuchtkraft blos in seinen Dimensionen vergrösserten Bildes und der seines durch das Instrument beobachteten Bildes feststellen. Bei einer stetig von der Normalen an abnehmenden Strahlungsintensität des Objektes z. B. wird dieses dem blossen Auge in senkrechter Richtung gesehen heller erscheinen müssen als durch das Instrument bei der Normalvergrösserung; denn im ersteren Falle sind die Strahlen der nach der Pupille gelangenden Büschel durchaus von der maximalen Intensität; in den nach der *A.-P.* des Instrumentes zielenden Büscheln aber ist das gesammte einfallende Büschel sozusagen noch einmal in verkleinertem Maassstabe reproducirt, d. h. es enthält neben den centralen hellen Strahlen auch die peripheren mehr und mehr lichtschwachen. In Folge dessen ist die durch ein solches Büschel ausgestrahlte ins Auge gelangende Lichtmenge, und damit die Helligkeit des Bildes, auch bei der »Normalvergrösserung« kleiner als die des direkt gesehenen Objektes. Verglichen mit der Helligkeit des direkt, aber ganz schräg angesehenen Objektes wiederum würde sie grösser sein, und so kann bei entsprechenden Strahlungsgesetzen und entsprechenden Umständen jedes beliebige Verhältniss zwischen beiden Helligkeiten statt haben.

Beleuchtungswirkung des Bildes im übrigen Bildraum. Durch die Gleichung $k' = k\, n'/n^2$ in Verbindung mit den Gesetzen der Abbildung und Strahlenbegrenzung ist die Lichtwirkung des Bildes auch an jeder anderen Stelle als der *A.-P.* bezw. der Netzhaut des beobachtenden Auges völlig bestimmt.



(Ph. 350.)

Die Strahlung findet mit der in conjugirten Richtungen gemäss dem Quadrate des relativen Brechungsexponenten modificirten Leuchtkraft vom Bilde aus ganz ebenso statt, wie von einem nach entsprechendem Gesetze selbständig strahlenden Objekte und ist räumlich durch die im System stattfindende Strahlenbegrenzung genau ebenso beschränkt, wie die eines solchen Objektes durch eine der *A.-P.* nach Grösse und Lage gleiche Oeffnung in einer physischen für Licht undurchlässigen Wand. Vermöge einer Construktion, ganz gleichartig derjenigen, durch welche man Kernschatten, Halbschatten und Lichtraum eines leuchtenden Körpers findet, kann man in allen Fällen den ganzen Raum im Bereiche des letzten Mediums in drei von einander getrennte Abschnitte zerfällen[1]) (Fig. 350): erstens in einen

[1]) Vergl. E. Abbe, Lichtstärke in optischen Instrumenten. Jen. Zeitschr. f. Naturw. u. Med. 6, pag. 263. 1872.

solchen, in welchem alle Punkte des Bildes strahlend wirken, wozu auf alle Fälle die *A.-P.* $P_1'P_2'$ selbst gehört; zweitens in einen solchen, für welchen ein Theil des Bildes leuchtet, ein anderer unwirksam ist; endlich in einen dritten, für welchen alle Wirkung ausgeschlossen ist, d. h. das ganze Bild durch die undurchsichtige Wand des Diaphragmas verdeckt sind. (In der Figur sind diese Theile durch verschiedene Schraffirung unterschieden.) Der für irgend einen Punkt R wirksame Theil $S_1 O_2'$ des Bildes bestimmt sich, wegen der Geradlinigkeit der Strahlen, stets als die Projection der *A.-P.* von diesem Punkte auf das Licht ausstrahlende Bild, bezw. als der Theil des Bildes, welcher innerhalb dieser Projection gelegen ist. Hierbei ist es gleichgiltig, ob der Punkt R jenseits der *A.-P.* oder wie R' zwischen ihr und dem Bilde liegt. Im letzteren Falle ist die Projection $T_1 T_2$ eine virtuelle, durch Rückwärtsverlängerung der Strahlen von der *A.-P.* nach dem Punkte R' hin auszuführende. Ebenso ist es gleichgiltig, ob die *A.-P.* im Sinne der Lichtbewegung hinter dem Bilde liegt — wie bei Bestimmung der scheinbaren Helligkeit jedenfalls angenommen werden muss — oder vor demselben. Im letzteren Falle — man denke sich z. B., dass in Fig. 350 $O_1'O_2'$ die *A.-P.* und $P_1'P_2'$ das Bild sei — geht die Strahlung auf einen vor dem Bilde gelegenen Punkt zwar natürlich nicht von diesem, sondern in Wirklichkeit von der *A.-P.* aus. Die Art, wie wir die Lichtwirkung auf den Punkt R vorher bestimmten, kann aber trotzdem auch hier unverändert festgehalten werden.

Beleuchtungswirkung am Orte des Bildes. Lichtstärke proicirter Bilder. Man kann in solchen Fällen die Wirkung auch direkt als eine von der *A.-P.* ausgehende bestimmen, indem man auf den pag. 191 abgeleiteten Satz zurückgreift. Nach diesem ist die Beleuchtungswirkung an der Stelle R' von dem für sie wirksamen Theile $T_1 T_2$ des Bildes aus genau dieselbe, wie eine von der *A.-P.* ausgehende, wenn man jedem Punkte P_1' der letzteren die gleiche Leuchtkraft beilegt, als der auf dem Vektor $P_1'R'$ gelegene Bildpunkt T_1 in der Richtung des Vektors hat. Man kann daher das Gesetz der Lichtwirkung überhaupt auch in folgender Form aussprechen: Es ist die gesammte Strahlung an irgend einem Orte des letzten Mediums in allen Stücken identisch mit einer Strahlung aus der Fläche des Oeffnungsbildes, wofern man dieser jedesmal Punkt für Punkt eine Leuchtkraft beilegt, gleich oder proportional derjenigen welche die ursprüngliche Lichtquelle in dem Theile, dessen Bild sich von jenem Orte aus auf das Bild der Oeffnung projicirt und zwar in der betreffenden Projectionsrichtung besitzt[1]).

Diese Form des Gesetzes ist zwar im allgemeinen gegenüber der zuerst entwickelten für die Uebersicht der gesammten Wirkungen weniger bequem. Dagegen ist sie allein anwendbar und zugleich auch besonders einfach in dem speciellen Falle, dass die Lichtwirkung gesucht wird für einen Punkt, der in das Bild der Lichtquelle selbst fällt. Dieses Bild muss hierbei, sofern physisch realisirbare Verhältnisse ins Auge gefasst werden, natürlich ein reelles sein. Für diesen Fall — wie er bei jeder Sammellinse für ihren Focus, ebenso bei gewissen Beleuchtungsapparaten, beim Auge, photographischen Objectiv und Projectionsmikroskop sowie jeder anderen Projection des Bildes auf einen Schirm vorliegt — versagt die zuerst aufgestellte Regel ihren Dienst. Denn es würde dann der wirksame Theil des Bildes und zugleich sein Abstand vom Orte der Wirkung

---

[1]) ABBÉ, l. c., pag. 288. Wir folgen dieser Darstellung im nachstehenden zum Theil wörtlich.

gleich Null. Hingegen stellt sich dieser Fall für die zuletzt ausgesprochene Form des Gesetzes als ein einfacher Grenzfall dar. Denn je näher der Punkt R' an $O_1'O_2'$ rückt, desto kleiner wird der Theil T_1T_2, desto kleiner also auch der correspondirende Theil der Lichtquelle selbst, von welchem die *A.-P.* ihre Leuchtkraft entlehnt. Rückt R' schliesslich ganz in das Bild $O_1'O_2'$, so reducirt sich der Raum T_1T_2 auf einen einzigen Punkt, dessen Leuchtkraft folglich für alle Theile des Oeffnungsbildes zugleich maassgebend wird. Man erhält daher für den ins Auge gefassten Fall folgenden einfachen Satz:

Die Lichtwirkung, welche irgend ein optischer Apparat in einem beliebigen Punkte des Bildes einer gegebenen Lichtquelle vermittelt, ist stets äquivalent einer Lichtstrahlung aus der Fläche des Oeffnungsbildes, wenn dieser in allen Theilen die Leuchtkraft des zugehörigen Objektpunktes in der entsprechenden Richtung beigelegt wird — oder eine dieser im Verhältniss des Quadrates des Brechungsexponenten proportionale, falls das letzte Medium vom ersten verschieden ist.

Wir konnten dieses letztere Ergebniss auch unmittelbar aus den Grund-Gleichungen ableiten, indem wir berücksichtigten, dass die Grösse dL in Gl. (1) und (1a) wegen deren symmetrischer Form ebensogut auch als die Lichtmenge aufgefasst werden kann, welche das Element dQ der Pupille auf das Element dq des Objektes strahlt, wenn ersterem diejenige Leuchtkraft k beigelegt wird, welche dq in der betreffenden Richtung hat. Das gleiche Verhältniss gilt dann auch im Bildmedium. Dieselbe Strahlungswirkung, welche von einem Bildelement in irgend einer Richtung ausgeht, würde nach jenen Gleichungen von dem in dieser Richtung gelegenen Element der *A.-P.* ausgeübt werden, wenn dasselbe die gleiche Leuchtkraft k' besässe — und dies gilt dann ohne weiteres auch für Orte im Bilde selbst.

Besitzt wieder das Objekt eine innerhalb der wirksamen Apertur vom Strahlungswinkel unabhängige Leuchtkraft, so ist die Beleuchtungstärke, welche durch Projection seines Bildes auf einen Schirm in diesem hervorgebracht wird, genau dieselbe, als wenn die *A.-P.* gleichmässig mit der Intensität des Objektes — oder einer ihr im Verhältniss von $(n'/n)^2$ proportionalen — leuchtete. —

Mit dieser Ergänzung vermag die aufgestellte Theorie über alle Fragen Rechenschaft zu geben, welche sich auf dem Boden der ihr zu Grunde liegenden Voraussetzungen darbieten können. Uebrigens erkennt man, dass alle wesentlichen Ergebnisse dieser Betrachtungen, wenigstens als mehr oder minder zutreffende Näherungen oder mit leicht zu überschauenden Correctionen, auch dann noch in Geltung bleiben, wenn eine oder die andere jener Voraussetzungen im einzelnen Falle nicht vollständig erfüllt ist.

Wie der unvermeidlichen Verminderung der Leuchtkraft in Folge von Reflexionen und Absorptionen durch Einführung eines Verlustfaktors Rechnung getragen werden kann wurde oben schon erwähnt. Was ferner die chromatischen und sphärischen Abweichungen anlangt, so stellten erstere von vornherein kein Hinderniss für die Anwendung der entwickelten Sätze dar; denn diese kann auf die verschieden farbigen Bestandtheile des Lichtes einzeln erfolgen und liefert alsdann für jeden ein Resultat der gleichen Art, nur dass die geometrischen Bestimmungsstücke darin -- Grösse und Lage der maassgebenden Bilder — von einer Farbe zur anderen um ein weniges variiren. Die Gesammtwirkung lässt sich daher bestimmen durch Summation der Strahleneffekte, welche von den verschiedenen farbigen Bildern, jedes für sich genommen, ausgehen.

Das Auftreten sphärischer Aberrationen, und zwar solcher, welche den homocentrischen Verlauf der Strahlen beeinträchtigen, hebt allerdings den Begriff des optischen Bildes und damit auch die darauf gegründeten Schlüsse streng genommen auf. Daher erlauben die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung die Anwendung ohne weiteres nur in dem Falle, dass die Oeffnungswinkel der wirkenden Strahlenkegel verschwindend klein bleiben, oder es muss, wenn sie eine endliche Grösse besitzen, ausdrücklich die Annahme gemacht werden, die wir anfangs eingeführt haben, dass das optische System für die Orte der beiden maassgebenden Bilder aplanatisch sei. Wie man indess, auch wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, bei der Betrachtung der rein geometrischen Beziehungen den einfachen Begriff des optischen Bildes dennoch festhält, indem man die Abweichungen vom Strahlengang durch Einführung kleiner Zerstreuungskreise für die Bildpunkte in Anschlag bringt, so lassen sich in diesem Falle auch die photometrischen Gesetze in der entwickelten einfachen Form aufrecht erhalten, wofern bei ihrer Anwendung im Einzelnen auf diese Zerstreuungskreise in leicht ersichtlicher Art Bedacht genommen wird. — Aberrationen endlich, welche sich in anderer Art äussern, etwa in einer Krümmung der Bilder oder in ungleichförmiger Vergrösserung, sind für die in Rede stehenden Fragen völlig gleichgültig, da über die Gestalt des Bildes keinerlei Voraussetzung gemacht worden ist.

Wir wollen die Resultate der vorstehenden Betrachtungen nur noch auf einen praktisch wichtigen Fall anwenden: die sogen. *Beleuchtungsysteme* (Condensoren, Collektoren), welche man im Mikroskop oder bei Projectionsapparaten anwendet. Mit Bezug auf diese folgt aus obigen Sätzen: »dass keine noch so kunstreich erdachte Combination optischer Apparate in Hinsicht auf die Stärke des durch eine Lichtquelle in ihrem eigenen Medium zu erzielenden Beleuchtung jemals mehr leisten kann, als auch ohne alle Zwischenmittel erreichbar ist, wenn man entweder der Lichtquelle von gegebener Beschaffenheit (d. h. gegebener Leuchtkraft) eine beliebig grosse Flächenausdehnung zu geben vermag, oder aber die zur Verfügung stehende Lichtquelle dem Orte der Wirkung beliebig zu nähern im Stande ist. Denn die schliessliche Wirkung aller denkbaren Hilfsapparate reducirt sich immer auf die direkte Strahlung einer Fläche, welche zwar vom Orte der Wirkung aus unter Umständen einen sehr viel grösseren *Winkelraum* als die Lichtquelle selbst erfüllen kann, die jedoch an keiner Stelle eine höhere *Leuchtkraft* entwickelt als die Lichtquelle selbst, mindestens in einem ihrer Theile, faktisch besitzt — wenigstens insofern die Wirkung in demselben Medium erfolgt. Ist es daher möglich, die Lichtquelle dem Punkte der Wirkung so weit zu nähern, dass ihr am intensivsten leuchtender Theil unter einem eben so grossen Winkelraum erscheint als bei Anwendung des Beleuchtungssystems, so muss auch ihre Lichtwirkung ohne alle Hilfsapparate die gleiche werden wie mit deren Hilfe; in Wahrheit wird erstere sogar überwiegen um den Betrag der unvermeidlichen Lichtverluste, die wiederholte Spiegelungen und Brechungen nach sich ziehen. *Alle Vorrichtungen zur Verstärkung einer Beleuchtung, zur sogen. Lichtconcentration, können daher niemals einen anderen Zweck haben — wenigstens niemals einen andern wirklich erfüllen — als den: mit Hilfe einer gegebenen Lichtquelle von beschränkten Dimensionen oder an einem entfernten Orte dennoch eine solche Wirkung zu erzielen, wie sie direkt nur durch eine sonst gleichartige, aber von anderer Ausdehnung oder in anderer Lage erreichbar*

wäre«[1]). Nur in dem Falle, dass das Licht dem Objekte mittelst der Beleuchtungsvorrichtung in einem anderen Medium als Luft zugeführt wird — wie dies z. B. bei den sogen. Immersionscondensoren der Mikroskope der Fall ist — wird die Beleuchtung des Objektes bei gleicher Winkelausdehnung der Lichtquelle im Verhältniss von $n^2 : 1$ gesteigert.

3) Die Apertur der Systeme ist endlich noch maassgebend für die Beugungserscheinungen, welche die Abbildung begleiten oder vielmehr, vom Standpunkte der Undulationstheorie, deren eigentliches Wesen ausmachen.

Wenn das Objekt selbstleuchtend ist, also jeder Punkt desselben, unabhängig von den benachbarten, Centrum einer Wellenbewegung ist, so begrenzt die *E.-P.* bei nahen Objekten die angulare, bei unendlich entfernten die lineare Ausdehnung der in das System eintretenden, die *A.-P.* ebenso diejenige der zum Bilde übergeführten Wellenflächen. Die angulare Oeffnung der letzteren aber bestimmt die Grösse des Beugungsscheibchens, welches in der dem Objekt dioptrisch conjugirten Ebene nach den Gesetzen der Diffractionstheorie an Stelle eines Bildpunktes entsteht. Auf diese Weise wird die Apertur, und zwar wie eine nähere Betrachtung lehrt, in dem von uns stets benutzten Maasse als Produkt aus Brechungsexponent des Objektmedium und Sinus des halben Oeffnungswinkels in diesem Medium, bestimmend für die Feinheit des »Korns«, welches, auch bei der grössten dioptrischen Vollkommenheit des Systems, im Bilde stets vorhanden ist. Die Schärfe, in der sich die Conturen grösserer Objekte abbilden und das Auseinandertreten, die sichtbare Scheidung, sehr nahe benachbarter Objektelemente hängen also in diesem Falle unmittelbar und allein von der Apertur des Systems ab.

Wenn das Objekt nicht selbstleuchtend ist sondern von einer anderen Lichtquelle be- oder durchleuchtet wird, so findet der oben angedeutete Abbildungsvorgang nur in Bezug auf diese originäre Lichtquelle statt. Die Strahlen (Elementarwellen), die das Objekt von jedem Punkt der Lichtquelle erhält, stehen jedoch in diesem Falle mit einander in einer einfachen Phasenverknüpfung, die nur von der Neigung des Objekts gegen die Verbindungslinie mit der Lichtquelle abhängt und das gleiche ist dann, gemäss der physischen Beschaffenheit des Objekts (seiner Absorptions- und Verzögerungswirkung) mit den von diesem ausgehenden reflektirten oder durchgelassenen Elementarwellen der Fall. Diese sind nach Richtung, Intensität und Phase anzusehen als der Beugungseffekt, den das Objekt jedem Punkt der Lichtquelle gegenüber ausübt. Die angulare Ausdehnung des Beugungseffektes wie seine ganze innere Beschaffenheit hängen hier in erster Linie von der Natur des in Frage stehenden Objektes ab. Die Apertur, d. h. die *E.-P.* nach Lage, Grösse und Brechungsexponent des Objektmediums ist dann bestimmend für den Umfang, in welchem dies am Objekt gebeugte Licht Zugang zum System und Bilde hat.

Eine nähere Analyse des hier in Frage stehenden Vorgangs zeigt, dass die Lichtvertheilung in der dem Objekt dioptrisch conjugirten Ebene des Bildraums, das sogenannte Bild des Objektes, ganz und gar bestimmt ist durch die geometrische wie physische Beschaffenheit des in das System eingelassenen Theils jener Beugungserscheinung. Ueber den Zusammen-

---

[1]) ABBÉ, l. c., s. auch Beiträge zur Theorie etc. MAX SCHULTZE's Arch. f. mikr. Anat. 9, pag. 438. 1873, und Ueber einen neuen Beleuchtungsapparat am Mikroskop ibid. pag. 469.

hang zwischen dem, was man in solchen Fällen als Bild des Objektes auffasst, mit diesem selbst und den Bestimmungsstücken (Brennweite und Apertur) des Systems lassen sich dann mehrere Sätze von ziemlicher Allgemeinheit aufstellen, welche durch zahlreiche Erfahrungen als im wesentlichen sicher zutreffend erwiesen sind.

Doch wollen wir den physikalischen Charakter beider Arten von Abbildung, der direkten von selbstleuchtenden und der secundären von beleuchteten Objekten, hier nur erwähnt haben und an späterer Stelle eingehend betrachten.

Für eine Theorie der Strahlenbegrenzung in dem oben festgehaltenen Sinne habe ich nur in den früher bereits genannten Werken von BIOT, MOSSOTTI, FERRARIS und in einigen wenigen Specialabhandlungen, z. B. von LUBIMOFF flüchtige Ansätze und spärliche Beiträge gefunden. Ihre eigentliche Begründung und systematische Durchführung dürfte auf ABBE (in seinen oben citirten Abhandlungen und seinen Universitätsvorlesungen) zurückzuführen sein. S. CZAPSKI.

Die Hauptgattungen der optischen Instrumente.

I. Projectionssysteme.

I. Das Auge.

Trotzdem nicht nur die physikalischen, sondern auch die physiologischen Functionen des Auges von grösster Bedeutung sind für das Verständniss und den richtigen Gebrauch aller anderen optischen Instrumente, können wir hier — dem Plane dieser Darstellung gemäss — selbst auf die ersteren nicht näher eingehen und etwas wie eine »Dioptrik des Auges« liefern, sondern müssen uns auf eine allgemeine Charakteristik seiner Einrichtung und Wirkung und auf die blosse Subsumption dieses optischen Instruments unter das Schema der übrigen beschränken. Bezüglich der gesammten Physiologie des Auges verweisen wir auf deren bekannte und z. Th. klassische Darstellungen[1]. Die Dioptrik des Auges ist ausser in diesen noch in einer Reihe besonderer Werke behandelt, von denen wir nachstehend die wichtigsten namhaft machen[2].

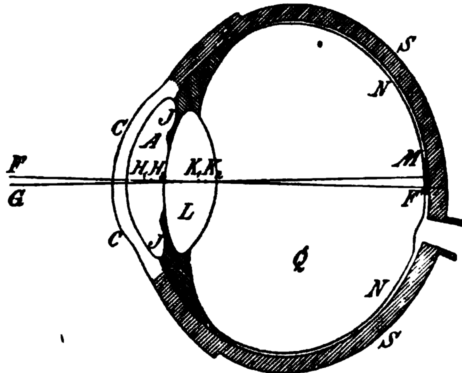
Das optische System im Auge besteht in der Reihenfolge von aussen nach innen aus a) der Hornhaut *(Cornea) C* (Fig. 351; rechtes Auge; Horizontalschnitt). Dieselbe bildet den vordersten, stärker gewölbten und durchsichtigen Theil der Sehnenhaut *(Sclerotica) S*, welche den gesammten Augapfel umschliesst. Sie ist ca. 1 Millim. dick, ellipsoidisch, im Scheitel aber sehr nahezu kugelig.

---

[1]) In erster Linie v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik. 1. Aufl. 1867. 2. Aufl. im Erscheinen begriffen. (Wir citiren im Folgenden stets nach der Paginirung der 1. Aufl.) Kürzer sind: H. AUBERT's Grundzüge d. physiol. Optik. Leipz. 1876.

[2]) LISTING, Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Ders. Mathem. Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge. WAGNER's Handwörterb. d. Physiol. 4, pag. 451, 1851. v. ZEHENDER, Anleitg. z. Stud. d. Dioptrik d. menschl. Auges. Erlangen 1856. WÜLLNER, Einleitg. i. d. Dioptr. d. Auges. Leipz. 1866. STAMMESHAUS, Darst. d. Dioptr. d. norm. menschl. Auges. Leipzig 1877. L. MATTHIESSEN, Grundr. d. Dioptr. geschichteter Linsensysteme. etc. Leipzig 1877. A. FICK, Art. d. Dioptr. d. Auges in HERMANN's Handb. d. Physiologie. Bd. 3.

Der Radius der hinteren Fläche ist nicht genau bekannt, dieselbe ist aber jedenfalls nahe concentrisch der vorderen[1]).



(Ph. 851.)

Die Hornhaut ist die vordere Wand der Augenkammer, *A*, welche mit einer Flüssigkeit *(Humor aqueus)* vom Index $n_D = 1{\cdot}3365$ gefüllt ist. Die Hinterwand der Kammer wird von der Iris, *I*, gebildet, welche die Apertur-Blende des Auges ist (Oeffnung gewöhnlich zwischen 2 und 5 Millim.) und in deren mittlerem freien Theile von der sich an diese anlegenden Krystallinse *L*. Letztere ist biconvex, im Ruhezustande an der vorderen Fläche erheblich weniger gekrümmt als an der hinteren, im Accommodationszustande nahezu gleichschenklig (nähere Angaben s. in der unten folgenden Tabelle). Sie besteht zwiebelartig aus sehr dünnen Schichten, deren Indices von der Hülle nach innen, dem Kern hin, zunehmen; dieser Textur verdankt sie mehrere wichtige Eigenschaften. Die Linse begrenzt nach vorn zu den zweiten Hohlraum des Auges, welcher mit dem Glaskörper *(Humor vitreus) Q*, einer gallertartigen Masse von nahezu demselben Index wie das Kammerwasser, ausgefüllt ist. Die hintere Begrenzung dieses Raumes wird von der Netzhaut *(Retina) N*, gebildet, der innersten Auskleidung der Sehnenhaut. Diese ist der lichtempfindliche Schirm des Auges, auf welchem dessen optischer Apparat die Bilder der äusseren Gegenstände entwirft. Besonders empfindlich ist der nicht ganz in der Augenaxe, sondern etwas nach der Schläfe zu gelegene gelbe Fleck *(Macula lutea) M* mit einer dünnen, etwas vertieften Stelle, der Netzhautgrube *(Fovea centralis)*, in der Mitte. Auf dieser Stelle wird das Bild desjenigen Gegenstandes entworfen, den das Auge fixirt, d. h. den man besonders scharf zu sehen sucht.

Cardinalpunkte und Grundfaktoren der Abbildung im Auge.

Da der Brechungsexponent des Kammerwassers wenig abweicht von dem der Hornhaut und letztere jedenfalls eine sehr grosse Brennweite besitzt, so vernachlässigt man gewöhnlich die an der Hinterfläche stattfindende Brechung und betrachtet die Vorderfläche der Hornhaut als die eines Mediums vom Index des Kammerwassers, das bis zur Krystalllinse reicht. Die so berechnete Brennweite der Hornhaut (s. die Tabelle unten) ist maassgebend für das Sehen aphakischer Augen, d. h. solcher, die durch Operation der Krystallinse beraubt sind, da das Kammerwasser auch nahe denselben Index hat wie der Glaskörper, welcher alsdann das ganze Augeninnere ausfüllt.

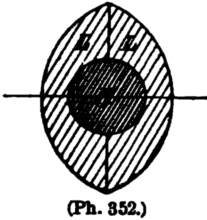
Die Krystalllinse hat infolge ihres geschichteten Baues, wie schon die älteren experimentellen Untersuchungen von Young, Listing, Senff, Helmholtz, Zehender erwiesen und die theoretischen Arbeiten namentlich von Hermann und Matthiessen erklärt haben eine kürzere Brennweite, als wenn sie bei gleicher äusserer Gestalt durchweg den grössten in ihr vorkommenden Brechungsindex, den des

---

[1]) Nach ganz neuen Messungen von Tscherning, Ztschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. 3, pag. 429. 1892, hat die Hinterfläche einen um 2 Millim. kürzeren Radius als die Vorderfläche.

Kerns, besässe. Ihre Brennweiten (aber nicht genau auch ihre anderen Cardinalpunkte) sind die einer gleichgeformten homogenen Linse von noch höherem Index als dem des Kerns, dem sogenannten Totalindex.

L. HERMANN[1]) giebt hierfür folgende schematische Erklärung: Die Krümmung der aufeinanderfolgenden Schichten nimmt bis zum Kern natürlich immer zu.


(Ph. 352.)

Die Schichten bilden daher lauter convexconcave Menisken, welche in Luft negative (vordere) Brennweite haben würden. Denkt man sich im einfachsten Falle die Linse bestehend aus einem kugeligen Kern *K*. (Fig. 352) von hohem Index, der von zwei concavconvexen Zerstreuungslinsen *L* niederen Indicis schalenartig umgeben ist, so compensiren letztere einen Theil der positiven Brechungswirkung des Kerns. Diese Compensation ist um so stärker, je höher der Index der Schalen ist und umgekehrt. Folglich ist die Brennweite der ganzen Linse kleiner, wenn die Schalen geringeren Index haben als der Kern, wie wenn sie gleichen hätten. (Vergl. auch HELMHOLTZ pag. 94).

Systeme, in welchen der Brechungsexponent des Materials sich stetig ändert, bedürfen einer besonderen Betrachtung (s. d. Artikel hierüber); sie geben Wirkungen, die wie die hier fragliche beim ersten Anblick etwas paradoxes haben. Z. B. wirkt ein Cylinder mit planen Endflächen durch diese hindurch als Convex- oder Concavlinse, je nachdem der Brechungsexponent im Cylinder von der Axe nach dem Mantel hin concentrisch abnimmt oder wächst.

L. MATTHIESSEN[2]) machte wahrscheinlich, dass die Brechungsindices n in den Schichten der Krystallinse das Gesetz befolgen:

$$n = N_1 \left(1 + \zeta \frac{b^2 - y^2}{b^2}\right), \tag{1}$$

wo N_1 der Index der äussersten (Cortical-)schicht ist, b ihre Entfernung vom Kern, y die Kerndistanz der Schicht vom Index n und ζ das »Increment« des Brechungsindex; nämlich wenn N_m der Index des Kerncentrums ist, wird N_1 definirt durch die Gleichung

$$N_m = N_1(1 + \zeta) \tag{2}$$

Der Totalindex N ergiebt sich aus MATHIESSEN's Theorie zu

$$N = N_1 \left(1 + 2\zeta + \frac{4}{3}\zeta^2 \frac{b_1 + b_2}{r_1 + r_2}\right), \tag{3}$$

wo die Indices 1 und 2 sich auf Vorder- und Hinterfläche der Linse beziehen. Die Cardinalelemente des Auges werden unter dieser Annahme durch relativ einfache Ausdrücke dargestellt. Nach den sehr zuverlässigen Messungen von MÖNNICH ist beim Rinds-Auge $N_1 = 1{\cdot}387$, $\zeta = 0{\cdot}057$ zu setzen, beim Menschen nach MATTHIESSEN $N_1 = 1{\cdot}385$, $\zeta = 0{\cdot}0186$, wonach hier $N = 1{\cdot}4367$ würde.

Aus den Messungen verschiedener Beobachter hat HELMHOLTZ die in folgen-

---

[1]) Schiefer Durchgang von Strahlenbündeln. Gratul.-Schrift. Zürich 1874.

[2]) v. GRÄFE's Archiv f. Ophthalm. 22, pag. 131. 1876; 31, pag. 34. 1885; Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipz. 1877. PFLÜGER's Archiv 19, pag. 480. 1879; 36, pag. 79. 1885; SCHLÖMILCH's Ztschr. f. Math. u. Phys. 24, pag. 138. 1879; 26, pag. 179. 1881 EXNER's Repert. d. Phys. 22, pag. 333. 1886; 24, pag. 401. 1888; 25, pag. 663. 1889. Berlin-EVERSBUSCH's Ztschr. f. vergl. Augenheilk. 4, pag. 1. 1887. 5, pag. 1, pag. 97, 123. 1887; 6, pag. 103. 1889. Ueber gleichgerichtete Bestrebungen Anderer s. die Litteraturangaben in der 3. oben genannten Abhdlg. und die Referate v. M. in MICHEL's Jahresberichten der Ophtalmol. von Bd. 8. 1879 (für 1877) an.

der Tabelle zusammengestellten Mittelwerthe für die Dimensionen und Indices der brechenden Medien im Auge abgeleitet, aus denen sich dann die Cardinalelemente seiner Bestandtheile und des Ganzen berechnen liessen, wie nachstehend (Physiol. Optik, pag. 140). Wir bemerken zu dieser Tabelle, dass die Resultate der einzelnen Beobachter sowohl in ihren Durchschnittswerthen von einander ziemlich erheblich abweichen, als auch eine über Erwarten grosse individuelle Variabilität, namentlich in den Dimensionen verschiedener Augen erwiesen haben, wenn man in Betracht zieht, von wie vielen Faktoren die Gesammtwirkung des Auges abhängt, und dass diese doch trotz jener Variationen im Allgemeinen eine sehr gute ist. Wir setzen zur Illustration dessen neben die HELMHOLTZ'schen Durchschnittswerthe diejenigen, welche TSCHERNING (l. c. pag. 485) an einem Individuum durch sehr sorgfältige Messungen ermittelt hat.

Dimensionen und Constanten des menschlichen Auges.

	HELMHOLTZ		TSCHERNING
	Accom. f. Ferne	Accom. f. Nähe	
Gemessen.			
1. Brechungsvermögen der Hornhaut			1·377
2. Brechungsvermögen des Kammerwassers und Glaskörpers	1·3365	1·3365	1·3365
3. Totales Brechungsvermögen der Krystalllinse [1])	1·4371	1·4371	1·42
4. Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche	7·8 *mm*	7·8 *mm*	8·0 *mm*
5. Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche	10·0 "	6·0 "	10·2 "
6. Krümmungsradius der hinteren Linsenfläche .	6·0 "	5·5 "	6·2 "
7. Ort der vorderen Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	3·6 "	3·2 "	3·5 "
8. Ort der hinteren Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	7·2 "	7·2 "	7·6 "
Berechnet.			
9. Vordere Brennweite der Hornhaut	23·3 "	23·3 "	24·4 "
10. Hintere Brennweite der Hornhaut	31·1 "	31·1 "	32·6 "
11. Brennweite der Linse	50·6 "	39·1 "	62·5 "
12. Abstand des vorderen Hauptpunktes der Linse von ihrer Vorderfläche	2·1 "	2·0 "	2·4 "
13. Abstand des hinteren von der Hinterfläche .	— 1·3 "	— 1·8 "	— 1·5 "
14. Abstand der beiden Hauptpunkte der Linse von einander	0·2 "	0·2 "	0·2 "
15. Hintere Brennweite des Auges	20·7 "	18·7 "	22·9 "
16. Vordere Brennweite des Auges	15·5 "	14·0 "	17·1 "
17. Ort des ersten Hauptpunktes gegenüber dem Hornhautscheitel	1·75 "	1·9 "	1·5 "
18. Ort des zweiten Hauptpunktes	2·1 "	2·3 "	1·9 "
19. Ort des ersten Knotenpunktes	7·0 "	6·6 "	7·3 "
20. Ort des zweiten Knotenpunktes	7·3 "	7·0 "	7·6 "
21. Ort des vorderen Brennpunktes	— 13·7 "	— 12·1 "	— 15·6 "
22. Ort des hinteren Brennpunktes	22·8 "	21·0 "	24·75 "
23. Fernpunkt des aphakischen Auges	— 63·5 "		— 73·9 "

Da sowohl die Hauptpunkte als die Knotenpunkte des Auges einander sehr nahe liegen, so begnügt man sich für die meisten Fälle der Anwendung nach dem Vorschlag LISTING's [1]) mit der Annahme eines einfacheren Baues des Auges, mit dem sogenannten reducirten Auge. LISTING lässt die Entfernung zwischen

[1]) Beitr. z. physiol. Optik. Göttinger Studien 1848.

den beiden Brennpunkten ungeändert, vereinigt das Paar der Haupt- und Knotenpunkte in je einen mittleren Punkt und nimmt das ganze Auge als aus einem Medium vom Index des Glaskörpers bestehend an. Diesem Schema entspricht eine brechende Oberfläche, welche die Axe im vereinigten Haupptunkte schneidet, und deren Centrum im Knotenpunkte liegt. In runden Zahlen würde der Krümmungsradius dieser Fläche = 5 Millim., der Abstand ihres Mittelpunkts von dem zweiten Brennpunkt (Netzhaut) = 15 Millim.

Accommodation.

Das Auge ist nach den obigen Ergebnissen ein collektives System von etwas variabler Brennweite. Vermöge dieser Variabilität kann es (N. B. nacheinander!) auf der Netzhaut scharfe (umgekehrte, verkleinerte) Bilder von Gegenständen entwerfen, die sich in verschiedener Entfernung von ihm befinden. Wir beriefen uns auf diese Fähigkeit der Accommodation schon früher, pag. 188, und bezeichneten nach DONDERS[1]) den dem Auge nächsten Punkt, für den eine vollständige Accommodation ausgeführt werden kann, als Nahepunkt, den entferntesten als Fernpunkt der Accomodation. Augen, deren Fernpunkt im Unendlichen liegt, bezeichnet DONDERS als emmetropische, solche bei denen er eine andere Lage hat, als ametropische. Und zwar nannte er ein Auge, dessen Fernpunkt vor ihm, aber in endlicher Entfernung, liegt myopisch, ein solches in welchem er hinter ihm liegt, hypermetropisch; letzteres vereinigt also auch noch convergirende Büschel auf der Netzhaut. (Der Grund dieser Anomalien beruht meistens in einer verschiedenen Länge der Augenaxen.)

Der Grad der Myopie oder Hypermetropie wird durch die reciproke Brennweite (Stärke) der vor das Auge zu setzenden dünnen Hilfslinse (Brille) bemessen, welche den Fehler corrigirt, diese Stärke in Metern gerechnet (Dioptrien).

Das Maass für das Accommodationsvermögen ist die Stärke $1/A$ einer an Stelle des Auges zu bringenden unendlich dünnen Linse, für die dessen Fern- und Nahepunkt conjugirte Punkte sind.

Sind also die Entfernungen der letzteren bezw. F und N, so ist nach DONDERS

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{N} - \frac{1}{F} \tag{4}$$

das Maass der Accommodationsbreite, ebenfalls nach Metern gerechnet. Es kann dann A auch aufgefasst werden als die Entfernung des nächsten Punktes, für den das mit einer Linse von der negativen Brennweite F versehene Auge noch zu accommodiren vermag.

Den — mit zunehmendem Alter immer stärker werdenden — Mangel an Accommodationsfähigkeit bezeichnet DONDERS als Presbyopie. Im zehnten Lebensjahre beträgt die Accommodationsbreite im Mittel 13·5 Dioptrieen.

Strahlenbegrenzung.

Dieselbe ist in Bezug auf die Weite der abbildenden Büschel gegeben durch die Iris; in Bezug auf das Gesichtsfeld liegt keine Begrenzung vor, da die optischen Medien (Hornhaut, Linse) des Auges auch die senkrecht zur Axe einfallenden Strahlenbüschel noch hindurchlassen, und z. B. auch die Linsenränder keine Abblendung des Sehfelds herbeiführen. Die Eintrittspupille — hier schlechthin

---

[1]) Anomalies of accomodation and refraction. London 1864.

Pupille genannt — ist das von dem System Hornhaut-Kammerwasser in Luft entworfene Bild der Iris. Sein Mittelpunkt liegt nach HELMHOLTZ 0·6 Millim. vor der Iris und ist um $\frac{1}{7}$ vergrössert. Die *A.-P.* des Auges ist das von der Krystalllinse im Medium des Glaskörpers entworfene Bild der Iris; sie ist um 0·1 Millim. der Netzhaut näher gerückt als diese und etwa um $\frac{1}{18}$ vergrössert.

Die *E.-P.* ist der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen, hier Visirlinien genannt, d. h. sie ist der Punkt, von welchem aus das Auge die scheinbare Grösse der Gegenstände bemisst. Seine Kenntniss ist also nothwendig, wo es sich darum handelt, die Stellen im Raume zu finden, deren gleichzeitige Bilder auf der Netzhaut Zerstreuungskreise mit coincidirenden Mittelpunkten sind. In den Fällen, wo man weiss, dass das Bild auf der Netzhaut ein scharfes ist, genügt die Kenntniss der Knotenpunkte. Je eine nach dem vorderen Knotenpunkt gezogene Linie im Objektmedium und die ihr parallele vom zweiten Knotenpunkt nach der Netzhaut heissen Richtungslinien des Sehens. Diejenige Richtungslinie, welche die Stelle des direkten Sehens trifft, d. h. im Glaskörper vom 2. Knotenpunkt nach der Netzhautgrube geht, nannte HELMHOLTZ die Gesichtslinie; dieselbe ist verschieden von der optischen Axe des Auges und ist in Fig. 351 mit GK_1K_2M bezeichnet und in ihrem Verhältniss zur Axe des Auges FF' dargestellt.

Die Apertur der abbildenden Strahlen im Auge ist bei einem Pupillendurchmesser von 4 Millim. = 0·15. Die der objektseitigen Büschel variirt natürlich mit dem Objektabstand innerhalb weiter Grenzen.

Die Focustiefe des Auges. Unter der Annahme einer gewissen Grenze für das räumliche Unterscheidungsvermögen von Lichteindrücken auf der Netzhaut — welche mindestens bei 0·003 Millim. zu setzen sein dürfte — und der einer gewissen Pupillengrösse, z. B. 4 Millim., berechnet sich die Focustiefe — hier Accommodationslinie genannt — als von ca. 23 Meter bis ∞ oder von 12 bis 23 Meter oder von 370 Millim. bis 380 Millim. etc. reichend.

Das Gesichtsfeld des Auges ist grösser als das irgend eines anderen optischen Instruments. In Folge des Hervorstehens der Hornhaut und ihrer collectiven Brechung können noch Strahlen ins Auge gelangen, die senkrecht zu dessen Axe eintreten. Im lebenden Auge wird ein Theil des Gesichtsfeldes durch Nase, Augenbrauen und Wangen verdeckt, sodass nur etwa 150° frei bleiben; doch beherrschen beide Augen zusammen in jeder Stellung immer noch ein Feld von 180°. Da für das Gesichtsfeld, wie bemerkt, eine besondere Blende im Auge nicht vorhanden ist, so ist dasselbe nicht scharf begrenzt, sondern geht allmählich in Dunkelheit über. Denn je schiefer ein Büschel auf das Auge fällt, desto schmäler ist die Projektion der Pupille auf seinen Querschnitt, welche die Basis des abbildenden Büschels bildet, desto lichtschwächer also die betreffende Stelle des Sehfeldes. Ausserdem aber besitzt die Netzhaut schon in geringer Entfernung von der Grube eine viel geringere Empfindlichkeit gegen Intensität wie Qualität von Lichtreizen, die noch viel bedeutender ist als die objektive Undeutlichkeit der Netzhautbilder. »Das Auge stellt daher«, wie HELMHOLTZ sagt (l. c. pag. 87) »ein optisches Werkzeug von sehr grossem Gesichtsfelde dar, aber nur in einer kleinen, sehr eng begrenzten Stelle dieses Gesichtsfeldes sind die Bilder deutlich. Das ganze Bild entspricht einer Zeichnung, in der zwar der wichtigste Theil des Ganzen sorgfältig ausgeführt, die Umgebungen aber nur skizzirt, und zwar desto roher skizzirt sind, je weiter sie von dem Hauptgegenstande abstehen. Durch die Beweglichkeit des Auges wird es aber möglich, nacheinander jeden einzelnen Punkt des Gesichtsfeldes genau zu betrachten.«

Die dioptrischen Fehler des Auges.

a) Die von der Form und Lage der brechenden Flächen herrührenden Abbildungsfehler. Keine der brechenden Flächen im Auge ist im Allgemeinen eine Kugel- oder auch nur eine Rotationsfläche. Speciell von der Hornhaut, welche der Untersuchung im lebenden Zustande am zugänglichsten ist und einen Hauptantheil der Brechung im Auge hat, zeigen die Messungen[1]), dass sie sich ziemlich nahe einem dreiaxigen Ellipsoid anschmiegt, dessen längste Axe mit der des Auges zusammenfällt, und dessen beide Hauptschnitte meist horizontal und vertikal sind. Diese Form muss von vornherein eine astigmatische Modification der einfallenden Büschel bedingen[2]). Ausserdem trifft aber die Gesichtslinie nicht den Hornhautscheitel, sodass die vom fixirten Punkte aus gehenden Büschel jedenfalls eine unsymmetrische Brechung an ihr erfahren Endlich besitzt auch die Linse keine vollkommenen Rotationsflächen, und diese Flächen sind weder gegeneinander, noch ist die Linse als Ganzes gegen die Hornhaut centrirt[3]).

Die nächste Folge dieser Form- und Centrirungsfehler muss, wie bemerkt, ein Astigmatismus der Büschel auch in der Axe und in der Gesichtlinie des Auges sein[4]).

Derselbe ist daher in fast allen menschlichen Augen, in geringem Grade wenigstens, vorhanden. Seine Grösse misst HELMHOLTZ nach demselben Principe wie die Accommodationsbreite. Astigmatische Augen haben verschiedene Sehweite für Linien verschiedener Richtung im Sehfeld. Ist die grösste dieser Sehweiten P, die kleinste für eine andere (zur ersteren senkrechte) Richtung bei demselben Accommodationszustande p, so gilt ihm

$$As = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}$$

als Maass des Astigmatismus. Derselbe kann nach AIRY compensirt werden durch eine vor das Auge gehaltene Cylinderlinse.

Die im Allgemeinen unsymmetrische Gestalt und Anordnung der brechenden Flächen im Auge, sowie auch deren besondere unregelmässige Beschaffenheit bedingen ausser diesem regulären Astigmatismus noch andere Störungen der Bildschärfe, wie die des sogen. Haarstrahlenkranzes, der monocularen Polyopie und Andere, die DONDERS unter der Bezeichnung irregulärer Astigmatismus zusammenfasste und wegen deren hier auf die Darstellung von HELMHOLTZ und die dort citirten Werke verwiesen werden muss. Diese Abweichungen sind so stark, dass ihnen gegenüber eine etwa vorhandene reguläre sphärische Aberration in der Axe bei normaler Pupillenweite jedenfalls nicht in Betracht kommt[5]).

[1]) Für das menschliche Auge s. HELMHOLTZ, pag. 10—22 und TSCHERNING l. c. pag. 459. Für die Augen anderer Wirbelthiere L. MATTHIESSEN. Die neueren Fortschritte in unserer Kenntniss v. opt. Bau des Auges der Wirbelthiere. Gratul.-Schrift zu HELMHOLTZ's 70. Gebtg. Hamburg u. Leipz. 1891, pag. 7 ff.

[2]) TSCHERNING findet die Brennweiten der Vorderfläche der Hornhaut in den beiden Hauptmeridianen

	f	f'
Horizontaler Meridian	21·17	29·15
Vertikaler „	20·16	27·76

[3]) Vergl. HELMHOLTZ pag. 108. TSCHERNING l. c. pag. 469.

[4]) HELMHOLTZ l. c. § 14.

[5]) MATTHIESSEN (Grundriss pag. 221) berechnet, dass sowohl die Gestalt der Hornhaut als die Textur der Krystalllinse der Aufhebung bezw. Verminderung der sphärischen Aberration möglichst günstig sei.

Bilder seitlicher Objekte. Wegen des grossen Gesichtsfeldes des Auges ist die Frage nach der Beschaffenheit dieser Bilder von besonderem Interesse. Dieselben sind daher namentlich in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen[1]). Als allgemeines Resultat derselben kann ausgesprochen werden, dass namentlich der Schichtenbau der Krystalllinse einer Verminderung des Astigmatismus schiefer Büschel ganz besonders günstig ist. Dieser Astigmatismus ist zwar im Auge nicht aufgehoben, aber er ist erheblich geringer, als er bei homogener Linse wäre. Es scheint ausserdem, dass die Netzhaut gerade zwischen den Bildflächen sagittaler und meridionaler Strahlen (1. u. 2. Bildfläche) hindurchgeht, sodass sie den Effekt des Astigmatismus und der gleichzeitig vorhandenen starken Bildkrümmung möglichst reducirt.

Chromatische Abweichungen. Das Auge ist nicht achromatisch, und zwar in keinem Sinne: weder die Orte noch die Grössen der verschiedenfarbigen Bilder sind identisch. Man kann sich hiervon auf mehreren Wegen überzeugen, welche wir später zur Prüfung und Messung der Farbencorrection in optischen Instrumenten angeben werden. FRAUNHOFER[2]), HELMHOLTZ[3]) und A. MATTHIESSEN[4]) maassen die Differenz der Sehweiten für Objekte in verschiedenfarbiger monochromatischer Beleuchtung und berechneten aus diesen Versuchen, dass die Focusdifferenz des Auges für rothes und violettes Licht noch grösser sei als diejenige in LISTING's reducirtem Auge, wenn man dessen Medium die Dispersion des Wassers zuertheilt. (0·58 bis 0·62 Millim. gegen 0·43 bei diesem).

In der That wies schon DOLLOND[5]) darauf hin, dass im Auge eine Compensation der Farbenabweichungen nicht statthaben könne, da alle Brechungen nach der Axe des Systems hin geschähen, wobei jedesmal die Ablenkung der violetten Strahlen stärker sei als die der rothen, was für die damals bekannten bezw. untersuchten Medien zutreffend ist. Die Thatsache der Farbenzerstreuung im Auge war schon NEWTON[6]) bekannt.

Einer solchen Längsabweichung im Auge entspricht bei einem Pupillendurchmesser von 4 Millim. ein Zerstreuungskreis von linear ca. 0·04 Millim., angular 8·8′. Einen ebenso grossen Zerstreuungskreis würde ein auf unendlich accommodirtes Auge von einem in 1·5 Meter befindlichen monochromatisch leuchtenden Punkte — in Folge von Focusdifferenz — erhalten. Dass man ersteren gewöhnlich nicht wahrnimmt, während der letztere sehr wohl merklich ist, rührt hauptsächlich daher, dass das Auge für die verschiedenen Wellenlängen sehr ungleich empfindlich ist, und zwar ist es dies desto weniger, je mehr sich die

---

[1]) L. HERMANN. Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbüscheln und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystallinse. Zürich 1874. POGG. Ann. 153, pag. 470. 1874, u. PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. 18, pag. 443, 1878. STAMMESHAUS. Ueber die Lage der Netzhautschale zur Brennfläche des dioptr. Systems d. menschl. Auges. Arch. f. Ophthalm. 20, pag. 147. 1874. SCHÖN. Brechg. seitl. einfall. Strahlen in d. Linse. Sitzber. Heidelb. ophtalm. Ges. in Klin. Monatsber. f. Augenheilk. 1877, pag. 178. Arch. f. Anat. u. Physiol. pag. 146. 1877. A. FICK, Zur Periskopie des Auges. PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. 19, pag. 145. 1879. W. RASMUS u. A. WAUER. Math. Theorie der Periskopie d. menschl. Auges. Arch. f. d. ges. Physiol. 20, pag. 264. L. MATTHIESSEN, Geometr. Gestalt d. theoret. Retina des periskop. schem. Auges. v. GRÄFE's Arch. f. Ophth. 25, pag. 257. 1879.

[2]) Denkschr. Münch. Akad. für 1814/15, pag. 216.

[3]) Physiol. Optik § 13.

[4]) Compt. rend. 24, pag. 874. 1847. Vergl. L. MATTHIESSEN, Grundriss, pag. 234.

[5]) Phil. Trans. 79, pag. 256. 1789.

[6]) Optice Lib. I. pars II, prop. VIII.

Wellenlänge nach beiden Seiten des Spectrums hin von einem gewissen Maximum nach den Messungen von A. KÖNIG ($\lambda = 0{\cdot}53\ \mu$) entfernt. In Folge dessen werden die den rothen und violetten Wellenlängen entsprechenden grösseren Zerstreuungskreise nicht wahrgenommen gegenüber den sehr viel intensiveren, aber kleineren gelben und grünen, die schliesslich allein maassgebend werden.

Am auffallendsten werden diese Erscheinungen, auch in weisser Beleuchtung, bei halbverdeckter Pupille[1]). Für die Chromasie der Brennweiten (Differenz der Vergrösserungen für verschiedene Farben) gaben Versuche an v. BEZOLD[2]), O. TUMLIRZ[3]) u. a.

II. Die künstlichen Projectionssysteme, insbesondere die zur Photographie dienenden.

Es kann zwar auch jedes der zur subjektiven Beobachtung dienenden, unten näher besprochenen Instrumente (Lupe, Fernrohr, Mikroskop) durch eine geringe relative Lagenänderung seiner Theile in ein Projektionssystem umgestaltet werden — gerade die letzten Jahre haben durch die Verbreitung und den Ausbau der »Mikrophotographie« und ganz neuerdings auch der »Telephotographie« die Unterschiede zwischen beiden Gattungen von Systemen mehr und mehr verwischt — trotzdem bleibt aber eine gesonderte Betrachtung wenigstens für diejenigen Instrumente stets erforderlich, die nicht umgekehrt durch eine geringe Modifikation ihrer Zusammensetzung in solche zur Unterstützung des Sehens (Auges) verwandelt werden können. Es sind dies vornehmlich die zur Landschafts-, Architektur- und Porträtphotographie benützten Objektive sowie die mit ihnen auf genau derselben Stufe stehenden »Projektionsköpfe«, welche man bei Demonstrationen in Hörsälen benützt (letzere natürlich nur insoweit sie nicht ihrem Bau und der resultirenden Vergrösserung nach vollständige Mikroskope vorstellen). Ferner gehören zu den Projektionssystemen die Objektive der Mikroskope und Fernrohre, wenn sie reelle Bilder zu Stande kommen lassen und sie sind als solche in der That besonders zu betrachten, wenn z. B. in ihren Bildebenen Messungen vorgenommen werden.

Die Projektionssysteme gehören in den allgemeinen Grundzügen ihrer Construction zu den einfachsten und ebenso auch in den wesentlichen Momenten ihrer Wirkungsweise zu den am leichtesten zu übersehenden optischen Instrumenten. Der allgemeine Typus aller bis in die neueste Zeit benützten photographischen Systeme war der der einfachen Sammellinse. Nur der Aufhebung der verschiedenen Aberrationen wegen wurde die Form allmählich complicirter gewählt. In den Einzelheiten ihrer Construction aber stellen sie in Folge der Verschiedenheit der an ihre Leistung gestellten Anforderungen und des verschiedenen Gewichts, das auf diese je nach den Erfordernissen des Gebrauchs gelegt wird, vielleicht die variabelste und darum in speciell dioptrischer Hinsicht auch interessanteste Instrumentengattung vor. Die Vervollkommnung, welche ihre Construction, d. h. Leistungsfähigkeit, namentlich im letzten Jahrzehnt durch die Bemühungen einiger Optiker erfahren hat, ist zugleich wohl Grundlage und Folge der mannigfachen Fortschritte gewesen, welche die Kunst ihrer Anwendung, die Photographie, auf mehreren Gebieten der Kunst und der Wissenschaft in dieser Zeit zu verzeichnen hat. —

---

[1]) MOLLWEIDE, GILB. Ann. 17, pag. 328. 1804; 30, pag. 220. 1808.

[2]) GRÄFE's Arch. f. Ophthalm. 14 (2), pag. 1.

[3]) PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. 40, pag. 394. 1887.

Damit ein dioptrisches System zur Projection geeignet sei, d. h. damit es von reellen Objekten reelle, auffangbare Bilder entwerfe, muss dessen (im Sinne des Lichteinfalls) vordere Brennebene vor, die hintere hinter den Linsen liegen. Andernfalls wäre zum mindesten das Gebiet des abbildbaren Raumes beschränkt[1]). Da bei einer einfachen dünnen Linse diese Bedingung stets erfüllt ist, wenn dieselbe collektiv ist, einfache Linsen aber historisch überall der Ausgangspunkt für die Construction der zusammengesetzten Systeme gewesen sind — und auch bei letzteren die hier nothwendige Lage der Brennebenen besondere Schwierigkeiten verursachen würde, wenn sie dispansiv sein sollten —, so hat man sich (mit Ausnahme des zur Projection benützten Mikroskops) stets collektiver Systeme für die Projection bedient.

Diese bilden, wie wir früher allgemein bewiesen haben (pag. 49) die linke Hälfte des Objektraums umgekehrt in die rechte des Bildraums ab. Bei Photographien, welche nach der Aufnahme aus der Camera entfernt und wieder umgedreht werden können, verursacht dieser Umstand keinerlei Unbequemlichkeit, wohl aber bei Projectionen auf Schirme in Hörsälen, für welche die Construction eines bildaufrichtenden (negativen) Projektionssystems einem offenbaren Bedürfniss nachkommen würde.

Die dioptrische Wirkung von Projektionssystemen ist im wesentlichen charakterisirt durch die Vergrösserung, mit welcher sie das Objekt bei scharfer Einstellung des Schirms in diesem wiedergeben, und zwar kommt hier unmittelbar die lineare laterale Vergrösserung, β, in Betracht, d. i. das Verhältniss der linearen Dimensionen von Bild und Objekt (y'/y). Diese Vergrösserung ist nach den Fundamentalgleichungen (I) pag. 54

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}.$$

Im Allgemeinen wird also bei gegebenem Objektabstand die Vergrösserung mit der Brennweite zugleich wachsen. Nur bei unendlich entfertem Objekt ist das lineare Vergrösserungsverhältniss durch das der linearen Bilddimensionen zur angularen Objektdimension zu ersetzen gemäss pag. 179 (unten).

Der Zusammenhang zwischen der Lage von Objekt und Bild gegen das System ist dabei durch die Fundamentalformel

$$x x' = -f^2$$

oder

$$\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi} = \frac{1}{f}$$

bestimmt.

Der Fall, dass vordere und hintere Brennweite (Objekt- und Bildmedium) verschieden sind, ist bisher meines Wissens nicht realisirt worden und bietet auch anscheinend keine besonderen Vortheile. Wir wollen daher im folgenden beide Medien stets als gleich annehmen.

Die Ansprüche, welche man an die quantitativen und qualitativen Eigenschaften der von photographischen Systemen gelieferten Bilder stellt variiren wie oben bemerkt innerhalb weiter Grenzen, je nach dem Gebrauche, welchem die Systeme dienen sollen und je nach den mit diesem Gebrauch verknüpften anderweitigen Umständen, technischen Hilfsmitteln, ästhetischen Fak-

---

[1]) Wenn z. B. ein System so beschaffen ist, dass seine Vorderfläche conjugirt ist der Hinterfläche — was involvirt, dass die Brennebenen beide innerhalb des Systems liegen — so giebt dasselbe von keinem ausserhalb gelegenen Objekte ein auffangbares Bild.

toren etc. Da, wie wir früher bewiesen haben, ein dioptrisches System nicht gleichzeitig sehr weitgehenden heterogenen Ansprüchen genügen (z. B. ein grosses Gesichtsfeld mit Strahlen von grossem Oeffnungswinkel abbilden) kann, so ist man immer darauf angewiesen, bei derartig verschiedenen Ansprüchen einen passenden Mittelweg zu wählen. Man wird es unter diesen Umständen als eine anerkennenswerthe Leistung der praktischen Optik bezeichnen müssen, dass sie Systeme hervorgebracht hat, — welche, wenn auch nicht gleichzeitig, so doch in demselben Exemplare — der einen und der andern Anforderung genügen, welche also ein kleineres Sehfeld mit relativ grosser Apertur und dann, auf geringere Apertur abgeblendet, mit engeren Büscheln ein entsprechend grösseres Bildfeld genügend scharf zeichnen.

Ansprüche an die quantitativen Eigenschaften der Bilder.

Durch die Apertur der abbildenden Büschel ist, wie wir früher gesehen haben, in erster Linie die Lichtstärke eines Systems bedingt. Man wird auf dieselbe daher besonderen Werth legen in denjenigen Fällen, in welchen lebendige, überhaupt bewegliche bezw. bewegte Gegenstände photographirt werden sollen, damit die chemische Wirkung des Lichtes auf die empfindliche Platte in so kurzer Zeit erfolge, dass eine merkliche Lagenänderung des Objektes während der Aufnahme nicht stattfinden könne. Für die Zwecke der sogenannten Porträtphotographie sind Systeme construirt worden, bei denen das Oeffnungsverhältniss, d. h. das Verhältniss des Durchmessers der Eintrittspupille zur Brennweite bis zu ein Drittel beträgt.

Die Anforderung möglichster Lichstärke hat es ferner mit sich gebracht, dass man sich bei der Construction von photographischen Systemen für dieses ebenso wie für die anderen Anwendungsgebiete auf deren Zusammensetzung aus 2, höchstens 3 durch Luft isolirte Elemente beschränkt hat (welche aber ihrerseits wieder je aus 2—3 durch Balsam miteinander verkitteten Linsen bestehen können); denn — um diesen Punkt gleich hier zu erwähnen — es geht nicht nur durch die (primäre) Reflexion des Lichtes nach der Objektseite hin, durch eine ungerade Anzahl von Reflexionen und eine gerade Zahl von Brechungen, solches Licht für das Hauptbild verloren (und zwar in einem Betrage, welcher bekanntlich mit der Indexdifferenz an den wirksamen Trennungsflächen wächst) sondern es lagern sich auch über jenes von einem dioptrischen System entworfenes Haupt-Bild noch die — im besten Falle unscharfen, d. h. von ihm weit abliegenden — katadioptrischen Nebenbilder, welche durch eine gerade Anzahl von Brechungen und Reflexionen nach dieser Bildseite hin entworfen werden. Diese ganz unvermeidlichen und, wie bemerkt, durch den Construkteur höchstens von dem Hauptbilde recht weit zu entfernenden Nebenbilder bewirken eine allgemeine Erhellung des Bildes und mindern hierdurch natürlich die in demselben vorhandenen Contraste[1]).

Die grossen Fortschritte, welche in den letzten Jahrzehnten in der Herstellung von photographischen Platten hoher Lichtempfindlichkeit gemacht worden sind ermöglichen in andern Gebieten, als den oben bezeichneten — und auch in diesen bei günstigen Beleuchtungsverhältnissen — die Anwendung von Systemen

---

[1]) Wenn solche katadioptrische Bilder nicht weit genug vom Hauptbilde entfernt sind, um dasselbe in seiner ganzen Ausdehnung nahezu gleichmässig zu überdecken, sondern sich in diesem an mehr oder minder scharf umschriebenen Stellen bemerklich machen, bezeichnet man sie nach der üblichen Terminologie als »Lichtflecke« bezw. »Blendenflecke«.

mit erheblich niedrigerem Oeffnungsverhältniss, welche dann ein entsprechend grösseres Bildfeld scharf wiedergeben. Während man daher für Porträt- und sonstige Momentaufnahmen ein Oeffnungsverhältniss von $\frac{1}{3}$—$\frac{1}{7}$ wünscht, begnügt man sich zur Wiedergabe von Landschaften und Gruppen mit Systemen welche bei Oeffnungsverhältnissen von ca. $\frac{1}{7}$—$\frac{1}{18}$ scharfe Bilder geben, während man für die Reproduction von Architekturwerken, Zeichnungen, Landkarten, Bildern etc. die Systeme mit Oeffnungswinkeln bis zu $\frac{1}{70}$ herunter benützt. (»Weitwinkel«.)

Umgekehrt porportional den Ansprüchen an die Lichtstärke, d. h. an das Oeffnungsverhältniss, gehen diejenigen an das Sehfeld. Es muss nun als ein glücklicher Umstand bezeichnet werden, dass diese verschiedenartige Verknüpfung der Ansprüche durch die Natur der aufzunehmenden, in ihren Hauptgattungen eben bezeichneten, Objekte, von selbst dargeboten oder wenigstens zugelassen wird. Dies gilt sogar für diejenige Combination jener beiden Hauptansprüche, welche in der Forderung besteht, dass für das ganze Sehfeld die gleiche — oder doch eine möglichst wenig vaiirende — Apertur wirksam sei. Denn aus ästhetischen Gründen ist bei Porträts eine beträchtliche Abnahme der Apertur, d. h. der Lichtstärke nach dem Rande des Bildes zu durchaus nicht schädlich, wird vielmehr durch anderweitige Manipulationen des Photographen gewöhnlich noch verstärkt (Vignettiren), während man natürlich bei der Wiedergabe eines Gebäudes, einer Landkarte, eines Kupferstichs möglichst gleichmässige Helligkeit bis an den äusseren Rand des Bildes wünscht.

Vollständig ist dieser letzteren Anforderung natürlich nicht zu genügen; denn die Blende, durch welche ihrer Grösse und Stellung zum Linsensystem nach die Apertur der Büschel bestimmt wird und ihre Bilder nach der Objekt-, wie Bildseite hin (*E.-P.—A.-P.*) wirken dem von dem Axenpunkt und den ihm benachbarten ausgehenden Strahlenkegeln gegenüber bei centraler Lage stets mit ihrer wahren Grösse als Basis; von den seitlichen Punkten des Objektes und Bildes aber erscheinen Eintritts- wie Austrittspupille in der einen Richtung perspectivisch verkürzt. Ihre Fläche, welche als Basis auch für diese Büschel wirksam ist, erscheint daher unter einem räumlichen Winkel, welcher im Verhältniss von $\cos w : 1$ bezw. $\cos w' : 1$ geringer ist als der der axialen Büschel. Der Einfluss dieses Umstandes würde sich nur dadurch beseitigen lassen, dass man die *E.-P.* in das Unendliche verlegte, d. h. die Blende in den gemeinsamen Brennpunkt des Vorder- und Hintertheils des Systems stellte, welch letzteres dann ein teleskopisches wäre[1]). Einer solchen Anordnung, welche an sich durchaus nicht unmöglich wäre, steht jedoch das Bedenken entgegen, dass dann die Grösse des Sehfeldes selbt gering, bezw. die zur Erzielung eines grösseren Sehfeldes erforderlichen Linsendimensionen sehr beträchtlich wären. Denn in den photographischen Systemen wird allgemein die Begrenzung des Sehfeldes durch die Fassungsränder der das System constituirenden Linsen oder

[1]) Ein geistreicher Vorschlag, um diesen Mangel auf einem ganz anderen Wege zu heben, rührt von A. Miethe her; Er stellt vor das Objektiv eine Linse, welche (verkittet) zusammengesetzt ist aus einer Planconvex- und einer Planconcavlinse von gleicher Innenkrümmung und gleichem Brechungsindex, welche also in dioptrischer Beziehung wie eine einfache Planparallelplatte wirkt. Die Sammellinse jedoch besteht aus absorbirendem (gefärbtem) z. B. Rauch-Glas, und ihre Krümmung ist so bemessen, dass sie die ihren centralen (dicken) Theil passirenden Büschel im Verhältniss von $1 : \cos^2 w$ — oder einem anderen Verhältniss — stärker schwächt als die unter dem Winkel w geneigt einfallenden. (Das Verhältniss $1 : \cos^2 w$ statt $1 : \cos w$ ist gewählt, um zugleich auch der geringeren photochemischen Wirkung auf die Platte Rechnung zu tragen, welche ein auf dieselbe schief einfallendes Büschel ausübt).

doch einer von ihnen bewirkt. Das objektseitige Sehfeld ist dann also nach unserer früheren Definition gleich dem Sehwinkel, unter welchem der Fassungsrand jener Linsen, bezw. sein nach der Objektseite hin entworfenes Bild von der *E.-P.* aus erscheint, und entsprechend das bildseitige Sehfeld. Bei telecentrischer Einrichtung des Systems würden daher beide Sehfelder, angular gemessen = 0, in ihrem linearen Maasse aber den Dimensionen des Linsensystems gerade gleich.

Um ein grösseres Sehfeld unter Anwendung von möglischst kleinen Linsen zu erzielen, ist vielmehr umgekehrt nothwendig, dass die wirksame Blende möglichst nahe an der betreffenden Linse (Gesichtsfeldblende) liege; in Systemen also, welche aus zwei Linsen bestehen, dass diese möglichst nahe aneinander gerückt seien, und die Blende sich zwischen ihnen befinde. Bei solcher Anordnung tritt auch erst bei relativ grossem Bildwinkel der erwähnte Missstand einer Verringerung der Apertur für die seitlichen Bildpunkte infolge theilweiser Abblendung der Büschel durch den Fassungsrand der Linsen ein.

Bezüglich des Einflusses der Strahlenbegrenzung nach Lage und Grösse der Blenden und ihrer Bilder, der Pupillen, auf die übrigen Eigenschaften des Systems — insbesondere Perspective und Focustiefe der auf der Bildtafel entworfenen Zeichnungen — haben wir unseren früheren Ausführungen pag. 174 u. 185 hier nichts besonderes hinzuzufügen; wir verweisen daher auf diese.

Ansprüche an die qualitativen Eigenschaften der Bilder.

In Bezug auf diese begünstigen die der Photographie vornehmlich sich darbietenden Objekte einen gleichen Compromiss wie in Bezug auf die quantitativen Eigenschaften. Hierdurch ist es ermöglicht worden, mit Systemen aus 2, höchstens 3, getrennten Elementen auch den diesbezüglichen Anforderungen der Praxis hinreichend zu genügen. Bei den Systemen grösserer Apertur (den Porträtobjektiven) sind die Anforderungen, wie an die Ausdehnung des Sehfeldes, ebenso auch an die Schärfe der Bilder innerhalb derselben relativ geringe. Während die von Mikroskop- und Fernrohrobjektiven entworfenen Bilder nachheriger Betrachtung durch ein lupenartig wirkendes, jene Bilder sammt ihren Fehlern mehrfach vergrösserndes Ocular unterliegen, ist dies bei photographischen Systemen im Allgemeinen nicht der Fall. Das Bild braucht daher im Allgemeinen höchstens diejenige Schärfe zu haben, welche bei unmittelbarer Betrachtung mit blossem Auge genügt. Speciell bei den Porträtobjektiven wird manchmal aus ästhetischen Gründen sogar umgekehrt eine gewisse gleichmässige Unschärfe (Weichheit) vorgezogen. Infolgedessen braucht die Compensation der für einen Axenpunkt in Betracht kommenden verschiedenen Bildfehler — als axiale sphärische Aberration und deren Reste (Zonen), axiale chromatische Abweichung und die combinirte Wirkung dieser beiden: die chromatische Differenz der sphärischen Abweichung — in diesen Systemen keine sehr vollkommene zu sein. Bei den andern Systemen, welche von vornherein mit geringerer Oeffnung benutzt werden, ist es wiederum entsprechend leichter, innerhalb derselben eine genügende Compensation zu bewirken.

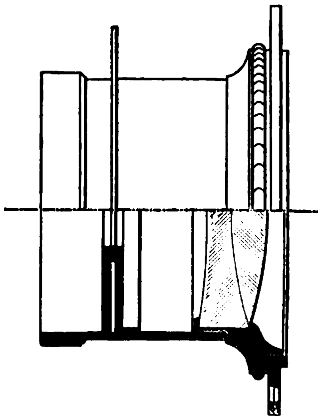
Ebenso sind die Anforderungen an die Eigenschaften der Bilder ausser der Axe desto grösser, mit je kleinerer Oeffnung die Systeme benützt werden, also grösser in den zu (Strich-) Reproductionen dienenden Systemen, als in den zur Aufnahme von Landschaften und Gruppen dienenden und in diesen wieder grösser als in den Porträt-Objektiven. Dies gilt sowohl von der Ebenheit der Bilder (Aufhebung der Bildwölbung) — welche hier wegen der Ebenheit der das

Bild aufnehmenden Platten eine ganz unerlässliche Forderung bildet — als von der Distortion (Verzerrung), als ferner von der Aufhebung des Astigmatismus der schiefen Büschel und der des Coma in ihnen. Von den chromatischen Abweichungen muss namentlich die Differenz der Vergrösserungen für verschiedene Farben gehoben sein, damit nicht jeder Punkt am Rande des Sehfeldes nach diesem hin in ein Spectrum ausgezogen erscheine.

Dass die Aufhebung dieser Fehler nur in denjenigen Büscheln stattzufinden hat, welche kraft der gegebenen Strahlenbegrenzung allein im Stande sind, zur Bildebene zu gelangen — in Büscheln also, deren Axen die Linsen des Systems je nach der Lage von *E.-P.* und *A.-P.* an verschiedenen Stellen treffen, wenn sie zu verschiedenen Bild- und Objektpunkten gehören — brauchte kaum besonders hervorgehoben zu werden, wenn dieser Sachverhalt nicht noch immer öfters verkannt würde.

Die hauptsächlichsten Constructions-Typen.

1) Einfache Linsen. Den Ausgangspunkt für die Construction der Projectionssysteme, wie für die der meisten andern optischen Instrumente, bildete die einfache dünne Linse. Man suchte bei derselben die Krümmungen auf ihre beiden Flächen möglichst so zu vertheilen und der Blende eine solche Lage zu geben, dass die wichtigsten Bildfehler einigermaassen compensirt würden. Natürlich verhinderte schon die mittelst einer solchen Linse nicht compensirbare sphärische und chromatische Aberration in der Achse die Anwendung von anderen, als sehr kleinen Aperturen (mindestens $\frac{1}{20}$ der Brennweite). Andererseits ist der Vortheil, dass nur 2 reflektirende Flächen in solchen Systemen vorkommen, für die »Brillianz« des Bildes ein so erheblicher und in kleinen Dimensionen die sphärischen und chromatischen Abweichungen so wenig auffallend, dass man sich gerade in neuerer Zeit der Anwendung solcher Linsen wieder mehr zugewandt hat. Die Form derselben pflegt dann die eines Meniskus zu sein, dessen convexe Fläche dem Bilde, die concave dem Objekte zugewandt ist. Die Blende wird ebenfalls nach der Objektseite hin angebracht. Ihre Lage beeinflusst, wie wir früher gesehen haben, die Eigenschaften der Bilder ausser der Axe, insbesondere die Orthoskopie.



(Ph. 353.)

Dies war die Construction der Objektive, welche zur Zeit der Entdeckung der Daguerreotypie i. J. 1839 benützt worden. »Mit einem Diaphragma $= f/30$ erschien ein Bild auf einer viereckigen Fläche scharf gezeichnet, deren Diagonale $= f/4$ war, wobei die Entfernung des Diaphragmas von der Linse $= f/5$ betrug« (MONCHHOVEN).

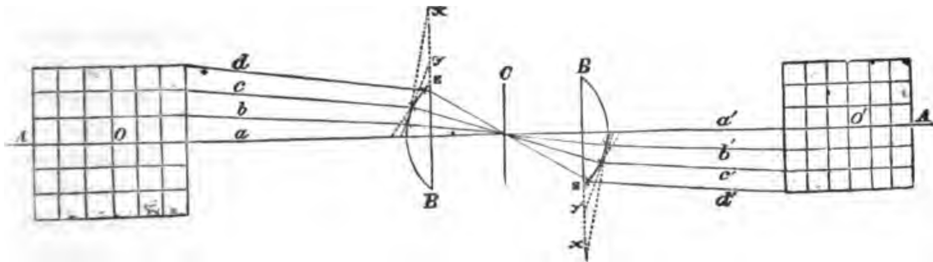
Eine erhebliche Verbesserung im Rahmen dieses Typus brachte die Zusammensetzung der Linse aus zwei mit ihren Innenflächen verkitteten Einzellinsen, welche Combination nach den früheren Ausführungen bereits die Herstellung der Achromasie und die Aufhebung der sphärischen Aberration in der Axe gestattet. Diese, zuerst von CHEVALIER in Paris construirten und in mannigfachen Formen von den meisten Optikern noch jetzt gelieferten Systeme haben ebenfalls den Vorzug der grossen Brillianz, da auch hier nur zwei Reflexionen von Luft gegen Glas oder umgekehrt vorkommen. Fig. 353 stellt ein solches modernes System (von VOIGTLÄNDER, $f = 14{\cdot}4$ Centim.) dar, welches aus den oben angegebenen

Gründen natürlich nur zur Landschafts-Photographie[1]) benützt werden kann. Seine grösste Oeffnung ist $f/15$, der Gesichtsfeldwinkel etwa 90°. Andere solche aus 2 und 3 Einzellinsen zusammengesetzte Systeme findet man in den unten angeführten Werken beschrieben und abgebildet.

In diesen einfachen Systemen verfügt man über zu wenig Elemente, um allen hier zu stellenden Bedingungen genügen zu können. Insbesondere lassen dieselben nur in geringem Maasse die Aufhebung der Bildkrümmung, der Distortion und des Astigmatismus zu. Einen wesentlichen Fortschritt ihnen gegenüber bildete daher die Construction der

2) Symmetrischen Doublets, d. h. von Systemen, die aus zwei gleichen Einzelelementen in symmetrischer Lage zu einander und zur Blende (zwischen denselben) zusammengesetzt sind. Die Erfindung der wichtigsten Gruppe derselben geschah i. J. 1866 durch A. Steinheil.

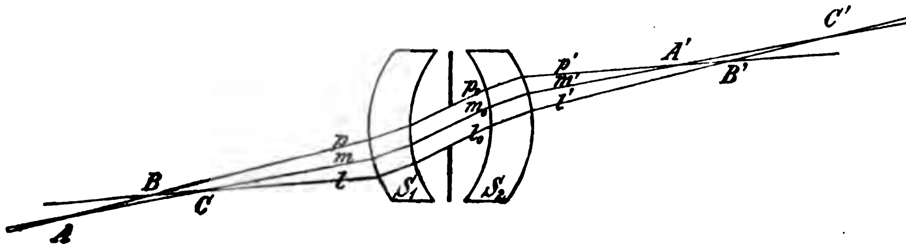
Die eben bezeichnete Art der Zusammensetzung bietet nicht nur einen Vortheil und eine Erleichterung für die technische Ausführung, sondern sie führt



(Ph. 354.)

auch — und das war der Grund ihrer Einführung — ohne weiteres die Aufhebung zweier der wichtigsten Bildfehler, der Verzerrung und des Coma, herbei. Denn was die erstere betrifft, so ist klar, dass (Fig. 354), nach welchem Gesetz auch die Winkel der von den einzelnen Objekten ausgehenden Hauptstrahlen *a*, *b*, *c*, *d* durch das Vordertheil *B* des Systems nach dem Mittelpunkt der Blende *C* hin gebrochen werden mögen, sie das Hintertheil *B'* des Systems unter denselben Winkeln in derselben Weise treffen und nach dem Bilde *O'* von *O* hin als Strahlen *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, ausfahren, welche den eintretenden Hauptstrahlen jeweilig parallel sind; damit ist jede Verzerrung natürlich ausgeschlossen.

Was andererseits das Coma betrifft, so ist schon aus Gleichung 8, pag. 134 zu ersehen, dass dasselbe bei symmetrischer Anordnung der Linsen und des Strahlen-

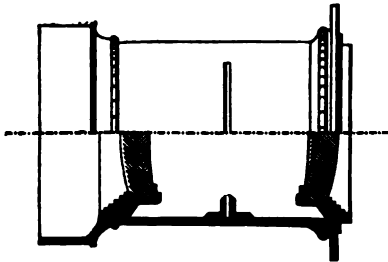


(Ph. 355.)

verlaufs in ihnen aufgehoben sein muss. Direkter kann man dies folgendermaassen erkennen (Fig. 355), S_1, S_2 seien die beiden Bestandtheile des Systems;

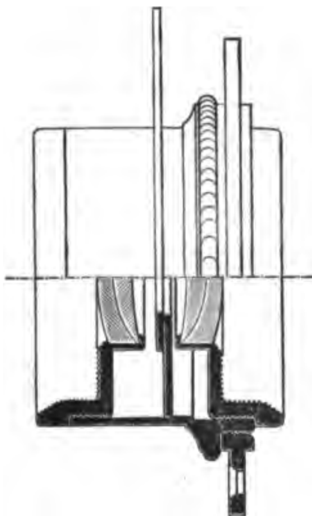
[1]) Neuerdings auch zu Porträts in grossem Format (nahezu natürlicher Grösse).

symmetrisch zwischen ihnen befinde sich die Aperturblende. Denken wir uns nun zunächst ein Strahlenbündel, welches in dem Raum zwischen den Linsen parallel und aberrationsfrei ist, nach beiden Seiten hin verfolgt, so wird es nach der Brechung durch jedes der Partialsysteme S, S' eine gleiche, aber symmetrich gelegene Brenncurve $(ABC)(A'B'C')$ — das Coma der Partialsysteme — bilden. Denke ich mir nun, um zu dem Falle eines monocentrisch einfallenden Büschels überzugehen, in dem, als unendlich eng anzusehenden, Partialbüschel (mp) den Objektpunkt A auf dem Strahl p bis B verschoben, so verschiebt sich der ihm in Bezug auf das ganze System $(S_1 + S_2)$ conjugirte Bildpunkt A' auf p' im gleichen Sinne um die gleiche Strecke, also bis B'. Denn da in O und O' Gleichheit von Objekt und Bild $(\beta = -1)$ vorhanden ist, so ist auch die axiale Vergrösserung, α, $= 1$. Ebenso entspricht in dem Partialbüschel (lm) der Verschiebung des Punkts C auf dem Strahl l bis B die Verschiebung von C' auf l' bis B'. Folglich muss, wenigstens bei der Vergrösserung eins, einem monocentrischen objektseitigen Büschel im Meridianschnitt ein ebensolches im Bildraum entsprechen.



(Ph. 356.)

Der Astigmatismus hingegen bleibt in diesen Systemen abhängig von dem in seinen einzelnen Theilen vorhandenen und wird durch die symmetrische Zusammensetzung nicht vermindert. Die symmetrische Construction bietet daher einen Vortheil selbst dann, wenn die sie constituirenden Einzelelemente einfache Linsen sind, wie solche ebenfalls von A. Steinheil schon i. J. 1865 unter dem Namen »Periskop« vorgeschlagen worden sind. In letzterer Form ist natürlich wiederum nur die Anwendung sehr kleiner Blenden möglich; doch finden solche Linsen aus denselben Gründen wie die einfachen Einzellinsen und wegen ihrer grossen Billigkeit ebenfalls jetzt wieder vermehrte Anwendung.



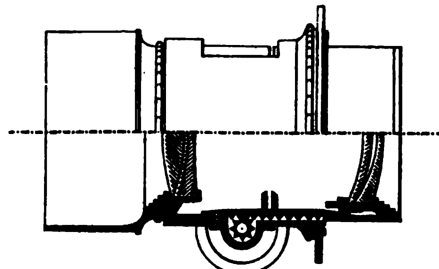
(Ph. 357.)

In weit höherem Maasse lässt sich den verschiedenen, hier zu stellenden Bedingungen genügen, wenn man jedes der beiden Elemente aus einem verkitteten achromatischen Linsenpaar bestehen lässt. Dieser Objektiv-Typus, von Steinheil selbst »Aplanat« bezeichnet, von andern Optikern unter den verschiedensten Namen und mit mehr oder minder erheblichen Construktionsänderungen im Einzelnen, unter Beibehaltung aber des wesentlichen Typus, in den Handel gebracht, ist gegenwärtig wohl noch der am meisten verbreitete. Fig. 356 stellt ein solches zur Portraitphotographie dienendes Aplanat dar, Fig. 357 ein entsprechendes für Weitwinkel-Aufnahmen bestimmtes. Man sieht schon aus den Figuren, wie der Construkteur durch Annäherung der beiden Linsen an einander der Forderung eines grösseren und gleichmässig beleuchteten Sehfeldes für den letzteren Zweck (gemäss pag. 215) entgegenkommt.

Auch hier müssen wir wegen der von andern Construkteuren vorgeschlagenen ähnlichen Typen auf die Handbücher der photographischen Optik verweisen. Wir

erwähnen nur noch die unter denselben Haupt-Typus fallenden von HARRISON und SCHNITZER in Newyork i. J. 1860 erfundenen sogenannten »Kugel-Objektive«, welche ebenfalls unter mancherlei Namen und Formen als Weitwinkel-Systeme in den Handel gebracht werden. Bei diesen ist die ursprüngliche Tendenz wohl die gewesen: alle Brechungen unter möglichst senkrechter Incidenz erfolgen zu lassen. Darum bilden die Innenflächen der beiden aus je einem verkitteten Linsenpaar bestehenden Elemente des Systems bei HARRISON Theile einer aus dem Blendenmittelpunkt geschlagenen Kugel. Diese Systeme lassen nur sehr kleine Oeffnungswinkel zu.

3) Unsymmetrische Doublets. Die symmetrische Gleichheit der beiden, ein System zusammensetzenden Bestandtheile bringt neben den oben genannten Vortheilen in dioptrischer Beziehung den Nachtheil mit sich, dass durch dieselbe über die disponibeln Elemente (Radien, Dicken, Glasarten) bereits im Voraus ziemlich weitgehend verfügt ist. Von vornherein muss es als wahrscheinlicher erscheinen, dass durch eine völlig freie Verfügung über die Form und Zusammensetzung der Bestandtheile des Systems weitergehenden Bedingungen in Bezug auf die Vollkommenheit der Abbildung genügt werden könne. Durch eine solche verschiedenartige Zusammensetzung wird es möglich, Abweichungen gewisser Art, die in dem einen Gliede des Systems vorhanden sind — und unter Umständen in ihm sogar absichtlich auf eine gewisse Höhe gebracht werden — in dem darauf folgenden Theile desto vollständiger durch entgegengesetzt gleiche Abweichungen zu compensiren.


(Ph. 358.)

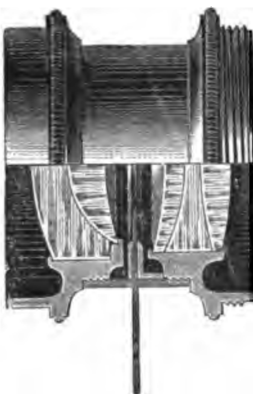
Dies war denn auch der Weg, welchen bereits im Jahre 1840 J. PETZVAL, in der Methode und den Resultaten seinen Nachfolgern bis in die neueste Zeit weit vorauseilend, einschlug, um ein lichtstarkes Porträtobjektiv herzustellen[1]). In der zuerst von VOIGTLÄNDER ausgeführten Form hatten diese Objektive ungefähr die Einrichtung Fig. 358 und liessen sich mit einer Oeffnung bis zu $f/3$ benützen. Die gute Wirkung dieses Objektivs hat wesentlich zur Verbreitung der photographischen Kunst beigetragen, welcher damals noch nicht die hochempfindlichen Trockenplatten der neueren Zeit zur Verfügung standen. Die PETZVAL'schen Porträtobjektive werden auch heute noch von vielen Fabrikanten in mehr oder minder modificirter Gestalt ausgeführt. Gleichzeitig mit PETZVAL war die gleiche Aufgabe von CHEVALIER in Paris in Angriff genommen und durch ein System aus zwei verkitteten Linsenpaaren gelöst worden, doch hat sich dieses System ebenso wie andere Modificationen des PETZVAL'schen, bei denen beide Theile verkittet waren, nicht bewährt. Das Gleiche gilt von den unsymmetrischen Landschafts-Linsen, welche PETZVAL 1840 und nach ihm VOIGTLÄNDER, HARRISON-SCHNITZER, ROSS und Andere vorschlugen bezw. in den Handel brachten.

Einen besseren Erfolg hatte die Wiederaufnahme des oben bezeichneten Constructionsprincips durch STEINHEIL in seinen »Antiplaneten« (sogen. wegen der absichtlichen Anhäufung von entgegengesetzten Aberrationen in den einzelnen Gliedern des Systems zum Zwecke ihrer vollständigeren Compensation[2]). Von grösserem

[1]) PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen. Pesth 1843. Derselbe, Sitzber. Wiener Acad. 26, pag. 33; 24, pag. 50. 1857.

[2]) Näheres s. Patentschrift D. R. P. No. 16354 1881.

Belang dürfte der Fortschritt sein, welchen auf dem gleichen Wege, aber unter vollständigerer Benützung der den Optikern zur Verfügung stehenden Glasarten und auf Grund einer genaueren Discussion der Wirkungsweise von Linsen und Linsenpaaren in Bezug auf gewisse Bildfehler P. Rudolph unter Mitwirkung des optischen Instituts von Carl Zeiss in Jena in deren »Anastigmaten« erreicht hat[1]). In diesen Systemen ist 1. durch eine Zusammensetzung aus zwei getrennten Systemen, in deren einem der positive Bestandtheil (Sammellinse) kleineren, in dem anderen dagegen grösseren Brechungsindex besitzt als der mit ihm verbundene (verkittete) negative Bestandtheil (Zerstreuungslinse) und dass 2) beide Systeme jedes für sich annähernd achromatisirt sind, zum ersten Mal eine systematische und nahezu vollständige Aufhebung des Astigmatismus und der Bildwölbung oder, was dasselbe ist, der Bildwölbung gleichzeitig für die in beiden Hauptschnitten gelegenen Strahlenbüschel erreicht worden. Fig. 359 zeigt ein solches zwischen Porträt- und Landschaftslinse stehendes System (Anastigmat 1:7·2). Ueber die Bedingungen einer solchen Compensation und die Grösse der bei anderen Systemen in Bezug auf diese Fehler verbliebenen Reste giebt die zweite der in der Fussnote genannten Schriften und ein Beitrag desselben Verfassers für dasselbe Jahrbuch Jahrg. 1893 — in welchen ich vor der Veröffentlichung Einsicht nehmen durfte — näheren Aufschluss. Danach ist bei einigen der oben aufgeführten Systemtypen der Betrag des Astigmatismus (Differenz der Brennweiten in den beiden Hauptschnitten) und der Wölbung (Abweichung des mittleren Bildpunktes von der das Bild im Scheitel berührenden Ebene) durch folgende Tabelle charakterisirt.



(Ph. 359.)

Objektiv mit Oeffnung Brennweite stets = 100 *mm*	Bezeichnung des Bildfehlers	Hauptstrahlneigung von			
		10°	20°	30°	40°
A. Systeme mit grösserem Oeffnungswinkel.					
		mm	*mm*	*mm*	*mm*
1. Aplanat von Steinheil. grösste Oeffnung $\frac{1}{7}$	Mittlere Bildwölbung	−0.2	−0·9	+ 0·2	
	Astigmatismus (Meridian-Sagittalschnitt)	+0·8	+4·0	+12·2	
2. Antiplanet von Steinheil Oeffnung $\frac{1}{6}$	Mittlere Bildwölbung	−0·8	−1·6	− 0·8	
	Astigmatismus	+0·4	+2·4	+ 8·8	
3. Zeiss-Anastigmat 1:6·3 . . .	Mittlere Bildwölbung	−0·3	−0·6	+ 1.8	
	Astigmatismus	+0·2	+1·2	+ 3·7	

[1]) S. Patenschrift der Firma C. Zeiss, D. R. P. No. 56109. 1890, und Dr. Rudolph. Ueber den Astigmatismus photographischer Linsen Eder's Jahrb. 1891, pag. 225.

Objektiv mit Oeffnung Brennweite stets = 100 *mm*	Bezeichnung des Bildfehlers	Hauptstrahlneigung von			
		10°	20°	30°	40°
B. Weitwinkel.					
4. Weitwinkelaplanat $\frac{1}{30}$—$\frac{1}{25}$ . .	Mittlere Bildwölbung	−1·0	−3·8	−5·8	+ 0·4
	Astigmatismus (Meridian-Sagittalschnitt)	+0·5	+0·8	−2·4	−18·0
5. Harrison's Kugellinse $\frac{1}{36}$ . .	Mittlere Bildwölbung	−0·4	−1·3	−3·1	− 6·3
	Astigmatismus	+0·4	+2·0	+5·2	+ 9·0
6. Zeiss-Anastigmat 1:18 . . .	Mittlere Bildwölbung	−0·6	−1·7	−2·2	+ 0·5
	Astigmatismus	0	+0·2	+0·9	+ 1·0

4) Man hat endlich versucht, unter Aufgabe der Beschränkung auf zwei Einzelbestandtheile (wie eine solche eigentlich schon im Petzval'schen System gewesen ist) durch Combination dreier — einfacher oder verkitteter — Linsen eine Verbesserung der Wirkungen zu erzielen. Die Bemühungen, welche in dieser Richtung von verchiedenen Seiten gemacht worden sind, haben sich aber bis jetzt noch nicht eines unzweifelhaften Erfolges zu erfreuen gehabt, weshalb wir hier nicht näher auf diese Constructionen eingehen.

5) Besondere Aufmerksamkeit haben in dem letzten Jahre die Bemühungen zur Herstellung von Systemen für Fernaufnahmen (Telephotographie) auf sich gelenkt. Damit solche Aufnahmen die betr. Gegenstände nicht allzu klein wiedergeben, sind Systeme von grosser Brennweite erforderlich. Diese würden aber, nach dem Typus der einfachen Linse construirt, entsprechend grossen Bildabstand (schwere grosse Camera etc.) erfordern. Um dies zu vermeiden, setzt man das System nach Art des eigentlichen Fernrohrs aus zwei Linsen — einer positiven von langer und einer dispansiven von kürzerer Brennweite — zusammen, deren Brennpunkte nahezu coincidiren und deren Brennweitenverhältniss die Vergrösserung bestimmt (Miethe, Dallmeyer, Steinheil u. A.)

Die wichtigsten neueren Mittheilungen über Telephotographie reproducirt Eder in seinem Handb. der Photographie, Nachtrag zu Bd. 1, Heft 5, pag. 703 ff. Halle 1892.

Detaillirtere Beschreibungen der anderen üblichen Constructionsformen photographischer Systeme, denen meist elementare Auseinandersetzungen über das Wesen ihrer Wirkung vorausgeschickt sind, findet man u. A. in den Werken von

D. van Monchhoven, Photographische Optik. A. d. Franz. übers. v. Martin. Wien 1866.

J. M. Eder, Die photogr. Objektive, ihre Eigensch. u. Prüfg. 2. Aufl. Halle 1891. (Bd 1, Heft 4 des Ausführl Handb. d. Photogr.)

Ch. Fabre, Traité encyclop. de photogr. I. Matériel photogr. Paris 1889. 1. Supplém. (A), ibid. 1892.

E. Wallon, Traité élém. de l'objectif photogr. Paris 1891.

H. Schroeder, Die Elemente der photogr. Optik. Berlin 1891 (zugl. Ergänzbd. zu Vogel's Handb. d. Photographie).

II. Instrumente zur Unterstützung des Sehens.

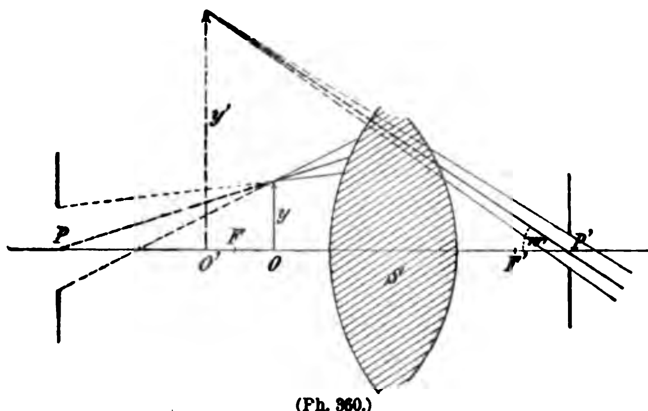
Der gemeinsame Zweck dieser Instrumente ist, Objekte, welche entweder in Folge ihrer Lage (Unzugänglichkeit) eine Annäherung des beobachtenden Auges nicht zulassen, oder bei denen eine solche in Folge des begrenzten

Accommodationsvermögen keinen Erfolg hätte, diesem Auge im Bilde unter einem grösseren Sehwinkel darzubieten. Der Effekt aller dieser Instrumente (Lupe, Mikroskop, Fernrohr) kann daher im Wesentlichen nur derselbe sein, wie ihn eine Annäherung des Objektes ans Auge — falls sie praktisch und physiologisch ausführbar wäre — zur Folge hätte. Diese Instrumente haben also zur Aufgabe, die Annäherung an das Objekt überflüssig zu machen, sie zu ersetzen. Dass sie irgendwelche anderen Wirkungen, z. B. in Bezug auf Lichtstärke (mit Ausnahme der auf Sterne gerichteten Teleskope) nicht äussern können, haben wir früher bereits allgemein erörtert. Da sie durchgängig mit ihrer dem Auge zugewandten Seite diesem sehr nahe gebracht werden, so muss das von ihnen entworfene Bild ein virtuelles, vor der letzten wirksamen Fläche gelegenes, sein, damit es von einem normalsichtigen Auge deutlich gesehen werden könne.

Wir betrachten

1. Die Lupe (Das einfache Mikroskop)[1].

Für die Construction und Wirkungsweise auch dieses Instrumentes ist, wie für die der Projectionssysteme — und zeitlich vor jenen — die einfache dünne Sammellinse Ausgangspunkt und maassgebend gewesen. In der That liefert eine solche von den diesseits ihrer ersten Brennebene gelegenen Objekten O (Fig. 360) Bilder, welche in der linken Hälfte des Bildraumes, d. h. vor der hinteren Brennebene der Linse, liegen; und zwar liegt bei geeignetem Abstande x des Objektes O von F das Bild O' in derjenigen Entfernung x' vom hinteren Brennpunkt F', auf welche dem Beobachter die Accommodation am bequemsten ist. Das Verhältniss des halben Sehwinkels w', unter welchem sich dem Beobachter dieses Bild darbietet zur linearen Grösse y seines Objektes, d. i. die durch das Instrument erzielte absolute Vergrösserung ist nach pag. 177



(Ph. 360.)

$$V = \frac{tg\, w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right); \tag{1}$$

die auf 250 *mm* Projectionsdistanz bezogene conventionelle Vergrösserung

$$N = l \cdot V = \frac{l}{f'}\left(1 + \frac{X'}{x'}\right), \tag{1a}$$

wenn X' den Abstand der Austrittspupille, x' den des Bildes von der hinteren Brennebene bezeichnet.

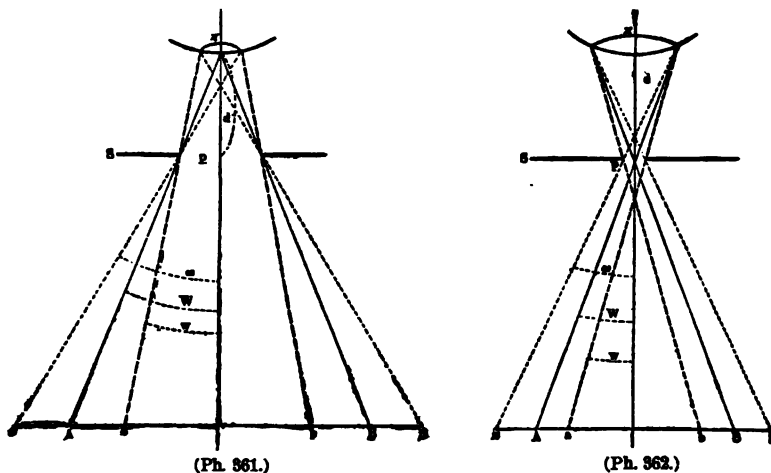
Die Lage der *A.-P.* ist bei denjenigen nach Art einer einfachen Linse wirkenden Lupen, deren freie Oeffnung grösser ist als die der Augenpupille, gegeben durch — nämlich identisch mit — der letzteren. Alsdann ist also

[1]) Man bezeichnet Systeme der unten beschriebenen Art, wenn sie weniger als ca. 20 fache Linearvergrösserung geben als »Lupen«, bei stärkeren Vergrösserungsziffern als »einfache Mikroskope«.

die Augenpupille nach Lage und Grösse maassgebend für die Apertur und den Strahlengang der beim Sehen durch die Lupe wirksamen Büschel. Wenn also die Lage der *A.-P.* nicht etwa anderweitig, z. B. durch eine eigens hierfür vorgesehene Blende, fixirt ist, so würde eine für die gute dioptrische Wirksamkeit der Lupen charakteristische Forderung darin zu bestehen haben, dass dieselbe in allen Beziehungen von Ortsveränderungen der *A.-P.* wenig beeinflusst werde, in Bezug auf diese unempfindlich sei.

Die freie Oeffnung der Linse bildet unter der obigen Annahme die Begrenzung für das Sehfeld, welche auch in diesem Falle — ebenso wie bei den Projectionssystemen — dem Orte nach nicht zusammenfällt mit dem Bilde und infolgedessen in diesem einen mit voller Apertur wirksamen Theil unterscheiden lässt von einem solchen, welcher mit einer nach dem Rande zu abnehmenden Apertur abgebildet wird. Ist aber die freie Oeffnung der Linse kleiner als die Augenpupille, so kehrt sich das Verhältniss zwischen Aperturblende und Gesichtsfeldblende um.

Es ist leicht, bei gegebener Grösse beider Oeffnungen die Beträge des Oeffnungswinkels und Gesichtsfeldwinkels anzugeben. Man hat nämlich, wenn der Halbmesser der freien Linsenöffnung $= p$, der der Pupille $= \pi$ ist, im ersteren Falle



(Ph. 361.) (Ph. 362.)

$(p > \pi)$ (Fig. 361) für die Tangente des halben Gesichtsfeldwinkels w desjenigen Bildtheils a, b, welcher mit voller Apertur abgebildet wird, für den halben Gesichtswinkel W derjenigen Zone A, B, welche mit halber Apertur abgebildet wird und endlich für den Gesichtswinkel ω der äussersten sichtbaren Zone α, β der Reihe nach

$$tg\, w = \frac{p - \pi}{d}, \qquad tg\, W = \frac{p}{d}, \qquad tg\, \omega = \frac{p + \pi}{d}, \tag{2}$$

wenn d die Entfernung zwischen Linsenöffnung und Pupille ist.

Der halbe Oeffnungswinkel u der wirksamen Büschel auf der Objektseite ist in diesem Falle — wenn wir annehmen, dass das Auge auf grosse Entfernung eingestellt, die Büschel auf der Bildseite also als nahezu parallelstrahlig zu betrachten seien — unabhängig von der Linsenöffnung und nur von der Brennweite der Linse bedingt, nämlich

$$tg\, u = \frac{\pi}{f}. \tag{2a}$$

In dem andern Falle, $p < \pi$ (Fig. 362) hingegen sind die Gesichtswinkel der drei oben bezeichneten Räume

$$tg\, w = \frac{\pi - p}{d}, \quad tg\, W = \frac{\pi}{d}, \quad tg\, \omega = \frac{\pi + p}{d}. \tag{3}$$

Der halbe Oeffnungswinkel auf der Objektseite in diesem Falle ist

$$tg\, u = \frac{p}{f}. \tag{3a}$$

Wenn wir also, wie früher, als Gesichtsfeldwinkel schlechthin denjenigen bezeichnen, welcher von den Hauptstrahlen (Mittelaxen) der Büschel begrenzt wird, d. h. mindestens noch die Hälfte der Apertur des centralen Theils besitzt, so ist derselbe in dem einen Falle nur von der Oeffnung der Linse, in dem anderen Falle nur von derjenigen der Pupille und in beiden Fällen vom gegenseitigen Abstand beider abhängig. Das Sehfeld ist also unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je näher man die Lupe an das Auge hält.

Die Helligkeit der Bilder ist im ersteren Falle bei jeder Vergrösserung gleich der des Sehens mit freiem Auge, im letzteren Falle wie $p^2 : \pi^2$ gegen diese verringert.

Wir fanden früher (pag. 106) den durch die sphärische Aberration eines Linsensystems verursachten Zerstreuungskreis, bezogen auf die Objektseite in erster Näherung proportional der dritten Potenz der Apertur und einer Constanten K, welche von der specifischen Construction des Systems abhängt, von dessen Brennweite aber unabhängig ist,

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K. \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt natürlich, ebenso wie für den dort angenommenen Fall eines unendlich entfernten Objekts auch für den hier vorliegenden eines sehr entfernten Bildes. ζ ist dann der angulare Werth des Zerstreuungskreises, gemessen vom vorderen Knotenpunkte des Systems, also auch der angulare Betrag desselben Zerstreuungskreises gesehen durch die Linse hindurch.

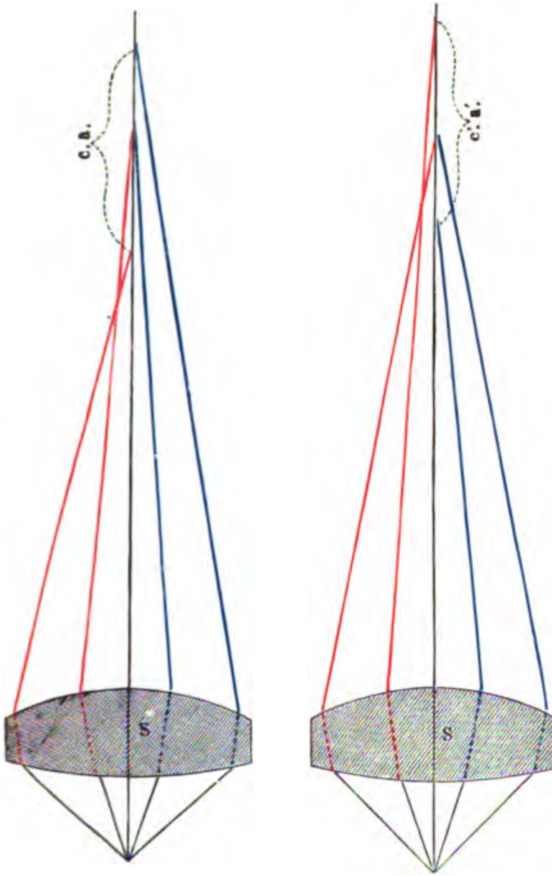
Es darf nun in diesem, wie in jedem anderen Falle, der Zerstreuungskreis im Bilde höchstens denjenigen Betrag erreichen, welcher eine merkliche Unschärfe hervorbringen würde. Dieser Betrag hängt, wie wir früher bereits wiederholt hervorhoben, von der Gestalt, Farbe, Helligkeit des Objektes sowie von der Sehschärfe des beobachtenden Auges ab, andererseits natürlich auch von der Art, wie der »Zerstreuungskreis« geometrisch bestimmt wurde und von der Lichtvertheilung innerhalb desselben. Für die gewöhnlich vorliegenden Objekte kann man vielleicht 5 Bogenminuten als Durchschnittsmaass annehmen. (Für die empfindlichen, sogen. »Testobjekte« muss er auf 1—2′ herabgesetzt werden).

Es ist dann also bei Lupen, deren Durchmesser grösser als der der Augenpupille ist,

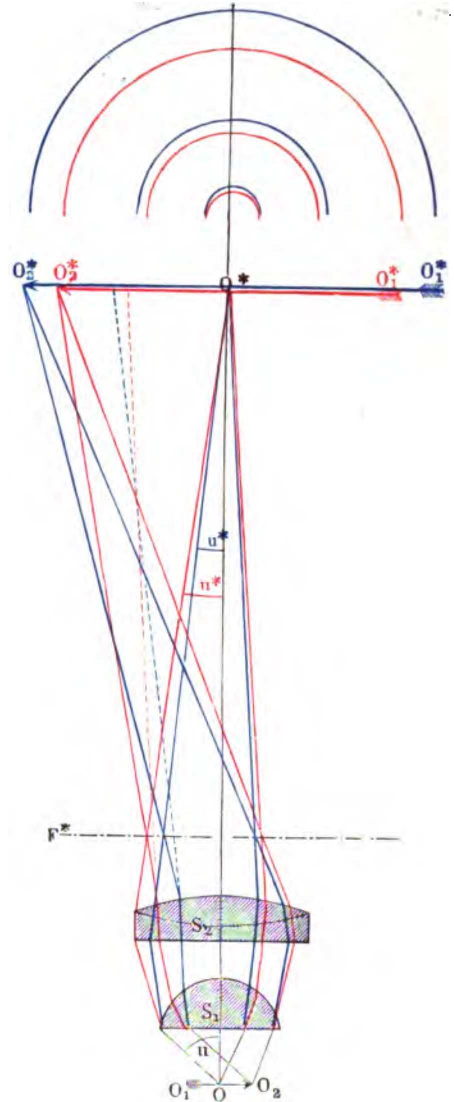
$$\zeta = \frac{\pi^3 \cdot K}{f3} \tag{4a}$$

d. h. der durch die sphärische Aberration hervorgerufene Zerstreuungskreis unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite, direkt proportional der dritten Potenz der Vergrösserung der Lupe. Hiernach ist leicht zu bemessen, dass die axiale sphärische Aberration einer einfachen planconvexen mit der ebenen Seite nach dem Objekte zu gerichteten Crownglaslinse für ein Auge von 4 Millim. Pupillenöffnung erst bei einer Brennweite von 9—10 *mm*, also bei einer ca. 25 fachen linearen Vergrösserung – in umgekehrter Lage bei einer ca. 7 fachen — anfängt, bemerklich zu werden, was in Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist.

Ganz analog ist der Einfluss der chromatischen Aberration zu bemessen. Wir fanden diese pag. 143 proportional einer von der Zusammensetzung des



(Ph. 335.)
zu pag. 149.

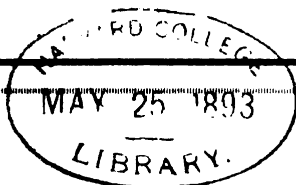


(Ph. 336.)
zu pag. 150.



(Ph. 348.)
zu pag. 175.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).



HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PROF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, DR. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, DR. PULFRICH-JENA, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, DR. STRAUBEL-JENA, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

VIERZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1893.

Dritte Abtheilung. — Vierzehnte Lieferung.

Systems abhängigen Constanten G und der ersten Potenz des Oeffnungsverhältnisses, also in unserem Falle

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) \cdot G = \frac{\pi \cdot G}{f}. \qquad (5)$$

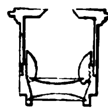
Bei constantem $\pi (p > \pi)$ wächst daher der Zerstreuungskreis der chromatischen Aberration direkt mit der Vergrösserung des Systems und wird demgemäss in einfachen Crownglaslinsen erst bei einer ca. 10fachen Vergrösserung bemerklich.

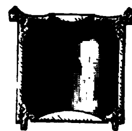
Die Ansprüche, welche an die Eigenschaften der von Lupen entworfenen Bilder ausserhalb der Axe zu stellen sind, decken sich vollständig mit denjenigen, welche wir bei den photographischen Systemen namhaft gemacht haben. In der That lässt sich ein photographisches Objektiv, dessen *A.-P.* im zugänglichen Theil des Bildraumes liegt, z. B. die einfache Linse mit ausserhalb gelegener Blende ohne weiteres als Lupe benützen, wenn man ihre Stellung gegenüber Objekt und Bild umkehrt (bei der pag. 216 betrachteten einfachen Landschaftslinse hätte man demnach die Blende nach dem Auge hin zu richten). An Stelle des in oder ein wenig ausserhalb der Brennebene gelegenen Bildes würde hier für ein normalsichtiges Auge das in oder etwas innerhalb der Brennweite gelegene Objekt kommen (für ein übersichtiges Auge würden Objekt und Bild ihre Lage unter blosser Umkehrung ihres Verhältnisses geradezu beibehalten können). Von Wichtigkeit sind also hier wie dort: Aufhebung des Astigmatismus und des Coma, Ebenung des Bildes, Orthoskopie und von den chromatischen Eigenschaften insbesondere: Gleichheit der Vergrösserung für die verschiedenen Farben.

Die üblichsten Constructionen.

1) Die einfache unachromatische Linse. Dieselbe ist in Brennweiten bis zu ca. 30 *mm* herunter, d. h. bis zu ca. 8 maliger Vergrösserung ganz brauchbar, wenn man ihr eine etwa planconvexe Gestalt giebt, mit der ebenen Seite nach dem Auge zu. (Diese Stellung ist zwar wegen des bei ihr relativ grossen Betrages der sphärischen Aberration in der Axe ungünstig, verdient aber trotzdem wegen der in ihr erheblich geringeren Fehler ausser der Axe bei weitem den Vorzug.) Man hat, wenn man sie nahe ans Auge hält, ein Bildfeld von ungefähr $\frac{1}{5}$ der Brennweite merklich eben und ziemlich frei von Verzerrung. Darüber hinaus sind die Fehler in diesen letzteren beiden Eigenschaften, wie auch namentlich in Bezug auf die chromatische Vergrösserungsdifferenz zu sehr bemerklich.

2) Eine wesentliche Verbesserung diesen einfachen Lupen gegenüber bilden die aus zwei unachromatischen (meist planconvexen) Linsen zusammengesetzten, deren bekannteste Typen die von FRAUNHOFER (Fig. 363) und WILSON (Fig. 364) sind. Bei der ersteren Construction, in welcher noch nahezu der Typus der einfachen Linse festgehalten ist, sind durch die Vertheilung der Brechung auf die doppelte Anzahl von Flächen und die infolgedessen geringeren Krümmungen derselben die Aberrationen in der Axe ohne weiteres verringert, während durch die besondere Art der Zusammensetzung aus zwei annähernd gleichen, mit den convexen Flächen einander zugewandten Linsen in geringem Abstand von einander der Verminderung der Aberrationen ausserhalb der Axe möglichst Rechnung getragen ist.

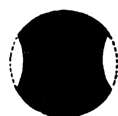

(Ph. 363.)


(Ph. 364.)

Bei der WILSON'schen Lupe kommen einerseits dieselben Vortheile zur Geltung; die grössere Entfernung der Linsen von einander gewährt sogar für

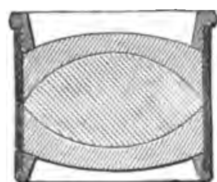
die Verminderung der Aberrationen ausser der Axe noch günstigere Bedingungen und ermöglicht ausserdem, wenn auch nicht die Aufhebung — das würde dem System gänzlich den freien Objektabstand rauben — so doch eine Verminderung der chromatischen Differenz der Vergrösserung; dafür ist diese Lupe gegen die FRAUNHOFER'sche im Nachtheil in Bezug auf den Objektabstand. Man wählt die Brennweiten der Einzellinsen bei ihr ungefähr gleich, ihren Abstand zu $\frac{3}{8}$ jener Brennweiten. Das Sehfeld wird bei der WILSON'schen Lupe entweder durch ein zwischen den Linsen befindliches Diaphragma oder ebenso wie bei einer ein fachen Linse durch die Grösse (den Rand) einer der beiden Linsen bestimmt.

Von geringerem Werthe als die eben genannten sind die aus einem dickeren Glasstück bestehenden und daher ebenfalls mehr nach dem Typus zweier Einzelsysteme als nach dem einer dünnen Linse zu betrachtenden Lupen von der Art, wie sie BREWSTER (Fig. 365) und STANHOPE (Fig. 366) vorgeschlagen haben. Bei ersterer bilden die beiden Begrenzungsflächen Theile einer und derselben Kugel; die Apertur der seitlichen Büschel ist durch einen meridionalen Einschliff so weit reducirt, dass die Bilder erträglich werden. Bei der STANHOPE'schen Linse sind die beiden Krümmungen erheblich verschieden, oft in der Weise, dass die vordere (untere) Brennebene dem Orte und der Krümmung nach mit der vorderen Linsenfläche zusammenfällt, um die in dieser angebrachten Gegenstände (z. B. kleine Photogramme) durch die stärker gewölbte Fläche hindurch betrachten zu können. Auch bei der BREWSTER'schen Lupe ist der Abstand des Objektes von der ersten Linsenfläche, der sogen. freie Objektabstand, natürlich sehr gering.

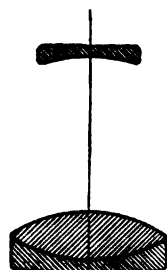

(Ph. 365.)


(Ph. 366.)

3) Unter den aus Gläsern mit verschiedenem Zerstreuungsverhältniss zusammengesetzten Lupen haben sich namentlich die von STEINHEIL construirten, sogen. aplanatischen, bewährt. Dieselben bestehen aus einer zwischen zwei gleichen Flintglasmenisken eingeschlossenen biconvexen Crownlinse. Eine weitere Verbesserung im Rahmen derselben Construction wurde — es ist mir nicht bekannt, durch wen zuerst — dadurch eingeführt, dass der mittleren Crownlinse eine grössere Dicke gegeben wurde, so dass gewissermaassen eine achromatisirte BREWSTER'sche Lupe entstand (Fig. 367; $f = 40$ *mm*, nat. Gr.).


(Ph. 367.)

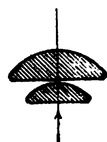
4) Das Gegenstück in gewissem Sinne zu der WILSON'schen Lupe bildet die zuerst von CHEVALIER[1]) vorgeschlagene, später von E. BRÜCKE[2]) wieder aufgenommene Construction, nach welcher man eine collective Vorderlinse mit einer dispansiven Hinterlinse verbindet (Fig. 368). Denn während bei der WILSONschen Lupe die Ausdehnung und Qualität des Bildes auf Kosten des freien Objektabstandes erhöht wird, findet bei der BRÜCKE'schen umgekehrt eine Einbusse in diesen beiden Beziehungen zu Gunsten des freien Objektabstandes statt. Doch stellt diese, jetzt gewöhnlich nach BRÜCKE bezeichnete, Lupe schon mehr ein zusammengesetztes Mikroskop in dem weiter unten aufgefassten Sinne vor; ihre Wirkungsweise findet daher besser bei der Besprechung dieses nähere Erklärung.


(Ph 368.)

---

1) CHEVALIER, Des Microscopes. D. Uebers. Quedlinburg 1843, pag. 38.
2) Sitzber. Wien. Akad. 6. pag. 554. 1851.

5) Man hat früher einfache Mikroskope von erheblich kürzerer Brennweite und entsprechend stärkerer Vergrösserung hergestellt, als die oben aufgeführten besitzen. Die Anwendung einer einzigen Linse zu diesem Zwecke verbot sich natürlich bald von selbst; denn eine solche würde schon bei mittleren Vergrösserungen einen sehr kurzen Krümmungsradius erhalten müssen (z. B. bei 500 facher linearer Vergrösserung und planconvexer Form wäre, Crownglas vom Brechungsexponenten 1·5 als Material vorausgesetzt, $r = 0{\cdot}25$ *mm*). Dadurch wäre einerseits die äusserste mögliche Oeffnung der Linse ebenfalls auf sehr geringe Beträge herabgedrückt (der Durchmesser einer vollständigen Halbkugel im obigen Falle $= 2r = 0{\cdot}5$ *mm*) also die Lichtstärke eine entsprechend geringe. Andrerseits führt eine solche Halbkugel oder — was man auch vorgeschlagen und benutzt hat — Vollkugel (Glasperle), bis an ihren Aequator benützt, so starke Aberrationen herbei, dass von einer Strahlenvereinigung und einem optischen Bilde überhaupt kaum noch die Rede sein kann. Man muss die freie Oeffnung einer solchen Linse also erheblich vermindern, auf $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ ihres Maximalbetrages, und verliert proportional dieser Reduction an Unterscheidungsvermögen, im quadratischen Verhältnisse mit ihr an Lichtstärke. Man hat daher nach einigen misslungenen Versuchen, die genannten Uebelstände durch Anwendung von hochbrechenden Substanzen (Edelsteinen bezw. Flüssigkeiten BREWSTER 1819, GORING und PRITCHARD 1824) zu vermindern nach dem Vorschlag von EULER[1]), J. HERSCHEL[2]) und namentlich von WOLLASTON[3]) zwei, später auch drei Linsen zu einem sogen. Dublet bezw. Triplet zusammengesetzt. Durch die Vertheilung der Krümmung auf mehrere Flächen werden die Aberrationen gemäss dem pag. 110 Ausgeführten erheblich vermindert. Fig. 369 stellt ein solches Dublet von 2 *mm* Brennweite in 4facher Grösse dar (von ZEISS), wie es noch in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts vielfach gebraucht wurde. Der grösste Theil der mikroskopischen Untersuchungen bis zur Mitte dieses Jahrhunderts wurde mit derartigen Systemen ausgeführt, bei denen Vergrösserungen bis zu 200 noch ziemlich vortheilhaft erreichbar waren[4]).


(Ph. 369)

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Objektabstände und des Gesichtsfelds der oben genannten Lupen bei verschiedenen Brennweiten bezw. Vergrösserungen.

Constructionstypus	Lineare Vergrösserung	Focalabstand *mm*	Objektseitiges Gesichtsfeld *mm*
Einfache Linse, planconvex	6	40	bis ca. 8 *mm* brauchbar
WILSON'sche Lupe	10	12—14	14
STEINHEIL'sche Lupen	6	34	18
	10	20	10
	20	10	3·5
Achromatisirte BREWSTER'sche Lupen	6	32	30
	10	12	15
BRÜCKE'sche Lupe	6	70	10
Dublets von ZEISS	17	13	4
	34	5	2
	70	2·5	1·2

1) Mém. Acad. Berlin 20, pag. 105. 1764.
2) Phil. Trans. 1821, pag. 246.
3) Phil. trans. 1829, pag. 9; POGG. Ann. 16. pag. 176. 1829.
4) Näheres über diese und die Entwickelungsgeschichte des einfachen Mikroskops über-

II. Das zusammengesetzte Mikroskop.

An sich wäre kein Grund gewesen, auf dem eingeschlagenen Wege nicht noch weiter zu gehen und durch Zusammensetzung des Systems aus mehreren geeignet angeordneten Linsen von verschiedenem Brechungsvermögen und verschiedener Dispersion die sphärischen und chromatischen Fehler nach dem Princip der gegenseitigen Compensation vollständig aufzuheben, ja sogar dies unter Erzielung genügend grosser Linsenöffnungen, ganz ebenso wie das in den Objektiven der modernen Mikroskope thatsächlich geschieht. In der That werden wir bald zeigen, dass diese Objektive im Wesentlichen nichts anderes sind als gut corrigirte Lupen (einfache Mikroskope) von kurzer Brennweite und relativ grosser Oeffnung.

Wenn man sich trotzdem behufs Erzielung hoher Vergrösserungen von jenem Wege abgewandt, und seit den 30er Jahren dieses Jahrhunderts mehr und mehr, seit der Mitte des Jahrhunderts sogar ausschliesslich der Benutzung bezw. Vervollkommnung des schon vor nunmehr ca. 300 Jahren erfundenen zusammengesetzten Mikroskops zugewandt hat, so müssen die Gründe hierfür anderwärts zu suchen sein. Als solche Gründe konnten schon zu jener Zeit die folgenden geltend gemacht werden.

Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen.

1) Durch die Zusammensetzung eines Systems aus zwei andern, um einen endlichen Abstand getrennten, erhält man gemäss den pag. 60 ff. dargelegten Gesetzen ein neues System, dessen Brennweite f in einem beliebigen Verhältniss kleiner ist, als die seiner Bestandtheile f_1, f_2, wenn man den Abstand zwischen den einander zugewandten Brennpunkten dieser Partialsysteme, $F_1' F_2 = \Delta$, welchen ABBE als die optische Tubuslänge bezeichnet, entsprechend gross wählt. Wir fanden pag. 61 die vordere Brennweite des combinirten Systems

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \text{ die hintere analog } f' = +\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{1}$$

Man kann hiernach z. B. ein System von 1 *mm* Brennweite erzielen durch Combination zweier anderer von je 10 *mm* Brennweite, deren zugewandte Brennpunkte um 100 *mm* von einander entfernt sind. Diese Vertheilung der dioptrischen Fundamentalwirkung auf zwei Partialsysteme von beiläufig 5—20fach grösseren Dimensionen würde auch unter sonst gleichen Umständen handgreifliche Vortheile schon für die technische Ausführung bieten.

2) Ein andrer praktischer Vortheil, der ohne weiteres mit der Trennung in zwei gesonderte Bestandtheile verbunden ist, besteht darin, dass hierdurch das Objekt in grössere Entfernung vom Auge bezw. Gesichte des Beobachters gerückt wird. Die grossen Unbequemlichkeiten und Beengungen im Gebrauch des Mikroskops, ja sogar die Gefahr, welche unter Umständen für den Beobachter in dessen grosser Nähe am Auge beruht (z. B. bei Erwärmung, elektrischer Erregung oder dergl. des Objekts) bedürfen wohl kaum einer weiteren Erläuterung.

3) Nicht nur der Abstand des Objekts vom Auge, sondern auch derjenige von der Vorderfläche des Objektivs wird durch die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandtheilen und die dadurch ermöglichte

haupt sehe man in den älteren der unten angeführten mikrographischen Werken, insbesondere: H. v. MOHL, Mikrographie, Tübingen 1846, pag. 36, und P. HARTING, Das Mikroskop. Braunschweig 1859, I, pag. 91—118, u. III. (Geschichte etc. des Mikroskops), pag. 569 ff.

Vergrösserung der Dimensionen (Brennweiten) dieser Bestandtheile selbst mit vergrössert, — was besonders bei den stärkeren Systemen, von kurzer Gesammtbrennweite, ausserordentlich ins Gewicht fällt. Diese Vergrösserung ist einerseits mit derjenigen des Vordertheils des Systems (Objektivs) an sich verknüpft, wenn wir die später näher zu rechtfertigende Annahme gelten lassen, dass dieses für die Erzielung einer gleichartigen Wirkung auch eine im wesentlichen gleiche Construction erhalten müsse, wie ein einfaches Mikroskop. Denn alsdann wird der Abstand der vorderen Brennebene dieses Systems von seiner ersten Fläche mit seinen übrigen Dimensionen einfach mitvergrössert. Die vordere Brennebene des Gesammtmikroskops liegt aber noch vor derjenigen seines Objektivs, wenn der Abstand der zugewandten Brennpunkte von Objektiv und Ocular, $F_1'F_2 = \Delta$, positiv ist — was wir hier immer annehmen wollen; denn wir fanden früher die Grösse

$$F_1F = \sigma = -\frac{f_1^2}{\Delta}, \tag{2}$$

also liegt F vor F_1, d. h. der freie Objektabstand des ganzen Mikroskops ist noch grösser als derjenige seines Vordertheils wäre, wenn dieses für sich als Lupe benützt würde (vergl. Fig. 372).

4) Ein weiterer Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops liegt darin, dass die Bestandtheile desselben gegen andere von abweichender Construction oder Stärke auswechselbar sind, z. B. dasselbe Objektiv mit verschiedenen Ocularen benützt werden kann, sodass man mit demselben Objektiv auf sehr bequeme Weise eine Reihe verschiedener Vergrösserungen erzielen kann. Ferner erscheinen die durch das Objektiv allein vermittelten und etwa in dessen hinterer Brennebene auftretenden Lichterscheinungen (Axenbilder von Krystallen, Diffractionsspectra) daselbst entsprechend seiner Brennweite 4 bis 10 mal grösser als in der Brennebene eines dem ganzen Mikroskop äquivalenten einfachen, sind daher im selben Verhältniss leichter zu beobachten.

5) Die jetzt fast allgemein adoptirte Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten collectiven Bestandtheilen bringt die Erzeugung eines reellen Zwischenbildes vor dem zuletzt beobachteten virtuellen mit sich. Hierdurch wird es möglich, in bequemer Weise dieses Bild aufzufangen, um es entweder einer Messung zu unterwerfen oder photographisch zu fixiren oder — sei es als Ganzes, sei es in seinen einzelnen Bestandtheilen — physikalischen Veränderungen zu unterwerfen (Polarisation, spectrale Zerlegung der Farben, Absorption etc.), mittelst derer ein Rückschluss auf die Beschaffenheit des Objekts möglich wird. Diesen Möglichkeiten, welche sicher noch bei weitem nicht erschöpft sind, verdankt das zusammengesetzte Mikroskop schon jetzt einen nicht geringen Theil seiner thatsächlichen Verbreitung. Sie haben in Verbindung mit den anderen oben genannten für die Schaffung bezw. den Ausbau einer mikrochemischen, mikrophysikalischen, mikrobiologischen, mikrodiagnostischen und ähnlicher Disciplinen die wesentliche Grundlage gebildet.

Die vorstehend genannten Momente, welche, wie bemerkt, schon früher geltend gemacht werden konnten, betreffen Vorzüge theils technischer, theils sonstiger praktischer Natur. Sie betreffen nicht die dioptrische Leistung des Mikroskop und würden in gleicher Weise bestehen bleiben z. B. auch bei einer geometrisch vollkommenen Abbildung, wie der im II. Abschnitt dieser Darstellung betrachteten. Der fundamentale Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen — wie er praktisch natürlich auch schon früher von selbst zur Geltung,

aber erst in verhältnissmässig neuer Zeit durch ABBE[1]) zu klarer Erkenntniss und in der Construction dieses Instruments zu bewusster methodischer Anwendung gekommen ist — liegt nun gerade darin, dass es eine Erhöhung der optischen Leistungsfähigkeit nach der quantitativen wie qualitativen Seite hin gestattet, d. h. dass es die Abbildung eines grösseren Objektstücks und dieses in grösserer Vollkommenheit ermöglicht, als ein einfaches System gleicher Stärke.

Denn nach den allgemeinen Gesetzen, denen jede optische Abbildung unterworfen ist, ist es schlechterdings unmöglich, die Abbildung einer gegen die Brennweite eines Systems beträchtlichen Objektfläche mit Büscheln zu bewirken, welche auf der Objekt- oder Bildseite sehr grosse Oeffnungen haben. Man kann nur — wie wir bewiesen und woran wir wiederholt erinnert haben — entweder mit Büscheln grosser Oeffnung ein Objekt abbilden, dessen Dimensionen klein sind gegen die Brennweite des Systems, oder ein relativ grosses Objekt, dieses aber nur mittelst entsprechend enger Büschel. So lange man daher beim einfachen Mikroskop stehen blieb, war dessen Wirkung nothwendig auf die eine oder andere Möglichkeit beschränkt. Wie wir später zeigen werden, beruht nun die Capacität eines Mikroskops in erster Linie auf der Grösse des Oeffnungswinkels der vom Objekt aus divergirenden, zum Bilde beitragenden Büschel. Die möglichste Vergrösserung dieses Winkels ist also das erste Postulat bei der Construction des Mikroskop für die Steigerung seiner Wirkung. Andererseits sind die das letzte Bild formirenden und von ihm zum Auge gelangenden Büschel naturgemäss — entsprechend der mittleren Sehweite und Pupillengrösse des Auges — sehr enge.

In dem zusammengesetzten Mikroskop ist nun gerade von den Eigenthümlichkeiten jener beiden in ihm auftretenden Grenzformen optischer Abbildung — mittelst sehr weiter und mittelst sehr enger Büschel — Gebrauch gemacht, um zugleich den Forderungen grosser Apertur der Büschel und grösseren Objektfeldes zu genügen. Denn seine Zusammensetzung hat nicht nur die Theilung und damit erleichterte Leistung der optischen Fundamentalwirkung zum Zwecke — wie man es auszudrücken pflegt: das vom Objektiv entworfene Bild wird vom Ocular abermals vergrössert — sondern sie bedeutet vor allem eine Vertheilung specifischer Functionen auf die beiden Bestandtheile des Systems, eine Art Arbeitstheilung innerhalb des Systems, wie sie eben durch die erhöhten Ansprüche an die Leistungen desselben und durch die Natur der dioptrischen Bilder, d. h. der Mittel und Grenzen ihrer Erzeugung unabweislich geboten ist.

Durch das Objektiv wird zunächst eine gegen dessen Brennweite — aber nicht ebenso gegen die des ganzen Mikroskops — kleine Objektfläche mittelst weiter Büschel abgebildet. Dieses Bild, in welchem die Strahlenbüschel schon entsprechend der in ihm repräsentirten Vergrösserung enger geworden sind, bildet das Objekt für den zweiten Theil des Systems, das Ocular, für welchen daher die Gesetze der Abbildung mittelst enger Büschel maassgebend sind. In ihm kann daher ein im Verhältniss zu seiner Brennweite erheblicher Theil jenes ersten Bildes — und zwar dieser unter beträchtlicher Divergenzänderung der wirksamen Büschelaxen (Hauptstrahlen) —

[1]) Zuerst ausgesprochen (ohne Beweise) in MAX SCHULTZE's Arch. f. mikrosk. Anat. 9, pag. 421; später von demselben weiter ausgeführt in Relation of aperture and power in the microscope. Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 300, 460, 720. 1882.

weiterer Abbildung unterworfen werden. In etwas schroffer uud daher nicht ohne Einschränkung zutreffender Weise drückte ABBE dieses Verhältniss in seiner ersten Abhandlung folgendermaassen aus:

»Im Objektiv erfolgt die Flächenausbreitung des Bildes praktisch so gut wie vollkommen nach den Gesetzen für die Abbildung eines unendlich kleinen Flächenelementes; im Ocular erfolgt die Divergenzänderung in den einzelnen Lichtbüscheln bis auf unmerkliche Abweichungen so wie an unendlich engen Strahlenbüscheln. Dagegen kommt dort das eigenthümliche Moment der Divergenzänderung von Strahlenkegeln grossen Oeffnungswinkels, hier das eigenthümliche Moment der Ausbreitung einer Bildfläche auf grossen Bildwinkel zur Geltung. — — In dieser Theilung der dioptrischen Leistung noch viel mehr als — wenn auch in Verbindung mit — den vorher namhaft gemachten Momenten liegt der wahre Grund der notorischen Ueberlegenheit des zusammengesetzten Mikroskops gegenüber dem besten Simplex auch schon bei solchen Vergrösserungen, die sich ohne alle Schwierigkeit mit dem einfachen Mikroskop erreichen lassen, wenn man die Qualität der Leistung ins Auge fasst.« Wie wir später sehen werden, ist eine gewisse Grösse der Apertur (des Oeffnungswinkels der vom Objekt aus divergirenden Strahlen) erforderlich, damit ein Detail von gegebener Feinheit im Bilde überhaupt wiedergegeben werde, und es ist eine gewisse Ausbreitung dieses Details auf einen bestimmten Sehwinkel nothwendig, damit es für das Auge bei der beschränkten Sehschärfe desselben getrennt wahrnehmbar sei Hierdurch wird der Vollzug dieser beiden Leistungen Grunderforderniss und zugleich Maassstab der Wirkung jedes optischen Instruments. Die Vertheilung derselben auf zwei getrennte Bestandtheile aber bietet — wie schon hier erkenntlich ist, allein die praktische Möglichkeit für die Ausführung der beiden Leistungen, und darin eben liegt ihre principielle Bedeutung.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang im Mikroskop.

In der Art der Strahlenbegrenzung und des dadurch bedingten Strahlenganges finden die genannten Momente ihren unmittelbarsten Ausdruck; denn natürlich bedingt die Art der Strahlenbegrenzung ebenso sehr die Art der Wirkung, als umgekehrt eine specifische Wirkungsweise eine gewisse Art der Strahlenbegrenzung erfordert. Wir betrachten daher zunächst diese.

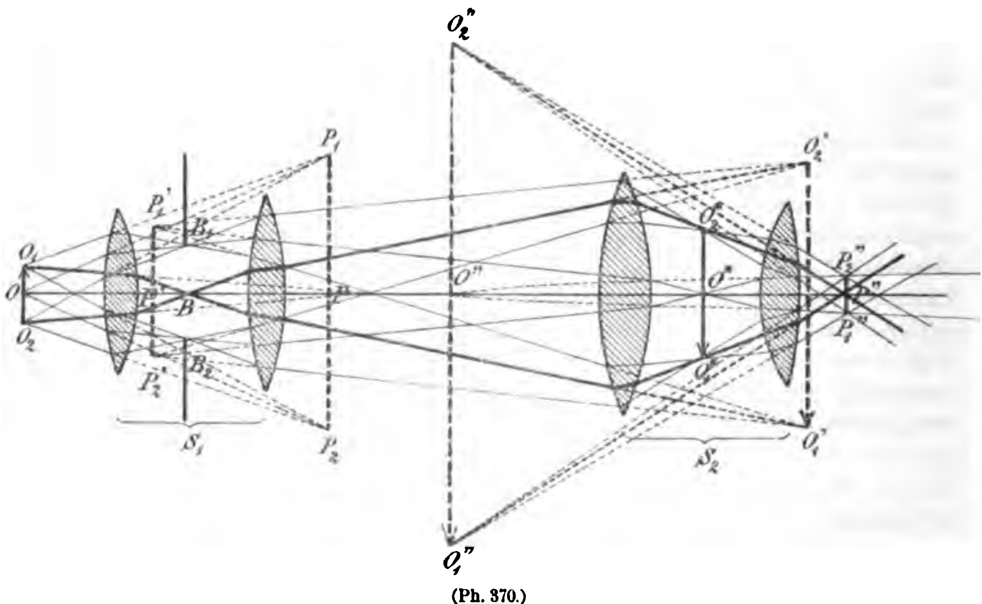
Begrenzung der Apertur. Lage der Pupillen. Die Lage der die Oeffnung der Strahlenbüschel begrenzenden Blende ist im zusammengesetzten Mikroskop nicht einheitlich und nach bestimmten Gesichtspunkten regulirt. Gemeinsam ist allen Mikroskopen nur dies, dass die Begrenzung der Strahlenbüschel nicht im Ocular sondern im Objektiv oder sogar vor demselben indirekt, im Beleuchtungsapparat stattfindet. (Mit Ausnahme des Falles, dass die Vergrösserung unter der Normalvergrösserung bleibt, wo dann die Apertur durch die Pupille des Auges reducirt wird.)

Nur wenn es sich darum handelt, das vom Objektiv allein entworfene Bild mikrometrischer Messung zu unterwerfen, ist es für die Genauigkeit dieser, wie wir früher (pag. 181) näher ausgeführt haben vortheilhaft, eine genügend enge Blende in der hinteren Brennebene des Objektivs anzubringen; denn da der Abstand der Pointirungsebene (Mikrometer-Vorrichtung) vom Objektiv durch die Verbindung beider mit dem Tubus mechanisch festgelegt ist, so bleibt nur derjenige des Objektes vom Objektiv einer Variabilität unterworfen. Es muss daher der Strahlengang nach der Objektseite hin telecentrisch gemacht werden. Andererseits kann man bei solchen Messungen meist auf die Forderung grosser Oeffnungswinkel verzichten, welche für die sonstige Anwendung des Mikroskops, zur Beobachtung fein structurirter Objekte, und

daher auch für seine Construction wesentlich ist. Jene Einrichtung fällt daher eigentlich etwas ausserhalb des Rahmens unserer jetzigen Discussion.

Bei den stärkeren Mikroskopen findet die Begrenzung der Strahlenbüschel oft an deren Frontlinse statt, welche in Folge ihrer eigenthümlichen Beschaffenheit (halbkugelig oder selbst überhalbkugelig) der Apertur von selbst eine Grenze setzt. In anderen Fällen kann die Blende durch den Rand irgend einer der auf die Frontlinie folgenden Linsen vorgestellt oder zwischen denselben eigens vorgesehen sein. Wir wollen diesen letzteren Fall als den allgemeinsten ins Auge fassen.

Der sich dann ergebende Strahlengang ist in Fig. 370 schematisch dargestellt. Die Lage der Eintritts- und Austrittspupille sowohl für das Objektiv ($P_1 P_2$, $P_1' P_2'$



(Ph. 370.)

als für das Ocular ($P_1' P_2'$, $P_1'' P_2''$) ergiebt sich dann nach den allgemeinen früher aufgestellten Regeln. Die Lage der *E.-P.*, $P_1 P_2$, hinter dem Objektivsystem S_1, wie in der Fig. 370 dargestellt, ist nach dem eben bemerkten nur zufällig; diese Lage hängt vielmehr ganz von der Stellung der wirksamen Blende, $B_1 B_2$, gegen den ihr vorangehenden Theil des Objektivsystems ab. Im allgemeinen aber ist es vortheilhaft, wenn die *E.-P.* nicht allzunah am Objekt liegt, damit die Hauptstrahlen der von dessen Punkten ausgehenden Büschel $O_1 P$, $O_2 P$ keine erheblichen Neigungen gegen einander erhalten und damit nicht durch die mit einer solchen verbundene perspektivische Verkürzung der *E.-P.* — von den seitlich liegenden Objektpunkten aus gesehen — eine entsprechende Verminderung der Apertur der von ihnen ausgehenden Strahlenbüschel eintrete. Dieser Bedingung ist bei stärkeren Systemen stets hinreichend genügt, da in Folge des nach dem Sinus des halben Oeffnungswinkels zu bemessenden photometrischen Werthes schiefer Strahlen die optische Schwerpunktslinie hier auch bei ganz nahe gelegener *E.-P.* dennoch nahezu parallel der Axe wird.

Die Austrittspupille des gesammten Systems, $P_1'' P_2''$, ist dann das vom Ocular S_2 entworfene Bild der für das Objektiv S_1 allein wirksamen, $P_1' P_2'$.

Da letztere stets vor der vorderen Brennebene des Oculars sich befindet — und zwar meist ebenfalls in der Nähe des Linsensystems selbst, also in beträchtlicher Entfernung vom Ocular — so liegt die Austrittspupille des ganzen Systems hinter der zweiten Brennebene des Oculars. Wenn also letztere im zugänglichen Theil des Bildraumes (hinter der letzten Ocularlinse) liegt, so ist dies mit der *A.-P.* des Systems um so mehr der Fall.

Wenn z. B. das Objektiv telecentrisch ist, seine *A.-P.* sich in seiner hinteren Brennebene befindet, so fällt diejenige des ganzen Systems zusammen mit der hintern Brennebene desselben, F'' und ist von der hintern Brennebene des Oculars, F_2', um eine Strecke σ' entfernt, welche nach pag. 61

$$\sigma' = \frac{f_2^2}{\Delta} \tag{3}$$

ist. Sehr annähernd wird dies immer der Fall sein, da die Entfernung Δ an sich schon eine beträchtliche zu sein pflegt (150—300 *mm*), sodass eine mässige Abweichung der *A.-P.* des Objektivs von F_1' keinen erheblichen Einfluss auf die Lage der *A.-P.* des ganzen Systems ausübt.

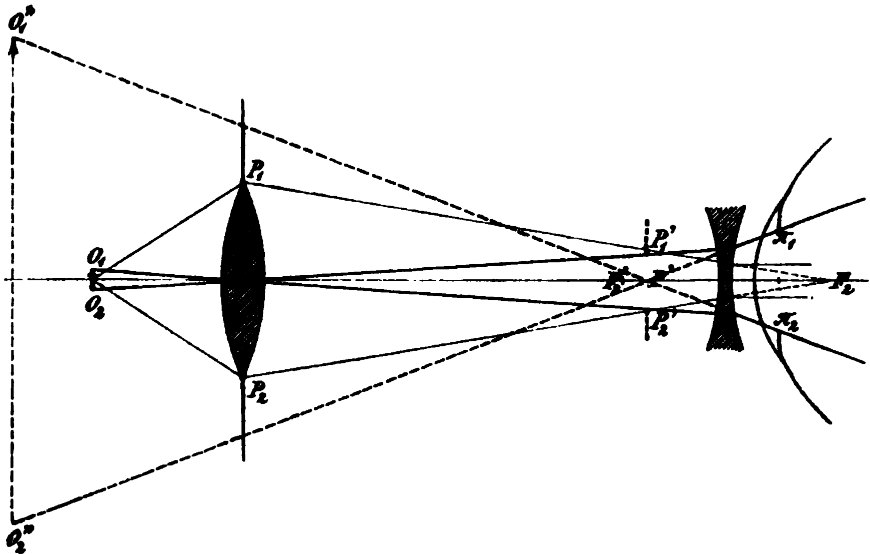
Bei Objekten, welche nicht selbstleuchtend sind, sondern von einer andern Lichtquelle beleuchtet werden, kann — wie wir früher bereits hervorhoben — diese nach Lage und Grösse maassgebend werden für die Apertur der wirksamen Büschel. Es kann diese Lichtquelle entweder durch regelmässige Brechung in einem zwischen ihr und dem Objekt befindlichen optischen System (Beleuchtungsapparat) in eine solche von anderer Lage und Grösse verwandelt werden, oder es kann das von ihr bezw. ihrem Bild ausgegangene Licht in dem Objekt noch weitere Richtungsänderungen durch Brechung bezw. Beugung erfahren — für die Apertur der wirksamen Büschel ist immer diejenige Lichtvertheilung maassgebend, welche unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse, d. h. thatsächlich in dem Raum zwischen Objekt und erster Linsenfläche statthat. Je nachdem diese Lichtausbreitung — für je einen Punkt des Objektes als Convergenzpunkt — den Gesichtswinkel der *E.-P.*, von demselben Punkt aus gesehen, überschreitet oder nicht, ist diese *E.-P.* oder jene durch die Beleuchtungsverhältnisse gegebene Lichtausbreitung maassgebend für die wirksame Oeffnung der Büschel.

Begrenzung des Sehfelds. Diese erfolgt bei zusammengesetzten Systemen, umgekehrt wie die der Apertur, fast stets im Ocular und zwar an derjenigen Stelle, wo vor dem Ocular oder innerhalb desselben ein reelles Bild des Objektes zu Stande kommt. Die objektseitige Gesichtsfeldblende ist dann das Bild jener physischen Blende wie es durch den ihr vorangehenden Theil des Systems nach der Objektseite hin entworfen würde; die bildseitige Gesichtsfeldblende das Bild derselben Blende, von dem ihr nachfolgenden Theil des Systems nach dem Bildraum hin projicirt. In diesem wie in jenem Raum fällt sie also mit dem Objekt bezw. Bilde selbst zusammen, d. h. es findet hier eine scharfe Begrenzung des Sehfelds statt.

Eine Ausnahme hiervon macht nur der Fall, dass das Ocular nach dem Typus der einfachen Dispansivlinse construirt ist; alsdann kommt ein reelles Bild des Objektes nirgends zu Stande. Die das Bild formirenden Strahlenbüschel (Fig. 371) sind in diesem Falle begrenzt einerseits durch die Pupille des Auges $\pi_1\pi_2$, andererseits durch das von dem Ocular entworfene virtuelle Bild $P_1'P_2'$ der Objektivöffnung (*E.-P*) P_1P_2. Das Bild — wo dasselbe auch zu Stande kommen möge — wird vom Auge durch jenes Bild der Objektivöffnung wie durch ein physisches Diaphragma hindurch gesehen. Die Verhältnisse sind dann im Bildraum dieselben, wie wir sie bei den Lupen und einfachen Mikroskopen betrachtet haben. Je nach-

dem die Augenpupille oder das Objektivbild das grössere ist, wirkt die erstere als Gesichtsfeldblende und die letztere als Aperturblende oder umgekehrt. Bei den stärker vergrössernden, nach diesem Typus construirten Mikroskopen, ist das eine, bei den schwächer vergrössernden (CHEVALIER-BRÜCKE'sche Lupe) das andere der Fall.

Der Vorzug der Anwendung eines solchen Oculars beruht einmal darin, dass dasselbe $(f_2) > (f_1)$ vorausgesetzt, eine positive Gesammtbrennweite des ganzen Systems ergiebt, also bei der hier gedachten Art des Gebrauchs aufrechte Bilder. Ausserdem darin, dass bei gegebenen Brennweiten von Objektiv und Ocular und gegebenem Abstand derselben von einander — beide als dünne Linsen gedacht — eine etwas stärkere Vergrösserung resultirt oder bei gegebener Vergrösserung ein etwas kleinerer Abstand der Linsen von einander als bei positiver Ocularlinse. Beide Umstände machen den Gebrauch derartiger Mikroskope vortheilhaft



(Ph. 871.)

für Zwecke wie das Präpariren unter mässigen Vergrösserungen (bis höchstens 100 fach). Für die weit überwiegenden Anwendungsfälle des Mikroskop bedeutet die oben bezeichnete Art der Strahlenbegrenzung und die mit ihr verbundene Einschränkung des Sehfelds eine Erschwerniss, welche durch jene Vortheile in keiner Weise aufgehoben, ja kaum gemildert wird. Wir wollen daher diese Einrichtung des Mikroskops nicht weiter berücksichtigen, sondern den weiteren Betrachtungen diejenige mit collektivem Ocular als die normale und typische zu Grunde legen.

Man würde die genannten Uebelstände zwar vermeiden können, ohne den Vortheil, den aufrechte Bilder manchmal bieten, preiszugeben, indem man — wie beim Fernrohr — zwar ein dispansives Ocular anwendete (mit negativem f) aber ein solches, welches seinerseits nach Art des ganzen Mikroskop zusammengesetzt ist aus zwei Theilen, die ähnlich wie bei diesen Objektiv und Ocular repräsentiren (dies aber nur in Bezug auf die dioptrische Fundamentalwirkung nicht in Bezug auf die oben bezeichneten specifischen Functionen, in welchen vielmehr beide Theile Oculare vorstellen) und die beide collektiv sind, daher bei entsprechendem Abstand von einander negative Gesammtbrennweite und ausserhalb des Systems liegende Brennpunkte besitzen. Ein solches zusammengesetztes negatives (bildaufrichtendes) Ocular würde im wesentlichen ebenso wirken, wie ein entsprechendes collektives. Sein Augenpunkt würde im zugänglichen Theil des Raumes liegen, das Auge also mit ihm in Coincidenz gebracht werden können; das Bild würde an einer, ja sogar an zwei Stellen reell und in Folge dessen scharf begrenzbar sein und vom Auge in seiner ganzen Ausdehnung übersehbar. Doch werden solche Oculare wegen ihrer gewöhnlich 2—3 fachen Länge und der etwa doppelten in ihnen wirksamen, daher auch partiell reflektirenden Anzahl von Flächen sehr selten verwendet.

Auf Grund der obigen Festsetzungen lässt sich nunmehr der Strahlengang im Mikroskop vollständig construiren: Das Objektiv entwirft von dem Objekt ein reelles vergrössertes Bild $O_1'O_2'$ nahe dem oder im vordern Brennpunkt des Oculars; das Ocular bildet dieses zum zweiten Mal nach $O_1''O_2''$ ab in einer Entfernung, die dessen Abstand von seinem vordern Brennpunkt, d. h. indirekt der Sehweite des Beobachters entspricht, jedenfalls aber in relativ grosser Entfernung von seinem hintern Brennpunkte. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen: in unendlicher Entfernung, da die Abweichungen von diesem Fall durch Einführung kleiner Correctionsglieder berücksichtigt werden können und das Wesen der Sache nicht berühren. Mit der Erzeugung des ersten Bildes F_1' in einer Entfernung Δ von etwa 200 *mm* vom hinteren Brennpunkt des Systems S_1 ist zunächst eine lineare Vergrösserung und damit eine Divergenzänderung in den abbildenden Büscheln verbunden, welche desto stärker ist, je kürzer die Brennweite von S_1 ist; denn es ist

$$\frac{y'}{y} = \beta = -\frac{\Delta}{f_1} \tag{4}$$

und, wenn die Bedingung aplanatischer Abbildung in diesem System erfüllt ist,

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{5}$$

Je stärker also die vom Objektiv allein hervorgebrachte Linearvergrösserung ist, desto stärker ist auch die Reduction der Oeffnungswinkel der abbildenden Büschel. Da man, wie wir später sehen werden, eine Zunahme der Objektivvergrösserung stets mit einer solchen der Apertur der einfallenden Büschel verbindet, so heben sich diese beiden Momente nahezu auf, insofern die Apertur der vom Objektiv austretenden, das erste Bild erzeugenden Büschel in allen Mikroskopen nahezu von gleicher Grösse oder wenigstens von gleicher Grössenordnung ist. Sie beträgt ungefähr $\frac{1}{20}$ (ca. 3°), ist also bereits absolut genommen sehr gering.

Mit der Abbildung durch das Ocular ist eine weitere Divergenzänderung der abbildenden Büschel verbunden, sei es dass dieselben parallelstrahlig gemacht werden (für ein auf unendlich accommodirtes Auge) sei es dass sie diejenige stets geringe Oeffnung behalten, welche der Sehweite des Auges und dessen Pupillengrösse entspricht (höchstens 1°). Für parallelstrahlig austretende Büschel ist diese Divergenzänderung bestimmt durch die Brennweite des Ocularsystems, indem gemäss der Definition derselben der halbe Querschnitt des austretenden Büschels p'' sich zum Sinus des halben Oeffnungswinkels der einfallenden verhält wie die Brennweite zur Einheit, d. h.

$$\frac{p''}{\sin u'} = \frac{p''}{u'} = f_2. \tag{6}$$

Insoweit würde die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandtheilen noch nichts Specifisches bieten, was nicht auch mit jeder andern successiven Abbildung nothwendig verbunden wäre. Wenn wir aber den Gang der Hauptstrahlen im Mikroskop auf Grund der obigen Bestimmungen über die Lage der Pupillen betrachten, so bemerken wir, dass dieselben im Objektiv auf der Objektseite im allgemeinen sowohl divergirend als convergirend verlaufen können, beides aber, wie wir bemerkt haben, vortheilhaft nur unter geringen Winkeln. Auf der Bildseite werden dieselben aber nach dem Bilde hin stets divergiren, z. B. bei nahezu telecentrischer Einrichtung etwa von dem hinteren Brennpunkt F_1' des Objektivs aus. Um dieses Bild dem Auge in möglichster

Ausdehnung sichtbar zu machen, ist es wie wir früher gezeigt haben nothwendig, die Augenpupille in den Divergenzpunkt der Hauptstrahlen zu bringen, und da dies bei der Abbildung durch das Objektiv allein nicht ausführbar ist (es sei denn für ein stark übersichtiges Auge), so fällt dem Ocular als eine zweite und für seine Construction specifische Function die zu, die vom Objektiv aus divergirenden Hauptstrahlen in convergirende zu verwandeln und zwar nach einem Convergenzpunkt hin, welcher für das Auge zugänglich ist. Diese Function hat also das Ocular beim Fernrohr wie beim Mikroskop auch dann schon zu erfüllen, wenn mit demselben eine weitere Vergrösserung des vom Objektiv entworfenen Bildes gar nicht bezweckt und erzielt wird und dies ist der hauptsächliche Grund, aus welchem die einfache Dispansivlinse so wenig geeignet ist, als Ocular verwendet zu werden. Denn bei ihr ist mit der für die Bilderzeugung nothwendigen Divergenzvermehrung der bildformirenden Büschel gleichzeitig stets eine solche der Hauptstrahlen verbunden, ohne dass der Divergenzpunkt selbst in den zugänglichen Theilen des Bildraums übergeführt würde. Man mildert diesen Uebelstand, indem man dergl. Oculare von sehr kurzer Brennweite macht und gleichzeitig ihre Entfernung vom Objektiv relativ gering wählt. Alsdann liegt ihr hinterer Brennpunkt, wenn auch unterhalb der Ocularlinse, so doch — der Verringerung ihrer Dimension entsprechend — näher an derselben und die *A.-P.* als Bild der Objektivöffnung von jenem zweiten Brennpunkt desto weiter nach der Linse zu, je näher sich das Objektiv dem Ocular befindet.

Beim collektiven Ocular hingegen tritt gewöhnlich innerhalb desselben noch eine weitere Theilung der Functionen dahin ein, dass in einem Vordertheil (Collektivglas) der wesentliche Theil jener Divergenzänderung der Hauptstrahlen bewirkt, d. h. deren Divergenz in eine Convergenz verwandelt wird. Hierbei wird das vom Objektiv entworfene Bild in seiner Grösse entweder unverändert gelassen (Ramsden'sches Ocular) oder sogar verkleinert (Huyghens'sches Ocular); ausserdem kommt es in unerwünschte Nähe vom Augenpunkt zu liegen. Daher bewirkt dann eine zweite in diesem Augenpunkt oder nahe vor demselben befindliche Linse (die Augenlinse) die eigentliche Lupenwirkung, nämlich die Projection jenes Zwischenbildes $O_1^* O_2^*$ auf eine innerhalb der Sehweite gelegene Distanz, ohne dass die Divergenz der Hauptstrahlen in erheblichem Grade modificirt — oder auch diese eventuell nur in förderlichem Sinne, d. h. vermehrt — würde.

Die genannten beiden Modifikationen: die Divergenzänderung in den bildformirenden Strahlenbüscheln und diejenige der Axen (Hauptstrahlen) weisen den beiden Bestandtheilen des Mikroskops ihre Functionen in der früher angegebenen Weise bereits vollständig zu: das Objektiv nach Art eines Projectionssystems wirkend hat die Abbildung von Büscheln grossen Oeffnungswinkels zu vollziehen, und damit ist nach unseren früheren allgemeinen Festsetzungen von selbst gegeben, dass diese Abbildung sich nur auf ein gegen seine Brennweite kleines Flächenstück beziehen kann und dass sie in Folge dessen — je kleiner die Objektfläche mit desto grösserer Annäherung — in diesem, was die Maassverhältnisse betrifft, nach den Gesetzen der collinearen Abbildung erfolgt, also insbesondere ohne weiteres geometrische Aehnlichkeit des Bildes mit dem Objekte mit sich bringt. Das Ocular hat es mit sehr viel engeren Strahlenbüscheln zu thun und ist in Folge dessen im Stande, ein im Verhältniss zu seiner Brennweite grösseres Objekt, d. h. einen grösseren Theil des vom Objektiv entworfenen Bildes, abzubilden, lässt aber z. B. für die Anomalien der Vergrösserung völlig freien Spielraum.

Anforderungen an die dioptrischen Leistungen von Objektiv und Ocular.

In dem Objektiv bezw. dem von ihm entworfenen Bilde steht daher die Erfüllung der Bedingungen des Aplanatismus in erster Linie also

1) die Aufhebung der sphärischen Aberration in den conjugirten Punkten O und O',
2) die Herstellung constanten Sinusverhältnisses in den abbildenden Büscheln auf der Objekt- und Bildseite,
3) bei dioptrischen Systemen die Aufhebung der chromatischen Focusdifferenz (Coincidenz der Bildpunkte für verschiedene Farbe an derselben Stelle der Axe) und dies, wenn möglich,
4) unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration auch für diese verschiedenen Wellenlängen (Beseitigung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberration) und
5) Herstellung des Aplanatismus für verschiedene Wellenlängen.

Beim Ocular andererseits werden hauptsächlich die auf die ausseraxialen Bildpunkte bezüglichen Abbildungsfehler in Betracht kommen und demnach aufzuheben sein, also

1) die Anomalien der Vergrösserung (Disproportionalität der Vergrösserung in verschiedenen Theilen des Sehfeldes, Distortion des Bildes),
2) die Aufhebung des Astigmatismus und eventuell auch des Coma in den schiefen Büscheln,
3) die Herstellung gleicher Vergrösserung (Brennweite) für die verschiedenen Farben und dies eventuell sogar unter Compensation der in dieser Beziehung im Objektivbild vorhandenen Defekte.

(Es würde nach Analogie der für die Abbildung durch Lupen geltenden Bedingungen hier noch die Aufhebung der Bildwölbung anzuführen sein. Wie aber eine genauere Betrachtung zeigt, sind die vom Objektiv bei grosser Apertur desselben entworfenen Bilder in einiger Entfernung von der Axe meist schon so stark gewölbt, dass eine ebene Abbildung durch das Ocular allein ohne Nutzen wäre, eine Compensation aber jenes Fehlers durch das Ocular ausserhalb des Bereiches der Möglichkeit liegt.)

Die Aberrationen weitgeöffneter Büschel.

Entsprechend der grossen Apertur der Büschel, welche auf der Objektseite des Mikroskops zur Wirkung kommen, gewinnen in dem vom Objektiv entworfenen Bilde alle von dieser Apertur abhängigen Aberrationen unvergleichlich grössere Bedeutung als in irgend einem andern optischen System; denn während in photographischen Objektiven und im Fernrohr die Oeffnung höchstens den dritten Theil der Brennweite beträgt, ist sie in den modernen Mikroskop-Objektiven umgekehrt bis auf das 2·5- ja selbst 3-fache jener gesteigert. Für die Construction des Mikroskops und die Beurtheilung der von ihm entworfenen Bilder sind daher die einfachen Begriffe von sphärischer und chromatischer Aberration, wie sie aus den Näherungsformeln — unter Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der Reihenentwicklung — entnommen werden und vor der Existenz dieser starken Systeme allein Anwendung fanden, durchaus unzulänglich. Es gewinnen vielmehr weitaus überwiegende Bedeutung die von den höheren Potenzen jener Reihen-Entwicklung abhängigen Glieder der Aberration, die in ihrem Anwachsen, mit

der zunehmenden Neigung der Strahlen gegen die Axe, einen sehr ungleichen Gang befolgen.

Eine wirkliche Aufhebung ist nur für die beiden ersten Glieder möglich, wie wir dies oben (pag. 110 ff.) gezeigt haben. Eine solche würde aber in einem Mikroskopobjektiv von auch nur mässiger Apertur gar nichts besagen, da dann im Allgemeinen die von den höheren Potenzen abhängigen Glieder immer noch Beträge haben, wie sie z. B. mit Fernrohrobjektiven (von Apertur 0·1 etwa) in den ersten Gliedern nicht einmal absichtlich erreichbar sind. Sobald der Oeffnungswinkel über einen ganz geringen Betrag hinausgeht, kann die Ausgleichung der sphärischen Aberration nicht anders erfolgen als dadurch, dass die nicht aufhebbaren höheren Glieder durch absichtlich herbeigeführte Reste der niederen compensirt werden — ein Ausgleichungsverfahren welches wir pag. 111 näher besprochen haben und bei welchem nur noch die trigonometrische Verfolgung bezw. experimentelle Isolirung genügend vieler das System in verschiedenen Zonen (unter verschiedener Anfangsneigung) durchsetzender Strahlen oder Partialbüschel die nöthigen Unterlagen für die Beurtheilung des Effektes bietet.

Das Anwachsen des unvermeidlichen Restes, welchen diese Compensation wegen des ungleichen Ganges der einzelnen Theile nothwendig übrig lässt bestimmt die Grenze, welche dem Oeffnungswinkel gesetzt werden muss, wenn jenes Deficit im mikroskopischen Bilde ohne schädliche Wirkung bleiben soll.

Aus dem gleichen Grunde — wegen der Höhe der wirksamen Apertur — ist von den chromatischen Abweichungen von geringerer Bedeutung die fundamentale, aus der Variation aller Abbildungsfaktoren mit der Wellenlänge entspringende Focusdifferenz für verschiedene Farben. Diese ist ja, wie wir früher sahen, schon mit einem aus 2 Einzellinsen zusammengesetzten System stets aufhebbar. Auch das secundäre Spectrum würde sich — als Focusdifferenz irgend einer Zone — stets heben lassen, wenn geeignete Substanzen als Material für die Linsen zur Verfügung stehen. Von wesentlich grösserem Einfluss auf die Bildqualität ist vielmehr die früher (pag. 149) als chromatische Differenz der sphärischen Aberration bezeichnete Variation der letzteren mit der Wellenänge. Ihre Beseitigung — früher mit den zur Verfügung stehenden Glasarten unausführbar, erst seit 1886 durch die von der Jenaer Glasschmelzerei hergestellten neuen Gläser möglich geworden — bildete eins der wesentlichsten Hindernisse für eine gute Wirkung der Systeme grösseren Oeffnungswinkels. Wir haben dieselbe nach ihrem allgemeinen Charakter a. a. O. bereits gekennzeichnet. Auf die sphärische Aberration bezogen wird das Resultat dies, dass wenn dieselbe für eine Wellenlänge im Allgemeinen aufgehoben (oder doch möglichst ausgeglichen ist) für kürzere Wellenlänge sphärische Ueber-, für längere Untercorrection in dem Bildpunkte besteht. Fassten wir diesen Defekt, wie früher als eine sphärische (Zonen-)Differenz der chromatischen Aberration auf, so war ersichtlich, dass, mangels ihrer vollständigen Aufhebung ihr Einfluss auf die Bildqualität am meisten gemildert wurde, wenn man die beste Correction (Aufhebung der Focusdifferenz) in eine zwischen Rand und Mitte des System befindliche Zone verlegte, d. h. sie in einem unter mittlerem Einfallswinkel vom Objekt aus divergirenden Partialbüschel bewirkt. Ist dies der Fall so sind die unter grösseren Einfallswinkeln verlaufenden Strahlen chromatisch über-, die unter geringeren Winkeln das System passirenden chromatisch untercorrigirt. Erst in den »apochromatischen« nach Berechnungen von Abbe durch die Zeiss'sche Werkstätte in Jena hergestellten Objektiven ist dieser Defekt und zugleich das secundäre Spectrum — folglich auch dieses für alle Zonen -- beseitigt worden.

Aus diesen Ueberlegungen ergiebt sich als ein allgemeines Resultat, dass die Aberrationen, welche dem Zustandekommen scharfer Bildpunkte eines guten Bildes in der Axe — und in ihrer unmittelbaren Nähe — hinderlich sind wie sie ihre Quelle besitzen so auch die Möglichkeit ihrer Compensation nur bieten in denjenigen Theilen des Systems, wo die von je einem Objektpunkt divergirenden Strahlen grosse Neigungswinkel mit der Axe bilden, Neigungswinkel von gleicher Grössenordnung wie im Objektraum oder wie an der Stelle ihrer maximalen Divergenz. Dies ist — wenn das Objektiv auch nur eine mässige Divergenzänderung (Vergrösserung) herbeiführt, der Fall nur in diesem selbst und auch in ihm nur in seinen vordersten (untersten) Linsen. In dem Ocular, in welches die Büschel schon als relativ und absolut enge eintreten, und welches sie als noch engere verlassen, verlieren in diesen Büscheln die wichtigsten Faktoren der Bilddeterioation gänzlich den Boden. Bei so geringen Oeffnungswinkeln ist innerhalb derselben die Möglichkeit eines erheblichen Variirens der Strahlenvereinigung überhaupt — noch viel mehr die einer variablen Abstufung derselben — und in Folge dessen auch die Möglichkeit einer Compensation derartiger im Objektivbild etwa noch vorhandener Defekte vollständig ausgeschlossen. Die geringen hier erreichbaren Gesammtbeträge der (ersten Glieder der) sphärischen und chromatischen Abweichung sind allemal schon im Objektiv durch minimale Aenderungen seines Baues aufhebbar und werden daher im Allgemeinen auch am besten schon in diesem compensirt.

Umgekehrt verhält es sich mit den Eigenschaften bezw. Fehlern der Bilder ausser der Axe. Für diese, ihr Anwachsen, Variabilität und Compensation, fehlt in dem Objektiv — wegen der geringen Divergenzänderung der Hauptstrahlen in ihm — die praktische Unterlage. Nur die chromatische Differenz der Vergrösserungen (Brennweiten) kann in seinem Bilde merklich werden. Aber es kann dann sowohl diese als etwa restirende Mängel in der Orthoskopie im Ocular gehoben werden (beide jedoch auch nur, wenn sie constant sind für alle Zonen des Objektivs!) welches seinerseits bei der grossen Verschiedenheit und dem grossen Betrage der Neigungen der Hauptstrahlen in ihm auch genügenden Spielraum für die Modifikationen derselben bietet. —

Wenn es möglich wäre, die Aberrationen, insbondere diejenigen des Objektivs für Axenpunkte, vollständig, restlos aufzuheben, und wenn ferner die Technik der Herstellung vollkommner Flächen, vollkommen correkter Centrirung und Distanzirung derselben keine Grenzen hätte, so würde auch nach den vorstehend erörterten Gesichtspunkten die Vertheilung der optischen Fundamentalwirkung und damit der specifischen Funktionen auf Objektiv und Ocular, zwar an sich nothwendig, aber ihrem Maasse nach völlig unbestimmt bleiben. Eine vorgeschriebene Brennweite und Vergrösserung würde mit ganz gleichem Fug und Recht auf die verschiedenste Weise erreicht werden können durch Verfügung über die Einzelbrennweiten von Objektiv und Ocular sowie deren gegenseitigem Abstand. Sind je zwei dieser Elemente gegeben, so bestimmt sich aus Gleichung (1) ohne weiteres die Dimension des dritten.

Thatsächlich gebietet aber das Vorhandensein jener beiden Defekte — die mit der fortschreitenden Entwicklung der praktischen Optik nach Theorie und Technik wohl mehr und mehr reducirt aber natürlich niemals völlig beseitigt werden können — gewisse Einschränkungen und giebt bestimmte Normen für das Maass der Wirkungsvertheilung an die Hand. Die Unterlagen für eine solche werden gegeben einerseits natürlich durch eine genaue Kenntniss der Technik

und ihrer Leistungsfähigkeit. Es zeigt sich, dass die Anforderungen, die an das Mikroskop nach der dioptrischen Seite hin gestellt werden, bereits bis an die Grenzen des von Menschenhänden zu leistenden führen, daher bei Erwägungeu der vorliegenden Art volle Berücksichtigung verdienen. Den Schlüssel aber für diese optischen Leistungen bezw. Anforderungen bieten mit und neben den rein dioptrischen Momenten

Der Begriff der **Apertur** in Verbindung mit dem Sinussatz.

Wir haben von demselben schon wiederholt, sei es in seinem allgemeinen, sei es in seinem strengeren Maasse Gebrauch gemacht.

1) Wir sahen pag. 91, dass die sphärische, und ebenso pag. 143 dass die chromatische Aberration — rationell bemessen nach ihrem Einfluss auf die Sichtbarkeit des Objektes — proportional ist Potenzen des Produkts aus halbem Oeffnungswinkel der vom Objekt aus oder nach dem Bilde hin divergirenden Büschel (bei unendlich fernem Objekt statt des Oeffnungswinkels das Verhältniss von halber linearer Oeffnung und Brennweite) und Brechungsexponent des Objekt- bezw. Bildmediums. Dort blieb wegen der absoluten Kleinheit des Winkels allerdings noch unbestimmt und willkürlich, ob man denselben nach seinem Sinus, der Tangente oder dem Bogenwerth selbst zu bemessen habe. Hingegen fanden wir weiterhin

2) dass die Bedingung einer Abbildung mittels weitgeöffneter Büschel bestand in der Herstellung constanten Verhältnisses der Sinus conjugirter Strahlaxen (halber Oeffnungs)winkel innerhalb der ganzen Büschelöffnung. Dieses Verhältniss multiplicirt mit den Brechungsexponenten der zugehörigen Medien, d. h. das Verhältniss der numerischen Aperturen, bemaass die lineare Vergrösserung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{a}{a'} = \beta.$$

3) Eine unmittelbare Consequenz dieses Sinussatzes war, dass die lineare Halböffnung p' eines aplanatisch abbildenden Büschels in der einen Brennebene des Systems — bis auf kleine Correctionsglieder — gleich war dem Produkt von Apertur des Büschels und Brennweite des Systems auf der anderen Seite des Systems

$$p' = a \cdot f' \quad \text{und} \quad p = a' \cdot f.$$

4) Dieser Satz gab dann die Unterlage für die Bestimmung der Helligkeitsverhältnisse der Bilder in optischen Systemen. Die Helligkeit eines Bildes zeigte sich, bei gegebener Vergrösserung proportional dem Quadrate der Apertur der wirksamen Büschel

$$H = k \cdot a^2 \quad \text{bezw.} = k\, a'^2.$$

5) Es zeigte sich endlich, dass das Bild, was den Einfluss der Strahlenbegrenzung auf dasselbe betrifft, sich in allen Stücken genau so verhält, als wenn das von diesem Einfluss frei gedachte Bild durch ein physisches Diaphragma betrachtet würde, dessen freie Oeffnung nach Grösse und Lage mit der Austrittspupille ($2p'$) des Systems zusammenfällt. Dieser Satz gab ausser der obigen Bilderzeugung Bestimmung der Helligkeit auch die Unterlagen für diejenige des Processes der nach ihrem physischen Charakter als eines Interferenzphänomens — sei es bei selbst-, sei es bei indirekt strahlenden Objekten — dessen wir auch schon gedacht haben.

Den späteren Beweisen und näheren Ausführungen nochmals vorgreifend, führen wir von deren Ergebnissen hier die folgenden für unsere nächsten Betrachtungen wesentlichen an:

a) bei selbstleuchtenden Objekten bildet die Apertur das Maass für die Grösse des Lichtscheibchens, als welches jeder Punkt des Objektes durch die Beugungswirkung der Oeffnung (Begrenzung der bildformirenden Wellenfläche) im Bilde dargestellt wird — diese Grösse des Scheibchens angular gemessen, vom hinteren Knotenpunkte des Systems aus. In Folge dessen bildet die Apertur hier ohne weiteres das Maass für das sogen. Definitions- und für das Auflösungs- (Unterscheidungs-) vermögen des Systems.

b) Bei indirekt strahlenden, mittelst auf- oder durchfallenden Lichts beleuchteten, dieses Licht reflektirenden oder durchlassenden Objekten bildet die Apertur die Begrenzung des von diesen Objekten ausgehenden Interferenz- bezw. Beugungseffektes. Die genauere Analyse zeigt, dass auch dann ein einzelner Objektpunkt und die Punkte der Begrenzung eines nicht weiter differenzirten Objektflächenstücks abgebildet werden als Scheibchen, in welchen die Lichtabstufung von der Mitte nach dem Rande zwar nicht demselben aber einem ähnlichen Gesetze folgt, wie bei einem selbstleuchtenden Punkte. Die Grenze der Auflösbarkeit einer regelmässigen Struktur bestimmt sich bei sogen. schiefer Beleuchtung nach derselben Gleichung, welche für eine ebensolche selbstleuchtende Struktur gilt, dass nämlich die Feinheit (Elementdistanz) d dieser Struktur mit der Apertur a und der Wellenlänge des wirksamen Lichtes λ in dem Zusammenhang steht, dass

$$d = \frac{\lambda}{2a}.$$

Bei unregelmässigen Strukturen dieser Art bestimmt die Apertur ebenfalls das Maass der Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit, mit welcher sie im Bilde wiedergegeben werden, jedoch nach weniger einfachen Regeln.

Nur noch einige weitere Schritte führen uns jetzt zu dem Standpunkt, von welchem aus wir das Maass und die Grenzen der Wirkung des zusammengesetzten Mikroskops — und nach ganz gleichen Normen diejenigen des Fernrohrs — als eines Ganzen wie in seinen einzelnen Bestandtheilen vollständig zu übersehen vermögen.

Die erste Grundlage für die Construction eines Instruments bilden die Anforderungen, die man an seine Gesammtleistung stellt, also beim Mikroskop die Feinheit des Details, welches mit demselben erkennbar sein soll. Sei dieselbe gegeben durch den Abstand d der engsten von dem Mikroskop noch getrennt abzubildenden Strukturelemente, so folgt aus diesem nach dem eben angedeuteten unmittelbar die Apertur der vom Objekt aus divergirenden Büschel, welche das System aufzunehmen im Stande sein muss Damit andererseits das Bild der im Objekt um d entfernten Structurelemente auch vom Auge trennbar sei, muss es diesem unter einem Sehwinkel dargeboten werden, welcher dem Unterscheidungsvermögen ε des Auges entspricht, also unter einem Winkel von ca. 2′. Hieraus ergiebt sich die Vergrösserung, welche das Instrument liefern muss, beim Mikroskop also auch dessen Gesammtbrennweite f'. Endlich ist zu berücksichtigen, dass das Bild eines Objekts durch ein optisches Instrument niemals ein vollkommenes ist, sondern durch die nicht aufhebbaren Aberrationsreste mehr oder minder verundeutlicht wird. Die Forderung, dass die Zerstreuungskreise der verschiedenen im System übrig gebliebenen Aberrationen nicht ihrerseits das Bild verwischen, d. h. zusammen höchstens den Betrag des physiologischen Grenzwinkels ε erreichen dürfen, giebt nun den Maassstab für die Vertheilung der dioptrischen Gesammtleistung auf die drei Faktoren, Objektivstärke, Tubuslänge und Ocularstärke, aus denen sie sich zusammensetzt.

Schematische Zerlegung des Mikroskops.

Die dioptrische Vollkommenheit der Abbildung von Punkten auf und nahe der Axe hängt, wie die vorangegangenen Erörterungen gezeigt haben, im wesentlichen nur von derjenigen ab, die das Objektiv des Mikroskops (und ganz ebenso liegen die Verhältnisse beim Fernrohr) für sich allein ergiebt bezw. zulässt. Die Beurtheilung derselben würde nun gerade beim Mikroskop sehr erschwert werden, wenn man sie unter dem Gesichtspunkt durchführen wollte, unter welchem sich die Wirkung des Objektivs zunächst und unmittelbar darbietet und wenn man bei derselben den für das Wesen der Sache rein zufälligen Umständen Rechnung tragen wollte, welche der Gebrauch des Mikroskops mit sich bringt.

Das Objektiv — so hatten wir zur Erläuterung seiner Wirkung in Uebereinstimmung mit dem augenscheinlichen thatsächlichen Sachverhalt gesagt — entwirft ein reelles vergrössertes Bild des Objekts, welches vom Ocular — dieses wie eine Lupe wirkend — weiter vergrössert und in Bezug auf den Strahlengang sonst umgestaltet wird. In der Gleichung

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{1}{f_2'} \tag{7}$$

bezw.

$$N = \frac{l}{f'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{l}{f_2'}, \tag{7a}$$

welche den Effekt der Zusammensetzung des Instruments aus den Wirkungen seiner beiden Bestandtheile ausdrückt, konnte dementsprechend die Grösse $\frac{\Delta}{f_1'}$ als die dem Bildabstand Δ und der Stärke $1/f_1'$ entsprechende lineare Vergrösserung des Objekts durch das Objektiv, die Grösse $1/f_2'$ bezw. l/f_2' als die Lupenvergrösserung des Oculars aufgefasst und die resultirende Wirkung in anscheinend sehr natürlicher Weise als Produkt ihrer beiden wesentlichen Faktoren dargestellt werden.

Bei der Bemessung der Abbildungsfehler, welche das Objektiv für sich allein mit sich bringt, würde nun die Berücksichtigung der von Fall zu Fall, ja von Land zu Land innerhalb ziemlich weiter Grenzen (150—300 Millim.) schwankenden Tubuslänge, d. h. Projectionsdistanz des Bildes eine erhebliche Erschwerniss bilden, ja sogar geradezu den wesentlichen Kern des Sachverhalts verdecken, welcher doch offenbar darin besteht, dass jene Projectionsdistanz — zum mindesten bei den stärkeren Systemen — stets sehr gross ist gegen deren Brennweite. So wichtig daher auch *in praxi* die genaue Berücksichtigung der Bilddistanz (d. h. der besonderen Lage des zur Benützung zu bringenden aplanatischen Punktepaares des Systems) gerade bei den stärkeren Systemen von grosser Apertur ist, so bietet sich für eine Uebersicht über das Wesentliche und Typische des Sachverhalts naturgemäss die Betrachtung des Grenzfalls dar, dass jene Bilddistanz unendlich gross, also das Objekt in den vorderen Brennpunkt des Systems gestellt sei.[1])

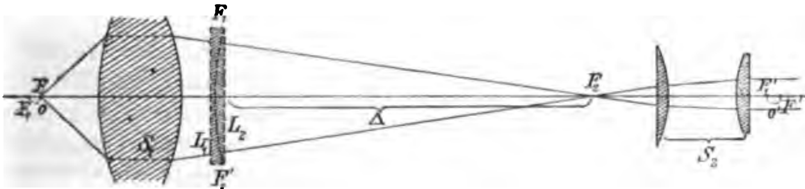
»Zu Folge dieser besonderen Art schematischer Zerlegung des Mikroskops besteht also der erste Akt im Abbildungsvorgang nicht in der Erzeugung des umgekehrten reellen Bildes vor oder in dem Ocular, sondern vielmehr in der

---

[1]) Abbe, Beiträge etc. l. c. pag. 422. Wir entnehmen dieser Darstellung im folgenden einige Stellen im Wortlaute.

Erzeugung eines unendlich entfernten *virtuellen* Bildes; der zweite Akt aber umfasst dessen fernere Abbildung unter dem Gesichtswinkels des Ocularfeldes und in der Weite des deutlichen Sehns und kommt durch eine letzte Brechung der Strahlen im Objektiv und durch die verschiedenen Brechungen im Ocular zu Stande. Den ersteren kann man die *Lupenwirkung des Objektivs* nennen, weil dieser Theil der Leistung vollkommen identisch ist mit derjenigen einer gewöhnlichen Lupe für ein fernsichtiges Auge; der zweite Theil aber entspricht offenbar, alle einzelnen Veränderungen des Strahlenganges zusammengefasst, der Wirkung eines *Fernrohrs* mit — absolut und relativ zur Brennweite — kleiner Objektivöffnung, welchem das vorher erwähnte unendlich entfernte virtuelle Bild als Objekt dient. — — Das hier dargelegte Ineinandergreifen von Objektiv- und Ocularfunction in Form von Lupenwirkung und Fernrohrwirkung muss als die allgemeingültige Charakteristik des zusammengesetzten Mikroskops hingestellt werden. Auf Grund derselben beantworten sich zahlreiche für die Theorie des Mikroskops und für dessen rationelle Construction gleich wichtige Fragen, insbesondere die nach dem Sitz der verschiedenen Fehlerquellen, nach den Mitteln zu ihrer Beseitigung, nach der Grenze der unter gegebenen Bedingungen möglichen Vollkommenheit, nach dem Einfluss, welchen Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Ocularstärke auf die Qualität des Gesammteffekts üben« u. s. w.

Man wird hiernach zunächst daran denken, von dem Objektiv selbst denjenigen Theil seiner Brechungswirkung abzusondern, welcher die Ueberführung des vorher aus einem divergenten in ein parallelstrahliges verwandelten Büschels in ein solches von schwacher Convergenz zu leisten hat und diesen Theil — etwa die letzte Fläche des Objektivs — als zum Ocular (Fernrohr) gehörig anzusehen. Es würden jedoch bei einer derartig vorgenommenen Scheidung der Bestandtheile des Mikroskops die Maassverhältnisse ihrer Abbildungsfaktoren ein wenig geändert. Man kann nun auch diese letzteren streng festhalten, wenn man folgende Fiction annimmt (Fig. 372).



(Fig. 372.)

In die hintere (obere) Brennebene F_1' des Objektivs sei eine dünne planparelle Platte gesetzt, — welche natürlich weder die Lage noch die Grösse des vom Objektiv entworfenen Bildes irgendwie ändert. Diese Platte bestehe aus einer nach dem Objektiv zu gelegenen Planconcavlinse L_1, von der Brennweite $-\Delta$ und einer nach dem Ocular hin gelegenen Planconvexlinse von der Brennweite $+\Delta$. Die erstere ändert die Brennweite des Objektivs, wie man sich leicht überzeugt, gar nicht, verschiebt aber dessen vorderen Brennpunkt F_1 in den des ganzen Systems F, d. h. in den Objektpunkt. Die Linse L_2 stellt das Objektiv des Fernrohrs ($L_2 + S_2$) vor, zu welchem S_2 ebenfalls als Ocular gehört. Die (Lupen-) Vergrösserung, welche das Objektivsystem ($S_1 + L_1$) bewirkt, ist nach unseren früheren Festsetzungen gleich dem Reciproken seiner hinteren Brennweite

$$V_1 = \frac{tang\, w_1'}{y} = \frac{1}{f_1'}. \tag{8}$$

wenn w_1' die Hälfte des Winkels ist, unter welchem durch dieses Objektiv hindurch ein Objekt von der halben Grösse y erscheint.

Die (Angular)-Vergrösserung des Fernrohrs von der Objektivbrennweite Δ und der Ocularbrennweite f_2' ist nach pag. 62

$$\gamma = V_2 = \frac{tang\, w_2'}{tang\, w_1'} = \frac{tang\, w'}{tang\, w_1'} = \frac{\Delta}{f_2'}; \qquad (9)$$

wenn $w_2' = w'$ der Winkel ist, unter welchem y, durch das ganze Mikroskop gesehen, erscheint. Hiernach ist also die Gesammtvergrösserung, welche das Mikroskop liefert

$$V = \frac{tang\, w'}{y} = \frac{tang\, w_1'}{y} \cdot \frac{tang\, w'}{tang\, w_1'} = V_1 V_2 = \left(\frac{1}{f_1'}\right)\left(\frac{\Delta}{f_2'}\right) \qquad (10)$$

bezw.

$$N = \left(\frac{l}{f_1'}\right)\left(\frac{\Delta}{f_2'}\right) \qquad (10a)$$

ganz ebenso wie vorher (Gl. 7 und 7a), nur unter andersartiger Zusammenfassung und Deutung der Faktoren.

Charakter der uncompensirten Aberrationsreste.

Diese letztere Betrachtung lässt noch deutlicher als die entsprechenden früheren die dort gekennzeichneten specifischen Functionen von Objektiv und Ocular hervortreten. Aus ihr ergiebt sich vor allem, dass die für die Correctheit der Abbildung in der Mitte des Sehfeldes und damit für das mögliche Maximum der Leistung maassgebenden Faktoren — nämlich die chromatische und die sphärische Aberration — allein in der Construction der Objektive wurzeln und dass die Einrichtung der Oculare auf jene überhaupt keinen irgend merklichen Einfluss gewinnen kann.

Denn was zunächst die sphärische Aberration betrifft, so zeigt eine genauere Discussion derselben, in Ergänzung der von uns an früherer Stelle durchgeführten, dass, wie verschieden auch im einzelnen Falle der thatsächliche Verlauf der Strahlen in der Nähe ihres ideellen Vereinigungspunktes, d. h. wie verschieden auch ihrem Betrage und Gange nach die nicht compensirten Reste der sphärischen Aberration höherer Ordnungen sein mögen, jenem Strahlenverlauf immer durch blosse Veränderung der Distanz zweier Linsen des Systems der gleiche Charakter gegeben werden kann, nämlich so, dass der centrale Theil und die äusserste Randzone des Objektivs richtig zusammenwirken, während von ihnen aus nach einer zwischengelegenen Zone zu wachsende Uebercorrection bestehen bleibt. Der maximale Betrag dieser kann füglich als Maass für die uncompensirt gebliebenen Aberrationsreste (»Zonen«) gelten. Zugleich aber zeigt sich, dass kein äusseres Hilfsmittel eine solche typische Correctionsdifferenz, wo sie einmal vorliegt, beseitigen oder auch nur vermindern kann. Weil sie in den Krümmungs- und Brechungsverhältnissen der untersten Linsen des Objektivs wurzelt — in welchen die Büschel noch grosse Oeffnungen besitzen und entsprechend grossen Spielraum für das Entstehen und die Compensation von beträchtlichen Aberrationen höherer Ordnung bieten — leisten ihr gegenüber alle Vorrichtungen, durch welche man auf ihre Correction hat hinwirken wollen (besondere Correctionsgläser oberhalb des Objektivs oder Oculare von besonderer Construction) im günstigsten Falle nur dasselbe, was auch eine Veränderung der Linsenabstände möglichmacht. Sie gestatten, den vorhandenen Aberrationsrest zwischen Mitte und Rand der freien Oeffnung gleichsam hin- und herzuschieben und auf diese Weise irgend eine einzelne Zone des Objektivs auf Kosten der übrigen mehr oder minder aberrationsfrei zu machen. Durch solche Hilfsmittel kann daher die wirkliche Leistungsfähigkeit des Mikroskops niemals erhöht werden. Jene Einrichtungen

stützen sich auf einen Begriff der sphärischen Aberration der — weil er nur Spielraum lässt für die einfache Alternative: übercorrigirt und untercorrigirt — mit sammt der ganzen darauf gebauten Theorie der aplanatischen Brennpunkte gegenüber den heutigen stärkeren Mikroskopen durchaus gegenstandslos ist. Alles was sie bewirken können, ist bei richtiger Construction des Objektivs auch schon in diesem selbst zu erreichen, und alles, was hier nicht zu erreichen ist oder in einer mangelhaften Construction nicht erreicht worden ist, kann auch durch jene Vorrichtungen nicht erreicht werden.

Ganz analoge Betrachtungen finden Anwendung auf die chromatischen Abweichungen. Wir wir schon hervorhoben, sind es nicht allein diejenigen Focusdifferenzen, welche, der Dispersion und deren ungleichförmigem Gang in den Crown- und Flintgläsern entsprechend, die abbildenden Strahlenkegel als Ganzes treffen, — die eigentliche chromatische Aberration oder das primäre und deren höheres Glied, das sogen. secundäre Spectrum — welche hier zur Geltung kommen und Berücksichtigung fordern, sondern ebenso sehr die Ungleichheit der Vereinigungsweiten verschiedenfarbiger Strahlen für verschiedene Neigung derselben innerhalb des Oeffnungswinkels d. h. die chromatische Differenz der sphärischen Aberration. Dieselbe äussert sich, wie wir früher (pag. 149) fanden, darin, dass, wenn ein System für eine mittlere Zone chromatisch bestmöglich corrigirt ist, dann nach dem Rande zu chromatische Ueber-, nach der Axe hin chromatische Untercorrection besteht. Während die ersterwähnten (primären und secundären) Farbenabweichungen bei correcter Construction sich entweder ganz heben oder doch wenigstens fast unmerklich machen lassen, hat sich diese zweite Fehlerquelle, wie wir ebenfalls schon hervorhoben, erst mit den neuerdings der Technik seitens der Jenaer Schmelzerei zur Verfügung gestellten Gläsern überhaupt beseitigen lassen. Macht man von diesen Materialien nicht den nothwendigen umfassenden Gebrauch oder scheut sich der Constructeur vor der Complicirtheit und Empfindlichkeit des Aufbaues, den starke Linsensysteme behufs Beseitigung jenes Defekts erhalten müssen, so ist diese Beseitigung ebenfalls nicht mehr in einem anderen Theile des Mikroskops, speciell im Oculare möglich, aus Gründen, die den bei der sphärischen Aberration geltend gemachten ganz entsprechen. Auch hier lässt sich im Objektivsystem durch eine relative Lagenänderung seiner Bestandtheile nur eine Verschiebung der Zone günstigster Farbencorrectur — nach der Mitte oder nach dem Rand zu — erreichen. Durch irgend welche Hilfsapparate an Stellen, wo die Strahlenbüschel bereits eng sind kann man aber selbst die Lage jener günstigsten Zone kaum beeinflussen, geschweige denn eine Minderung in dem wahren Betrage jenes Defektes herbeiführen.

Ganz das gleiche endlich ist in Bezug auf die Bedingung der Abbildung eines axialen Flächenelements, die des constanten Sinusverhältnisses zu sagen. (Hingegen fällt die chromatische Variation desselben, wenn das Verhältniss selbst für je eine Farbe constant ist unter eine andere Kategorie von Abbildungsanomalien.)

Verhältniss des Oculars zum Objektiv in Bezug auf Aberrationsreste.

Gegenüber diesen in der Focalwirkung des Objektivs begründeten Abbildungsfehlern kann der ganze Ocularapparat des Mikroskops — von groben Verstössen in der Construction natürlich abgesehen — in Bezug auf dieselben als praktisch vollkommen fehlerfrei angesehen werden und zwar in allen wesentlichen Punkten auch dann, wenn nur die einfachsten unter den bekannten Einrichtungen in Anwendung

kommen. Hieraus folgt, dass die mögliche Höhe der Leistung beim Mikroskop allein in der Construction der Objektive wurzelt und dass keine denkbare Vervollkommnung der Oculare sie in irgend einem wesentlichen Punkte beeinflussen kann; ferner aber auch, dass die besonderen Umstände, unter welchen der Ocularapparat fungiren mag, namentlich die Art, wie die Vergrösserung durch die Länge des Tubus und die Stärke des Oculars bewirkt wird innerhalb des praktisch in Betracht kommenden Spielraums vollkommen gleichgültig bleiben und — richtige Anpassung der Objektive an die einmal angenommenen Verhältnisse vorausgesetzt — die erreichbare Höhe der Leistung durchaus nicht berühren. Das Teleskop, welches die Ocularwirkung ausübt ist, wie schon erwähnt, in jedem Falle ein solches von verhältnissmässig kleinen absoluten Dimensionen (seine Objektivöffnung höchstens 15 *mm*, und gerade bei stärkeren Mikroskopsystemen auf 3 *mm* und noch weniger beschränkt) und seine Objektivbrennweite ist stets ein sehr grosses Vielfaches jener Oeffnung (mindestens das 10-, bei starken Mikroskopobjektiven aber das 20-, ja 40 und selbst 80fache derselben). Aus Gründen, die wir bei der Besprechung des Teleskops noch besonders namhaft machen werden, die sich aber auch schon durch eine blosse Umkehrung der obigen Betrachtungen über das Mikroskop gewinnen lassen, kann in einem Teleskop derartiger Einrichtung irgend welche besondere Focalwirkung in der Axe überhaupt nicht erzielt werden. Die Abbildung paraxialer Büschel und Objektpunkte geschieht in ihm so gut wie abweichungsfrei nach den für solche geltenden Fundamentalgesetzen der Dioptrik.

Rationelles Verhältniss zwischen Unterscheidungsvermögen, Apertur und Vergrösserung des ganzen Mikroskops.

Im Hinblick auf diese Resultate gewinnt die oben durchgeführte Grenzbestimmung in Bezug auf Objektiv- und Ocularfunction beim Mikroskop und das auf sie gegründete Zerlegungsschema eine besondere Tragweite. Alle Abbildungsfehler, die überhaupt die Wirkung beeinflussen, finden ihren vollständigen Ausdruck schon in der Beschaffenheit des unendlich entfernten virtuellen Bildes, welches das Objektiv, nach Art einer Lupe für fernsichtiges Auge wirkend, vom Objekt erzeugt. Diesem gegenüber spielt der Ocularapparat, wie er sich aus Tubus und den eigentlichen Ocularlinsen zusammensetzt, die Rolle eines indifferenten Vergrösserungsmechanismus, der, nach Art eines Fernrohrs wirkend nur dazu dient, jenes Objektivbild dem beobachtenden Auge auf den erforderlichen Sehwinkel auszubreiten, ohne dabei seinem Inhalte irgend etwas hinzuzufügen oder von demselben irgend etwas hinwegzunehmen.

Dieser Inhalt selbst aber ist nach den früher gemachten Andeutungen, seinem möglichen Detail nach bestimmt ein Mal durch die Apertur des Objektivs und andrerseits, eine gegebene Apertur vorausgesetzt, durch die angulare Grösse der Zerstreuungskreise, welche die in der Construction des Objektivs begründeten Abbildungsfehler an Stelle scharfer Bildpunkte in das Lupenbild einführen. Hiernach ergiebt sich für jedes concrete Objekiv eine, ihrerseits durch Tubuslänge und Ocularstärke beliebig zusammensetzbare Angularvergrösserung, welche für ein Auge von angenommener Sehschärfe gerade ausreichen muss, um das im Objektivbild enthaltene Detail vollkommen zu erkennen. Eine stärkere Vergrösserung kann zwar noch brauchbar sein, indem sie solches Detail deutlicher und bequemer zur Wahrnehmung bringt; sie vermag aber niemals das optische Vermögen eines gegebenen Objektivs zu erhöhen. Die erstere — welche man die förderliche Ocularvergrösserung nennen könnte — muss daher als das

Maass der relativen Vollkommenheit des Objektivs angesehen werden. Aus ihr bestimmt sich in naheliegender Weise die förderliche Gesammtvergrösserung, d. h. diejenige, mit welcher die Leistung des betreffenden Objektivs erschöpft ist. Es ist die kleinste Vergrösserung, bei der man alles Detail sieht, welches mit ihm, seiner Apertur und dioptrischen Vollkommenheit nach, überhaupt distinkt abgebildet werden kann.

Rationelle Vertheilung der dioptrischen Wirkung auf Objektiv und Ocular.

Sei also gegeben seinem linearen Maasse nach das Detail, die gegenseitige Entfernung d der feinsten Structurelemente, welche durch das Mikroskop noch getrennt erkennbar sein sollen. Damit diese im Bilde überhaupt unterschiedlich wiedergegeben werden, muss die Apertur des Systems, $a = n \sin u$, einen Betrag haben, welcher nach der ABBE-HELMHOLTZ'schen Grundgleichung

$$d = \frac{\lambda}{2a}$$

sich bestimmt zu

$$a = \frac{\lambda}{2d}, \tag{11}$$

wenn λ die Wellenlänge (in Luft) des bei der Abbildung wirksamen Lichts bezeichnet.

Im letzten Bilde erscheint die Objektgrösse d unter einem Sehwinkel δ^*, welcher, gemäss der Gleichung für die Vergrösserung virtueller Bilder (pag. 177/78) abgesehen von kleinen Correctionsgliedern bestimmt ist durch

$$\delta^* = d \cdot V = \frac{d}{f'} \quad \text{oder} \quad \delta^* = \frac{d}{l} N, \tag{12}$$

wenn V die absolute, N die lineare Gesammtvergrösserung des Mikroskops bedeutet. Diese Vergrösserung muss, damit das betreffende Detail vom Auge deutlich unterschieden werde, so gross sein, dass δ^* dem Unterscheidungswinkel ε des Auges mindestens gleich wird. Man darf ε nach den darüber vorliegenden, z. Th. gerade durch mikroskopische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen, kaum geringer als $= 2'$ ansetzen. Für ganz bequemes Sehen muss etwa der doppelte Betrag angenommen werden. Also ist — $\delta^* = \varepsilon$ genommen —

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{2a}{\lambda}\varepsilon; \quad N = \frac{l}{f'} = \frac{2al}{\lambda}\varepsilon \tag{13}$$

die der Apertur a entsprechende Mindestvergrösserung, bezw. Maximalbrennweite, welche man dem ganzen Instrument geben muss.

Setzen wir hierin $\lambda = 0{\cdot}55\ \mu$ und ε ein Mal $= 2'$ und dann $= 4'$, so erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellte Werthe für die kritischen linearen Vergrösserungen und Brennweiten bei verschiedenen Aperturen.

$a = n \sin u$	d in μ	$\varepsilon = 2'$ N	$\varepsilon = 2'$ f' [1]) mm	$\varepsilon = 4'$ N	$\varepsilon = 4'$ f' [1]) mm
0·10	2·75	53	4·72	106	2·36
0·30	0·92	159	1·58	317	0·79
0·60	0·46	317	0·79	635	0·39
0·90	0·31	476	0·52	952	0·26
1·20	0·23	635	0·39	1270	0·20
1·40	0·19	741	0·34	1481	0·17
1·60	0 17	847	0·30	1693	0·15

[1]) Wir wollen hier gleich darauf hinweisen. dass das im Mikroskop sichtbare Objektflächenstück etwa den Durchmesser $\frac{1}{4}f$ hat, so dass die betreffenden Columnen der Tabelle diese Grösse annähernd mit angeben.

Die Austrittspupille des Mikroskops hat für $\delta^* = \varepsilon = 2'$ einen Durchmesser von ca. 1 *mm* (genauer $= 0{\cdot}95$ *mm*), für $\varepsilon = 4'$ einen halb so grossen.

Um jetzt beurtheilen zu können, welcher Betrag der Gesammt-Leistung dem Objektiv, welcher dem aus Tubuslänge und Ocularlinsen zusammengesetzten Ocularapparat zuertheilt werden könne, ist festzustellen, wie gross die in Folge dioptrischer und technischer Constructionsmängel restirenden Abbildungsfehler in dem von ersterem entworfenen virtuellen Bilde bei dem gegenwärtigen Zustande der praktischen Optik bezw. bei den besten vorhandenen Constructionen der Objektive sind.

Einfluss der Aberrationsreste im Objektiv auf die Bildgüte des gesammten Mikroskops.

Den Zerstreuungskreis der im virtuellen Objektiv-Bilde uncompensirt gebliebenen sphärischen Aberration fanden wir, seinem angularen Betrage nach pag. 106 bezw. 224

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K,$$

wenn nur das erste Glied der Aberration berücksichtigt wurde. Beim Mikroskop, wo gerade die höheren Glieder von Wichtigkeit sind, hat man unter Mitberücksichtigung dieser

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 K_1 + \left(\frac{h}{f}\right)^5 K_2 + \dots\dots \tag{14}$$

zu setzen. Das Verhältniss der von den austretenden Büscheln ausgefüllten Halböffnung h zur hinteren Brennweite des Objektivs ist nach Gleichung (5a) pag. 185 seine numerische Apertur, a, also

$$\zeta = a^3 K_1 + a^5 K_2 + \dots \tag{14a}$$

worin K_1, K_2 ... Constanten sind, welche von der Zusammensetzung des Systems, d. h. von dessen Constructionstypus, aber nicht von der Brennweite abhängig sind.

Die Winkelgrösse ζ dient als Objekt für das aus Tubuslänge und Ocularstärke zusammengesetzte schematische Fernrohr. Die Angularvergrösserung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2'}$ dieses darf also nicht grösser sein, als dass $\zeta \; V_2 = \zeta^*$ eine unmerkliche Grösse, jedenfalls aber $\zeta^* < \varepsilon$, wird.

Man sieht zunächst, dass es gleichgültig ist, ob die Uebervergrösserung des im Objektivbilde verbliebenen Fehlers durch kurzen Tubus und starkes Ocular oder durch langen Tubus und entsprechend schwaches Ocular bewirkt wird, so lange letzteres überhaupt eine genügend fehlerfreie Abbildung von Axenpunkten herbeiführt. Da die Fehlergrösse im Bilde, ζ^*, nur von der Ocularvergrösserung abhängt, so ist sie bei einem gegebenen Constructionstypus des Objektivs (gegebenen Constanten K_1, K_2 ... und damit gegebenem Werthe von ζ)

$$\zeta^* = \zeta \cdot \frac{\Delta}{f_2'} = \zeta \cdot \frac{f_1'}{f} = \zeta \cdot f_1' \cdot V, \tag{15}$$

also die Fehlergrösse im Bilde direkt proportional der Brennweite des Objektivs, wenn gleiche Gesammtvergrösserungen V verglichen werden. Eine bestimmte Bildqualität (Grösse von ζ^*) bei einer gegebenen Gesammtvergrösserung ist daher desto leichter zu erreichen, je kürzer man die Brennweite des Objektivs wählt. [Man kann dies auch daraus entnehmen, dass der gleichen angularen Grösse ζ im virtuellen Objektivbilde eine desto kleinere lineare Fehlergrösse z im Objekte entspricht, je kleiner die Brenn-

weite des Objektivs ist, gemäss der Gleichung $z = \zeta \cdot f_1'$. Dieser auf das Objekt bezogene Fehler z unterliegt der Vergrösserung V durch das ganze Mikroskop, welche nur von dessen Gesammtbrennweite, aber nicht von f_1' abhängt. Folglich bleibt die Fehlergrösse im schliesslichen Bilde proportional ihrer Grösse im Objekt, d. h. proportional f_1' [1])].

Ganz analog zieht man die aus der chromatischen Abweichung und aus deren Variation mit der Apertur herrührenden Fehler im Objektivbild in Rechnung. Die erstere fanden wir früher, ebenfalls in ihrem angularen Betrage

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) G = a \cdot G. \tag{14b}$$

wo G wiederum eine vom Constructionstypus des Systems abhängige Constante bedeutet. Die andere würde, analog der sphärischen Aberration selbst

$$\Delta \zeta = a^3 \Delta K_1 + a^5 \Delta K_2 + a^7 \Delta K_3 + \ldots \tag{14c}$$

zu setzen sein.

Die aus allen drei Ursachen zusammen herrührende Aberration — so unsicher dieselbe auch auf solche Weise mathematisch und physikalisch bestimmt sein mag — wird daher jedenfalls durch eine nach ungeraden Potenzen der Apertur fortschreitende Reihe dargestellt, deren Coëfficienten von der Brennweite des Systems unabhängig sind. Die lineare Grösse dieses Gesammtfehlers, zurückbezogen auf das Objekt, ist also, ebenso wie seine einzelnen Bestandtheile, direkt proportional der Brennweite des Objektivs. Indem man dann die Bedingung festhält, dass der aus allen drei Ursachen herrührende Gesammtfehler im letzten Bilde den kritischen Betrag ε nicht übersteigen dürfe, kommt man zu einer rationellen Skala der Verhältnisse von Apertur und Brennweite in den Mikroskopobjektiven.

Es würde schwer und jedenfalls ein sehr unsicheres Verfahren sein, wenn man die Grösse von ζ für verschiedene Constructionstypen und Aperturen direkt — etwa rechnerisch, — bestimmen wollte. ABBE [2]) hat daher zu ihrer Ermittelung einen indirekten Weg eingeschlagen, indem er an zahlreichen Exemplaren verschiedenster Provenienz und Zusammensetzung empirisch den Betrag der Ueber-Vergrösserung $\frac{\Delta}{f_2'} = V_2$ feststellte, den das Objektivbild verträgt, ohne irgend merkliche Einbusse an Schärfe zu erfahren. Aus der Apertur a und dem kritischen Winkel ε ist gemäss Gl. (13) die Gesammtbrennweite f' bestimmt, die das System erhalten muss. Diese setzt sich aus Objektivvergrösserung $V_1 = \frac{1}{f_1'}$ und der Ocularvergrösserung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2'}$ gemäss der Gleichung (10)

$$V = \frac{1}{f'} = V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{f_1'} \frac{\Delta}{f_2'}$$

zusammen. Daher bestimmt der Werth von V_2 umgekehrt denjenigen von f_1', nämlich zu

$$f_1' = \frac{V_2}{V} = f' \cdot V_2 \tag{16}$$

oder aus der zulässigen Linearvergrösserung N zu

$$f_1' = \frac{l \cdot V_2}{N}, \tag{16a}$$

---

[1]) Erster Hinweis auf diese Verhältnisse in HUYGHENS Dioptrica, pag. 181 ff.

[2]) Beiträge zur Theorie etc. l. c. und Relation of Aperture and Power in the Microscope, Journ. R. Micr. Soc. (2) 2, pag. 300, 460, 790. 1882.

wo V bezw. N die dem Winkel ε und der Apertur a nach Gleichung (13) pag. 247 entsprechenden Grössen sind.

Eine Reihe der auf diese Weise sich ergebenden Werthe der kritischen Uebervergrösserung und entsprechenden Objektivbrennweite sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In derselben sind neben den Werthen, welche den Systemen der älteren Art, den »Achromaten«, zugehören, diejenigen aufgeführt, welche nach einer gleichartigen Untersuchung den mit den neuen Jenaer Glasarten construirten »Apochromaten« zugehören.

Apertur $a = n \cdot \sin u$		Förderliche Gesammtvergrösserung $= N$	Achromate		Apochromate	
			V_2	f_1'	V_2	f_1'
Trockensysteme	0·10	53	10	47	—	—
	0·20	106	8	19	—	—
	0·30	159	7	10·5	10	16
	0·60	317	4·5	3·5	10	8
	0·90	476	4	2·1	8	4
Wasserimmersion	1·20	635	4	1·6	7	2·5
Homogene Immersion	1·35	714	6	2·1	9	3·

Wegen der verschiedenen, bei Aufstellung einer solchen Tabelle in Betracht kommenden Nebenumstände müssen wir auf die zweite der oben citirten Abhandlungen von Abbe verweisen.

Einfluss der Wirkungsvertheilung auf Objektiv und Ocular in Bezug auf die Bildfehler ausser der Axe.

Die Werthe von f_1' in dieser Tabelle und überhaupt alle gemäss solcher Bestimmungsweise erhältlichen sind obere Grenzwerthe. Nach den oben angestellten Erwägungen könnte es nun scheinen, als käme man zu immer günstigeren Verhältnissen, je kleiner man *caet. par.* f_1' wählt. Dies ist jedoch nur richtig unter dem bisher allein festgehaltenen Gesichtspunkt der Verminderung des Einflusses der unvermeidlichen Aberrationsreste auf die Bildqualität in der Axe. Eine zu starke Verkürzung der Objektivbrennweite — auf mehr als $\frac{3}{4}$ bis höchstens $\frac{1}{2}$ der oben angegebenen Werthe — würde dagegen mehrere Nachtheile im Gefolge haben. Die meisten der pag. 228/29 angeführten Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen würden bei relativ sehr kurzen Objektivbrennweiten in entsprechend geringerem Grade zur Geltung kommen. Insbesondere würde man mit den bequemsten Ocularbrennweiten und Tubusdimensionen auf übermässige, »leere« Vergrösserungen kommen und keine Abstufung brauchbarer Vergrösserungen durch Wechsel der Oculare vornehmen können; ferner würde bei den höheren Aperturen der freie Objektabstand — der hier ein mit der Apertur abnehmender Bruchtheil der Brennweite ist (bei $a = 0{\cdot}25$ ca. $0{\cdot}7 f_1$, bei $a = 0{\cdot}5$ ca. $0{\cdot}3 f_1$ und bei $a = 0{\cdot}85$ nur ca. $0{\cdot}1 f_1$) — auf unangenehm geringe Beträge herabgesetzt werden.

Der wichtigste Uebelstand aber wäre der, dass mit der Verringerung der Objektivbrennweite die Fehler des letzten vom Ocular entworfenen Bildes ausserhalb der Axe zunehmen.

Wir machten als Hauptmoment für die Vertheilung der dioptrischen Leistung auf ein Objektiv und ein Ocular geltend, dass durch diese Theilung die Abbildung eines im Verhältniss zur Brennweite des ganzen Systems grösseren Objektflächenstücks ermöglicht werde. In der That, nehmen wir Oculare von gegebenem Constructionstypus an, in welchen z. B. das angulare Bildfeld ca. $= 35°$ ist, also

$tg\,w' = tg\,17°\cdot 5 = 0{\cdot}32$, dann ist das zur Abbildung durch das ganze System gelangende Objektflächenstück

$$2y = 2\cdot f'\cdot tg\,w' \text{ nahezu } = 0{\cdot}65\,f'$$

Nun sind durch Erfüllung der Sinusbedingung die der ersten Potenz des Sehfeldes proportionalen Bildfehler (die Vergrösserungsdifferenzen der verschiedenen Zonen des Objektivs und das Coma) auf Null gebracht. Es bleiben aber die der zweiten und höheren Potenzen proportionalen im wesentlichen uncompensirt bestehn. Was nun diese und zunächst die dem Quadrat des Sehfeldes proportionalen Fehler [Astigmatismus, Wölbung[1])] betrifft, so treten dieselben desto weniger in Erscheinung, je grösser die Objektivbrennweite ist. Denn alsdann ist das unter gegebener Gesammtvergrösserung ($V = 1/f'$) und gegebenem Ocularsehfeld ($2\,w'$) abgebildete Objektflächenstück $2y$ ein entsprechend kleinerer Bruchtheil der Objektivbrennweite. Nämlich, wenn

$$f_1' = f'\cdot V_2 \quad \text{so} \quad \frac{y}{f_1'} = \frac{tg\,w'}{V_2}, \tag{17}$$

also $\frac{y}{f_1'}$, die angulare Grösse des Objekts vom vorderen Knotenpunkt des Objektivs aus gesehen, ein desto kleinerer Bruch, je stärkere Uebervergrösserung V_2 — mittelst Ocular und Tubus — zur Anwendung kommt bezw. gemäss den oben erörterten Bedingungen angewandt werden darf. Andererseits wird der im Objektivbild verbleibende Zerstreuungskreis direkt proportional der Ocularvergrösserung V_2 mit vergrössert. Bei einer in Bezug auf die excentrischen Theile des Sehfelds fehlerlosen Abbildung durch das Ocular, oder bei einer von der Stärke derselben unabhängigen Qualität der von ihm gelieferten Bilder erscheinen daher im letzten Bilde die dem Quadrate des Sehfelds proportionalen Fehler im umgekehrten Verhältniss zur Objektivbrennweite.

Die lineare Grösse des abgebildeten Objekts, welche gleich ca. $\frac{2}{3}$ der Brennweite des Gesammtsystems ist, beträgt demnach im zusammengesetzten Mikroskop nur $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{18}$ der Objektivbrennweite; das Objekt wird daher durch dieses in seinen Randtheilen entsprechend vollkommener zur Abbildung gebracht als in einem einfachen Mikroskop von gleicher Gesammtvergrösserung. Je grösser die zulässige Steigerung der Uebervergrösserung V_2 ist, in desto stärkerem Maasse kommt dieser Vortheil neben den anderen oben angeführten zur Geltung. Dies sind die Gründe, weshalb die möglichste Steigerung der Objektivbrennweite und entsprechende Steigerung der Uebervergrösserung ein Hauptziel der praktischen Optik sein muss und einen Maassstab für ihre Leistungen bildet.

»Angesichts der noch sehr verbreiteten Meinung, dass die Anwendung starker Oculare an sich unvortheilhaft sei — dass diese Lichtmangel herbeiführten und dass man desshalb für höhere Vergrösserungen grundsätzlich Objektive von kurzer Brennweite und schwache Oculare fordern müsse — dürfte es nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dass eine solche Ansicht weder optisch sich rechtfertigen lässt, noch einer richtig gedeuteten Erfahrung entspricht, sondern aus einer unberechtigten Verallgemeinerung gewisser Beobachtungen entsprungen ist. Die starken Oculare geben dann »dunkle« Bilder, wenn durch ihre Anwendung überhaupt zu hohe (leere) Vergrösserung herbeigeführt wird, d. h. wenn die Gesammtvergrösserung über diejenige Ziffer hinaus sich steigert, bei welcher der Inhalt des Bildes, wie er durch die Apertur des Objektivs sich bestimmt, für das Auge erschöpft ist; und ausserdem dann, wenn die Strahlenvereinigung durch das Objektiv zu unvollkommen ist, um die betreffende Vergrösserung zu vertragen, ohne

[1]) Im Text von pag. 124 heisst es (Zeile 7 v. u.) in Folge eines Schreibversehens »Quadrate der linearen Oeffnung des einfallenden Büschels« statt »Quadrate des linearen oder angularen Objektdurchmessers.«

dass die Fehler sichtbar werden. Wenn weder der eine noch der andere Fall vorliegt, ist es auch für den subjektiven Eindruck der Helligkeit durchaus gleichgiltig, ob die betreffende Vergrösserung durch ein starkes Objektiv mit einem schwachen Ocular oder durch ein schwächeres Objektiv von gleicher Apertur mit einem stärkeren Ocular erzielt worden ist. Die objektive Lichtstärke des Bildes aber hängt in jedem Falle nur von der Apertur und der Gesammtvergrösserung ab, gleichgiltig wie die letztere durch Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Brennweite des Oculars sich bestimmt» (ABBE).

Wenn die Vergrösserung, d. h. die Divergenzänderung der abbildenden Büschel durch das Objektiv allein unter ein gewisses Maass herabgeht, so verlieren die voranstehenden Betrachtungen z. Th. ihre Unterlage. Die Bilddistanz ist dann nicht mehr sehr gross gegen die Brennweite des Objektivs und die von ihm austretenden, für das Ocular wirksam werdenden Büschel sind nicht mehr sehr eng. Der Vergleich des Objektivs mit einer Lupe für fernsichtige Augen und des Ocular-Tubus-Theils mit einem ohne weiteres aplanatischen Fernrohr lässt sich daher nicht mehr aufrecht erhalten. Es muss dann vielmehr auch die Focalwirkung des Oculars berücksichtigt werden, und es ist andererseits in viel höherem Maasse als oben hingestellt möglich, die im Objektivbild verbliebenen Fehler durch das Ocular zu corrigiren.

Die hauptsächlichsten Constructions-Typen in ihrer historischen Entwickelung.

1) Einfache Linsen für Objektiv und Ocular. Das zusammengesetzte Mikroskop ist — ebenso wie das Fernrohr — wahrscheinlich durch zufällige geeignete Combination eines starken biconvexen mit einem noch stärkeren biconcaven (?) Brillenglase um das Jahr 1590 von Niederländischen Brillenschleifern erfunden oder vielmehr gefunden worden (ZACHARIAS JANSSEN in Middelburg?)[1]) Das erste zusammengesetzte Mikroskop war also ebenso wie das erste Fernrohr ein solches mit negativem (dispansivem) Ocular[2]). FONTANA beschrieb 1646 zuerst ein Mikroskop, dessen Ocular wie das Objektiv aus je einer Sammellinse bestanden.

Im Jahre 1665 setzte HOOKE zwischen diese beiden Linsen nahe der oberen eine dritte, welche man jetzt als sogen. Collektivglas (Fieldlens) als zum Ocular gehörig rechnet. Seine Absicht war dabei, wie der Name es ausdrückt, nur die, das Sehfeld zu vergrössern, indem die Collektivlinse einen grösseren Theil

---

[1]) Ueber die Geschichte dieser Erfindung und die Prioritätsansprüche der verschiedenen Personen bezw. Nationen berichten ausführlicher: E. WILDE, Gesch. der Optik. Berlin, 1838, Bd. 1, pag. 138 ff. P. HARTING, Das Mikroskop. D. Uebers. 2. Aufl. Braunschweig 1866. 3. Theil. J. MAYALL jun., Cantor lectures on the microscope. Soc. for the encouragement of arts etc. (auch separat erschienen) London 1886, pag. 6 ff. In diesen Werken ist auch die ältere auf den Gegenstand bezügliche Literatur angeführt.

Dass die Inanspruchnahme dieser Erfindung (sowie auch der anderer optischer Instrumente) für ein früheres Zeitalter, insbesondere für das classische Alterthum haltlos sei, wies eingehend nach: H. MARTIN, Sur les instrum. d'optique faussement attribués aux anciens etc. Bull. di Bibliogr. e di Storia delle Scienze mat. e fis. (4) (Mai-Juni) 1871.

Für die Priorität GALILEI's trat neuerdings nochmals ein G. GOVI. Atti d. R. Ac. d. Scienze fis. et mat. Napoli. S. dagegen die Ausführungen in Journ. R. Micr. Soc. 1889, pag. 574.

[2]) So beschaffen war es wenigstens auf der ältesten Abbildung eines zusammengesetzten Mikroskops in DESCARTES Dioptrice 1637 (MAYALL l. c. p. 9). Das angeblich älteste wirklich erhaltene (JANSSEN'sche?) Mikroskop hat zwei convexe Linsen (vergl. Ber. üb. d. Ausst. wiss. Instr. zu London hrsg. v. A. W. HOFMANN. Braunschw. 1878, pag. 50. MAYALL l. c. pag. 7.)

des Objektivbildes aufnimmt als bei sonst ungeänderter Stellung derselben die eigentliche Ocularlinse. Diese Erklärung hält jedoch nicht mehr Stand, wenn man zusammengesetzte und einfache Oculare von gleicher Gesammtbrennweite vergleicht. Maassgebend für die bessere Wirkung der zweifachen Oculare sind vielmehr die Gesichtspunkte, unter welchen HUYGHENS sie (vor 1659) für den Gebrauch am Teleskop gefunden hatte und auf welche wir theils bereits hingewiesen haben, theils unten zurückkommen werden.

Die weitere Entwicklung des Mikroskops musste nach dem oben ausgeführten wesentlich von derjenigen ihrer Objektive abhängen. Die Construction derselben machte keine nennenswerthen Fortschritte in den ersten beiden auf die Erfindung des Mikroskops folgenden Jahrhunderten. Man war in diesen vielmehr ausschliesslich mit der Anwendung und construktiven Durcharbeitung der einfachen Mikroskope beschäftigt. Man versuchte zwar, die Brennweiten der Objektive immer kürzer und ihre Oeffnung dennoch relativ gross zu erhalten (man hatte bald erkannt, dass hierauf, wie beim Teleskop, die Lichtstärke beruhe); die sphärischen und chromatischen Fehler einer Einzellinse — und selbst mehrerer solcher zu einem System verbundener (Doublets, DIVINI 1668) als Objektive von Mikroskopen traten aber schon unter mässiger Ocular- bezw. Gesammtvergrösserung so stark hervor, dass ihnen gegenüber bis in die neuere Zeit (ca. 1830) sogar die mit einem (Concav-) Spiegel ausgerüsteten Katadioptrischen Mikroskope (vorgeschlagen 1672 von NEWTON, weiter verfolgt von BARKER, R. SMITH, B. MARTIN, D. BREWSTER und besonders AMICI) entschiedene Vortheile zu bieten schienen. Die hierauf gerichteten Bestrebungen wurden jedoch beim Mikroskop — im Gegensatz zum Fernrohr — später gänzlich fallen gelassen, als die Anwendung achromatisirter Combinationen als Objektive die diesen früher anhaftenden Mängel beseitigte. In der That bieten Spiegel als Objektive so ungünstige Bedingungen für die Beleuchtung und die Beobachtung des Objektes dar, dass die katadioptrischen Mikroskope (das Ocular war stets dioptrisch) als ein für immer überwundener Standpunkt gelten können und nur noch historisches Interesse beanspruchen dürfen.

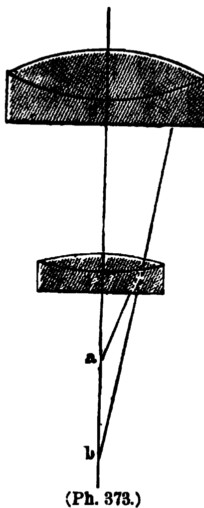
2) Die Anwendung des Achromasieprincips — unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration für wenigstens eine Farbe — auf das Mikroskopobjektiv war durch die theoretischen Arbeiten, insbesondere die von EULER schon früher vorbereitet (Ende des 18. Jahrh.), fand aber nach mehreren dahin gerichteten misslungenen Versuchen von B. MARTIN (1759) u. A. erst durch die Optiker J. u. H. VAN DEYL (1807) FRAUNHOFER (1811), AMICI (1816) TULLEY (1824) und CHEVALIER (1824) allmählich zunehmend sachgemässe und darum wirkungsvolle Realisirung.

Insbesondere waren es die von V. u. CH. CHEVALIER anfänglich nach Angaben von SELLIGUE hergestellten (später selbständig verbesserten) Objektive,[1]) welche dem zusammengesetzten Mikroskop einen wirklichen Vorsprung vor dem einfachen zu verschaffen begannen. In diesen waren mehrere für sich achromatische Linsen über einander geschraubt, welche zusammen, einzeln, oder in beliebigen Combinationen benützt werden konnten und damit war der zweite Schritt auf der Bahn geschehen, in welcher sich alle weiteren Fortschritte auf dem Gebiete der Mikroskopie bewegten.

---

[1]) Ueber dieselben s. CH. CHEVALIER, Des Mikroscopes. D. Uebers. v. KERSTEIN, Quedlinbg. u. Leipz. 1843 und den von FRESNEL verfassten Bericht der von der Par. Acad. zu ihrer Prüfung eingesetzten Commission. Ann. des sciences nat. 3, pag. 345. 1824.

Die Zusammensetzung des Objektivs aus mehreren geeignet angeordneten einfachen Linsen hatte allerdings schon EULER (1757) empfohlen behufs Verminderung der sphärischen Aberration in einem System von entsprechend kurzer Brennweite bezw. relativ grosser Oeffnung. Für den damaligen Zustand der Technik war es ausserdem an sich schon ein grosser Vortheil, dass die Brechungswirkung auf mehrere Flächen vertheilt wurde, deren Dimensionen und Radien nicht allzusehr ausserhalb des Bereichs ihres Könnens lagen. Da der Correctionszustand von den gegenseitigen Entfernungen der Linsen abhängt, so bietet eine Mehrzahl von solchen die — bis in die Gegenwart viel benützte und nicht zu unterschätzende — Möglichkeit, durch empirische Distanzirung Unvollkommenheiten des ursprünglichen Constructionsplans und der technischen Ausführung bis zu einem gewissen Grade nachträglich wieder auszugleichen. Die von SELLIGUE gewählte Disposition zeugte andererseits von wenig Einsicht in die Bedingungen des Problems, welches er zu lösen unternahm. Denn sowohl er, als die meisten seiner Vorgänger wandten »achromatische« Linsenpaare an, welche gewissermaassen schlechthin »achromatisch«, nämlich von den chromatischen und sphärischen Aberrationen für einen unendlich fernen Objektpunkt befreit waren, wie das damals bereits genauer studirte Fernrohrobjektiv. SELLIGUE trug nun nicht einmal — wie z. B. FRAUNHOFER — dem Umstande Rechnung, dass bei Mikroskopobjektiven die Bildentfernung (nahezu im Verhältniss der linearen Objektivvergrösserung) grösser ist als die Objektentfernung und dass deshalb ein Fernrohrobjektiv von entsprechend kurzer Brennweite leidliche Dienste als Mikroskopobjektiv nur thun kann, wenn man es in umgekehrter Lage wie jenes am Tubus anbringt. Vielmehr waren seine Objektive aus Linsenpaaren zusammengesetzt (biconvexe Crown- mit planconcaver Flintlinse, mit den gleich stark gekrümmten Innenflächen an einänder gekittet, die Crownlinse nach dem Objekte hin gelegen) die sich in einer Stellung befanden, in welcher sie für den unendlich fernen Axenpunkt besser als für den wirklichen Objektpunkt corrigirt waren.



(Ph. 373.)

Die gebührende Rücksicht auf diesen Punkt nahm erst CHEVALIER, dann LISTER [1]). Letzterer wies darauf hin, dass jedes Linsenpaar nur für zwei Stellen der Axe sphärisch corrigirt »aplanatisch» sein könne und dass man daher die Einzelobjektive so übereinanderreihen müsse, dass der (virtuelle) aplanatische Bildpunkt, *b*, der einen Objektpunkt für die darauffolgende würde. Alsdann bleibt das Gesammtsystem (1 + 2 + . .) (Fig. 373) aplanatisch, man mag von der Objektseite her so viel Theile (1, 2, . .) entfernen oder daran belassen als man wolle. Die Stärke der einzelnen Linsenpaare nimmt dabei von der Objekt- nach der Bildseite hin ab und die des ganzen Systems mit der Zahl der Linsenpaare zu. Ein Hauptvortheil dieser combinirten Objektive bestand darin, dass sie einen grösseren Oeffnungswinkel erhalten konnten, also einfache und in Folge dessen für die ihren Brennweiten entsprechende Vergrösserung annähernd genügender Lichtstärke und Unterscheidungs- bezw. Auflösungsvermögen erhielten.

---

[1]) On some properties in achrom. objectglasses applic. to the improvement of the microscope. Phil. Trans. 3, pag. 187. 1830.

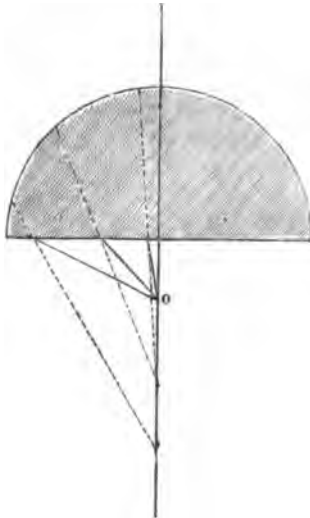
Nach diesem Constructionsprincip hat man zwar noch bis in die neueste Zeit Systeme verfertigt; aber dies doch nur zu gewissen speciellen Zwecken. Die Mehrzahl der damaligen Optiker, welche ohnehin weder die rationelle Berechnung noch eine der Rechnung genau entsprechende Ausführung zu leisten vermochten, wandten sich einem andern Verfahren zu, welches an sich zwar complicirter war, aber eben darum höhere Leistungen ermöglichte und den praktischen Optikern die Möglichkeit bot, ohne besondere Ansprüche an Zusammenwirken von Theorie und Technik zu stellen, durch Geduld und Sorgfalt, auf rein empirischem Wege, die geeigneten Combinationen zu finden. Lister selbst hatte sich auch schon in seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand zum Theil wieder von seinem Princip entfernt, indem er angab, dass bei starken Systemen die Gesammtwirkung eine günstigere werde, wenn man in dem einen Partialsystem etwas Untercorrection bestehen lasse und diese durch eine gleich grosse Uebercorrection des darauf folgenden Theils kompensire. In der That haben nur die unter vollständiger Verfolgung des Princips der

3) Gegenseitigen Compensation absichtlich angehäufter Aberrationen in den verschiedenen Theilen des Objektivs die Möglichkeit dargeboten, die chromatischen und sphärischen Aberrationen höherer Ordnung und die Vergrösserungsanomalien der verschiedenen Zonen des Systems (Abweichungen vom Sinusverhältniss) einigermaassen auszugleichen, welche bei grösseren Aperturen über die primären Glieder weit überwogen. Amici gebührt das Verdienst, diesen Schritt gethan (auch selber praktisch verwirklicht) zu haben und durch diese und andre Verbesserungen des zusammengesetzten Mikroskops der eigentliche Begründer der modernen Mikroskopoptik geworden zu sein.

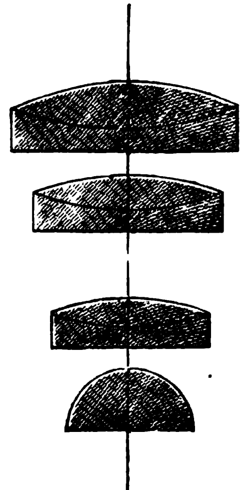
Amici ging in Erkenntniss der Bedeutung der grossen Oeffnungswinkel für die stärkeren Systeme systematisch darauf aus, dieselben zu steigern. Da eine wirkliche Ausnützung des Oeffnungswinkels nur eintreten kann, wenn innerhalb desselben die Aberrationen ausgeglichen sind, so brachte Amici in seinen Objektiven das eben genannte und schon früher von uns besprochene Princip zur Anwendung, die verschiedenen Aberrationen in dem einen (Unter-) Theil des Systems absichtlich anzuhäufen bis zu solchen Beträgen, welche in gleicher aber entgegengesetzter Grösse und gleichem Zusammenhange (mit den Zonen und unter einander) in dem anderen zum System gehörigen (Ober-) Theil erreichbar sind. Die Zusammensetzung zweier solcher mit entgegengesetzten Aberrationen behafteter Theile ergiebt dann ein aplanatisches Gesammtsystem, in welchem die verschiedenen Aberrationen, wie bemerkt, weit besser corrigirt sind, als wenn man das System aus Theilen zusammensetzte, der jeder für sich möglichst gute Wirkung oder überhaupt brauchbare Bilder giebt. Der Vortheil, dass die allgemeine dioptrische Wirkung auf mehrere Flächen vertheilt ist und in Folge dessen mittelst Flächen schwächerer Krümmung geleistet wird als bei Anwendung einer einzigen Linse, bleibt dabei immer noch bestehen.

Als eines wesentlichen Mittels zur Erreichung dieses Zieles bediente sich Amici bereits der stark gewölbten planconvexen Vorder- (Front-) Linse, welche für alle anderen modernen stärkeren Objektive wesentlich und eigenthümlich ist. Wir haben wiederholt (pag. 67, 88, 118) auf die Eigenschaft der Kugel hingewiesen, ausser dem im Mittel- und dem im Scheitelpunkte coincidirenden noch ein weiteres im strengen Sinne aplanatisches Punktepaar zu besitzen. Die vom Punkte L' (Fig. 315) innerhalb des stärker brechenden Mediums n' auf die concave Seite der Kugel fallenden Strahlen $L'P$ etc. werden in jeder Neigung und jedem Azimut nach dem virtuellen Bildpunkte L hin gebrochen, wenn $CP = r$,

$CL' = \frac{n'}{n} r$ und $CL = \frac{n'}{n} r$ ist. Dabei stehen die Sinus der Winkel $PL'C$ und PLC in dem constanten Verhältniss $n':n$. Fallen die Strahlen von einem Punkte O erst auf die ebene untere Grenzfläche einer nahezu halbkugeligen Linse, so bleibt an dieser zwar das Sinusverhältniss constant, aber es erfährt das Büschel an ihr eine gewisse sphärische Untercorrection (Fig. 374). Ist der virtuelle Vereinigungspunkt des Büschels nach der Brechung an dieser Planfläche der eine aplanatische Punkt L' der darauf folgenden Kugelfläche, so wird das Büschel nunmehr aplanatisch in den ihm conjugirten Punkt L übergeführt. Es findet auf diese Weise also eine sehr erhebliche Brechungswirkung mit relativ geringen Aberrationen statt In dem auf die Frontlinse folgenden Theile des Systems findet dann die weitere Brechung und Correction des Büschels gemäss dem oben gewährten Principe statt.



(Ph. 374.)



(Ph. 375.)

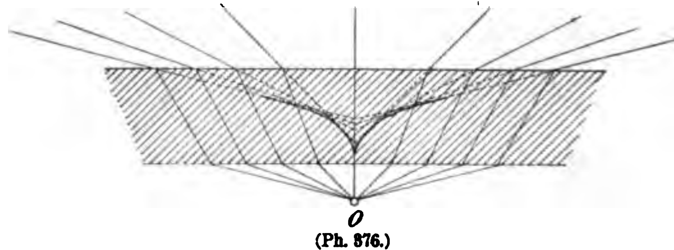
Amici verwandte auch bereits eine grössere Auswahl von Glasarten — wohl alle damals zur Verfügung stehenden, (etwa 6) — um möglichsten Spielraum in der Vertheilung von Brechungs und Aberrationswirkung auf die verschiedenen Flächen zu haben. Die auf die Frontlinse folgenden waren bei ihm — und auch später meistens — solche, welche aus einer nahezu planconcaven Flintlinse (diese nach der Objektseite gewandt) und einer in sie gepassten biconvexen Crownlinse zusammengesetzt (verkittet) waren (Fig. 375).

Amici erreichte auf diese Weise Oeffnungswinkel, welche fast bis an die Grenze des geometrisch möglichen gingen, nämlich bis 120° ja 135°. Endlich erkannte er auch zuerst die beiden anderen Momente, welche einer guten Wirkung der Systeme entgegenstanden, und die behufs Erzielung einer solchen mehr berücksichtigt werden mussten.

Einfluss des Deckglases. Correctionsfassung.

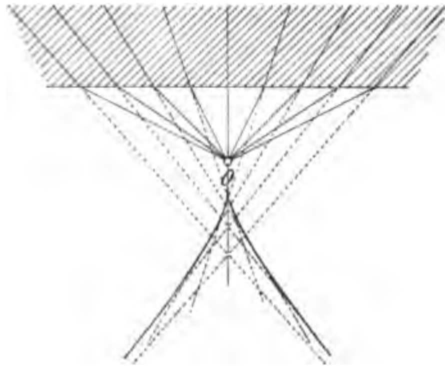
Die grosse Mehrzahl der Objekte, welche der mikroskopischen Beobachtung und Untersuchung, zumal bei starken Vergrösserungen, unterworfen werden, pflegt mit Glasplättchen bedeckt zu werden — den sogen. Deckgläsern — deren Dicke früher oft bis zu einigen Millimetern ging, jetzt meist nur wenige Zehntel-Millimeter beträgt. Bei den grossen Oeffnungswinkeln, welche Amici seinen Objektiven zu geben und nicht minder bei der vollkommenen Strahlenvereinigung, welche er innerhalb dieser Oeffnungswinkel zu erzielen wusste, wurde ihm der Einfluss bemerklich, den auch sehr dünne Deckgläser auf die Bildqualität ausüben. Ein Büschel, dessen Spitze z. B. in der Unterfläche des Deckglases liegt (von der Oberfläche des mit ihm bedeckten Präparates ausgeht) erfährt an der andern Fläche, beim Uebergang in Luft, eine er-

hebliche sphärische Uebercorrection (vergl. die Untersuchungen der Brennfläche in diesem Fall von TAIT, MEISEL u. s. w.) Büschel, die von tiefergelegenen Punkten *O* (Fig. 376) des Präparates ausgehen, erfahren an der ersten Fläche des Deckglases, beim Uebergang in Glas, allerdings eine gewisse sphärische Untercorrection (vergl. Fig. 377); wegen der geringeren Entfernung des Objektpunktes von



(Ph. 376.)

dieser Fläche als von der andern überwiegt aber jedenfalls die Uebercorrection an dieser. (Betreffs der Kennzeichen für den Charakter der Correction, ob Ueber- oder Untercorrection, vergl. pag. 103). Aus dem gleichen Grunde — wegen der grösseren Entfernung des Strahlungspunktes — ist dann aber wieder die Aberration, welche an der ebenen Unterfläche der Frontlinse des Objektivs eintritt (Fig. 377), grösser als die durch das ganze Deckglas hervorgebrachte und zwar in desto höherem Grade, je grösser die Entfernung zwischen Deckglas und Frontlinse, d. i. der freie Objektabstand ist. Dieser letztere Umstand ist zu berücksichtigen für die Wahl der Lage des Strahlungspunktes zur Hinterfläche der Frontlinse bezw. zu deren aplanatischen Punkten.


(Ph. 377.)

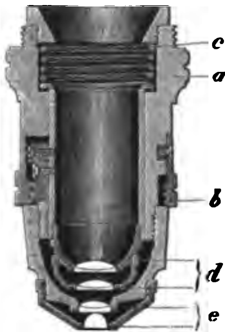
Dem ganzen Objektiv gegenüber wirkt also das Deckglas im übercorrigirenden Sinne und zwar in desto höherem Grade, je dicker das Deckglas ist. Das Objektiv muss daher für sich entsprechend untercorrigirt sein, und es kann dasselbe genau genommen nur von Präparaten, die mit Deckgläsern von ganz bestimmter Dicke versehen sind, gute, möglichst aberrationsfreie Bilder geben.

Dies ist nun in der That der Fall. Die Empfindlichkeit gegen Abweichungen von derjenigen Deckglasdicke, für welche das Objektiv ursprünglich bezw. am besten corrigirt ist, wächst natürlich einerseits mit dem Oeffnungswinkel (genauer mit der numerischen Apertur) des Objektivs. Bei den grössten Oeffnungswinkeln, welche man den Strahlenbüscheln geben kann, ohne dass der praktische Nachtheil weiterer Vergrösserung derselben in entsprechender Verminderung des freien Objektabstandes zu sehr hervortritt, nämlich bei Winkeln von 130—140° (numerische Apertur 0·90 — 0·95) werden an empfindlichen Objekten schon Abweichungen von der richtigen Deckglasdicke bemerklich, welche nur 0·01 bis 0·02 *mm* betragen; bei geringerer Apertur (0·5) ist kaum noch eine Abweichung von 0·05 *mm* zu erkennen; noch kleinere Aperturen sind noch weniger empfindlich.

AMICI trug diesem Umstand dadurch Rechnung, dass er seinen Mikroskopen mehrere Objektive gleicher Apertur beigab, von denen jedes auf eine andere Deckglasdicke corrigirt war. ANDREW ROSS in London berücksichtigte denselben (1837) auf einfachere, wenn auch weniger vollkommene, Weise, indem er den Abstand des Obertheils vom Untertheil des Objektivs variabel

machte (sogen. »Correctionsfassung«). Durch Veränderung dieses Abstandes schon innerhalb ziemlich enger Grenzen wird, wie wir früher sahen, eine genügende Veränderung des Correctionszustandes des Systems herbeigeführt, wiewohl natürlich nur bei einer Stellung, also für Deckgläser von einer gewissen Dicke, die Correction der Abweichung eine möglichst vollkommene sein kann. Die Brennweite und Apertur des Systems braucht bei geeigneter Construction derselben durch jene Distanzänderung nur sehr wenig beeinflusst zu werden. ZEISS und WENHAM (1857) haben diesen Mechanismus noch verbessert, indem sie nicht das Untertheil gegen das Obertheil, sondern umgekehrt dieses gegen jenes verschiebbar machten, sodass einerseits das Präparat während der Variation ihrer Entfernung nahezu im Focus des Systems bleibt und in Folge dessen das beste Bild eines Präparates, dessen Deckglasdicke nicht bekannt ist, empirisch besser aufgesucht werden kann, andererseits die Gefahr beseitigt wird, dass durch Aendern der Correction das Präparat mit dem Objektiv in Berührung komme und das eine oder andere Schaden erfahre. Fig. 378 stellt eine solche moderne Correctionsfassung im Querschnitt dar.

(Ph. 378.)



Durch den Correctionsring b wird die Entfernung zwischen dem oberen Theil d des Systems und dem unteren, mit der festen Fassung a verbundenen Theil e in angemessenen Grenzen variirt. Die Wurmfeder c hält beide Theile auseinander.

Immersionssysteme.

Der zweite Faktor für die Grösse der Aberration, welche das Strahlenbüschel beim Austritt aus dem Deckglas — und ebenso beim Eintritt in die Frontlinse — erfährt, ist offenbar die Differenz der Brechungsexponenten zu beiden Seiten der brechenden Fläche. Der Einfluss des Deckglases, sowohl gemäss seiner Gesammtdicke als in Bezug auf die zu gewärtigenden Variationen dieser wird daher vermindert, wenn der Unterschied der Brechungsexponenten zwischen Deckglas, bezw. Frontlinse und dem Medium zwischen beiden verringert wird, z. B. indem man zwischen Deckglas und Frontlinse des Objektivs eine Flüssigkeitsschicht einfügt. Systeme dieser Art — Immersionssysteme genannt — hat ebenfalls AMICI zum erstenmal und zwar in einer praktisch ziemlich vollkommenen Weise realisirt. Er war es auch, der hinwies und Gebrauch machte von den weiteren Vortheilen, die mit einer solchen Einrichtung theils ohne weiteres verknüpft sind, theils mit ihr verbunden werden können. Nämlich:

1) Die Verminderung der Aberrationen durch das Deckglas macht das Objektiv nicht nur unempfindlicher gegen Variationen von dessen Dicke, sondern sie ermöglicht überhaupt einen vollkommeneren Correctionszustand desselben, indem die Aberrationen, welche das Deckglas einführt wegen ihres besonderen Charakters (Grösse der Glieder höherer Ordnung) im darauffolgenden System immer schwer genügend vollständig aufhebbar sind. Immersionssysteme sind also unter sonst gleichen Umständen (gleiche numerische Apertur und Brennweite) optisch vollkommener herzustellen, als Systeme mit Luft zwischen Deckglas und Frontlinse (zum Unterschied als »Trockensysteme« bezeichnet).

2) Entsprechend der geringeren Brechung an den Planflächen des Deckglases und der Frontlinse ist auch der Lichtverlust durch partielle Reflexion an diesen Flächen vermindert, an welchen diese Reflexion gerade unter den maximalen überhaupt im System vorkommenden Incidenzwinkeln erfolgt,

jener Verlust daher auch sonst ein relativ beträchtlicher ist. Immersionssysteme liefern in Folge dessen bei gleicher Apertur und Vergrösserung hellere Bilder als Trockensysteme.

Neben dem Lichtverlust an sich, und vielleicht in noch höherem Grade als er, machen sich bei Trockensystemen die Reflexe gerader Ordnung (vergl. das bei den photographischen Systemen pag. 213 Gesagte) bemerklich, indem sie das Bild bis zu einem gewissen Grade verschleiern. Diese Reflexe fallen also bei den Immersionssystemen ganz oder fast ganz weg.

Endlich lehrt eine bekannte Erfahrung, dass grosse Schärfe im Bild, d. h. möglichst vollkommene Concentration des Lichtes auf die den Objektpunkten entsprechenden Bildpunkte in Folge einer unwillkürlichen Täuschung des Urtheils ebenfalls als Helligkeitsvermehrung empfunden wird. Also wirkt auch die ad 1 genannte Verbesserung der Bildqualität in demselben Sinne als eine, wenn auch nur scheinbare, Helligkeitsvermehrung.

3) Die numerische Apertur ist bei Trockensystemen theoretisch, für einen Divergenzwinkel des Büschels von 180°, auf die Grösse 1·0 — praktisch, wie früher schon erwähnt, auf höchstens 0·95 — beschränkt. Ein Büschel, welches selbst innerhalb des Deckglases oder im Einbettungsmedium des Objektes grössere Apertur (z. B. gleiche angulare Oeffnung) hätte, würde durch Totalreflexion des überschiessenden Theiles an der Oberfläche des Deckglases in jedem Falle auf die Apertur 1·0 reducirt werden. Die Einfügung einer Flüssigkeitsschicht von höherem Brechungsexponenten als 1·0 *mm* schiebt die Grenze der Totalreflexion entsprechend hinaus, bis zu der durch den Brechungsexponenten dieser Zwischenschicht selbst gegebenen Grenze; sie gestattet also, dass die Apertur des in das Objektiv eintretenden Büschels — Apertur in dem von uns stets festgehaltenen Sinne als Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Oeffnungswinkels — eine bis zu dem gleichen Betrage höhere wird. Die äusserste Grenze der auf diese Weise erreichbaren Apertur ist gegeben durch den niedrigsten Brechungsexponenten, welcher zwischen Objekt, Medium und Frontlinse (diese beiden einschliesslich) an irgend einer Stelle in paralleler Schichtung vorhanden ist. (Es würde also z. B. eine Erhöhung des Brechungsexponenten der Zwischenschicht — Immersionsflüssigkeit — ohne gleichzeitige Erhöhung aller andern Medien zwischen Objekt und Frontlinse in dieser Beziehung ohne Vortheil sein.)

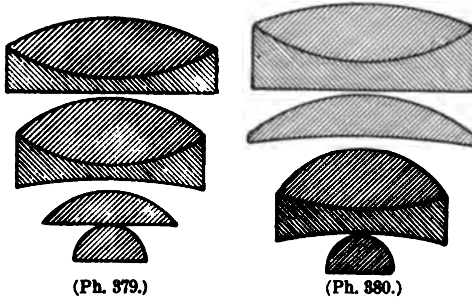
Mit dieser Erhöhung der Apertur sind dann — wofern innerhalb derselben entsprechend vollkommene Strahlenvereinigung erzielt wird — alle Vortheile verbunden, die wir pag. 240 nochmals namhaft gemacht haben, also insbesondere die Erhöhung der Lichtstärke und des Unterscheidungsvermögens des Objektivs bezw. ganzen Mikroskops.

Homogene Immersion.

Die hier gegebenen Hinweise auf die Vortheile der Immersionssysteme lassen ohne weiteres erkennen, dass dieselben am meisten zur Geltung kommen müssen, wenn eine Brechung an der Oberfläche des Objektivs überhaupt nicht stattfinden kann, d. h. wenn Deckglas, Immersionsflüssigkeit und Frontlinse des Objektivs gleiche Brechungsexponenten besitzen, eine optisch homogene Schicht bilden. Es sind daher, nachdem Immersionssysteme anderer Art, insbesondere solche mit Wasser als Immersionsflüssigkeit von Amici 1840 eingeführt und von E. Hartnack 1855 verbessert und beim wissenschaftlichen Publikum eingeführt waren, solche Systeme mit homogener Immersion im Jahre 1878 von Abbe unter Mitwirkung der Zeiss-

schen Werkstätte auf eine Anregung von J. W. STEPHENSON[1]) hin construirt worden, in welchen die genannten Momente praktisch zur Geltung gebracht wurden.[2]) Das bei diesen Systemen verwandte Cedernholzöl ($n_D = 1{\cdot}515$) ist auch jetzt noch die am häufigsten benützte Immersionsflüssigkeit.

Die Apertur, welche bei den älteren Immersionssystemen selten den Werth 1·0 überstieg, beträgt in den modernen Systemen bei Wasser als Immersionsflüssigkeit gewöhnlich 1·15– 1·20, bei homogener Immersion 1·25—1·35.


(Ph. 379.) (Ph. 380.)

Die Fig. 379 und 380 veranschaulichen den allgemeinen Aufbau von Systemen für homogene Immersion. Beide stellen Systeme von 2 *mm* Brennweite und einer Apertur von 1·30 dar (in 5fachem Maassstabe). Fig. 379 enthält die sogen. »Duplex front«-Linse, eine manchmal planconvexe, manchmal concavconvexe Linse über der halbkugeligen eigentlichen Frontlinse. Fig. 380 enthält diese einfache Linse zwischen den beiden (theilweise) achromatisirten Doppellinsen.

Apochromate.

Endlich ist innerhalb des Rahmens der vorstehend gekennzeichneten Constructionstypen eine Verbesserung nach der qualitativen Seite hin noch erfolgt durch die Einführung der sogen. Apochromate von ABBE, ausgeführt ebenfalls von der ZEISS'schen Werkstätte i. J. 1886. In diesen sind, worauf wir bereits mehrmals Gelegenheit hatten hinzuweisen, mehrere erhebliche Defecte der Strahlenvereinigung beseitigt, welche den bisherigen Systemen anhafteten und deren Leistungsfähigkeit merklich unterhalb des durch die numerische Apertur theoretisch gegebenen Maasses hielten. Es ist nämlich in ihnen[3])

1) das secundäre Spectrum auf etwa den zehnten Theil des bei den früheren Systemen (vergl. pag. 146) verbleibenden Betrages vermindert und damit praktisch ganz unmerklich gemacht.

2) die chromatische Differenz der sphärischen Aberration beseitigt, d. h. die sphärische Aberration ist nicht nur für eine, sondern vollkommen für drei und damit praktisch für alle Farben des sichtbaren Spectrums aufgehoben. Wie wir früher nachwiesen, ist in Folge des Zusammentreffens dieses und des ad 1) erwähnten Momentes auch das secundäre Spectrum für alle Zonen des Systems aufgehoben.

Die auf diese Weise erzielte Strahlenvereinigung ist von der 11. Ordnung, während eine gewöhnliche achromatische Linse eine Strahlenvereinigung von nur der 3. Ordnung herbeiführt. Der Vortheil dieser Systeme besteht einerseits, wie

---

[1]) Die Prioritätsansprüche, welche MAYALL für den amerikanischen Optiker TOLLES erhebt (Cantor lectures pag. 95) erweisen sich bei näherer Prüfung der von ihm selbst angeführten Quelle als gänzlich unhaltbar.

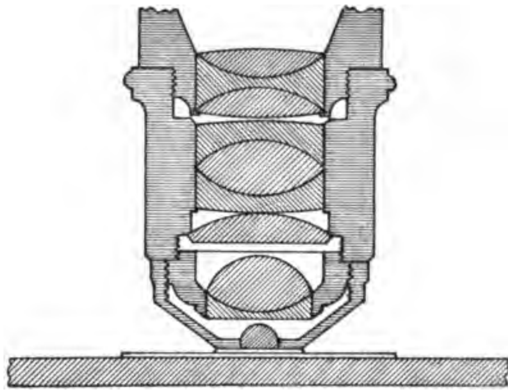
[2]) Siehe die erste Mittheilung über dieses System von J. W. STEPHENSON, Journ. R. Micr. Soc. 1, pag. 51. 1878. E. ABBE, Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1879, Sitzg. v. 10. Jan.

[3]) Vergl. E. ABBE, über Verbesserungen des Mikroskops mit Hilfe neuer Arten optischen Glases. Sitzber. d. Med. Naturw. Ges. Jena 1887, pag. 107. Sitzg. v. 9. Juli 1886. (Mehrfach in andern Ztschr. wiedergegeben. Auch zahlreiche Besprechungen dieser Systeme von Anderen an verschiedenen Stellen.)

erwähnt, in der vollständigeren Ausnützbarkeit ihrer Apertur und zweitens darin, dass sie gemäss dem pag. 248 ff. Ausgeführten die Anwendung starker Oculare, d. h. die Ausführung in grösseren Brennweiten erlauben.

Sie gestatten gleichzeitig eine Verbesserung der Bildqualität ausserhalb der Axe. Denn während bei den Systemen gewöhnlicher Art jeder Zone des Objektivs, wie sie eine andere Vereinigungsweite und andere chromatische Correctur besitzt, so auch eine andere Vergrösserungsdifferenz für die verschiedenen Farben zukommt, so ist hier, in Folge der Herstellung constanten Sinus-Verhältnisses für mehrere Farben, jene Vergrösserungsdifferenz zwar als solche nicht aufgehoben, aber doch für alle Zonen die gleiche. Sie lässt sich daher im Ocular durch eine entgegengesetzt gleiche in diesem stattfindende Vergrösserungsdifferenz völlig aufheben, compensiren. Die betreffenden Oculare sind darum »Compensationsoculare« genannt worden. —

Fig. 381 stellt ein Apochromatsystem von 2 *mm* Aequivalentbrennweite und einer numerischen Apertur von 1·40, sowie dessen Metallfassung in dreifacher natürlicher Grösse im Querschnitt dar. Es hat über der ersten binären Linse dieselbe einfache nahezu planconvexe Linse wie das in Fig. 380 dargestellte achromatische System. Hier folgen jedoch auf sie nach oben hin noch zwei ternäre Combinationen.



(Ph. 381.)

Betreffs der weitern Versuche, die bei den Systemen der homogenen Immersion erreichte Grenze der Apertur (von höchstens 1·40) zu überschreiten, — und dies womöglich unter Wahrung der Vorzüge, welche die Apochromate besitzen — und betreffs der Aussichten, welche die hierauf gerichteten Bestrebungen nach dem gegenwärtigen Stande unserer Erkenntniss überhaupt haben, verweist Verf. auf seine bezüglichen Darlegungen an anderer Stelle[1]).

Oculare.

Ueber die zum Mikroskop gehörigen Oculare und deren häufigste Constructionstypen wollen wir im Zusammenhang mit den beim Fernrohr angewendeten handeln, verweisen daher auf die dort gegebene Darlegung (pag. 272).

Beleuchtungsapparate.

Es bleiben uns daher nur noch die Vorrichtungen zu erwähnen, welche man angewendet hat, um die Beleuchtung oder vielmehr Durchleuchtung der in sehr

[1]) Betreffs der ersteren S. CZAPSKI, Ueber ein System von der Apertur 1·60 (Monobromnaphtalin-Immersion) hergestellt nach Rechnungen von Prof. ABBE in der optischen Werkstätte von CARL ZEISS in Jena. Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie, 6, pag. 417. 1889. Journ. R. Micr. Soc. pag. 11. 1890. s. auch VAN HEURCK. La nouvelle combinaison optique de Mr. ZEISS etc. Anvers 1890.

Betreffs des zweiten Gegenstandes S. CZAPSKI, »Die voraussichtlichen Grenzen der Leistungsfähigkeit des Mikroskops« (Brief an Herrn VAN HEURCK, abgedruckt in 4. Aufl. von dessen »Le microscope«, Anvers 1891, pag. 306). In erweiterter Form Ztschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie 8, pag. 145. 1891, und Biol. Centralblatt 9, pag. 609. 1891.

dünnen Schichten ja fast stets durchscheinenden und daher im durchfallenden Licht beobachteten Präparate auszuführen. Die grossen Aperturen der modernen Systeme machen, damit der beleuchtende Strahlenkegel ihre Apertur entweder voll ausfüllt oder innerhalb der Objektivapertur jede beliebige Richtung erhalten könne, besondere Vorrichtungen nöthig, die sogen. Beleuchtungssysteme (Condensoren), welche im wesentlichen nichts anderes als Objektive in umgekehrter Lage sind. Da, wie die physikalische Theorie der Bilderzeugung im Mikroskop ergiebt, die Ansprüche an die durch solche Beleuchtungssysteme zu bewirkende Strahlenvereinigung (scharfe Abbildung der Lichtquelle,) sehr gering sind, so hat man sich auch meistens entsprechend einfacher Vorrichtungen zu diesem Zwecke bedient, nämlich entweder, bis zu Aperturen von ca. 1·0, einfacher Halbkugeln (mit der planen Seite nach oben) direkt unter dem Objektträger angebracht, oder man wandte Combinationen einfacher unachromatischer Linsen an (Fig. 382), deren Apertur bis ca. 1·40 gesteigert werden kann (ABBE 1873), in späterer Zeit auch annähernd achromatisirte (vor allem von der sphärischen Aberration befreite) Combinationen. Damit eine begrenzte Lichtquelle das ganze Sehfeld auch schwächerer Systeme ausfülle und der Convergenzpunkt der Büschel höchster Apertur in einen der Dicke des Objektträgers entsprechend grösseren Abstand vom System falle, wählt man die Brennweite solcher Beleuchtungssysteme erheblich grösser als die von Objektiven gleicher Apertur, nämlich 10—15 Millim. Ueber das Wesen und die Grenzen der Wirkungsweise solcher Apparate haben wir uns bereits pag. 201 näher ausgelassen, verweisen daher hier auf jene Ausführungen.


(Ph. 382.)

Bezüglich der zum Beleuchtungsapparat gehörigen mechanischen Einrichtungen, andererseits der Beleuchtungsvorrichtungen für undurchsichtige Objekte, sowie überhaupt wegen des ganzen mechanischen Arrangements des Mikroskopstativs, ferner bezüglich der Einrichtung, Wirkungsweise und Anwendung der zahlreichen zum Mikroskop gehörigen Nebenapparate — zum Bewegen, Zeichnen, Messen, zur Erwärmung, elektrischen Reizung der Objekte, zum Beobachten im spectral zerlegten oder polarisirten Lichte, zur Erzeugung aufrechter, stereoskopischer oder reeller Bilder (auf Schirmen), zum Anbringen und schnellen Wechseln der Objektive etc. etc. — müssen wir auf die zahlreichen zum Theil nachstehend aufgeführten Specialwerke und die Kataloge der grösseren mit dem Bau von Mikroskopen sich befassenden Werkstätten verweisen. Wir nennen von den ersteren vornehmlich diejenigen, welche einen Fortschritt in der Darstellung der optischen Theorien repräsentiren. Nämlich aus älterer Zeit:

C. R. GORING and A. PRITCHARD, Micrographia etc. London 1837.

D. BREWSTER, Treatise on the microscope. Edinburgh 1837.

A. CHEVALIER, Des microscopes. Paris 1839. D. Uebers. v. Kerstein. Quedlinburg 1842.

H. v. MOHL, Mikrographie. Tübingen 1846.

P. HARTING, Das Mikroskop etc. D. Ausg. v. Theile 1. Aufl. Braunschweig 1859. 2. Aufl. ibid. 1866. (Von Werth insbesondere der historische Theil dieses Werkes.)

Von neueren Werken:

C. NÄGELI und S. SCHWENDENER, Das Mikroskop. 2. Aufl. Leipzig 1877. (Engl. Uebers. des optischen Theils v. CRISP u. MAYALL. London 1887.)

L. DIPPEL, Das Mikroskop. Bd. 1, Handb. der allg. Mikroskopie. Zweite (unter Mitwirkung

von ABBE bearbeitete) Aufl. Braunschweig 1882. Auszug hieraus: Dess. Verf. Grundz. d. allg. Mikroskopie. ibid. 1885.

W. CARPENTER. The microscope and its revelations, insbesondere die neueste (7.) von H. W. DALLINGER besorgte Aufl. dieses Werks. London 1891.

H. VAN HEURCK. Le Microscope. 4. ed. Anvers 1891. Engl. Uebers. London 1893. Als sehr brauchbare kürzere Darstellung ist empfehlenswerth E. GILTAY Inleiding tot het gebruik van den Microscoop. Leiden 1885.

III. Das Fernrohr.

Für die Beobachtung von Objekten, welche sehr entfernt sind, wäre an sich die Anwendung eines »Teleskopischen Systems« in dem von uns früher gebrauchten Sinne dieses Ausdruckes nicht unbedingt nöthig. Man kann Bilder sehr entfernter Gegenstände mittelst eines Projections-Systems entweder reell auf einen Schirm projiciren oder auch subjektiv beobachten — letzteres indem man sich mit dem Auge in der Richtung der Lichtbewegung anf der Axe um die Weite des deutlichen Sehens vom Bilde entfernt.

Die Benützung der Projectionssysteme in der zuerst gedachten Weise liegt durchaus im Rahmen von deren sonstiger Anwendung und bedarf daher keiner weiteren Erörterung. Der Gebrauch von Projectionssystemen für die subjektive Beobachtung aber würde, wenn selbst in jenen Systemen keine andere Abblendung vorgesehen wäre als die durch die Linsenränder gegebene, eine Art des Strahlenganges herbeiführen, welche gerade die umgekehrte wäre von derjenigen in einer Lupe für ein fernsichtiges Auge. Man hat sich also, um diesen Fall veranschaulicht zu erhalten, in Fig. 360, pag. 222, nur die Bedeutung der Objekt- und Bildseite vertauscht zu denken und die Büschel auf der Objektseite telecentrisch, parallelstrahlig, statt convergent vorzustellen. Eine leichte Ueberlegung zeigt, wie ungünstig die Verhältnisse bei einer derartigen Benützung des Systems sowohl für die Grösse der wirksamen Oeffnung als für die des Sehfeldes werden[1]).

Will man aber, dass das System von unendlich entfernten Objekten auch beliebig entfernte Bilder entwerfe, d. h. dass es ein teleskopisches sei, so ist damit die Zusammensetzung aus zwei getrennten Bestandtheilen, welche mit ihren einander zugewandten Brennpunkten coincidiren, ohne weiteres gegeben.[2])
Die Vortheile, welche die Zusammensetzung aus zwei Partialsystemen mit sich bringt — und welche zum Theil dieselben sind wie beim zusammengesetzten Mikroskop, zum Theil bald unter dem besonderen sich hier darbietenden Gesichtspunkt Erörterung finden werden — sind daher dem Teleskop von vornherein und so zu sagen unwillkürlich zu Theil geworden.

Die Fundamentalwirkung eines teleskopischen Systems, die angulare Vergrösserung, fanden wir (pag. 62) für alle Punkte der Axe constant

---

[1]) Erstere wird, unabhängig von der Oeffnung des Objektivs, so viel mal grösser als die Augenpupille wie die Brennweite des Systems die Weite des deutlichen Sehens (Abstand des Auges vom Bild) übertrifft. Letzteres umgekehrt wird abhängig von der Grösse der Objektivöffnung, nämlich für die Hauptstrahlen das halbe angulare Sehfeld im Bild gleich dem Verhältniss von halber Objektivöffnung und Abstand des Auges vom Objektiv. Die angulare Vergrösserung endlich wird gleich dem Verhältniss der Objektivbrennweite zur Sehweite.

[2]) Durch Zusammensetzung aus zwei einfachen Dioptern, d. h. einer einzigen entsprechend dicken Linse von passenden Krümmungen lässt sich zwar auch ein teleskopisches System herstellen; ein derartiges würde aber offenbar solche Beengungen im Gebrauch und für die Erzielung weiterer besonderer Eigenschaften mit sich bringen, dass es wohl mehr der Curiosität halber in früherer Zeit von DESCARTES vorgeschlagen worden ist, aber weder damals noch später Beachtung gefunden hat und zu finden verdiente.

$$\Gamma = +\frac{f_1}{f_2'} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{f_1'}{f_2'} \tag{1}$$

da andere Fälle als $f_1 = -f_1'$, $f_2 = -f_2'$ hier nicht zu berücksichtigen sind. Damit durch diese Fundamentalwirkung das Auge eine Unterstützung erfahre, d. h. $\Gamma > 1$ sei, muss auch $f_1 > f_2$ sein. Demnach bieten sich für die Zusammensetzung des Fernrohrs nur die beiden Möglichkeiten, dass

A. f_1 positiv und f_2 negativ, oder

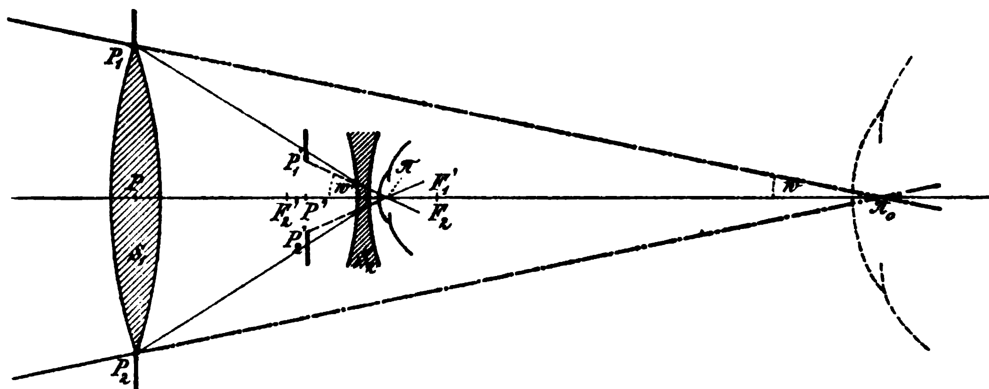
B. f_1 und f_2 beide positiv sind.

Da diese beiden Fälle, welche beide in gewissen Instrumentengattungen realisirt sind, eine verschiedene Art der Strahlenbegrenzung und dementsprechend des Strahlenganges herbeiführen, so müssen wir sie hier getrennt betrachten. Der Fall, dass f_2 zwar auch negativ, aber nicht nach dem Typus einer einfachen Linse, sondern complicirter zusammengesetzt sei, lässt sich dann ohne weiteres im Anschluss an die beiden grundlegenden eben genannten erledigen.

A. Das holländische Fernrohr.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Die Lage der Brennpunkte ist bei diesem Instrument die in Fig. 383 angegebene. Die Begrenzung des Objektivsystems S_1 ist gewöhnlich durch den Rand



(Ph. 383.)

der Fassung von dessen Vorderlinse gegeben. Von dieser wird durch das ganze System bezw. durch das Ocular S_2 ein Bild entworfen, in P', welches vom hinteren Brennpunkt F_2' des Oculars um eine Strecke ξ' entfernt ist, die sich gemäss der bezüglichen Gleichung pag. 62, da F_1 und F_2' einander conjugirt sind in Bezug auf das ganze System, berechnet zu

$$F_2'P' = \xi' = \frac{\xi}{\Gamma^2},$$

wo $\xi = f_1$ und Γ, die Vergrösserung des Fernrohres $= -\frac{f_1}{f_2}$ ist, also

$$\xi' = +\frac{f_1}{\Gamma^2} = -\frac{f_2}{\Gamma}. \tag{2}$$

Wenn die Ocularlinse nach dem Typus einer einfachen dünnen Linse construirt ist, so steht sie um $-f_2$ von F_2' ab; dann besagt Gleichung (2), dass das Objektivbild immer innerhalb des Instrumentes liegt, zwischen Objektiv und Ocular; und dies ist das unterscheidende Kennzeichen für diese Gattung von Instrumenten in Bezug auf den Strahlengang in ihnen.

Das Bild der Objektivöffnung hat eine Grösse (Halbmesser $P_1' P' = p'$), welche zu der des Objektivs selber, $PP_1 = p$, in dem für das System geltenden constanten Vergrösserungsverhältniss steht

$$\frac{p'}{p} = B = \frac{1}{\Gamma},$$

also

$$p' = \frac{p}{\Gamma}. \tag{2 a}$$

Wir müssen hier abermals die beiden Fälle unterscheiden, dass die so bestimmte Austrittsöffnung p' grösser oder kleiner ist als diejenige, π, der Pupille des Beobachters. Nehmen wir den Durchmesser der Pupille $= 4$ *mm*, so liegt der eine oder der andere Fall vor, je nachdem der Durchmesser des Objektivs (in Millim.) grösser oder kleiner ist als das 4fache der mit dem Instrument erzielten Vergrösserungsziffer beträgt. Das Bild der Objektivöffnung, $P_1' P_2'$, ist nun in jedem Falle die eine der beiden Begrenzungen, welche stets für die durch ein Instrument tretenden Strahlen vorhanden sind. Ist dieses Bild kleiner als die Pupille des Auges, so stellt es die Aperturblende vor, und die Pupille des Auges ist dann die Gesichtsfeldblende (vergl. die analogen Betrachtungen pag. 223, Fig. 362); wenn aber das Objektivbild grösser ist als die Augenpupille, so wird diese die Aperturblende und jenes wird die Gesichtsfeldblende (vergl. Fig. 361). In beiden Fällen liegt die Gesichtsfeldblende ausserhalb, sogar erheblich ausserhalb des Bildes selbst, lässt also in diesem dieselben drei Zonen unterscheiden, welche wir pag. 223 namhaft gemacht haben, nämlich einen centralen kreisförmigen Theil, ab (vergl. Fig. 361 und 362 daselbst), von constanter und maximaler Helligkeit, in welchem die volle Apertur der Büschel wirksam ist; um diesen herum einen Ring, in welchem, bis *AB*, die Helligkeit abnimmt bis nur noch die Axen der Büschel in das Auge gelangen und endlich eine äusserste Zone, bis αβ, in welcher die Helligkeit auf den Werth 0 herabsinkt.

Die Bestimmung dieser drei Gebiete und der für die Mitte wirksamen Apertur hat in beiden Fällen ganz ebenso zu erfolgen wie mittelst der Gleichungen (2) und (3) pag. 223/4, wenn man dort für p die gemäss unserer Gleichung (2) bestimmte Grösse p', für π ebenfalls den Halbmesser der Augenpupille setzt und für d die Entfernung der Augenpupille vom Objektivbild $P'\Pi$, die wir hier mit d' bezeichnen wollen. Das Sehfeld wird unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je kleiner diese Entfernung ist. Da nun wie bemerkt das Objektivbild bei dem holländischen Fernrohr stets im Innern des Instruments liegt, so ist der Annäherung des Auges die Grenze gesetzt, dass dieselbe höchstens bis an die Ocularlinse erfolgen kann. (Genauer gesagt, würde selbst bei wirklicher Berührung der Hornhaut mit der unendlich dünn gedachten Ocularlinse die Pupille immer noch um ihren eigenen Cornealabstand, d. i. 3 *mm*, von ihr abstehen, in Wirklichkeit aber gewöhnlich um mindestens 10 *mm*; dazu kommt dann noch die auch immer einige Millimeter betragende Entfernung des Linsenscheitels vom zugehörigen Hauptpunkt).

Nennen wir den Abstand der Augenpupille von (dem 2. Hauptpunkte) der Ocularlinse b, so berechnet sich der Abstand der Pupille vom Objektivbild zu

$$d' = b + f_2 - \frac{f_1}{\Gamma^2} = b + f_1 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma^2}; \tag{3}$$

also ist die Tangente des Sehfeldes der drei Gebiete im Bildraum im einen Fall, $p' > \pi$,

$$tg\, w' = \frac{p' - \pi}{d'} = \frac{\left(\frac{p}{\Gamma} - \pi\right)\Gamma^2}{b\cdot\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} = \frac{(p - \pi\Gamma)\Gamma}{b\cdot\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \tag{3a}$$

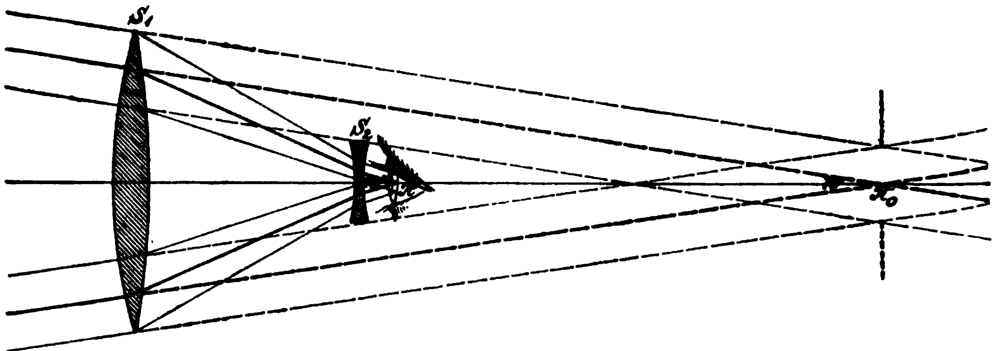
$$tg\, W' = \frac{p\cdot\Gamma}{b\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \tag{3b}$$

$$tg\, \omega' = \frac{(p + \pi\Gamma)\Gamma}{b\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)}; \tag{3c}$$

und ganz entsprechend in dem andern Fall ($p' < \pi'$) gemäss Gleichung (3) pag. 224.

Die Tangenten der diesen Bildwinkeln entsprechenden Winkel im Objektraum w, W, ω sind einfach je der Γte Theil der oben angegebenen, werden also erhalten, indem man in den obigen drei Gleichungen rechts den Faktor Γ jedesmal weglässt. Diese Gleichungen kann man auch direkt erhalten, indem man die Bedeutung der im Bildraum stattfindenden Strahlenbegrenzung für den Objektraum feststellt. Dieselbe Function, welche das Bild der Objektivöffnung im Ersteren hat, kommt hier der Objektivöffnung selber zu, und diejenige Function, welche im Bildraum die Pupille des Auges hat, wird hier ausgeübt durch das vom ganzen System nach der Objektseite hin entworfene Bild dieser Pupille, Π_0.

Denken wir uns dies rechnerisch oder graphisch construirt, so ergiebt sich ohne weiteres der **Strahlengang für das holländische Fernrohr**. Ist die Objektivöffnung grösser als die Augenpupille (die Vergrösserung kleiner als der 4te Theil des Objektivdurchmessers), so resultirt ein Strahlengang wie der in Fig. 384 dargestellte[1]); ist das



(Ph. 384.)

Umgekehrte der Fall, so wird der Strahlengang entsprechend demjenigen, welcher in Fig. 371 pag. 234 für das CHEVALIER'sche (Präparir-) Mikroskop dargestellt ist. Nach unserer früheren Bezeichnung ist also im ersteren, uns hier vornehmlich interessirenden Falle das objektseitige vergrösserte **Bild der Augenpupille**, Π_0, **die wahre Eintrittspupille des Instruments, die Augenpupille selbst Austrittspupille. Die Objektivöffnung bildet die Gesichtsfeldblende im Objektraum, das vom ganzen System entworfene Bild** P' derselben **die entsprechende Blende im Bildraum**. Im andern Falle, $p' < \pi$, vertauschen P und Π_0, P' und Π nach Lage und Grösse einfach ihre Functionen.

Insoweit also nicht etwa die Augenlinse ihrerseits eine Beschränkung der Apertur herbeiführt, ist beim holländischen Fernrohr, in welchem $p' > \pi$, $p > \pi_0$ ist, und welches wir im besonderen »**Perspectiv**« nennen wollen, **die Helligkeit in der Mitte des Sehfeldes** immer gleich der des Sehens mit blossem Auge —

[1]) Die Vergrösserung ist in Fig. 383 und 384 eine 4fache; das Pupillenbild musste jedoch in beiden aus Raummangel doppelt so nahe an das Ocular herangerückt werden, als es in Wirklichkeit liegt.

abgesehen von den durch partielle Reflexion an den Linsen verursachten Verlusten. Die Grösse des von den Hauptstrahlen begrenzten objektseitigen Sehfeldes ist proportional dem Durchmesser des Objektivs; es ist desto kleiner, je weiter das Auge vom Instrument absteht und je grösser für gleiche Vergrösserung die Brennweite des Objektivs ist.

Im Grenzfall, $b = 0$, ist

$$tg\, W = \frac{p}{d} = \frac{p}{f_1(\Gamma - 1)}; \qquad tg \begin{cases} w \\ \omega \end{cases} = \frac{p \mp \pi\Gamma}{f_1(\Gamma - 1)} \tag{4}$$

oder wenn wir $f_1 + f_2 = L$, den Abstand des Objektivs vom Ocular, d. h. die Länge des Perspectivs (beide Linsen als verschwindend dünn angenommen) einführen, so ist

$$tg\, W = \frac{1}{L} \frac{p}{\Gamma}$$

$$tg\, \frac{w}{\omega} = \frac{1}{L} \left(\frac{p}{\Gamma} \mp \pi \right), \tag{4a}$$

also das Sehfeld desto grösser, je kürzer das Instrument bei gegebener Vergrösserung und Objektivöffnung ist[1]).

Durch Bewegung des Auges senkrecht zur Axe kann man das Sehfeld bei diesem Instrument für ungeänderte Lage desselben vergrössern; denn eine solche Bewegung hat in der betreffenden Richtung offenbar den gleichen Einfluss wie eine Vergrösserung der Pupille bei centraler Lage derselben.

[1]) Der Strahlengang im holländischen Fernrohr wird fast stets falsch dargestellt, nämlich so, wie er nur bei einer das vierfache dei Objektivöffnung übersteigenden Vergrösserung ist, also analog Fig. 371. Die erste richtige Darstellung habe ich in F. MOSSOTTI's Nuova teoria degli stromenti ottici, Pisa 1859, pag. 55 u. 87 gefunden. Offenbar unabhängig von diesem kam auf die Fehlerhaftigkeit der üblichen Auffassung N. LUBIMOFF, (CARL's Repert. 8, pag. 336, u. POGG. Ann. 148, pag. 405, 1873.) An seine Publikation knüpften sich wiederholt Discussionen; zuerst zwischen ihm, BREDICHIN u. BOHN (CARL's Repert. 9. pag. 97, 108, 381), zehn Jahre später noch einmal zwischen PSCHEIDL (CARL's Rep. 18, pag. 686) und BOHN (EXNER's Rep. 19, pag. 243), s. auch CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 7. pag. 409. 1887, 8, pag. 102. 1888. Trotzdem habe ich von neueren Werken nur in denen der Italiener G. FERRARIS (Fundamentaleigenschaften etc., pag. 419) und BILLOTTI (Teoria etc., pag. 137), sowie in VIOLLE's Lehrbuch der Physik die fraglichen Verhältnisse richtig dargelegt gefunden.

Das Gesichtsfeld ist nach der üblichen Darstellung — und bei den stark vergrössernden holländischen Fernrohren in der That — gleich dem Sehwinkel, unter welchem die Augenpupille vom Objektiv aus erscheint, nach der hier vorgetragenen aber gleich demjenigen, unter welchem das Objektivbild vom Auge aus erscheint.

Wird ein galiläisches Fernrohr als Ganzes benützt, um nach einer geringen Distanzänderung von Objektiv und Ocular reelle Bilder auf einem Schirm zu entwerfen (Telephotographie, MIETHE s. oben pag. 221) so ist der Strahlengang natürlich nicht mehr von der Augenpupille sondern von den etwa sonst vorgesehenen Blenden abhängig.

Ansprüche an die Bildeigenschaften von holländischen Fernröhren.

Das holländische Fernrohr darf für schwache Vergrösserungen, als Perspectiv, nicht als ein zusammengesetztes Instrument aufgefasst werden, unter den Gesichtspunkten, welche wir für die starken Mikroskope geltend machen konnten und welche ebenso für die starken Fernrohre bestehen. Bei einer 2—6 fachen Vergrösserung, wie sie in diesen Instrumenten gewöhnlich erreicht ist, sind die Aberrationen im Ocular zwar unter sonst gleichen Umständen auch 2—6 mal geringer als diejenigen im Objektiv, aber mit eben diesem Maassstab doch vergleichbar mit jenen. Die wünschenswerthen Bildeigenschaften sind daher im Perspectiv ebenso zu erreichen wie in den zusammengesetzten Projectionssystemen

(photogr. Objektiven) oder wie in den Objektiven der Mikroskope, indem man entweder jeden Theil in Bezug auf diejenigen Eigenschaften und mit demjenigen Strahlengang, mit welchem er in Anspruch genommen wird, für sich corrigirt (aberrationsfrei macht), oder indem man die entsprechenden Fehler im Objektiv und Ocular nachdem Princip der gegenseitigen Compensation ausgleicht. Als die hier zu beachtenden Bildeigenschaften sind hervorzuheben

1) Die sphärische Aberration in der Axe. Wir werden bei der Erörterung des astronomischen Fernrohrs zeigen, dass dieselbe eine ziemlich geringe Rolle spielt wegen der Kleinheit der mit dem ganzen Instrument erreichten Vergrösserung. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass diese Aberration überhaupt nur innerhalb desjenigen Theils der Objektivöffnung aufgehoben zu sein braucht, welcher $= \Gamma \pi$, d. h. gleich der Eintrittspupille ist und nicht für das ganze Objektiv.

2) Die chromatische Aberration in der Axe. Für diese gilt das Gleiche wie für die sphärische.

3) Die Aberrationen ausser der Axe. Diese sind im Perspectiv von grösserer Bedeutung. Nimmt man irgend eine Lage der Augenpupille gegen das Instrument als die normale an, so müssen

a) die nach ihrer Neigung und Oeffnung gemäss dem sich für diese Lage ergebenden Strahlengang construirbaren Büschel genügend frei von Wölbung, Astigmatismus und Coma sein, damit die excentrischen Theile des Sehfeldes einigermaassen scharf erscheinen.

b) die Punkte Π und Π_0 orthoskopische Punkte des ganzen Systems sein, d. h. es muss in ihnen das Verhältniss der Tangenten conjugirter Strahlenaxenwinkel bis zu den grössten vorkommenden Winkeln w bezw. w' ein constantes sein, damit das Bild frei von Verzerrung erscheine.

c) die chromatische Differenz der Vergrösserung muss aufgehoben sein innerhalb derselben Bereiche, d. h. es muss Orthoskopie in Π und Π_0 für mehrere (mindestens 2) Wellenlängen des sichtbaren Spectrums bestehen und das angulare Vergrösserungsverhältniss $\Gamma = \frac{tg\, w'}{tg\, w}$ muss für die betreffenden Wellenlängen das gleiche sein.

Nun ist aber zu bedenken, dass in diesen Instrumenten die Lage des Auges weder in Richtung noch senkrecht zu der Axe wirklich genau fixirt ist, sondern der gewöhnliche Gebrauch ziemliche Schwankungen in beiden Richtungen von selbst mit sich bringt. Wenn daher ein Instrument für eine bestimmte Lage des Auges vollkommen den unter a) b) c) namhaft gemachten Bedingungen genügte, eine Abweichung des Auges von der betreffenden Lage aber erhebliche Aenderungen in der Bildqualität nach irgend einer Seite hin herbeiführte, so würde dasselbe im gewöhnlichen Gebrauch immer als ein sehr mangelhaftes erscheinen. Es muss daher, ganz ähnlich wie bei den Lupen, als eine besondere Bedingung beim Perspectiv die aufgestellt werden, bezw. in guten Instrumenten erfüllt sein, dass

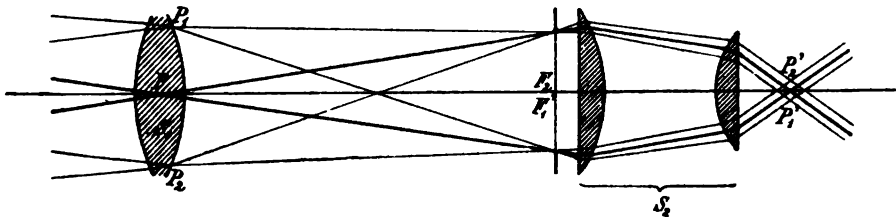
4) Die Bildqualität in keiner Beziehung durch Aenderung der Augenlage erheblich beeinflusst wird. Eine genauere Diskussion dieser letztern Anforderung zeigt, dass in Folge derselben die unter 1) bis 3) namhaft gemachten Bedingungen nicht nur innerhalb derjenigen Oeffnung des Objektivs erfüllt sein müssen, welche gemäss der Grösse der Pupille bei einer Lage derselben von den Strahlenbüscheln in Anspruch genommen wird, sondern für die ganze Objektivöffnung.

B. Das astronomische Fernrohr.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Das Unterscheidende für das astronomische Fernrohr gegenüber dem holländischen liegt sowohl bei Anwendung einer einfachen Sammellinse als Ocular wie bei der Benützung eines zusammengesetzten Oculars darin, dass durch diese das Bild der Objektivöffnung jenseits ihrer letzten Fläche, im zugänglichen Theil des Raumes entwerfen wird. In der That liegt ja schon der zweite Brennpunkt F_2' des Oculars selber bei einer einfachen Sammellinse und ebenso bei geeignet angeordneten Combinationen von Solchen jenseits, rechts, von der Linse, also ist dies mit dem Bild der Objektivöffnung um so mehr der Fall. Dasselbe liegt (Fig. 385) wie beim holländischen Fernrohr um die Strecke

$$F_2 P' = \xi' = \frac{f_1}{\Gamma^2} \tag{1}$$



(Ph. 385.)

hinter dem zweiten Brennpunkt F_2' des Oculars, und sein Halbmesser p' steht zu dem des Objektivs p wiederum in dem constanten Verhältniss der teleskopischen Vergrösserung

$$\frac{p'}{p} = B = \frac{1}{\Gamma}. \tag{1a}$$

Das Auge kann daher jedenfalls mit dem Objektivbild in Coincidenz gebracht werden. Nur in dem Falle, dass $p' > \pi$, wirkt seine Pupille als Aperturblende, die Oeffnung der abbildenden Büschel beschränkend; keinesfalls als Gesichtsfeldblende. Im Falle $p' < \pi$ ist das Bild der Objektivöffnung nach Lage und Grösse Aperturblende, Austrittspupille, das Objektiv selber Eintrittspupille.

Das Gesichtsfeld würde, wenn es durch eine der Ocularlinsen begrenzt würde, in gleicher Weise wie beim holländischen Fernrohr drei Gebiete von verschiedener Helligkeit unterscheiden lassen. Es wird aber allgemein an derjenigen Stelle, an welcher das Objektiv oder dieses in Verbindung mit einem Theil des Oculars ein reelles Bild des Objektes entwirft, durch eine besondere Blende scharf begrenzt. Die Grösse dieses Diaphragmas wird unter dem Gesichtspunkt gewählt, dass einmal innerhalb desselben die Helligkeit eine gleichmässige, also der diesbezügliche Einfluss der Ocularlinse ausgeschlossen sein soll, und ferner das Sehfeld nur so weit reicht, als, sei es das Objektiv, sei es das Ocular seinerseits, sei es Beide zusammen, genügend scharfe Abbildung geben. Im Allgemeinen, namentlich bei Objektiven längerer Brennweite, ist es das Ocular, welches eine scharfe Abbildung über einen gewissen Winkel hinaus nicht mehr zulässt. Der Gesichtsfeldwinkel im Ocular ist also derjenige, unter welchem jene Blende durch den hinter ihr befindlichen Theil des Oculars hindurch von der *A.-P.* aus erscheint, der objektseitige Gesichtsfeldwinkel ist der Γte Theil von jenem. Der Strahlengang, welcher sich demgemäss für das astronomische Fernrohr mit positivem Ocular ergiebt, ist in Fig. 385 veranschaulicht.

Einfluss der Aberrationen von Objektiv und Ocular auf das Bild.

Abberrationen ausser der Axe. Nach dem Obigen können wir in der Gleichung für die Vergrösserung eines Teleskops mit positivem Ocular

$$\frac{tg\,w'}{tg\,w} = \Gamma \tag{2}$$

w' als gegeben ansehen. Also ist w, das Sehfeld, welches das Objektiv abzubilden hat, desto kleiner, je stärker die Gesammtvergrösserung ist.

Das vom Objektiv entworfene Bild y' dient als Objekt der Abbildung für das Ocular. Nehmen wir an — was sehr annähernd wirklich der Fall ist — dass Oculare verschiedener Stärke einander in allen Dimensionen einfach proportional sind, so ist der Gesichtsfeldwinkel w' derselben der gleiche, der lineare Durchmesser y' der das Bild begrenzenden Blende aber proportional ihrer Brennweite. Wir haben daher für die Abbildung durch das Ocular

$$y' = f_2' \cdot tg\,w' \tag{3}$$

wo w' eine gegebene, von f_2' unabhängige Grösse ist. Das objektseitige Sehfeld ist demnach darstellbar durch

$$tg\,w = \frac{tg\,w'}{\Gamma} = \frac{y'}{f_1} \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, dass — ganz gleich, ob eine Vergrösserung Γ durch entsprechende Verlängerung der Objektivbrennweite oder Verkürzung der Ocularbrennweite erreicht wird -- das angulare Sehfeld des Objektivs bei derselben Gesammtvergrösserung auch immer derselbe Bruchtheil von dessen Brennweite ist und zwar ein desto grösserer Bruchtheil derselben, je stärker jene Gesammtvergrösserung ist. Je stärkere Gesammtvergrösserungen man also mit dem Fernrohr erzielt, desto geringer sind die Ansprüche, welche man an die Bildqualität (Aufhebung der Aberrationen) des Objektivs ausser der Axe zu stellen braucht. Es genügt daher selbst bei ziemlich schwachen Vergrösserungen (10—20 fachen), die Erfüllung der Sinusbedingung, um eine hinreichend scharfe Abbildung innerhalb des ganzen, vom Ocular in Anspruch genommenen Sehfeldes zu erzielen. Bei den grösseren Refraktoren ist die Abbildung in deren kleinem Sehfeld ohne weiteres immer genügend vollkommen.

Desgleichen ist die Verzerrung, Disproportionalität der Vergrösserung, mit zunehmendem Abstand von der Mitte des Bildes desto weniger merklich, je stärker die angewandte Vergrösserung ist. (Die orthoskopischen Punkte im Objektiv kann man unbedenklich in den Scheitel desselben vereinigen; die thatsächliche Blende und deren Bild wird immer nur relativ sehr wenig von dieser Lage abweichen.)

Das Gleiche endlich ist in Bezug auf die Bildwölbung der Fall. Es werden also mit zunehmender Vergrösserung die Aberrationen ausser der Axe im Objektivbild immer irrelevanter gegenüber den

Aberrationen in der Axe. Wir haben diese nach ganz gleichen Normen zu bestimmen und in ihrem Einfluss auf das letzte Bild zu beurtheilen wie beim Mikroskop. Sei der Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphärischen Aberration des Objektivs, in seinem angularen Betrage d. h. bezogen auf die Objektseite $= \zeta$, so erscheint derselbe im letzten Bilde, durch das Ocular gesehen, in der Grösse $\Gamma \cdot \zeta$ wenn Γ die Gesammtvergrösserung ist. Wir haben also die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass dieser Winkel nicht grösser werde als der Grenzwinkel ε für die Sehschärfe des Auges z. B. $\varepsilon = 2'$. Und ganz ebenso bei der chromatischen Abweichung bezw. deren Resten.

Bei dem Fernrohr spielt die lineare Oeffnung in Bezug auf das Abbildungsvermögen die gleiche Rolle wie beim Mikroskop die numerische Apertur. Einer gegebenen Oeffnung entspricht also eine bestimmte Grenze des Unterscheidungs-

vermögens und zwar ist der angulare Durchmesser ρ des Beugungscheibchens, als welches jeder Punkt des Objekts durch ein dioptrisch vollkommenes Fernrohr objektiv abgebildet wird, gemessen vom hinteren Knotenpunkte desselben

$$\rho = \frac{\lambda}{2p}; \tag{5}$$

also ist er ebenso gross auf die Objektseite bezogen. Hiernach ist die der Oeffnung $2p$ entsprechende Normalvergrösserung Γ_0 bestimmbar, nämlich derart, dass für sie das Beugungsscheibchen ρ unter einem Winkel von $2'$ erscheine oder was auf dasselbe hinauskommt, die Austrittspupille $2p' = 1$ *mm* werde. Dann ist

$$\Gamma_0 \rho = \frac{\lambda}{2}\frac{\Gamma_0}{p} = \frac{\lambda}{2p'} = 0{\cdot}00055 \tag{6}$$

$$\Gamma_0 = \frac{p}{p'} = \frac{p}{0{\cdot}5} = 2p, \tag{6a}$$

also kommt auf je 1 *mm* Objektivdurchmesser eine Vergrösserungsziffer

Nun fanden wir das erste Glied der sphärischen Aberration pag. 106

$$\zeta_1 = \left(\frac{p}{f}\right)^2 K_1, \tag{7}$$

demnach

$$\varepsilon\zeta = \left(\frac{p}{f}\right)^2 K_1 \Gamma = \frac{p^3 K_1 \Gamma}{f^3} \tag{7a}$$

d. h. der Einfluss des ersten Gliedes der sphärischen Aberration auf das letzte Bild ist bei gegebener Oeffnung und ihr entsprechender Vergrösserung umgekehrt proportional der dritten Potenz der Objektivbrennweite.

Ebenso ist zu zeigen, dass der Einfluss der höheren Glieder der sphärischen Aberration umgekehrt proportional der 5., 7. etc. Potenz der Objektivbrennweite ist.

Die chromatische Abweichung, in gleicher Weise bemessen, fanden wir

$$\gamma = \left(\frac{p}{f}\right) G, \tag{8}$$

demnach

$$\varepsilon_\gamma = \Gamma \cdot \gamma = \left(\frac{p}{f}\right) G \cdot \Gamma = \frac{p \cdot G \cdot \Gamma}{f}, \tag{8a}$$

also ist diese Abweichung, ebenso wohl als »primäres« wie als »secundäres« Spectrum bei gegebenem Constructionstypus einerseits proportional dem Oeffnungsverhältniss des Objektivs, andrerseits bei gegebener Oeffnung und ihr entsprechender Vergrösserung umgekehrt proportional der Objektivbrennweite.

Hiernach ergiebt sich z. B., dass eine einfache Crownglaslinse mit dem Brechungsexponenten $n_D = 1{\cdot}5$ und dem Zerstreuungsverhältniss

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{60},$$

was die sphärische Aberration (1. Ordnung) betrifft bei günstigster Form (vergl. pag. 109) für ein Oeffnungsverhältniss von

	$\left(\frac{2p}{f}\right) =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$
einen Werth von	$\Gamma =$ ca 2		7	16
und einen Durchmesser	$2p =$	4 *mm*	14 *mm*	32 *mm*
also eine Brennweite	$f =$	40 „	210 „	640 „

erhalten darf. Setzt man die zulässige Fehlergrenze statt bei $2'$ bei $4'$, so verdoppeln sich die Zahlen der zweiten dritten und vierten Zeile.

Hingegen erlaubt die chromatische Aberration einer solchen Linse bei den gleichen Oeffnungsverhältnissen wie oben nur Werthe von

$\Gamma =$	0·67	1	1·33
$2p =$	1·33 *mm*	2 *mm*	2·67 *mm*
$f =$	13·3 *mm*	30 *mm*	53·3 *mm*.

Das secundäre Spectrum eines gewöhnlichen achromatischen Doppelobjektivs kann man in seinem Winkelbetrage etwa $= \frac{1}{1000}$ annehmen. Dasselbe ist daher für $\frac{2p}{f} = \frac{1}{15}$ ganz unmerklich bei Objektiven von weniger als 10 *mm* Oeffnung, erreicht aber in den modernen Rieseninstrumenten den Betrag von mehreren Graden.

Da das Objektiv und das zu ihm gehörige Ocular von den Strahlenbüscheln stets mit gleichem Oeffnungsverhältniss in Anspruch genommen werden, so zeigen obige Erörterungen, dass auch beim Fernrohr in Bezug auf die Abbildung in der Axe die möglichen Aberrationen des Oculars mit wachsender Vergrösserung immer mehr zurücktreten hinter denen des Objektivs, da proportional mit der Vergrösserung das Verhältniss der Objektivbrennweite zur Ocularbrennweite wächst.

Die Oculare der Mikroskope und Fernrohre.

Die Ansprüche an die Leistungen, daher auch die Construction der Oculare für Fernrohre und Oculare sind im wesentlichen die gleichen; denn wie wir früher gesehen haben, kann das Mikroskop bei einigermaassen erheblicher Objektivvergrösserung als ein aus Lupe und Fernrohr zusammengesetztes Instrument angesehen werden. Die Ansprüche an die Leistungen der Mikroskop-Oculare sind nur insofern geringer wie die von den Fernrohrocularen zu vollziehenden, als bei diesen die Apertur der wirksamen Büschel eine grössere zu sein pflegt ($\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{5}$ beim Fernrohr gegenüber $\frac{1}{80}$ bis $\frac{1}{20}$ beim Mikroskop).

Eine geringe Verschiedenheit besteht ferner darin, dass der Augenpunkt (das vom Ocular entworfene Bild der Objektivöffnung, bezw. der *A.-P.* des Objektivs) bei den Fernrohren, entsprechend deren im Allgemeinen grösseren Dimensionen näher an dem hinteren Brennpunkt des Oculars liegt wie im Mikroskop. Immerhin kann man ein Ocular, welches am Fernrohr gute Dienste leistet, fast stets ohne weiteres auch am Mikroskop benützen; höchstens bedarf es einer geringen Modification seiner Zusammensetzung.

Wir haben die Anforderungen, welche an die Wirkung der Oculare zu stellen sind, bereits früher namhaft gemacht (pag. 237). Für die Erfüllung derselben sind aber nur wenige allgemein gültige Normen gefunden worden. Neben der Zusammensetzung aus einer, wesentlich den Strahlengang (Richtung der Hauptstrahlen) regulirenden Collektivlinse und einer vornehmlich die Lupenwirkung vollziehenden Augenlinse ist es fast nur die Aufhebung der chromatischen Vergrösserungsdifferenz, welche zu einer einfachen Regel geführt hat.

Beim Mikroskop geht die Forderung gleicher Vergrösserung für verschiedene Farben über in die gleichen Tangentenverhältnisse in den Pupillen des Oculars. Beim Fernrohr, wo die *E.-P.* des Oculars — das Objektiv — relativ weit von demselben entfernt ist, die *A.-P.* also nahezu in den hinteren Brennpunkt fällt, kommt jene Forderung darauf hinaus, die Aequivalentbrennweite des Oculars von der Variation mit der Farbe des Lichts zu befreien. Wir sahen (pag. 140), dass dies selbst mit zwei einfachen dünnen Linsen aus gleichem Material möglich ist, wenn deren Distanz D das arithmetische Mittel ihrer Brennweiten ist

$$D = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

In den beiden ältesten und noch gegenwärtig üblichsten Oculartypen, dem sogen. HUYGHENS'schen[1]) und dem RAMSDEN'schen[2]) Ocular ist dieser Bedingung in

[1]) Dioptrica, Prop. II. Ich habe trotz vielem Suchen nicht finden können, warum dieses oder ein ähnlich construirtes Ocular oft nach dem seiner Zeit berühmten praktischen Optiker CAMPANI benannt wird; es scheint diese Bezeichnung auf Tradition zu beruhen.

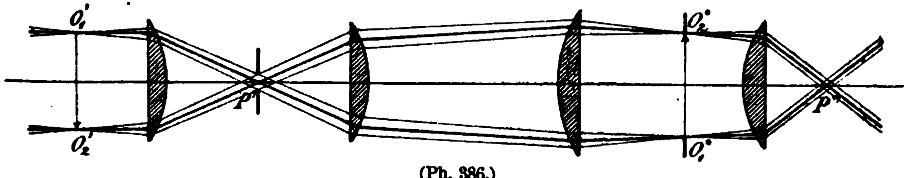
[2]) Phil. Trans. 1873, pag. 94.

der Weise genügt, dass bei ersterem $f_1 = 2f_2$, also $D = \frac{3f_2}{2}$ oder $f_2 : D : f_1 = 2 : 3 : 4$ ist, bei letzterem aber $f_1 = f_2 = D$. Bei ersterem liegt also der vordere Brennpunkt im Ocular, zwischen erster und zweiter Linse; ein reelles Bild kommt dann zwischen den Linsen zu Stande (vergl. Fig. 370). Bei dem RAMSDEN'schen Ocular liegt der vordere Brennpunkt in der ersten Linse selber; er wird aus praktischen Gründen um ein weniges vor dieselbe gelegt[1]) (Fig. 385).

Das HUYGHENS'sche Ocular enthält gewöhnlich zwei mit ihren gekrümmten Seiten nach dem Objektiv gewandte planconvexe Linsen; das RAMSDEN'sche zwei ebensolche mit ihren convexen Flächen einander zugewandte — beide um vermöge einer solchen Anordnung den übrigen an die Bildqualität zu stellenden Anforderungen innerhalb des gegebenen Rahmens möglichst zu entsprechen.

Von den Bemühungen, die Oculare durch Anwendung achromatischer Combinationen zu vervollkommnen, waren insbesondere die von C. KELLNER[2]) bemerkenswerth, welcher eine klare Einsicht in die hier zu erfüllenden Bedingungen besass. Dass die gleichgerichteten Bestrebungen AIRY's[3]), LITTROW's[4]), BIOT's[5]), SANTINI's[6]) u. A. irgend nennenswerthen Erfolg gehabt hätten, ist mir nicht bekannt geworden. Hingegen wird mit Recht die Leistung der astronomischen Oculare von MITTENZWEY gerühmt.

Um aufrechte Bilder zu erzeugen, kann man beim Fernrohr — und auch beim Mikroskop — entweder ein schwach vergrösserndes Mikroskop von negativer Brennweite als Ocular anwenden und man thut dies in der That, wenn es sich um ein starkes Ocular, von kurzer Brennweite, handelt; oder man benützt (der einfacheren Herstellung wegen) Zusammenstellungen einfacher Linsen, wie sie seit den ältesten Zeiten, z. B. mit besonderem Erfolge von DOLLOND und von FRAUNHOFER in deren terrestrischen Fernrohren angewandt wurden. Diese enthalten zwischen Ocular und Objektiv ein sogen. bildumkehrendes System aus zwei oder mehr einfachen planconvexen Linsen bestehend. Fig. 386 veranschaulicht ein solches und den in ihm stattfindenden Strahlengang[7]).



(Ph. 386.)

[1]) Die Unterscheidung dieser beiden Oculare als negatives und positives ist ganz missverständlich und sollte besser unterbleiben.

[2]) Das orthoskopische Ocular, Braunschweig 1849.

[3]) Principles and construction of achromatic eyepieces of telescopes etc. (1824). Cambr. Phil. Trans 2. 1827. Ders., Spherical aberration of eye pieces of telescopes (1827), ibid. 3, pag. 1. 1830.

[4]) BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. f. Phys. u. Math. 4, pag. 17, 195, 501. 1828 (astron. u. terrestr. Oculare), auch Dioptrik, Wien 1830, 2. Abthlg. und Art. Mikroskop in GEHLER's Physik. Wörterb. Leipzig 1837, Bd. VI, 3, pag. 2238 ff.

[5]) Sur les lunettes achrom. à ocul. multiples (terrestr. Oc,) Mém. Ac. de Paris 19, pag. 1. 1842.

[6]) Al calcolo degli ocul. per i canocch. astron. etc. Mem. Ist. Venet. 1841.

[7]) Nähere Angaben über dieselben findet man in mehreren der in dem voranstehenden Anmerkungen genannten Abhandlungen und Werke sowie namentlich auch in J. J. PRECHL's Praktische Dioptrik, Wien 1828.

Handelt es sich darum, terrestrische Fernrohre herzustellen, welche nur schwache Vergrösserungen (10—20) bei möglichster Kürze ergeben sollen, so müssen wieder Objektiv und Ocular als ein einziges System behandelt und die Aberrationen in und ausser der Axe durch gegenseitige Compensation in ihnen gehoben werden.

Die Constructionsformen des Fernrohrs in geschichtlicher Entwickelung.

A. Das holländische Fernrohr.

Dasselbe wurde bekanntlich in den letzten Jahren des 16. oder (wahrscheinlicher) in den ersten des 17. Jahrhunderts in Holland erfunden oder vielmehr ebenso wie das zusammengesetzte Mikroskop mehr gefunden (wahrscheinlich von Lipperhey in Middelburg[1]). Sicher ist, dass Galilei es 1609 auf die Nachricht von seiner Existenz hin nach bewussten Grundsätzen selbständig construirt, d. h. neu erfunden hat[2]). Dasselbe war natürlich bis zur Entdeckung der Achromasie, wie alle andern optischen Instrumente, aus 2 einfachen Linsen zusammengesetzt und mit allen Fehlern solcher behaftet. Mehr noch als diese wirkte störend bei seiner Anwendung die Kleinheit des Sehfeldes. Wie wir gesehen haben, ist das Sehfeld bei starken Vergrösserungen — wo eine das 4fache der Vergrösserungsziffer übersteigende Objektivöffnung sich von selbst verbietet — im Grenzwerth gleich dem Winkel, unter welchem die Pupille des Auges vom Objektivbild aus erscheint. Letzteres kann bei einigermaassen erheblichen Brennweiten als im hintern Brennpunkt der Ocularlinse liegend angenommen werden. Die Brennweite des Oculars aber kann füglich nicht unter ca. 10 *mm* gewählt werden, damit die im Objektiv vorhandenen Fehler-Reste nicht allzusehr mit vergrössert werden. Daher ist der Grenzwerth des erreichbaren Sehfeldes, wenn wir annehmen, dass die Pupille von 4 *mm* Durchmesser 10 *mm* vom vorderen Hauptpunkt des Oculars entfernt sei

$$\tang w' = 0{\cdot}1, \quad \text{also} \quad w' = 5{\cdot}7^\circ,$$

das ganze Sehfeld im Bilde also $2w' =$ ca. $11{\cdot}4^\circ$. Mit der Stärke des Oculars nimmt das Sehfeld ab und ist z. B. schon für $f_2 = -20$ *mm* nur noch $2w' = 7{\cdot}6^\circ$ für $f_2 = -30$ *mm*, $2w' = 5{\cdot}8^\circ$ u. s. w.

Andrerseits kommt die Verkürzung des ganzen Rohrs, welche diese Construction mit sich bringt — indem das Rohr etwa gleich der Differenz der absoluten Beträge der Brennweiten von Objektiv und Ocular ist — mit wachsender Vergrösserung d. h. Objektiv-Brennweite immer weniger in Betracht, und auch der Vortheil aufrechter Bilder ist für wissenschaftlichen Gebrauch ganz nebensächlich. Aus diesem Grunde ist das holländische bezw. galileische Fernrohr schon seit lange nur noch da in Gebrauch, wo jene Momente — Verkürzung des Rohrs und aufrechte Bilder — eher eine Rolle spielen, nämlich für den Handgebrauch als schwachvergrösserndes terrestrisches Fernrohr (»Perspectiv«, »Operngla« »Feldstecher«), namentlich als Doppelfernrohr, zum gleichzeitigen Sehen mit beiden Augen eingerichtet.

Die Constructionsformen dieses haben sich bisher im engsten Anschluss an den ursprünglichen Typus der Zusammensetzung aus einfachen Linsen gehalten.

---

[1]) Ueber die Erfindungsgeschichte dieses wie des Kepler'schen Fernrohrs siehe die bekannten Werke über Geschichte der Physik bezw. Optik von Priestley, Wilde, Poggendorff, E. Gerland, histor. Apparate pag. 44 ff. Vergl. auch H. Frederiks, Joh. Lipperhey van Wesel, burger van Middelburg en Uitvinder der Verrekykers. Amsterd. 1885.

[2]) Sidereus nuncius, pag. 1.

Objektiv und Ocular oder auch nur ersteres allein wurde später, nach Erfindung der Achromasie, wohl aus 2, auch 3 mit einander verkitteten Linsen combinirt, um die sphärischen und chromatischen Fehler möglichst aufzuheben. Eine von dieser Zusammensetzung wesentlich abweichende ist mir nicht bekannt geworden. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass man durch geeignete Construction des Oculars dessen hinteren (zwischen Objektiv und Ocular gelegenen) Brennpunkt näher an die letzte Fläche legen könnte, als bei einer einfachen Linse der Fall ist. Dadurch würde man das Sehfeld vergrössern, was das Haupt-Desiderat bei diesen Instrumenten in ihrer gegenwärtigen Verfassung ist. Auch kann man in dem Verhältniss von Objektivöffnung zu Objektivbrennweite, von welchem, wie wir gezeigt haben, wesentlich die Grösse des Sehfeldes abhängt, vielleicht auch noch weiter gehen als jetzt, wo der Werth $\frac{1}{3}$ der äusserste praktisch relasirte ist.

Für den wissenschaftlichen Gebrauch ist aus den eben angeführten Gründen

B. Das KEPLER'sche (astronomische) Fernrohr

bald nach seiner Erfindung[1] (1611) in allgemeine Anwendung genommen worden. Dasselbe wurde von SCHEINER[2] zuerst praktisch ausgeführt und angewendet.

Schon KEPLER hatte bemerkt[3], dass man das in diesem Fernrohr umgekehrt erscheinende Bild durch eine dritte Linse zwischen Objektiv und Ocular wieder aufrichten könne. Eine solche Einrichtung — ein »terrestrisches« Fernrohr — wurde von SCHYRL auf Kloster Rheita 1645 ebenfalls vorgeschlagen und ausgeführt. Die späteren Bemühungen zur Herstellung von terrestrischen Fernrohren bezw. Ocularen haben wir oben bereits erwähnt.

DESCARTES suchte die sphärische Aberration der einfachen, damals allein verwandten Objektiv- und Ocularlinsen durch hyperbolische bezw. elliptische Gestaltung ihrer Flächen aufzuheben, aber »es scheint nicht, dass die dahin gerichteten Versuche irgend welchen Erfolg gehabt hätten« (HERSCHEL).

In richtiger Erwägung der beim Fernrohr maassgebenden Faktoren ging HUYGHENS darauf aus, die Wirkung derselben dadurch zu steigern, dass er ihnen Brennweiten gab, die erhebliche Vielfache von deren Oeffnung (das 250fache und mehr) waren. Wir haben oben gesehen, dass unter sonst gleichen Umständen (gleiche Gesammtvergrösserung und Oeffnung) die Fehler eines Objektivs desto weniger störend werden, je geringer das Oeffnungsverhältniss ist. So kam er (1684) auf die sogenannten Luftfernrohre *(telesc. aëriens)*, welche von ihm, CAMPANI, DIVINI, RIVES und COX, AUZOUT, TSCHIRNHAUSEN und Andern in Dimensionen bis zu 200 *m* Objektivbrennweite ausgeführt wurden.

NEWTON erkannte, dass die Hauptursache der Mangelhaftigkeit der Bilder nicht die sphärische, sondern die chromatische Aberration sei. Da er aus seinen Versuchen entnommen hatte, dass sich dieser Fehler nicht beseitigen lasse, so wies er alle Bemühungen zur weitern Vervollkommung der dioptrischen Fernrohre zurück und wandte sich der Construction und Verbesserung der — vor ihm (von N. ZUCCHI, M. MERSENNE, J. GREGORY) wohl bereits als möglich angegebenen, von ihm aber zuerst (1670) ausgeführten — Spiegelteleskope zu. Den Bemühungen seiner Mitarbeiter und Nachfolger auf diesem Gebiete entsprangen die bekannten Constructionsformen von GREGORY, CASSEGRAIN, W. HERSCHEL, FORSTER und FRITSCH, die technischen Fortschritte in der Formgebung, Versilberung,

[1]) KEPLER, Dioptrice, Aug. Vindelic. 1611, pag. 42.

[2]) Rosa ursina, Bracciani. 1630, pag. 130.

[3]) l. c., pag. 45.

Montirung, von J. SHORT, MOLYNEUX, BRADLEY, W. HERSCHEL, ROCHON, STEINHEIL, LIEBIG, FOUCAULT, SAFARIK, LASSELL, Lord ROSSE, BROWNING u. A.[1]).

Nach Erfindung der Achromasie wandten sich die Bemühungen der Mehrzahl der Optiker wieder der Verbesserung der dioptrischen Fernrohre zu. Lange Zeit unerreicht blieben die Leistungen PETER DOLLONDS und seines Sohnes JOHN. Um das bei grösseren Dimensionen bald sichtbar werdende secundäre Spectrum aufzuheben oder doch zu verringern, schlugen EULER[2]) und BLAIR[3]) die Anwendung von »Flüssigkeits-Linsen« vor, d. h. von Flüssigkeiten, welche zwischen die Linsen oder zwischen uhrglasförmigen Platten eingeschlossen selber linsenförmige Bestandtheile des Teleskops bildeten. In der Reihe der Flüssigkeiten boten mehrere in der fraglichen Beziehung günstigere Verhältnisse dar, als die zur Verfügung stehenden festen Körper, insbesondere als die Glasarten. Diese Bemühungen hatten aber gar keinen Erfolg, weil schon durch geringe Temperatur-Variationen die optische Beschaffenheit eines grössern Flüssigkeitskörpers in seinen verschiedenen Theilen viel zu stark geändert wird, und infolgedessen beträchtliche Inhomogenitäten innerhalb derselben Masse entstehen.

Die Constructionsformen des Fernrohrs wurden jederzeit in erheblichem Grade durch den Zustand mitbedingt, in dem die Technik der Materialbereitung (Glasschmelzerei) und der Materialbearbeitung (praktische Optik) sich befanden. So schien am Ende des vorigen und am Anfang dieses Jahrhunderts die Herstellung grösserer homogener Flintglasscheiben besondere Schwierigkeiten zu bereiten. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, schlugen BARLOW[4]), LITTROW[5]) und ROGERS[6]) vor, die Zerstreuungslinse, welche die sphärische und chromatische Untercorrection der collektiven Objektivlinse zu compensiren hat, in einen der Spitze der Lichtbüschel näheren und demnach engeren Theil derselben zu stellen. Sie kann dann also entsprechend ihrer Annäherung an das Bild kleiner sein als jene Vorderlinse.

Da diese Dispansivlinse dann aber, um Achromasie zu ermöglichen, eine im Verhältniss zu ihrer Brennweite grosse Zerstreuung besitzen muss, so wählte BARLOW als Material für sie den sehr stark zerstreuenden Schwefelkohlenstoff, während ROGERS eine aus Flint- und Crownglas zusammengesetzte Combination wählte, welche für Strahlen mittlerer Wellenlänge wie ein Planglas wirkte, in Bezug auf das gesammte Spectrum aber eine Uebercorrection von der erforderlichen Grösse besass. Bei beiden Constructionen, von denen die zweite unter dem Namen »Dialytische Fernrohre« namentlich von PLÖSSL ausgebildet und verbreitet wurde, konnte durch mässiges Variiren des Linsenabstandes die definitive Correction vollzogen werden. Gegenwärtig sind dieselben fast ganz verlassen.

J. FRAUNHOFER brachte im ersten Viertel dieses Jahrhunderts das Fernrohr auf die höchste Stufe der theoretischen und technischen Vollendung, deren es

---

[1]) Ueber diese sehe man die Geschichte des Spiegelteleskops von F. KLEIN, Wien 1882, und den Artikel »Telescope« von J. F. W. HERSCHEL in der 7. Aufl. der Encycl. Brit. (unter obigem Titel auch bes. erschienen. London 1861). Aelteren Datums aber für seine Zeit recht vollständig ist die Techn. Gesch. des reflekt. etc. Teleskops von J. G. GEISSLER. Dresden 1807.

[2]) Mém. de Berlin 1761, pag. 231.

[3]) Trans. R. Soc. Edinb. 3, pag. 3. 1791.

[4]) Phil. Trans. 1828, 1829, 1831, 1833. (Mehrere Abhandlungen und Berichte über den Erfolg ausgeführter Objektive.)

[5]) J. J. LITTROW, BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSEN's Zeitschr. 4, pag. 257. 1828.

[6]) Edinb. Journ. of Science 9, pag. 126. 1828. Untersuchungen über diese Constructionsform von STAMPFER, Jahrb. d. K. K. polyt. Inst. 14, pag. 108. 1829.

mit den ihm zur Verfügung stehenden Glasarten fähig war[1]). Die Bemühungen HARCOURT's und STOKES', der Optik günstigere Glasflüsse zur Verfügung zu stellen haben wir früher schon erwähnt (pag. 144 ff.) ebenso die Ergebnisse der gleichgerichteten Arbeiten von SCHOTT und ABBE. Wieweit diese letzteren für die Fernrohrtechnik praktisch verwendbar sein werden, ist heute noch nicht endgiltg zu entscheiden, da die erheblichen sich hier darbietenden technischen Schwierigkeiten eine klare Beurtheilung der erreichbaren Erfolge erschweren. Astronomische Fernrohre mit erheblich vermindertem secundärem Spectrum sind nach den Rechnungen des Verfassers von C. BAMBERG ausgeführt und wiederholt untersucht worden[2]). Ueber die Aussichten, auf diesem Wege praktische Fortschritte zu erzielen, werde ich demnächst Veranlassung haben, ausführlicher zu berichten.

Aus gewöhnlichen Glasarten hat man Objektive bis zu 1 *m* freier Oeffnung bei 17—20fach grösserer Brennweite hergestellt (Lick-Sternwarte, Californien).

Literatur.

Die auf das Fernrohr bezügliche sehr umfangreiche Literatur ist theils im voranstehenden angegeben, zum anderen Theile identisch mit der pag. 134/6 angeführten. Denn, wie wir schon dort bemerkten, sind die Aberrationen meistens nur bis zu demjenigen Umfange (denjenigen Gliedern) untersucht worden, den sie bei Fernrohrobjektiven besitzen können und gewöhnlich auch unter direkter Bezugnahme auf die bei diesen vorliegenden Verhältnisse.

Die allgemeine Wirkungsweise der Fernrohre ist ausserdem meist zutreffend und z. Thl. eingehend beschrieben in den pag. 37 namhaft gemachten Lehrbüchern der Dioptrik, sowie in den meisten Darstellungen der GAUSS'schen Theorie der Abbildung, welche pag. 56 und 66 genannt sind. Man sehe ausserdem die Artikel »Optics« und »Telescope« von BARLOW, BREWSTER, HERSCHEL in der 7., 8. und 9. Aufl. der Encyclop. Brit. sowie diejenigen über »Linsenglas« und »Fernrohr« in GEHLER's Physikal. Wörterb., 2. Aufl., Leipz. 1827. Bezüglich der Montirung der Fernrohre, der zu demselben gehörigen Nebenapparate und deren mannigfacher Anwendungsweisen verweisen wir auf die Handbücher der praktischen Astronomie und Geodäsie.

S. CZAPSKI.

Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Constanten optischer Instrumente.

Gegenstand der empirischen Bestimmung können bei optischen Instrumenten in erster Linie die Grundfaktoren der Abbildung sein. Die Abbildung ist nach Lage und Maass, wie wir früher gesehen haben, völlig bestimmt, wenn die Oerter der beiden Brennebenen und die Werthe der beiden Brennweiten ermittelt sind. Lassen wir den Fall, dass erstes und letztes Medium verschiedene Brechungsexponenten haben zunächst ausser Acht oder nehmen wir an, dass das relative Brechungsverhältniss beider Medien anderweitig her bekannt sei so ist es nur die eine der beiden Brennweiten, deren Kenntniss neben der der Brennpunktsenkörter erforderlich ist.

Ferner kann der experimentellen Bestimmung unterworfen werden die Art der Strahlenbegrenzung, sei es direkt durch Ermittelung der Lage und Grösse

[1]) Zahlreiche Berichte über dieselben z. B. von STRUVE, BESSEL, STAMPFER, PRECHTL, LITTROW.

[2]) H. C. VOGEL, Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 22, pag. 142; HASSELBERG, Mél. math. et astr. de Petersb; 6, pag. 669. 1888, s. auch Zeitschr. f. Instrkde. 9, pag. 16. 1889.

der in dem System wirksamen Blenden, sei es indirekt in deren Einfluss auf die lineare oder numerische Apertur und auf das Sehfeld. Die Methoden, um die Grösse des Sehfelds eines zum subjektiven Gebrauch bestimmten Instruments zu finden, stehen im engsten Zusammenhange mit denen, welche dazu dienen, seine Vergrösserung zu ermitteln. Diese werden den letzten Gegenstand unserer Betrachtungen bilden.

Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung.

Indirekte Methoden.

Die Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung wie auch die der anderen Constanten der optischen Instrumente kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen, direkt und indirekt. Als direkte Methoden bezeichne ich diejenigen, welche zum Gegenstand der Messung unmittelbar — so weit dies der Natur der Sache nach angeht — diejenigen Grössen machen, deren Kenntniss zu erlangen gesucht wird. Als indirekte Methoden bezeichne ich diejenigen, bei welchen Gegenstand der Bestimmung die ersten Elemente sind, aus denen sich die Wirkung des Systems zusammensetzt, aus deren Werthen Art und Maass dieser Wirkung daher auch erst wieder mittels Rechnung abgeleitet werden muss. Es sind das die Krümmungen und gegenseitigen Abstände der einzelnen brechenden oder spiegelnden Flächen des Systems und die Brechungsverhältnisse der Medien, welche sich zwischen ihnen befinden, ferner, insoweit es sich um Bestimmung des Strahlengangs und der Strahlenbegrenzung handelt, auch die Durchmesser der freien Linsenflächen sowie die Oeffnungen und Oerter der etwa sonst im Instrument vorhandenen Blenden.

Auf diese indirekten Methoden soll hier nicht näher eingegangen werden. Dieselben sind neben den direkten meistens von Interesse nur einerseits für die praktische Optik[1]), wo die Bestimmung jener Elemente behufs genauer Erreichung vorgeschriebener Werthe erfolgen muss, andererseits für die physiologische Optik, wo die Kenntniss der Elemente des Systems neben derjenigen von dessen Gesammtwirkung aus anderen Gründen von Werth ist.

Der ersteren stehen — wie ich hier nur kurz erwähnen will — zur Bestimmung der Flächenkrümmungen auf mechanischem Wege besondere Instrumente zu Gebote, die Sphärometer, mittelst derer die einer Kugelhaube von gegebenem Halbmesser r zugehörige »Pfeilhöhe«, h, gemessen wird, aus welcher dann der Radius R der Kugel gemäss der Gleichung

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$$

zu berechnen ist. Solche Instrumente sind in neuerer Zeit insbesondere von A. M. Mayer[2]), C. Bamberg[3]) und E. Abbe[4]) vorgeschlagen bezw. construirt worden.

Die physiologische Optik kann von dergleichen Instrumenten keinen Gebrauch machen, da dieselben eine mechanische Berührung der Flächen er-

---

[1]) Eine Uebersicht der älteren hier angewandten Methoden giebt H. Schröder, Centr.-Zeitg. f. Mech. u. Optik 2, pag. 5, 15. 1891.

[2]) Am. Journ. of Science (3) 32, pag. 61. 1886.

[3]) S. Czapski, Zeitschr. f. Instrkde. 7, pag. 297. 1887.

[4]) C. Pulfrich, Ztschr. f. Instrkde. 12, pag. 307. 1892. Ueber die ersteren beiden Arten s. auch Violle, Lehrb. der Physik. D. Uebers. Berlin 1891, Bd. 1. pag. 315; über die letztgenannte den Katalog über Messinstrumente der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena.

fordern, welche hier wegen deren Empfindlichkeit und leichter Deformirbarkeit vermieden werden muss. Sie bedient sich daher ausschliesslich optischer Methoden.

Bei diesen wird entweder aus der Vergrösserung und Lage der durch Spiegelung an den betreffenden Flächen entstandenen Bilder auf die Krümmung der Fläche geschlossen oder unmittelbar die Entfernung zwischen Krümmungsmittelpunkt und Scheitel der Fläche gemessen[1]). Ersterer kann definirt sein als der zu sich selbst conjugirte Axenpunkt, in welchen also die von ihm ausgehenden Strahlen wieder zurück reflektirt werden. Bei Concavspiegeln lässt sich dieser Punkt als reeller unmittelbar finden und behufs grösserer Genauigkeit mittelst einer Lupe fixiren (Anwendung eines schrägen Deckglases oder Reflexionsprismas über der Focalebene der Lupe); bei convexen Flächen muss er als der zu dem anvisirten Punkte in Bezug auf ein convergentes Linsensystem conjugirte theoretisch und praktisch definirt sein[2]). FOUCAULT[3]) hat den Mittelpunkt der Kugelfläche dadurch definirt, dass nur in ihm eine genaue Vereinigung der reflektirten Strahlen stattfindet, d. h. die sphärische Aberration völlig aufgehoben ist.

R. KOHLRAUSCH[4]) hat an der Cornea des lebenden Auges mit einfachen Hilfsmitteln aus der Vergrösserung in einem Paar conjugirter Punkte der spiegelnden Fläche und aus dem Abstand des einen derselben von ihr den Radius ermittelt. Genauer hat bei der gleichen Methode v. HELMHOLTZ die Grösse der Bilder mit dem von ihm erfundenen Opthalmometer[5]) gemessen. Umständlicher aber ebenfalls zur Erlangung genauer Resultate geeignet ist das Verfahren von S. STAMPFER[6]), welcher mittelst Theodolits die gegenseitige Neigung der Strahlen bestimmte, welche von zwei nach ihrer Lage zu der Fläche gegebenen leuchtenden Punkten ausgehend an derselben reflektirt sind.

Für ebene Flächen ist ein besonders empfindliches Criterium ihrer Ebenheit in dem bereits pag. 90 erwähnten Verfahren OERTLING's gegeben. Derselbe gab in der dort citirten Abhandlung auch Methoden an, um den Parallelismus zweier ebener Flächen zu controliren.

Die Dicken der einzelnen Linsen des Systems — die Scheitelabstände der brechenden Flächen — werden ohne weiteres mit Hilfe der bekannten hierzu

---

[1]) Die vordere Brennweite eines Spiegels ist, wie wir früher gesehen haben, gleich der Hälfte seines Radius und zwar positiv bei Hohl-, negativ bei Convexspiegeln; der Brennpunkt liegt mitten zwischen Scheitel und Krümmungsmittelpunkt.

[2]) s. R. J. BOSCOVICH, Abh. v. d. verbess. dioptr. Fernrohren. Wien 1765 insbes. pag. 81 ff. Diss. quinque ad. Dioptr. pertin. Vindob. 1767, pag. 52 ff. — J. C. OUDEMANS Centr. Ztg. f. Opt. u. Mech. 1, pag. 66. 1880. — L. LAURENT, Compt. rend. 100, pag. 903. 1885; refer. in Ztschr. f. Instrkde. 5, pag. 322. 1885.

[3]) Travaux scientif. Paris 1878, pag. 232.

[4]) s. F. KOHLRAUSCH, Leitfaden der praktischen Physik. 7. Aufl. Leipzig 1892, pag. 169.

[5]) Physiol. Optik pag. 8 ff. vergl. oben pag. 160. In der Angabe der Wirkungsweise des H.'schen Ophtalmometers an letzerer Stelle (Z. 3. v. u.) ist ein Schreibversehen untergelaufen welches sich allerdings aus dem Inhalt der vorangehenden Sätze von selbst als solches kenn zeichnet. Es muss dort richtig heissen: »bei welchem die scheinbaren Oerter zweier in geringer Entfernung von einander befindlicher Objekte (bezw. Bilder) durch entgegengesetzt gleiche Drehung zweier solcher Platten identisch gemacht werden.« Aus dem Brechungsexponenten und der Dicke der Platten sowie dem Drehungswinkel, bei welchem die Coincidenz stattfindet, lässt sich die (lineare) gegenseitige Entfernung der anvisirten Objektpunkte in einfacher Weise berechnen.

[6]) Jahrb. d. K. K. polyt. Inst. 13, pag. 30. 1828.

dienenden Vorrichtungen gemessen, (Schraubensphärometer, Fühlhebelapparate, Contaktkathetometer[1]) u. dergl.).

Die Brechungsexponenten endlich der das System constituirenden Medien werden entweder — auf diesem Wege immer nur sehr annähernd — aus den vorher ermittelten Radien der einzelnen Flächen und der katadioptrischen Wirkung von Paaren derselben gefunden (Boscovich, Stampfer a. a. O.) oder, genauer, mittelst besonderer Instrumente (Refraktometer, Spektrometer) an Stücken des betreffenden Materials, denen entweder nur eine ebene Fläche angeschliffen ist oder zwei solche, einen Winkel einschliessende d. h. an einem Prisma. Wegen der diesbezüglichen Methoden sei verwiesen auf den sie behandelnden Artikel von C. Pulfrich in diesem Handbuche.

Direkte Methoden zur Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung.

Wichtiger als diese indirekten sphäro-refraktometrischen Methoden sind für den Benützer optischer Instrumente diejenigen, oben als direkte bezeichneten, welche die Gesammtwirkung des Systems unmittelbar zu bestimmen gestatten. Wie wir schon erwähnt haben, ist diese Wirkung erschöpft durch die Kenntniss der drei Grössen F, F' (Brennpunktsörter) und f (Gesammtbrennweite des Systems).

Für die Wahl der in einem besonderen Falle anzuwendenden Methode sind mehrere Rücksichten maassgebend. Erstens diejenige auf die erstrebte Genauigkeit des Resultats; zweitens diejenige auf die Dimensionen des der Messung zu unterziehenden Systems und drittens endlich die Rücksicht auf die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel der Messung.

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, dass bei denselben Methoden der Erfolg ein sehr verschiedener sein kann je nach den angewandten instrumentellen Hilfsmitteln und der auf die Ausführung der Operationen selbst verwandten Zeit und Sorgfalt. Mit Bezug hierauf haben wir also nur im Allgemeinen den relativen Einfluss von Beobachtungsfehlern auf das Resultat zu veranschlagen. Die erstrebte Genauigkeit selbst aber wird im allgemeinen wesentlich abhängen von der Natur des zu messenden Systems, der Art seiner Verwendung und seinen Correctionszustand, z. B. meist eine viel höhere sein für ein aplanatisches Objektiv als für ein Ocular u. dergl.

Dass die Dimensionen des Systems von Belang sind für die Wahl der bei ihnen zur Anwendung zu bringenden Methode liegt auf der Hand, da die mit gegebenen Hilfsmitteln erreichbare relative Genauigkeit jeder Messung, z. B. der in jedem Falle mit eintretenden Messung einer Länge, in hohem Grade von dem Betrage derselben abhängt, eine andere ist für eine Gesammtlänge von 1, 10, 100 oder 1000 *mm*.

Die Rücksicht auf die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel endlich ist selbstverständlich und namentlich dann geboten, wenn es sich nicht um Präcisionsbestimmungen in wohl ausgerüsteten Laboratorien handelt, sondern um solche welche der berufsmässige Benützer eines Instruments aufführen will mit denjenigen Apparaten und womöglich sogar nach denjenigen Verfahrungsweisen, welche der Gebrauch seines Instruments ohnehin mit sich bringt. Auf diese Weise kann ein gut construirtes Mikroskop zu Messungen der Brennweiten etc. von Mikroskopobjek-

---

[1]) Wegen eines Instruments der letzteren Art von Abbe s. C. Pulfrich, a. a. O., Katalog von Zeiss über Messinstrumente, pag. 23/24.

tiven und Ocularen, ein Fernrohr zu der von Fernrohrobjektiven, ebenso eine photographische Camera für die von Projectionssystemen unter Hinzunahme nur weniger Hilfseinrichtungen meist ohne weiteres und mit bestem Vortheil benützt werden.

In Ermangelung oder zum Ersatz dieser sozusagen natürlichen sind vielfach besondere Brennweiten-Messapparate (»Focometer«) construirt worden, namentlich für Präcisionsbestimmungen. Das Gemeinsame aller dieser (mit Ausnahme derjenigen von SECRETAN und ABBE s. unten) ist einerseits eine sogen. optische Bank, eine gerade Schiene mit Längstheilung, auf welcher die an den Füssen mit Indices, Verniers oder dergl. versehenen Nebenapparate verschiebbar sind. Als solche treten stets auf ein Träger für das zu untersuchende System, welcher mit einer Centrireinrichtung für dieses versehen sein muss, um dasselbe in die optische Axe der anderen Nebenapparate zu bringen. Die letzteren bestehen in den Trägern von Objekten (Skalen, Marken), deren vom System entworfenes Bild pointirt wird und in den zugehörigen Pointirungsvorrichtungen.

Bedingungen der Schärfe von Pointirungen optischer Bilder im Allgemeinen.

Wir betrachten von den Grundfaktoren der Abbildung durch ein optisches System S zuerst diejenigen, durch welche dessen Lage im Raume fixirt wird, die Brennpunktsörter F, F'. Die Methoden zu deren Bestimmung zerfallen ebenso wie die zur Bestimmung der Constanten überhaupt und, wie wir sehen werden, auch die zur Ermittelung der Brennweite in mittelbare und unmittelbare. Die ersteren ergeben sich nebenbei bei mehreren der zur Bestimmung der Brennweiten dienenden Methoden und sollen bei der Besprechung dieser mit erwähnt werden. Die unmittelbaren Methoden beruhen, wie ihr Name es besagt, darauf, dass die Ebene, in welcher das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes auftritt, direkt kenntlich gemacht und festgelegt wird, und zwar geschieht dies durchgehends durch Pointiren (Focussiren, Einstellen) auf diese Ebene sei es mit blossem Auge unter Zuhilfenahme einer matten Glastafel, sei es mittelst eines einfachen oder zusammengesetzten Mikroskops M. Wir wollen hier kurz auf die Bedingungen eingehn, von denen die Schärfe derartiger Pointirungen abhängen.

Die Ebene, welche der Netzhaut des Auges in Bezug auf dieses Mikroskop sammt dem optischen Apparat des Auges selbst conjugirt ist, ist die Pointirungsebene. Oft sucht man dieselbe körperlich zu markiren, indem man beim einfachen Mikroskop (Lupe) in oder nahe dessen Brennebene, beim zusammengesetzten Mikroskop in die untere Brennebene des Oculars bezw. Augenglases desselben ein Spinnwebfadenkreuz, ein auf einer dünnen Glasplatte mit Diamant eingerissenes Strichkreuz oder für Messzwecke eine feine Skala anbringt. Diese Marken- oder Mikrometerebene — beim Mikroskop die ihr in Bezug auf das Objektiv bezw. Objektiv plus Collektiv conjugirte — wird dann als Ort des Bildes angesehen.

Sie ist aber offenbar mit der wirklichen oben definirten Pointirungsebene nur dann identisch, wenn die Einstellung des Systems oberhalb der Marken auf diese und die des Gesammtsystems auf das zu pointirende Bild eine absolut vollkommene ist und während aller Versuche bleibt; also u. a. wenn Schwankungen des Accommodationszustandes des Auges gänzlich ausgeschlossen sind. Dies ist im Allgemeinen natürlich nicht der Fall; daher ist der Ort des pointirten Bildes im Allgemeinen verschieden sowohl von der eigentlichen Pointirungs- als von der Mikrometerebene.

Wir haben früher gesehen (pag. 185 ff.), dass die Einstellungsgenauigkeit, insoweit sie von der dem Instrument S inhärenten und von der Sehschärfe des Auges mitbedingten Focustiefe abhängt, direkt proportional ist der mit dem Instrument erzielten absoluten Vergrösserung V, der Tangente des halben Oeffnungswinkels auf der Objektseite u, und umgekehrt proportional der Sehschärfe des Auges, letztere ausgedrückt durch den Durchmesser des unter der Grenze der Wahrnehmung bleibenden Zerstreuungskreises ε. Es war der Spielraum der Einstellung beiderseits von der Objektebene (pag. 189)

$$2\Delta\xi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{V \cdot tang\, u}. \tag{1}$$

Der andere Bestandtheil der Einstellungsgenauigkeit, von der Accommodationsbreite A des Auges herrührend, war

$$\Delta\xi_A = \frac{n}{n'} \frac{A}{V^2}. \tag{2}$$

Der letztere fällt bei stärkerer Vergrösserung von selbst mehr und mehr fort. Bei schwachen Vergrösserungen, wo er eine erhebliche Rolle spielen könnte (vergl. die Tabelle pag. 189) wird er durch die Anbringung einer Marke im Sehfeld der Lupe bezw. des Oculars fast völlig eliminirt. Man bringt daher eine solche auch dann an, wenn sie nicht eigentlich dazu dienen soll, die Einstellungsebene zu markiren.

Eine beliebte Probe auf die Coincidenz von Bild und Marke ist dann die auf Parallaxe. Das Fehlen dieser bei seitlichen Bewegungen des Auges vor dem Ocular hin und her ist ein weit sichereres Kennzeichen für jene Coincidenz als die blosse Beobachtung der maximalen Schärfe des Bildes.

Ein anderes Mittel zur Sicherung genauer Focussirung besteht darin, dass man die zu den einzelnen Bildpunkten zielenden Büschel zerklüftet, indem man in oder möglichst nahe an der Aperturblende ein entsprechend durchbrochenes Diaphragma anbringt. Jeder Oeffnung dieses entspricht, wie man leicht einsieht, ein besonderes Bild des Gegenstandes, welches in irgend einer Ebene aufgefangen seitlich gegen die den anderen Oeffnungen entsprechenden verschoben ist. Nur in der wahren Bildebene der — aberrationsfrei angenommenen — Büschel fallen alle Partialbilder in eines zusammen. Hier ist also das Auftreten des einheitlichen Bildes statt der mehrfachen das Criterium für die Focussirung.

Im Uebrigen bleibt die durch Gleichung (1) ausgedrückte Abhängigkeit der Einstellungsgenauigkeit von der Gesammtvergrösserung und dem Oeffnungswinkel des Pointirungs-Mikroskops bezw. der Pointirungslupe bestehen. Es ist daher gemäss dieser die Pointirung eine desto genauere, je grössere Beträge jene beiden Faktoren haben.

Hierzu ist jedoch zu bemerken 1) dass der im Pointirungssystem M wirksame Oeffnungswinkel natürlich höchstens gleich demjenigen sein kann, welchen das der Messung unterzogene System gemäss den ihm vorhandenen Blenden für den betreffenden Bildort besitzt, 2) dass auch die Vergrösserung des Pointirungssystems aus den pag. 196 u. 247 namhaft gemachten Gründen nicht unabhängig von dem Oeffnungswinkel beliebig gesteigert werden kann, sondern eine in ziemlich enge Grenzen eingeschlossene Function desselben ist, und 3) dass bei Ableitung der Gleichung (1) die Voraussetzung vollkommen aberrationsfreier Abbildung durch das System S zu Grunde gelegt war. Da die letztere Voraussetzung niemals völlig erfüllt ist, so ist der Spielraum der Einstellung auch nicht genau durch jene Gleichung angegeben. Insbesondere aber verträgt in Folge dessen das von S entworfene Bild in noch viel geringerem Maasse eine weitere Ver-

grösserung durch M, als ein reales Objekt. In jedem Falle ist zu beachten, dass ein System nur ein Paar aplanatische Punkte besitzen kann, dass daher allenfalls nur bei der Einstellung auf den einen dieser die volle ihm zugehörige Apertur des Systems wirksam sein darf, bei der Einstellung auf andere Stellen der Axe aber die Apertur von S oder M desto mehr eingeschränkt werden muss, je weiter diese Stellen von den aplanatischen entfernt sind.

Diese Gesichtspunkte sind bei jeder Einstellung auf Bilder mittelst anderer Systeme — auch mittelst des Auges allein — zu beachten. Im übrigen ist selbstverständlich, dass Lupen mit vor den Linsen gelegener Markirungsebene nur zur Pointirung auf reelle Bilder dienen können und dass man zusammengesetzte Mikroskope mit um so weiter abliegendem Objektpunkt anwenden muss, — die also bei grösseren Abständen dieses schon mehr Fernrohre sind — je weiter das zu beobachtende Bild vor der letzten Fläche des Systems S liegt. (Im letzteren Falle verringert sich der Oeffnungswinkel und damit die Einstellungsgenauigkeit von M proportional jener Entfernung).

Ermittelung der Brennebenen.

Die voranstehenden Betrachtungen finden bei allen Einstellungen auf optische Bilder — wo dieselben auch liegen mögen — Anwendung.

Was nun im besonderen die Brennpunktsörter betrifft, so erfordert deren unmittelbare Beobachtung die Anwendung eines unendlich fernen, d. h. gegen die Brennweite des Systems sehr weit entfernten Objekts, dessen von S entworfenes Bild in F' auftritt. Gemäss der Grundgleichung für conjugirte Punktorte, $xx' = -f^2$ oder

$$\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x} \qquad (3)$$

muss der Abstand, x, des Objektes, vom vorderen Brennpunkt F des Systems im Verhältniss zu dessen Brennweite desto grösser sein, mit je grösserer Annäherung x' zu vernachlässigen sein, d. h. das Bild in die andere Brennebene F' fallen soll. Bei Systemen von kurzer Brennweite (Mikroskopobjektiven, Ocularen) können daher mässig entfernte irdische Objekte schon als genügend weit abstehend betrachtet werden (bei 30 *mm* Brennweite ergiebt ein Objektabstand von 30 *m* schon eine Genauigkeit des Zusammenfallens von Bild und Brennebene von $= 0{\cdot}1\frac{0}{0}$). Bei grösseren Brennweiten muss man entweder siderische Objekte benützen (sehr entfernte terrestrische sind wegen der in der Horizontalen besonders störenden Wallungen der Atmosphäre und der durch sie verursachten Bildverwaschung ungünstig) oder wo das unbequem ist durch optische Mittel ein entferntes Objekt erzeugen.

Dies letztere ist auf drei schon seit den ältesten Zeiten betretenen Wegen ausführbar.

1) In der Axe des Systems S und Mikroskops M wird jenseits des ersteren ein sogen. Collimator C aufgestellt, d. i. ein collektives Linsensystem (Fernrohrobjektiv), in dessen abgewandter Brennebene ein geeignetes Objekt (»Mire«) angebracht und von hinten beleuchtet wird. Dann entwirft offenbar C ein virtuelles Bild der Mire in unendlicher Entfernung und dieses dient als Objekt für S.

2) Ebenfalls sehr alten Datums[1]) ist ein Verfahren, welches die Umkehrung des ad 1) angegebenen bildet: es wird der Ort aufgesucht, dessen von S ent-

[1]) Nach SCHERFFER (Instit. dioptr. pag. 40.), von MASKELYNE herrührend; einen besonderen Apparat hierfür beschrieb Th. BAUMANN, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. Berlin 1846.

worfenes Bild unendlich entfernt ist. Zu dem Zwecke wird statt *M* ein auf Unendlich (Sterne) eingestelltes Fernrohr auf die optische Bank gebracht und eine Marke auf der anderen Seite von *S* solange verschoben, bis ihr Bild in dem Fernrohr scharf erscheint. Ist dies der Fall, so befindet sich die Marke offenbar in der abgewandten Brennebene von *S*.

Wenn das System ein dispansives ist, so wird der Vorgang der umgekehrte[1]). Man visirt mit einem Fernrohr, dessen Ocularauszug genügend gross ist, erst durch *S* hindurch nach einem sehr entfernten Objekte und bestimmt dann nach Entfernung von *S* die Lage desjenigen Objekts auf der Bank, welches unmittelbar durch das Fernrohr gesehen scharf erscheint.

3) Statt eines besonderen Collimators wird das System selbst zur Autocollimation verwandt[2]). Zu diesem Zwecke wird jenseits *S*, (von *M* aus), ein gut planer Spiegel senkrecht zur gemeinsamen Axe von *M* und *S* aufgestellt. Die Markenebene von *M* wird von der Seite des Beobachters her beleuchtet durch ein über sie gestelltes unter 45° gegen die Axe geneigtes Glasplättchen, welches von einer seitlichen Lampe Licht erhält und gleichzeitig freie Durchsicht gestattet (Bohnenberger) oder besser, weil mit grösserer Lichtstärke wirkend, durch ein kleines totalreflectirendes in gleicher Weise beleuchtetes Prisma, welches einen Theil des Sehfeldes, mit der einen Kathetenfläche dessen Ebene parallel gestellt, ganz verdeckt, einen anderen Theil frei lässt; im bedeckten Theil befindet sich eine geeignete Marke (heller Spalt in dunklem Felde, in Silberniederschlag eingerissenes Netz oder dergl.), dessen Reflexbild in dem freien Theil des Sehfeld beobachtet wird (Abbe).

Wenn die von hinten beleuchtete Marke bezw. das von ihr durch den zwischen ihr und *S* befindlichen Theil von *M* entworfene Bild sich genau im Brennpunkte von *S* befindet — und nur dann — werden auch die nach der Brechung in *S* an dem Spiegel reflectirten und wieder durch *S* gebrochenen von der Marke ausgegangenen Lichtbüschel in deren Ebene wiedervereinigt. Man sieht also dann ein scharfes Bild der Marke in deren Ebene. Ist das System *S* divergent, so muss durch ein zwischen *M* und *S* angebrachtes Hilfssystem *S'* ein reelles Bild der Marke in *M* nach *S* hin entworfen und zur Coincidenz mit dessen Brennebene gebracht werden.

Die Methode der Autocollimation ist besonders empfindlich, weil die Strahlen das System *S* zwei Mal passiren müssen. Nahe der Brennebene entspricht einer um dx von ihr abweichenden Stellung der Marke, wie man sich leicht überzeugt, eine um ebenso viel nach der entgegengesetzten Richtung von ihr abweichende Lage des Markenbildes, also eine relative Verschiebung von $2dx$. Somit ist die Focussirungsgenauigkeit verdoppelt. Damit die pointirte Ebene wirklich die Brennebene sei, muss der benützte Hilfsspiegel natürlich sehr gut plan sein.

Um bei allen diesen Methoden zur Bestimmung der Brennpunktsörter die relative Lage des Brennpunkts gegen irgend eine mit dem Linsensystem fest verbundene, zur Axe senkrechte Ebene, *D*, zu bestimmen, kann man entweder mit demselben System welches zur Einstellung auf den Brennpunkt diente und ohne dasselbe irgendwie zu ändern, vor- oder nachher auf die betreffende irgendwie markirte Ebene einstellen. Oder man ersetzt die erstere Pointirungs-

---

[1]) L. Merz, Pogg. Ann. 54, pag. 321. 1845.

[2]) S. die neuerlich vorgeschlagenen Anordnungen von E. Lommel, Zeitschr. f. Instrkde. 5, pag. 124. 1885. L. Laurent, Compt. rend. 100, pag. 100. 1885. Zeitschr. f. Instkde. 5, pag. 322. 1885.

vorrichtung durch eine genau bis in ihren Einstellungspunkt reichende Spitze (von Elfenbein oder Stahl) und verschiebt diese bis zum Contakt mit der festen Ebene *D*. Die Differenz der Ablesungen an der optischen Bank bei der einen und anderen Stellung des Systems bezw. Spitzenträgers ist dann die gesuchte Entfernung *DF* bezw. *DF'* (vergl. Fig. 387 unten).

Zu Ausgangsebenen *D* empfehlen sich am meisten die durch einen bezw. beide Fassungsränder und die durch die äusseren Linsenscheitel gehenden.

Bestimmung der Brennweite.

Die Brennweite eines optischen Systems ist ihrer fundamentalen Definition nach (s. pag. 53) das Verhältniss der linearen Grösse eines in der Brennebene des betreffenden Raumes gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Grösse seines Objektes. Die Brennweite tritt ausserdem als wesentlicher Faktor in alle Abbildungsgleichungen mit ein und kann aus jeder derselben ebenfalls durch die andern in ihr auftretenden Grössen definirt, daher auch durch empirische Bestimmung jener gemessen werden (als Abstand der ersten Hauptpunkte von den Brennpunkten oder der Brennpunkte von den zweiten Hauptpunkten u. dergl.). Dementsprechend scheiden sich die Methoden zur empirischen Bestimmung der Brennweite auch in zwei Gruppen. In solche, welche auf die fundamentale Bedeutung der Brennweite gegründet sind — direkte Methoden — und in solche, welche auf den Nebenbeziehungen beruhen — indirekte Methoden.

Bei den ersteren kann man eine weitere Scheidung vornehmen in solche, welche die Definition unmittelbar, ohne jedes Zwischenglied, zur Anwenduug bringen und in solche, bei denen solche Glieder vorhanden sind, durch welche letztere die eigentliche Bedeutung der Unterlage für die Methode oft fast verdeckt wird.

I. Methoden welche unmittelbar auf der Definition der Brennweite beruhen.

1) Bei den ersteren ist der Definition gemäss die lineare Grösse des in der Brennebene auftretenden Bildes eines sehr entfernten Objektes zu messen. Ist das System für den unendlich fernen Punkt, wenigstens auf der einen Seite, aplanatisch — wie die Objektive der Fernrohre oder die photographischen Systeme und in umgekehrter Stellung als der gewöhnliche Gebrauch sie mit sich bringt auch die Lupen und annähernd die Objektive der Mikroskope — so bietet jene Messung keine Schwierigkeiten dar. Speciell beim Fernrohr liegt gerade diese Bestimmung ganz im Rahmen von dessen sonstigem Gebrauch. Denn schon kurz nach der Erfindung des Fernrohrs wurde speciell beim KEPLER'schen der grosse Vortheil erkannt, den dasselbe für die mikrometrische Messung der angularen Abstände von Sternen oder der scheinbaren Grösse von Planeten darbot. Zu diesem Zwecke wird in der Brennebene ein sogen. Mikrometer[1]) angebracht, d. i. entweder ein feststehendes System von parallelen Spinnwebfäden oder eben solchen feinen Strichen auf einer Glasplatte oder ein mittelst einer feinen Schraube seitlich um genau messbare Beträge verschiebbarer Faden bezw. Fadenpaar, welches einmal auf den einen und das andere Mal auf den anderen Punkt des Sehfeldes eingestellt wird[2]). Wenn auf diese Weise die lineare Grösse des von

[1]) Erfunden nach Einigen von GASCOIGNE 1640, nach Andern (GOVI) von DIVINI 1649.

[2]) Ueber die zahlreichen neueren Formen der Mikrometer sei auf die Artikel »Mikrometer« in GEHLER's physik. Wörterbuch und der Encyclop. Brit. sowie auf die Lehrbücher der praktischen Astronomie verwiesen.

dem Fernrohrobjektiv entworfenen Bildes und durch direkte Winkelmessung die scheinbare Grösse seines Objektes gemessen ist, so hat man in dem Verhältniss dieser beiden Grössen unmittelbar die Brennweite des Objektivs.

2) Bei anderen Systemen, als den Objektiven von Fernrohren, sind gewöhnlich die Einrichtungen für die direkte Winkelmessung der scheinbaren Grösse des Objektes von vornherein nicht vorhanden und auch weniger leicht anzubringen. Andererseits ist bei diesen, wegen ihrer im Allgemeinen sehr viel kürzern Brennweite auch ein geringerer Abstand des Objektes schon genügend. Bei Ocularen und den schwächeren Objektiven von Mikroskopen ist daher ein ganz bequemes Verfahren zur Bestimmung der Brennweite das folgende (nach ABBE, siehe DIPPEL, das Mikroskop, pag. 331): Man bringt in der Entfernung von einem oder wenigen Metern z. B. am Fenster, mehrere gut markirte Objekte (kreisförmige Scheiben von Papier oder dergl.) an und berechnet aus deren linearer Grösse y — dieselben einzeln und paar- oder gruppenweise genommen — und ihrem Abstand von der Tischfläche des Mikroskops, s, — diesen Abstand gerechnet auf dem gebrochenen Wege über die Mitte des planen Beleuchtungsspiegels des Mikroskops — die angulare Grösse y/s der einzelnen Marken oder Markengruppen. Misst man dann die lineare Grösse des Bildes, y', welches ein centrisch auf den Tisch gelegtes Ocular oder schwaches Mikroskopobjektiv von jenen Marken entwirft, mit einer Mikrometerlupe (RAMSDEN-Dynameter) oder besser mit einem mit Mikrometer versehenen Mikroskop[1]), so hat man in dem Verhältniss $y' : (y/s)$ wieder ohne weiteres die Brennweite des Systems.

Diese Methode lässt sich natürlich eben so gut wie am Mikroskop an der optischen Bank zur Anwendung bringen. Aehnlich kann man bei photographischen (Projections-) Objektiven verfahren.

Wenn der Abstand der Marke nicht sehr gross gegen die Brennweite des Systems ist, so ist die Anwendung der Gleichung $f = (h'/tang\, u)$ in den letzgenannten Fällen nicht mehr ohne weiteres zulässig. Man kann dann entweder[2]) durch ein Hilfs-System — eine Art Collimator — künstlich ein in unendlicher Ferne liegendes Objekt erzeugen, dessen angularen Durchmesser man ein für alle Mal bestimmt, oder man muss den Abstand des Objektes vom vordern bezw. den des Bildes vom hintern Brennpunkt besonders in Anschlag bringen (s. unten).

3) Gerade bei den Mikroskop-Objektiven kürzester Brennweite — welche, wie wir früher gesehen haben, rationeller Weise die grösste Apertur besitzen — lässt sich, wenn sie aplanatisch sind, ein Verfahren anwenden, welches auf den Sinus-Satz gegründet die ursprüngliche Definition der Brennweite ebenso unmittelbar zum Ausdruck bringt, wie die Bestimmung des Verhältnisses der angularen Entfernung von Sternörtern zur linearen Grösse ihrer Bilder bei Fernrohrobjektiven. Gemäss dem Sinus-Satz genügt a, die numerische Apertur auf der Objektseite, [vergl. pag. 185 Gleichung (5a)] der Gleichung

$$a = \frac{p'}{f'}, \quad \text{also} \quad f' = \frac{p'}{a}. \qquad (4)$$

Wenn daher diese Apertur bekannt ist, so reicht die Messung des ihr entsprechenden Querschnittes der Büschel in der hintern Brennebene, $2p'$, vollständig hin zur Bestimmung der hinteren Brennweite, f', des Systems. Die Apertur a lässt sich nach einer der Methoden bestimmen, welche wir hierfür weiter unten angeben werden. Ohne die Voraussetzung einer solchen vorgängigen Bestim-

[1]) Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass das zur Bildmessung dienende optische Hilfssystem am besten nach der Objektseite telecentrisch gemacht wird.

[2]) SECRETAN, De la distance focale des syst. converg. Paris 1855.

mung, also ganz ohne weiteres, ist diese Methode der Brennweitenbestimmung anwendbar bei Systemen, deren Apertur $a > 1$ ist, d. h. bei solchen, deren volle Apertur nur durch Zwischenfügen einer Immersionsflüssigkeit herstellbar ist. In diesen erreicht die Apertur der in das System eintretenden Büschel bei Weglassung der Immersionsflüssigkeit, also Luft vor der Frontlinse, höchstens den Wert 1·0, diesen Werth aber mit Sicherheit, wenn der Beleuchtungsapparat eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt. Man verfährt folgendermaassen: Man schiebt in den Haupt-Tubus des Mikroskops ein Hilfsmikroskop mit Mikrometer-Ocular, mit dem man annähernd auf die hintere (obere) Brennebene des zu untersuchenden Objektivsystems S einstellt. Man senkt den Haupt-Tubus so weit, bis der in dem Hilfsmikroskop hell erscheinende Kreis in der hintern Brennebene von S seine maximale Grösse erreicht hat, natürlich nachdem aus dem Beleuchtungsapparat alle Blenden entfernt sind, so dass man sicher ist, dass dieser Büschel bis zum streifenden Austritt liefert. Die Grösse dieses hellen Kreises bestimmt man mit dem Mikrometermikroskop ihrem absoluten Betrage nach (in Millimeter) unter Berücksichtigung der Vergrösserung, welche das Hilfsmikroskop selber zwischen Objekt und Mikrometer besitzt. Die Hälfte des Durchmessers dieses Kreises ist dann die gesuchte Brennweite.

Um sicher zu sein, dass der überstehende Fassungsrand der Frontlinse des Systems nicht dessen Annäherung an die Oberfläche des Condensorsystems, und dadurch die Aufnahme der von diesem streifend austretenden Büschel verhindert, befestigt man unter der Frontlinse von S durch Adhäsion mittelst der Immersionsflüssigkeit ein dünnes Deckglas und nähert nun S sammt diesem Deckglas dem Condensor bis zur völligen Berührung. Die Luftschicht zwischen beiden kann dann als verschwindend dünn angesehen werden, und da das System innerhalb Deckglas und Immersionsflüssigkeit der Voraussetzung nach eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt, so ist es sicher im Stande, Büschel von der Apertur 1·0 durch Deckglas und Immersionsflüssigkeit hindurch aufzunehmen. Da ferner der Eintritt der totalen Reflexion nur von der Richtung der einfallenden Büschel abhängt, so entsprechen den Punkten auf dem Umfang des hellen Kreises oberhalb von S parallelstrahlige Büschel vor S. Damit ist den Bedingungen der Anwendung von Gleichung (5a) genügt.

II. Methoden, bei welchen die Definition der Brennweite mittelbar zur Anwendung kommt.

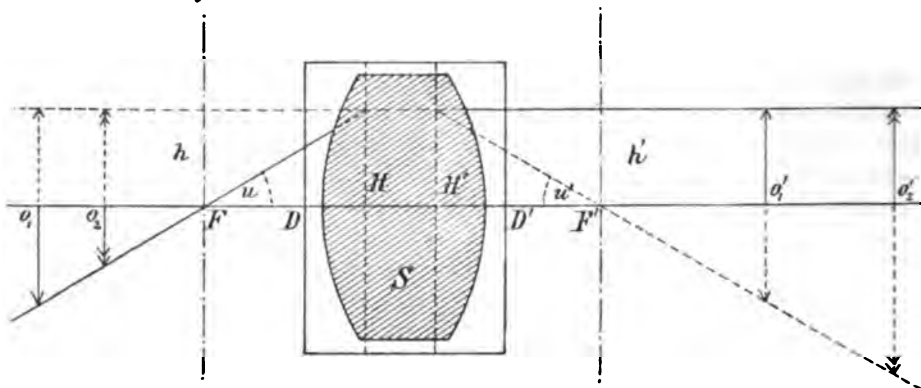
(Bestimmung der Brennweite aus Lage und Vergrösserung conjugirter Ebenen).

4) Man kann unter Beibehaltung der unter 2) erwähnten Anordnung, d. h. bei mässig entferntem Objekt erst die Lage des einen Brennpunktes, z. B. F (Fig. 387), in Bezug auf die durch den Fassungsrand des Systems gehende Ebene bestimmen, $DF = z$, dann bei umgekehrter Lage des Systems, also I nach dem Objekt hin, wie vorher mikrometrisch die Grösse des Bildes der Marke messen, $= y'$, und dann nach der Gleichung für die Vergrösserung in einem optischen System [1])

[1]) Diese Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, nur ein veränderter Ausdruck für die Definitionsgleichung der Brennweite. Man hat nur denjenigen vom Objekt ausgehenden Strahl zu betrachten (Fig. 387), welcher durch den vorderen Brennpunkt F geht, nach der Brechung also der Axe des Systems parallel ist, oder für die unter 5) angeführte Methode umgekehrt denjenigen Strahl, welcher der Axe parallel einfallend nach der Brechung durch den zweiten

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x}, \quad \text{also} \quad f = x\frac{y'}{y} = (s - z)\frac{y'}{y} \tag{5}$$

die Brennnweite f berechnen.



(Ph. 387.)

Durch Wiederholung der angegebenen Messungen in umgekehrter Lage des Systems erhält man einen zweiten Werth von f, welcher mit dem ersten übereinstimmen muss, daher zur Controle der ersten Messung dient.

5) Man kann namentlich bei stärkeren Mikroskop-Objektiven vortheilhaft den umgekehrten Weg einschlagen, das Objekt wie ein gewöhnliches mikroskopisches Objekt nahe dem vorderen Brennpunkt anbringen und die Grösse des Bildes messen, welches das System von ihm in erheblichem und genau ermitteltem Abstande vom hinteren (oberen) Brennpunkte entwirft. Als solches Objekt empfiehlt sich dann ein sogen. Objektmikrometer, eine sehr fein getheilte Glas-Skala von bekanntem Theilungswerth (z. B. 0·01 *mm*). Das Bild wird auf einer eben solchen aber meist gröberen Theilung aufgefangen, einem Ocularmikrometer (0·1 *mm*). Man darf hier aber nicht ein Ocular anwenden, welches wie das Huyghens'sche seinen unteren Brennpunkt und die reelle Diaphragmenebene zwischen den Linsen enthält, sondern ein solches, welches wie das Ramsden'sche seinen vorderen Brennpunkt ausserhalb derselben hat.

Der Abstand der oberen Brennebene des Objektivs von der Mikrometerebene, x', muss dann besonders bestimmt werden, am besten, indem man mit einem Hilfsmikroskop, welches sich in den Haupttubus des Mikroskops einschieben lässt einmal auf diese Ebene als die Bildebene sehr entfernter Gegenstände (geeignet sind kahle Bäume, durchbrochene Gitter auf Häusern) einstellt und dann mit demselben auf die durch den unteren Rand des Tubus gehende Ebene, welche nach Entfernung des Objektivs auf irgend welche Weise markirt wird.

Die Verschiebung, z', des Hilfsmikroskops, welche von der einen Einstellung bis zur andern nöthig ist, unter Beachtung des Vorzeichens, welches man ihr geben muss, addirt zu der für sich ermittelten, s', der Mikrometerebene vom

---

Brennpunkt F' geht. Man sieht dann, dass die eben benützten Gleichungen für die lineare Vergrösserung in conjugirten Axenpunkten nichts anderes sind als der mathematische Ausdruck für diejenige Definition der Brennweiten, nach welcher sie gleich sind dem Verhältniss der scheinbaren Grösse eines in endlicher Entfernung gelegenen Objekts, dieses gesehen vom Brennpunkte der Objektseite zur linearen Grösse seines Bildes oder *vice versa*. Umgekehrt führen die Gleichungen $f = \frac{h'}{\operatorname{tang} u}$ bezw. $f' = \frac{h}{\operatorname{tang} u'}$, auf jene Strahlen angewendet, sofort zu den Gleichungen für die lineare Vergrösserung in conjugirten Axenpunkten.

unteren Tubusrande ist dann $s' + z' = x'$, gleich der Entfernung der Bildebene vom Brennpunkt des Bildraumes, daher aus

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'}; \quad f' = x' \frac{y}{y'} = (s' + z') \frac{y}{y'}. \tag{5a}$$

6) Eine Modification der zu 4) und 5) angegebenen Verfahren besteht darin, dass man die Bestimmung der relativen Lage des dem Objekt bezw. Bild zugewandten Brennpunktes umgeht, indem man die Vergrösserungen bestimmt, welche das System in Bezug auf zwei um eine gemessene Entfernung ξ abstehende Objekte oder in zwei um eine ebenfalls gemessene Entfernung ξ' abstehenden Bildebenen besitzt. Ist die erstere Vergrösserung

$$\frac{y_1'}{y_1} = \beta_1, \quad \text{die letztere } \frac{y_2'}{y_2} = \beta_2,$$

so hat man

a) bei dem einen Verfahren aus

$$x_1 = \frac{f}{\beta_1} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{f}{\beta_2},$$

$$x_2 - x_1 = \xi = f\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right),$$

also

$$f = \frac{\xi}{\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\xi}{\frac{y_2}{y_2'} - \frac{y_1}{y_1'}} \tag{6a}$$

(vergl. Gleichung II*, pag. 58);

b) bei dem andern Verfahren ganz entsprechend

$$x_2' - x_1' = \xi' = f'(\beta_2' - \beta_1'),$$

also

$$f' = \frac{\xi'}{\beta_2' - \beta_1'} = \frac{\xi'}{\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_1'}{y_1}}. \tag{6b}$$

Die Art der Verwirklichung dieser beiden Verfahrungsweisen liegt auf der Hand[1]). Ist ausser dem gegenseitigen Abstand der beiden Objekt- bezw. Bildebenen auch noch derjenige einer derselben von einem festen Punkte D, gemessen z. B. $DO_1 = a_1$ so berechnet sich aus ihm und dem Werthe von f der Brennpunktsabstand $DF = p = a_1 - \frac{f}{\beta_1}$, der Abstand des Hauptpunkts der betreffenden Seite von derselben festen Ebene $DH = e = a_1 - f(1 - 1/\beta_1)$ u. s. w., ebenso auf der Bildseite, wenn $DO_1' = a_1'$ gemessen ist $DF' = p' = a_1' - f\beta_1$; $DH' = e' = a_1' + f'(1 - \beta_1)$.

7) Bei den zur (subjektiven) Beobachtung virtueller Bilder benützten Systemen von endlicher Brennweite, also den einfachen und zusammengesetzten Mikroskopen, ist es vortheilhaft, diese virtuellen Bilder zur Messung zu verwenden, da in Bezug auf sie das System am besten corrigirt ist. Man kann dies durch Vermittelung eines der Zeichenapparate (sogen. *Camerae lucidae*), welche an diesen Instrumenten häufig gebraucht werden, deren Constructionsformen man

---

[1]) Das erstere ist das von ABBE für seinen Apparat adoptirte, s. unten. Wenn man nicht sehr enge Strahlenbüschel wirken lässt, so wird man bei einem System, dessen Bildabstand viel grösser ist als der Objektabstand (z. B. Mikroskopobjektiv) das Verfahren 6b in der normalen Gebrauchslage des Systems anwenden und 6a event. zur Controle in der umgekehrten Lage desselben (Bild- und Objektseite vertauscht). Umgekehrt wenn das System für grossen Objekt- und kleinen Bildabstand corrigirt ist.

in den pag. 262 citirten Lehrbüchern der Mikroskopie beschrieben findet (s. auch unten pag. 400). Bringt man den Apparat in den mit der oberen Brennebene ja stets nahezu coincidirenden Augenpunkt des Instruments und misst man die Vergrösserung der virtuellen Bilder bei zwei verschiedenen Entfernungen des Projectionsschirms, so kann man aus der absoluten Entfernung des Schirms vom Augenpunkt oder aus dem gegenseitigen Abstand der beiden Schirmlagen und dem in ihnen stattfindenden Vergrösserungsverhältnisse wie in Methode 5) und 6b) die Gesammtbrennweite des Mikroskops berechnen[1]).

8) Eine andere Methode, bei welcher die Bestimmung der Brennpunktsörter umgangen wird, wandte MEYERSTEIN[2]) an. Er stellte eine Skala O und ein Mikrometermikroskop M fest auf. Die Pointirungsebene des letzteren O' war dabei um die messbare Grösse c entfernt von der Skala. Das zu untersuchende Linsensystem S wurde zwischen O und O' so lange verschoben, bis in O' ein scharfes Bild von O entstand, dessen Vergrösserung β mit M bestimmt wurde; ausserdem wurde der Abstand a eines mit dem System fest verbundenen Punktes (Index am Fuss des Trägers auf der optischen Bank) von der Skala O gemessen. Die letztere Operation wurde wiederholt, nachdem das System S um 180° gedreht war (Objekt- und Bildseite vertauscht) und dasselbe in seiner neuen Lage wiederum verschoben, bis das Bild in O' scharf war und von gleicher Grösse wie vorher. Die Entfernung des Index, durch welchen die Drehaxe des Systems geht, von O sei jetzt b. Dann liegt der zweite Brennpunkt des Systems jetzt an der gleichen Stelle wie vorher der erste und *vice versa*. Hieraus leitet man ab

$$f = \frac{c - (a + b)}{\beta - 1/\beta}. \tag{7}$$

8a) Eine Modification dieser Methode bildet die von E. HOPPE[3]), welcher in der zweiten, umgekehrten Lage des Systems nicht den Abstand des Fixpunkts D desselben (er wählt hierzu die Ebene des einen Fassungsrandes) von O, sondern denjenigen von O' bestimmt, $DO' = b'$. Er erhält dann aus a, b', c und β

$$f = \frac{\beta(a - b')}{\beta^2 - 1}, \tag{8}$$

und ebenso lassen sich dann aus einfachen Gleichungen die Oerter der Brenn- und Hauptpunkte gegen O und O' oder gegen D berechnen, z. B.

$$OF = \frac{\beta^2(a - b')}{\beta^2 - 1}; \quad F'O' = \frac{a - b'}{\beta^2 - 1}; \quad DH = \tfrac{1}{2}(c - a - b') \text{ u. s. w.}$$

8b) Eine andere Modification ist die erste der drei von MAC GILLAVRY[4]) vorgeschlagenen Bestimmungsweisen (die zweite und dritte sind fast identisch mit den unter 6a und 6b angeführten). Bei dieser misst er die Vergrösserungen β_1, β_2 eines Systems in zwei Stellungen zu Objekt und Bild ohne Umkehrung des Systems, und die Differenz d der Entfernungen von Objekt und Bild in den beiden Fällen. Hieraus berechnet sich die Brennweite

$$f = \frac{d\beta_1\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1\beta_2 - 1)} \tag{9}$$

---

[1]) Diese Methode wurde neuerdings zu sehr exacter Ausführung gebracht (die Projectionsschirme an den Fernrohrträgern eines Kathetometers angebracht, ihre absoluten und gegenseitigen Entfernungen an dessen Theilung abgelesen) von C. M. GARIEL, Séanc. Soc. franc. de phys., pag. 186. 1887.

[2]) WIED. Ann. 1, pag. 315. 1877; CARL's Repert. 14, pag. 363. 1877.

[3]) POGG. Ann. 160, pag. 169. 1876.

[4]) Maandblad voor Natuurwetensch. 5, pag. 73. 1875.

und ebenso genügen die Messungsdaten auch für die Berechnung der Brennpunksörter und Hauptpunktsabstände.

9) Statt die in conjugirten Ebenen stattfindenden Vergrösserungsverhältnisse zu messen, kann man man einfache Zahlen (1, 2, 3, 4 oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) für dieselben wählen. Alsdann hat man nur die Coincidenz von Strichen in der Objekt- mit solchen in der Bildskala herüberzuführen und als Criterium zu benützen. In dieser Weise verfuhren HANSEN[1]) und MERGIER[2]), von denen der letztere auf mechanischem Wege die Stellungen der Linse und Skala, wo die Vergrösserung = 1, 2, 3 . . . ist, herbeiführte. Die Bildebenen, in welchen die Vergrösserung = 1, 2, 3, ist und ebenso die Objektebenen, denen im Bilde die Vergrösserungen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . entsprechen, sind von einander je um f entfernt.

Auf demselben Princip beruhen auch die Methoden von DONDERS[3]) und SNELLEN[4]) zur Bestimmung der Stärke von Brillengläsern.

Endlich bilden ebenfalls nur Modificationen des hier genannten Verfahrens die Methoden, bei welchen zuerst die Lage der Brennebenen (wo die Vergrösserung = 0 ist) und dann die der TÖPLER'schen Hauptebenen (Vergr. = — 1) aufgesucht und der Abstand dieser beiden gemessen wird[5]). Diese sind ebenfalls je um f entfernt.

Es hat kaum einen Zweck, die verschiedenen anderen sich hier darbietenden Möglichkeiten aufzuzählen.

III. Methoden, welche bloss auf der Ermittelung der Oerter conjugirter Punkte auf der Axe beruhen.

Die Brennweite eines Systems lässt sich, wie schon bemerkt, auch aus jeder anderen Gleichung, in welcher sie in irgend welcher Verbindung mit anderen Grössen auftritt, bestimmen, indem man diese anderen Grössen misst[6]). Namentlich die Grundgleichung für die Oerter conjugirter Punkte auf der Axe

$$xx' = -f^2 \qquad (10)$$

kann zu solchen Bestimmungen dienen und ist vornehmlich zur Grundlage von solchen benützt worden. GAUSS[7]) diskutirte ziemlich vollständig die verschiedenen Möglichkeiten, und die Vortheile oder Nachtheile derselben, auf Grund jener Gleichung f zu bestimmen.

10) Wenn die Lage der Brennpunkte F, F' unbekannt ist, ihre Entfernungen von einem festen Punkte D des Systems in Richtung des einfallenden Lichtes

---

1) Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. 15 (10). 1874 (nach THOMPSON).

2) Séances de la Soc. franç. de phys. 1887, pag. 193.

3) Versl. en Mededeel. 15, pag. 402. 1863.

4) Maandb. voor Natuurwetensch. 7, pag. 23. 1876.

5) Z. B. H. SCHRÖDER, Photogr. Mittheilgn. hrsg. v. H. W. VOGEL, 23, pag. 254. 1887. Im wesentlichen die gleiche Methode ist die von S. P. THOMPSON, Journ. Soc. of Arts 40, pag. 22. 1891, bei welcher die Lagen beider Brennebenen eines Systems durch Mikrometer markirt und letztere auf mechanischem Wege (rechts- und linksgängige Spindel) in die symmetrischen Ebenen übergeführt werden, in welchen die Vergrösserung = — 1 ist. Anwendung dieser Methode auf dispansive Systeme von A. ANDERSON, Phil. Mag. (5) 31, pag. 511. 1891. Auf die Bestimmung der Distanz der positiven wie negativen Hauptebenen haben, wie TH. zeigt, die Focussirungsfehler einen geringeren Einfluss, als auf die Bestimmung der Entfernung jedes anderen Paares conjugirter Ebenen.

6) Natürlich kann auch jede dieser Gleichungen als Definitionsgleichung der Brennweite benützt werden. Nach der hier vertretenen Auffassung aber sind diese Definitionen für die Brennweite weniger charakteristisch als die von uns stets festgehaltene.

7) Dioptr. Unters., Göttingen 1841, pag. 23 ff.

gemessen, $DF = p$, $DF' = p'$ gesetzt werden, die Entfernungen eines Objektpunktes O und seines Bildpunktes O' von demselben Punkte D, im selben Sinne gemessen, DO mit a und DO' mit a' bezeichnet werden, so sind zur Ermittelung von f, p und p' stets drei Versuche nöthig. Seien die bei denselben erhaltenen Werthe von a und a' durch Indices unterschieden, so ergiebt die dreimalige Anwendung der Gleichung (10), wenn berücksichtigt wird, dass $x = FO = a - p$ und $x' = F'O' = a' - p'$ ist, also die Gleichung

$$(a_k - p)\,(a_k' - p') = -f^2 \tag{11}$$

für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ nach bekannten Verfahrungsweisen die Werthe von p, p' und f^2 (GAUSS, l. c. pag. 23/24). Das Vorzeichen von f bestimmt sich aus der aufrechten oder verkehrten Lage des Bildes zum Objekte im Verhältniss zum Vorzeichen von $x' = a' - p'$ in einem der drei Versuche.

11) Sowohl an einer einfachen Linse als an einer solchen, die aus zwei oder mehreren sehr nahe zusammenliegenden zusammengesetzt ist (wie an achromatischen Fernrohrobjektiven von der gewöhnlichen Einrichtung) stehen die beiden Hauptpunkte in geringer Entfernung von einander. Dürfte man diese Entfernung $HH' = l$ wie eine bekannte Grösse betrachten, so würden zwei Versuche hinreichend sein, indem die Gleichung

$$p' - p = 2f + l \tag{12}$$

die Stelle des dritten Versuches vertritt. Verbindet man mit derselben die für die beiden ersten Versuche geltenden

$$(a_k - p),\ (a_k' - p') = -f^2, \tag{11}$$

so erhält man nach Elimination von p und p' zur Bestimmung von f eine quadratische Gleichung, welche aber in eine lineare übergeht, wenn $a_2' - a_2 = a_1' - a_1$, d. h. wenn die beiden Versuche so angeordnet sind, dass die Entfernung des Bildes vom Objekt in beiden dieselbe bleibt, während die Linse in ihnen zwei verschiedene Stellungen einnimmt. Sei jene Entfernung $OO' = c$, also $a_1 = a_1' - c$, $a_2 = a_2' - c$, so wird

$$f = \tfrac{1}{4}(c - k) - \frac{(a_2' - a_1')^2}{4(c - l)}\,. \tag{13}$$

Man hat also ausser c nur $(a_2' - a_1')$, d. i. die Verschiebung des Systems vom einen Versuch zum andern zu messen. Wenn $OO' = const$ ist, so ist auch $x + x' = const$. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit $x \cdot x' = (-f^2) = const$ ist zu schliessen, dass bei den zuletzt gedachten Versuchen $x_1 = -x_2'$ $x_2 = -x_1'$ ist, also die Brennpunktabstände des Bildes und Objektes in beiden Versuchen der Grösse und dem Vorzeichen nach mit einander vertauscht werden[1]).

12) Bei derjenigen Stellung des Systems, wo $x = -f$ wird, d. h. wenn der Gegenstand in die negative erste Hauptebene rückt (vergl. pag. 55) rückt das Bild in die zweite negative Hauptebene, also ist $x' = +f$ und der Abstand zwischen Objekt und Bild

$$OO' = c = 4f + l \tag{14}$$

wird ein Minimum. In Folge dieser Minimum-Eigenschaft ändert in der Nähe dieser Lage eine kleine Verschiebung des Objektes die Lage des Bildes fast gar nicht, daher der Abstand beider sich besonders bequem und genau ermitteln lässt (s. Anm. 5 auf pag. 291).

---

[1]) Diese Methode wurde unter Vernachlässigung von l VON BESSEL benützt. Astron. Unters. Bd. 1, pag. 136; Astron. Nachr. 17, No. 403. Unter Berücksichtigung des Hauptpunktabstandes wurde sie von GAUSS entwickelt und von HASSELBERG sehr sorgfältig zur Ausführung gebracht. Mél. math. et astr. de Petersb. 6, pag. 669. 1888 (vergl. CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 9, pag. 16. 1889); s. auch OUDEMANS, Arch. Néerland. 13, pag. 149. 1877.

Diese Methode war früher unter Vernachlässigung von l in der praktischen Optik beliebt. Man wird bemerken, dass sie ebenso wie die unter 11) angegebene sehr »sperrig« ist, d. h. einen grossen Raum beansprucht, da der zu messende Abstand OO' mehr als das vierfache der zu ermittelnden Brennweite beträgt. Das gleiche gilt auch von den oben angeführten Methoden von HANSEN, S. P. THOMPSON und der von SILBERMANN[1]), welche letztere im wesentlichen die gleiche ist wie 12), nur dass SILBERMANN statt des Minimalabstandes selbst die Gleichheit von Objekt und Bildgrösse als Criterium benützt.

13) Bei den unter 11) und 12) angeführten Methoden ist l als bekannt bezw. $= 0$ angenommen. Will man sich mit einer ungefähren Kenntniss des Werthes von l nicht begnügen, so kann zu seiner Ermittelung und gleichzeitig zur Bestimmung der Brennweite selbst folgendes Verfahren von GAUSS dienen: Man bestimme nach einer der pag. 381 ff. angegebenen Methoden die Lage der beiden Brennpunkte des Systems gegen einen festen Punkt desselben, d. h. die Grössen p und p' in Gleichung (11) pag. 292, sowie den Abstand eines (am besten in der Nähe des Systems befindlichen) Objektes sowohl gegen jenen festen Punkt ($DO = a$) als gegen sein vom System entworfenes Bild $OO' = c$. Man hat dann unter Berücksichtigung, dass $DO' = a' = c + a$ ist,

$$(p - a), (p' - a') = f^2 \quad \text{und} \quad l = p' - p - 2\sqrt{(p - a)(p' - a')}. \qquad (15)$$

Nach diesem Verfahren, dessen praktische Realisirung GAUSS näher darlegt[2]), wird l, wie er zeigt, besonders genau bestimmt, so dass man es für die Bestimmung dieser Grösse allein vortheilhaft als Hilfsverfahren zu einer der Methoden 11) und 12) benützt. Auch wenn die Brennpunkte nicht genau ermittelt sind, kann man, wie er des weiteren zeigt, entweder aus einer genäherten Kenntniss der drei Grössen f, p, p' eine einfache Correction der erhaltenen Werthe berechnen oder die Methode in etwas abgeänderter Form zur Anwendung bringen, nämlich

14) Man bestimmt die Grössen a und a' für irgend welche Entfernung des Objektes bei zwei Stellungen des Systems, in welchen Objekt und Bild im Raum dieselbe Lage haben, das System aber um 180° gedreht (Objektseite mit Bildseite vertauscht) ist; dann ist $a_1 = -a_2'$, $a_2 = -a_1'$. Man erhält aus diesen beiden Versuchen — denen wieder zwei Gleichungen von der Form (11) entsprechen — in Verbindung mit dem ad 13) genannten zur Bestimmung der Grössen a und c bei kleinem Betrag von c dienenden entweder die Grössen p und p' und aus diesen durch Anwendung der Gleichung (11) auf eine der beiden bei entfernten Objekten ausgeführten Messungen die Grösse von f — oder die Lage der beiden Hauptpunkte des Systems gegen den festen Punkt D desselben.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Beschreibung des Verfahrens und des ihm dienenden Apparates, welche von ABBE herrühren[3]).

Fast alle Methoden zur Brennweitenbestimmung von Linsensystemen beruhen, wie wir gesehen haben, auf der Messung mittelst optischer Bilder; für solche stellte ABBE[4]) drei Fundamentalbedingungen auf, nämlich

---

[1]) Compt. rend. 14, pag. 340. 1830; BIOT, Traité élem. d'astron. physique, 3. ed. Paris 1841, I, pag. 646; s. auch WEBB, Month. Not. 17, pag. 269. 1857.

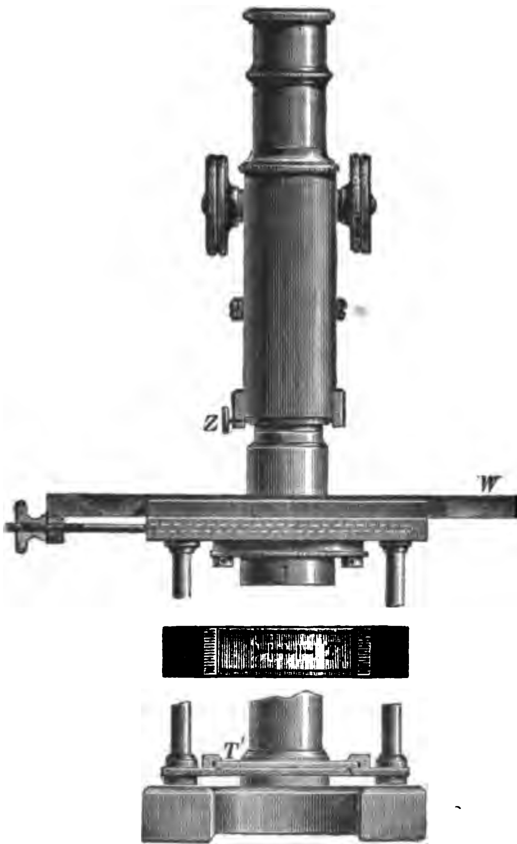
[2]) Von THOMPSON fälschlich als PENDLEBURY's Methode namhaft gemacht. Auch die Methoden von A. MARTIN, Ann. de chim. et de phys. (4) 10, pag. 385, 447. 1876 und CORNU, Journ. de phys. 6, pag. 276. 1877 sind fast genau identisch mit der von GAUSS angegebenen.

[3]) s. S. CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrkde. 12, pag. 185. 1892.

[4]) Mikrometrische Messung mittelst optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878.

1) Eine solche Messung darf nicht abhängig gemacht werden von der Auffassung des Ortes eines optischen Bildes — wegen des unvermeidlichen Spielraums, der bei solchen Einstellungen bestehen bleibt und desto grösser ist, je mehr man das System abblendet, um dessen Aberrationen zu reduciren und die für die centrale Zone geltenden Faktoren zu erhalten (gemäss dem pag. 381 ausgeführten).

2) Es darf auch indirekt die Messung nicht von einer Einstellung abhängig sein. In Folge der vorgenannten unvermeidlichen Einstellungsunsicherheit würde auch die Grösse von Bildern falsch aufgefasst werden, wenn die Hauptstrahlen (Achsen) der sie formirenden Büschel beliebige Neigung gegen die Achse des Systems haben. Nur bei »telecentrischer« Einrichtung, wo durch eine im vorderen Brennpunkt des Systems befindliche axiale Blende die Hauptstrahlen der austretenden Büschel der Systemaxe parallel gemacht sind, wirkt wie wir früher gesehen haben (pag. 181) jener Fehler nicht mit. Es ist dann die Grösse des Bildes gänzlich unabhängig von der Stelle, an welcher es — scharf oder unscharf — eingestellt wird.



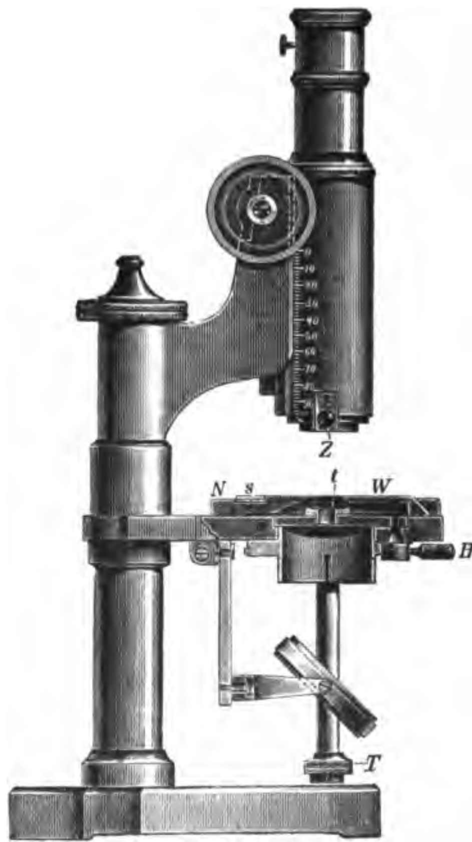
(Ph. 388.)

3) Da die dioptrischen Constanten eines Systems (Vereinigungsweiten, Vergrösserung und auch die Brennweite selbst) im Allgemeinen von Zone zu Zone variiren, das zu zweit genannte Element auch noch mit der absoluten Grösse des Bildes bezw. Objektes selbst (Verzerrung), so ist es nothwendig, auf diese Variationen Rücksicht zu nehmen. Dies geschieht am zweckmässigsten durch Ermittelung des Faktors der fraglichen Variation, indem man der Messung an jeder Stelle der Achse verschieden grosse Bilder unterwirft und den Fundamentalwerth der Vergrösserung, welcher der centralen Zone des Bildes und Objektivs entspricht, durch Rechnung ableitet.

Obigen Anforderungen entsprechend gründet sich die Methode von Abbe wie die oben unter 6a) angeführte auf die Bestimmung der Vergrösserungen welche ein System in gegebener Lage bei telecentrischem Strahlengang von zwei auf derselben Seite in genau messbarer Entfernung von einander befindlichen Skalen entwirft. Der telecentrische Strahlengang wird hierbei nicht durch eine Blende in dem — von vornherein ja unbekannten — Brennpunkt des Systems erreicht, sondern dadurch, dass das Bild durch ein Hilfsmikroskop beobachtet wird, dessen Axe parallel der des Systems verschoben wird. Diese letztere

Parallelverschiebung ermöglicht die Beobachtung des Bildes in grösserer Ausdehnung als irgend ein feststehender optischer Apparat sie gestatten würde. Da jedoch ihre Verwirklichung in mechanischer Beziehung grosse Schwierigkeiten und entsprechend constructive Complication verursachen würde, so ist der Ausweg gewählt, dass nicht das Mikroskop parallel über das zu untersuchende System hingeführt, sondern umgekehrt dieses in einem Schlitten unter dem Mikroskop fortgeführt wird, wobei die Skalen ebenfalls ihre Lage zum Beobachtungsmikroskop behalten. Diese Veränderung vermeidet die angedeutete Schwierigkeit unter Anwendung sehr geringer mechanischer Hilfsmittel vollständig und verursacht nur eine geringfügige Aenderung in den Formeln für die Berechnung der Vergrösserung.

Der Apparat besteht demgemäss in der Form, in welcher er von der optischen Werkstätte von C. ZEISS in Jena fabrikatorisch ausgeführt wird, im wesentlichen in einem Mikroskop grösseren Modells mit ausziehbarem Tubus, dessen Tisch *W* in Schlittenführung von rechts nach links um messbare Beträge (Skala *s*, Nonius *N*, Ablesung auf 0·02 *mm*) beweglich ist. Nahe unter der Tischebene befindet sich eine mittelst Hebels *H* bei Seite zu schlagende feingetheilte (0·1 *mm*) Glas-Skala *t*, oberhalb des Fusses eine zweite gröber getheilte (0·5 *mm*) *T*; die Entfernung beider (ca. 100 *mm*) wird vom Verfertiger ein für allemal oder mittelst eines beigegebenen Tiefentasters vom Beobachter bestimmt. Dem Mikroskop sind 5 Objektive beigegeben, welche gestatten, unter Zuhilfenahme des Tubusauszuges auf alle Entfernungen von der Tischebene bis Unendlich einzustellen, sodass stets das von dem System entworfene Bild auch der unteren Skala beobachtet werden kann. Die Einrichtung dieses Focometers, welches in der ausgeführten Form und unter Benützung der beschriebenen Methode zunächst für Linsen von etwa 20 bis 100 *mm* Durchmesser bestimmt ist — in grösseren Dimensionen für entsprechend grössere — ist eine derartige, dass auch die Bestimmung von Systemen kürzerer Brennweite z. B. der Oculare und Objektive von Mikroskopen nach den oben namhaft gemachten für solche geeignete Methoden auf das bequemste ausführbar ist.



(Ph. 389.)

Zu diesem Zwecke hat sowohl das Tubusauszugsrohr eine Millimeter-Theilung, welche die Gesammtlänge des Tubus, von der unteren Ansatzfläche des Objektivgewindes bis zum Auflagerand der Oculare, angiebt als auch trägt der Haupttubus eine solche, welche an festem Index die axiale Verschiebung des Ge-

sammttubus zu messen gestattet. Letztere kann ausserdem innerhalb kleinerer Intervalle (5 *mm*) durch die mit getheiltem Kopfe versehene Mikrometerschraube, welche zur feinen Einstellung dient, sehr genau gemessen werden (0·003 *mm*). Die Brennweite von Systemen mittlerer Dimension (etwa 50 *mm* Oeffnung) kann mittelst des Apparates bei wenigen Wiederholungen leicht mit einer Genauigkeit von 0·1% bestimmt werden.

Auf die Verwendung des Apparates zur Bestimmung von Vergrösserungen und Aperturen ist im folgenden hingewiesen.

Empirische Bestimmung der Strahlenbegrenzung.

Nächst der Bestimmung der Grundfaktoren ist es die der Strahlenbegrenzung, welche bei optischen Instrumenten ein Interesse bietet, also I. die Bestimmung der Apertur und II. die des Gesichtsfeldes, mit welcher letzteren die der Vergrösserung Hand in Hand geht.

I. Bestimmung der Apertur.

1) Wenn die wirksamen Büschel auf der einen Seite nahezu parallelstrahlig, telecentrisch sind, so ist es genügend, auf dieser Seite die lineare Grösse der wirksamen Oeffnung zu ermitteln. Liegt diese Oeffnung ausserhalb des Linsensystems, so hat man einfach mit einem geeigneten Messwerkzeug (Maassstab, Schublehre oder dergl.) ihren Durchmesser zu bestimmen. Am genauesten geschieht dies natürlich mit einem Comparator. Als solcher kann bis zu Dimensionen von 10 *mm* der oben beschriebene Brennweitenmessapparat von Abbe ohne weiteres benützt werden, indem man das System *S* mit der Blende nach oben annähernd centrisch auf den Schlitten *W* legt und mit dem mit Fadenkreuz versehenen Mikroskop erst auf den einen und dann, durch entsprechende seitliche Verschiebung des Schlittens, auf den andern Rand der Blende einstellt. Die Differenz der Ablesungen des Nonius *N* an der mit dem Schlitten verbundenen Skala *s* ist dann unmittelbar gleich der Grösse der Verschiebung des Schlittens, d. i. gleich dem Durchmesser der Blende.

Das letztere Verfahren ist auch dann in unveränderter Weise anwendbar, wenn die betreffende Blende zwischen den Linsen liegt, also ihr vom davor liegenden Theil des Systems entworfenes Bild die Eintrittspupille des Systems bildet. Ist jetzt das Mikroskop des Focometers auf das durch das System *S* hindurch erscheinende Bild der Blende scharf eingestellt, so ergiebt genau das gleiche Verfahren wie bei ausserhalb liegender Blende den Durchmesser der Eintrittspupille in diesem Falle. Da das Mikroskop der Axe des Systems parallel bleibt, so wird hierbei das Bild der Blende sogar mit demselben Strahlengang gemessen, für welchen es als Eintrittspupille wirksam ist.

Dies Verfahren zur Bestimmung der Eintrittspupille bei Systemen von mittleren und grösseren Dimensionen (z. B. photographischen Objektiven) ist ein so einfaches, dass wir die andern zu dem gleichen Zweck vorgeschlagenen füglich ganz übergehen können.

Bei sehr kleinen Dimensionen des zu untersuchenden Systems bezw. seiner Blende, kann die Messung ihres wirklichen Durchmessers oder desjenigen ihres durch den über ihr liegenden Theil des Systems entworfenen Bildes besser mikrometrisch bei feststehendem Mikroskop erfolgen. (Natürlich wird man hier vortheilhaft wieder am Objektiv des Mikroskops eine Blende in dessen hinterem Brennpunkt anbringen, um es nach vorn telecentrisch zu machen und

auf diese Weise die aus ungenauer Einstellung entspringenden Fehler in der Bestimmung der Grösse der Blende möglichst auszuschliessen).

2) Die angulare Apertur — in ihrem rationellen Maass als numerische Apertur — kann entweder so gemessen werden, dass man den Durchmesser der nach dieser Seite hin wirksamen Blende bezw. Pupille und die Entfernung des Objekts bezw. Bildes von ihr bestimmt. Die Anhaltspunkte für ein solches Verfahren sind in dem Voranstehenden bereits vollständig gegeben. Bei Systemen von grösserer Dimension; wie den Objektiven von Fernrohren und den photographischen Systemen, dürfte dieses Verfahren das angemessenste sein. Bei Systemen von kleinen Dimensionen aber ist es in den meisten Fällen einfacher, bei sehr kurzen Brennweiten sogar kaum etwas anderes möglich, als diese Apertur unmittelbar zu bestimmen nur nach dem Sinus des Sehwinkels, unter welchem die Pupille von O bezw. O' aus erscheint.

a) Bei Aperturen unter 0·5 kann man zu diesem Zweck nach folgendem Princip verfahren: Man lässt die im System vorhandene Begrenzung sich durch den centralen Theil des Objektes bezw. Bildes virtuell auf eine beliebig angenommene äussere Fläche projiciren und bestimmt Durchmesser und Entfernung dieser Projection.

In gemessener Entfernung von dem Punkt, in Bezug auf welchen die Apertur bestimmt werden soll — also bei Mikroskopobjektiven dem mittleren Objekt, bei photographischen Systemen und astronomischen Objektiven dem Bildpunkt — wird eine zur Axe des Systems senkrechte Skala angebracht. Es handelt sich dann nur darum, zu beurtheilen, in welcher Ausdehnung diese Skala durch das System kraft der in diesem vorhandenen Begrenzung abgebildet wird mittels Strahlenbüschel, welche sich im mittleren Objektpunkt kreuzen [1]. Zu diesem Zwecke muss also entweder in der Objektebene eine physische Blende mit centralem Loch angebracht sein oder eine ebensolche optisch daselbst eingeführt werden. Letzteres kann, wie wir früher sahen, in einfacher Weise dadurch geschehen, dass eine Blende in der dem Objekt in Bezug auf das System conjugirten Ebene angebracht wird. Bei Mikroskop-Systemen z. B. geschieht dies, indem man das Bild der Skala über dem System S vom oberen Ende des Tubus aus beobachtet. Die Pupille des Auges ist dann die an richtiger Stelle befindliche Blende. Oder man beobachtet jenes Bild mit dem Hilfsmikroskop, dessen Objektiv nach der Objektseite nahezu telecentrisch gemacht ist, nämlich dessen Blende in Bezug auf sein Objektiv sammt dem System S conjugirt ist der Objektebene [2]. Bei einem System, welches nach der andern Seite hin mit telecentrischem Strahlengang benützt wird, wie ein Fernrohrobjektiv oder photographisches System, wird das Bild der Skala auf dieser Seite ebenfalls am besten mittelst eines seinerseits nach der Objektseite telecentrischen Hilfssystems beobachtet, z. B. in der durch das ABBE'sche Focometer gegebenen Einrichtung.

Aus dem Durchmesser des durch das System S zur Abbildung gelangenden Theils der Skala und ihrer Entfernung vom Objektpunkt kann dann zunächst die Tangente und aus dieser weiter der Sinus des halben Winkels berechnet werden, unter welchem die Skala von hier aus erscheint.

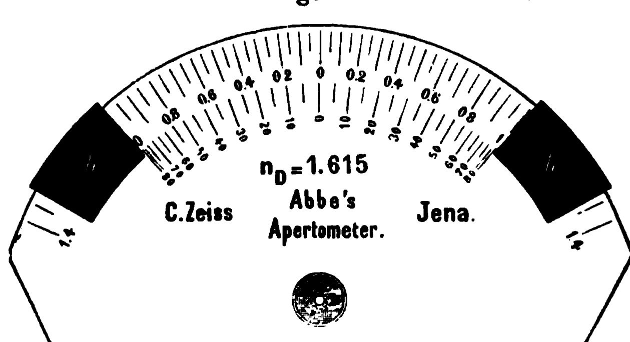
b) Bei Aperturen, welche über 0·5 gehen, ist es bequemer und genauer, bei

[1]) Die Grenzen des zur Abbildung gelangenden Skalenbereichs müssen durch deutliche Marken, die man langsam nach aussen verschiebt, gekennzeichnet werden, etwa durch die Ränder geschwärzter Blechscheiben od. dergl.

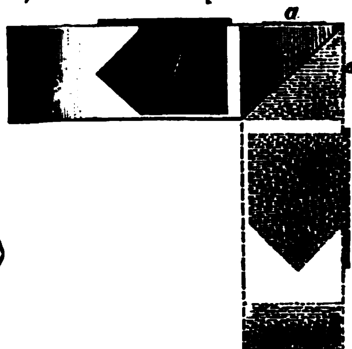
[2]) Siehe E. ABBE, Journ. R. Micr. Soc. 3, pag. 20. 1880.

Aperturen über 1·0 sogar unerlässlich, von der virtuellen Projection der im System vorhandenen Blende auf eine im äusseren Luftraum gelegenen Schirmebene abzusehen und statt Luft ein Medium von höherem Brechungsindex einzuführen. Man kann dies dadurch, dass man unter dem Tisch des Mikroskops — um die Objektive von solchen kann es sich jetzt allein noch handeln — eine Halbkugel von bekanntem Index mit der planen Seite nach oben centrisch befestigt und die Aenderung des Winkels in Anschlag bringt, welchen die von den Punkten der Skala ausgehenden Strahlen durch Brechung in der Halbkugel erfahren[1]. Vorzuziehen ist die Anwendung eines Apparates, bei welchem einerseits das Centrum der Winkelmessung genau markirt ist und andererseits die Richtungen der Strahlen sicherer bestimmt sind als durch Brechung der entfernten Skala an der Halbkugel im obigen Falle. Einen solchen Apparat erhält man[2] nach Abbe folgendermaassen (Fig. 390 und 391).

Auf einer überhalbkreisförmigen Cylinderscheibe wird der Mittelpunkt *a* durch ein in Silber ausgekratztes kleines Loch markirt, nahe der Peripherie die



(Ph. 390.)



(Ph. 391.)

diesem Centrum entsprechende Theilung, ebenfalls auf der Planfläche der Scheibe, aufgetragen. Die von Zeiss in Jena gefertigten Apparate tragen eine solche nach der numerischen Apertur fortschreitende Theilung — wie sie sich aus dem Winkel der Strahlen innerhalb des Glases und dem Brechungsexponenten dieses berechnet — und eine zweite nach innen gelegene, welche die den Glaswinkeln entsprechenden Luftwinkel angiebt. An der Platte lassen sich zwei aus schwarzem Blech gebogene Indices *b* verschieben, deren Form Fig. 391 näher zeigt Die geradlinige Kante derselben dient zur Ablesung der Theilung. Die an der Cylinderwand anliegende in derselben vertikalen Ebene liegende Spitze dient als Objekt für die Beobachtung in der hintern Brennebene des Mikroskopobjektivs. Ein Bild von ihr wird dadurch in das System übergeführt, dass an dem Durchmesser der Scheibe unter 45° eine Facette angeschliffen ist (s. Fig. 391), durch welche die von der Peripherie horizontal auf sie fallenden Strahlen nach oben gespiegelt werden. Durch die Spiegelung an dieser Facette entsteht eine virtuelle, vertikal nach unten liegende Halbcylinderscheibe (in der Figur gestrichelt).

Das Verfahren mit diesem Apparat ist nun folgendes:

Man legt die halbkreisförmige Apertometerplatte, mit der Theilung nach oben, auf den Objekttisch des Mikroskops und stellt mit dem zu untersuchenden Objektiv — wenn es ein Immersionssystem ist, nach Zwischenfügung der Immersionsflüssigkeit — auf das kleine Loch in dem kreisförmigen Silberscheibchen mit einem beliebigen Okular grob ein. Die Tubuslänge

---

[1] E. Abbe, l. c., pag. 30. H. L. Smith, Am. Quart. Micr. Journ. 1, pag. 194. 1879.

[2] Carl Zeiss, Description of Prof. Abbe's Apertometer etc. Journ. R. Micr. Soc. 1, pag. 19. 1878. S. auch E. Abbe, l. supra cit.

muss bei dieser Einstellung diejenige sein, mit welcher man das System im gewöhnlichen Gebrauch benutzt.

An den Rand der Apertometerplatte und zwar nahe der Mitte des Halbkreises legt man die beiden Indices, und zwar so, dass die mit einer Spitze versehenen Seiten an dem vertikalen, cylindrischen Rand, die anderen, geradlinig begrenzten an der ebenen Oberfläche der Platte anliegen, wobei am besten die Spitzen von einander weg, nach aussen gekehrt sind, wenn das zu untersuchende System relativ stark ist (Numerische Apertur grösser als 0·6—0·7), oder zu einander, nach innen, wenn das System schwächer ist.

Nun schraubt man in das untere Gewinde des Tubusauszugs das dem Apparat beigegebene Hilfsobjektiv, dessen mit einem Diaphragma geschlossenes Rohr hierbei in das Innere des Tubus zu liegen kommt. In das andere Ende des Auszugs steckt man ein Okular und stellt mit dem so erhaltenen Hilfsmikroskop durch Hineinschieben in den Haupttubus auf das in ihm erscheinende Bild der Indices ein.

Man verschiebt nun die Indices — stets darauf achtend, dass sie an der Platte möglichst gut anliegen — bis ihre Spitzen die Peripherie des hellen Kreises von innen resp. aussen eben berühren. Wenn nöthig, korrigirt man noch die Einstellung des Hilfsmikroskops so, dass die Indexspitzen und der Rand des hellen Kreises etwa gleich scharf werden. Ist auf diese Weise die richtige Stellung der Indices erreicht, so liest man bei beiden die Lage derjenigen oberen Blechkante, welche mit der Spitze in derselben Verticalebene liegt, an einer der beiden Skalen auf der Glasplatte ab. Die halbe Summe der beiden Ablesungen an der äusseren, dem Rande näher liegenden Skala, ist dann der gemessene Werth der numerischen Apertur des untersuchten Objektivs. Die Summe der beiden Ablesungen an der inneren, Gradskala, ist der Werth des Oeffnungswinkels in Luft (resp. desselben auf Luft bezogen).

Will man sich für die Bestimmung niedriger Aperturen (unter 0·4 bezw. 50°) — denen gewöhnlich auch entsprechend lange Brennweiten (7 *mm* und mehr) zugehören — auch des Apertometers bedienen, so stellt man die Beobachtung der Indexbilder etc. ohne Hilfsmikroskop, mit blossem Auge an. Man entfernt also, nach der Einstellung des Mikroskops auf das Loch in der Silberschicht, das Ocular und bringt an seiner Stelle ein Scheibchen aus Blech oder Pappe mit einem kleinen axialen Loch an, um eine constante centrale Stellung des Auges zu erreichen, mit welchem man dann durch dieses Loch einfach nach dem Objektivsystem hinsieht.

c) Ein drittes Verfahren endlich zur Bestimmung der Apertur besteht darin, dass man erst die Brennweite des Systems S nach einer der hierfür angegebenen Methoden bestimmt. Misst man dann mittelst eines Hilfsmikroskops die Grösse des Kreises, welcher bei voller Beleuchtung als lichte Oeffnung des Systems über demselben erscheint, mikrometrisch, so folgt aus diesem, $2p'$, und der Brennweite, f', des Systems dessen Apertur a gemäss Gleichung 5a, pag. 185,

$$a = \frac{p'}{f'}.$$

II. Bestimmung des Sehfeldes und der Vergrösserung virtueller Bilder.

Die Bestimmung des linearen Sehfeldes sowohl als der linearen Vergrösserung bei Projectionssystemen, also in reellen Bildern auf Schirmen, bedarf keiner Erläuterung; wir wollen uns daher hier ausschliesslich mit der Bestimmung derjenigen beschäftigen, welche bei den zu subjektivem Gebrauch dienenden Instrumenten statthat. Da die Verfahren zur Bestimmung des Sehfeldes ganz auf denjenigen zur Bestimmung der Vergrösserung beruhen, so wollen wir in erster Reihe diese betrachten.

a) Ein Verfahren, mehr zur Schätzung als zur Messung, ist dasjenige, welches die ersten wissenschaftlichen Benützer des Fernrohrs [1]) und zusammengesetzten Mikroskops [2]) anwendeten:

---

[1]) GALILEI, Nuncius sidereus, pag. 11.

[2]) HOOKE, Micrographia.

Beim Fernrohr ist dies Verfahren folgendes: Blickt man mit dem einen Auge durch das Instrument auf einen Gegenstand von periodischer Struktur (Gitter, Zaun, Mauerwerk oder dergl.) und mit dem andern gleichzeitig auf denselben Gegenstand ohne Bewaffnung, so kann man durch scheinbare Uebereinanderlegung des Bildes und Gegenstandes feststellen, wie viel Elemente des einen auf eine bestimmte Anzahl Elemente des andern fallen. Das Verhältniss beider Zahlen ist die angulare Vergrösserung. Eine Modification dieses Verfahrens, um es innerhalb des Laboratoriums ausführen zu können, ist von WALTENHOFEN[1]) angegeben. Dasselbe ist jedoch ebenfalls nicht bei Messungen anwendbar, an welche grössere Ansprüche in Bezug auf Genauigkeit gestellt werden.

Achtet man darauf, auf einen wie grossen Theil des Gegenstandes sich bei dieser Beobachtungsweise die Begrenzung des Sehfeldes (das Bild der Sehfeldblende) projicirt, so kann man aus der Grösse und Entfernung des Gegenstandes auch die angulare Grösse des Sehfeldes berechnen.

Beim Mikroskop benützt man als Objekt am besten ein solches von bekannten absoluten Dimensionen, z. B. ein Objektmikrometer. Indem man dann wieder darauf achtet, wie viel Theile dieses, durch das Instrument gesehen, sich auf eine in bestimmter Entfernung gehaltene mit dem andern, unbewaffneten, Auge betrachtete Skala von ebenfalls bekannter Theilung projiciren, erhält man das in der Ebene der Theilung stattfindende lineare Vergrösserungsverhältniss. Ist die Entfernung der Skala hierbei gleich k *mm*, so ist die in der normalen Entfernung $l = 250$ *mm* stattfindende lineare Vergrösserung im Verhältniss von $l : k$ grösser oder kleiner, als jene in der Entfernung k stattfindende.

b) Genauer werden beide Verfahren, wenn man die Projection des virtuellen Bildes auf den Schirm nicht mit dem andern Auge ausführt, dessen Haltung niemals eine genügend ruhige ist, sondern mit demselben Auge mit Hilfe einer Spiegelvorrichtung, wie sie zum Zeichnen von virtuellen Bildern dient.

Bei diesen Vorrichtungen (Zeichenapparat, *Camera lucida*) wie sie zuerst von WOLLASTON, AMICI und SÖMMERING vorgeschlagen bezw. construirt worden sind, wird in die Austrittspupille eine unter 45° gegen die Axe geneigte spiegelnde Fläche eingeschaltet. Entweder eine solche, welche etwa die Grösse dieser Austrittspupille hat, jedenfalls aber kleiner ist als die normale Augenpupille, sodass das Bild durch die Spiegelung an jener, ein aussen befindliches Objekt (Schirm, Skala) aber direkt durch die rings um den Spiegel herum in die Pupille des Auges eintretenden Strahlen gesehen wird (SÖMMERING's Spiegel). Oder es wird umgekehrt in der Belegung eines etwas grössern Spiegels ein centrales Loch ausgekratzt, welches kleiner als, die Augenpupille ist und die Austrittspupille des Instruments ganz oder theilweise zum Auge gelangen lässt; dann sieht man das Bild durch dieses Loch hindurch direkt an, den äusseren Schirm durch Vermittelung der Spiegelung (ABBE'scher Zeichenapparat. Bei andern solchen Apparaten wird mit einem Spiegel bezw. Reflexionsprisma die Austrittspupille bis zur Hälfte bedeckt, sodass man das Bild durch die freie Hälfte hindurch, den Schirm mittelst der Spiegelung sieht (oder umgekehrt). Bei einer letzten Klasse endlich wird ein halbdurchsichtiger Spiegel (Neutralglas, dünnes Glassplättchen) vor die ganze Austrittspupille gestellt, sodass man das Bild durch partielle Reflexion an diesem Spiegel, den Gegenstand durch ihn hindurchscheinend sieht (oder abermals umgekehrt).

Bei allen diesen Vorrichtungen wird also das virtuelle vom System gelieferte

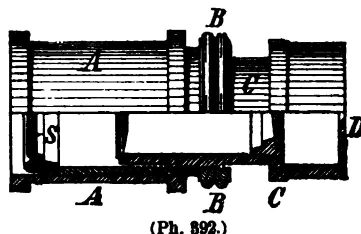
[1]). CARLS Repert. f. Exper. physik. 8, pag. 184. 1872.

Bild seinerseits virtuell in die Ebene eines ausserhalb liegenden Schirmes projicirt. In diesem kann man die Dimensionen des Bildes genauer markiren, z. B. auch das Bild erst nachzeichnen und hinterher ausmessen. Kennt man noch die Entfernung des Schirms von der Austrittspupille, so berechnet sich beim Fernrohr der Sehwinkel des Bildes bezw. der Gesichtsfeldblende, beim Mikroskop die in der nämlichen Entfernung statthabende lineare Vergrösserung[1]).

c) GAUSS bestimmte mittelst eines Theodoliten die angulare Grösse eines geeigneten sehr entfernten Objektes einmal direkt und dann durch das umgekehrte Fernrohr hindurch. In letzterem erscheint das Bild dann soviel Mal verkleinert, als das Fernrohr im gewöhnlichen Gebrauch vergrössert.

Da aber bei diesem Verfahren das Fernrohr mit ganz anderem Strahlengang in Anspruch genommen wird, als für welchen es eingerichtet ist, so werden Aberrationsrechte erheblichen Einfluss auf das Resultat gewinnen müssen[2]).

d) Endlich kann bei Teleskop-Systemen die Bestimmung auch auf den Satz von LAGRANGE bezw. auf die metrischen Beziehungen gegründet werden, welche zwischen Pupille und Blende in solchen Systemen statthaben (pag. 184). Wir fanden a. a. O., dass bei Systemen, die beiderseits von Luft begrenzt sind, die angulare Vergrösserung gleich dem Verhältniss der linearen Durchmesser von Eintritts- und Austrittspupille sei. $\Gamma = \frac{p}{p'}$. Misst man also nach dem oben angegebenen Verfahren die Eintrittspupille und, am einfachsten mittelst des hierzu von seinem Erfinder vorgeschlagenen RAMSDEN'schen Dynameters (oder Dynamometer?) (Fig. 392) die Austrittspupille des Teleskops, so ist ihr Verhältniss gleich der angularen Vergrösserung.



(Ph. 392.)

Man stellt zuerst mit der (durch die Blende D nach vorn telecentrisch gemachten) Lupe C auf die feine Skala S scharf ein. Dann bringt man diese Skala zur Coincidenz mit der Austrittspupille, indem man die Hülse B gegen A verschiebt, während man den äusseren Rand von A gegen das Ocular des zu untersuchenden Fernrohres schwach angedrückt hält.

Eine nicht zu vernachlässigende Vorsicht namentlich bei terrestrischen Fernrohren ist bei diesem Verfahren, dass man sich durch Betrachtung der Eintrittspupille mit der Lupe (z. B. mit dem Dynameter selbst) davon überzeugt, ob die äussere Objektivfassung wirklich die Eintrittspupille vorstellt, und nicht etwa weitere innerhalb des Systems angebrachte Blenden die Apertur begrenzen. Man setzt daher vortheilhaft vor die Oeffnung des Objektivs nacheinander mehrere Blenden von verschiedenem bekanntem Durchmesser und misst die Grösse ihres Bildes in der Austrittspupille. Das Vergrösserungsverhältniss der Pupillen muss dann in einem aplanatischen System unabhängig von ihrer absoluten Grösse constant sein.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Vergrösserung d. h. Brennweite eines zusammengesetzten Systems sich auch stets dadurch ermitteln lässt, dass man die Brennweiten und Orte der einander zugewandten Brennpunkte seiner Bestandtheile (Objektiv, Ocular) gemäss einer der oben hierfür angegebenen Methoden bestimmt.

---

[1]) v. JACQUIN-BAUMGARTNER u. v. ETTINGHAUSEN's Ztschr. 4, pag. 1. 1828, hat diese Methode wohl zuerst angewandt.

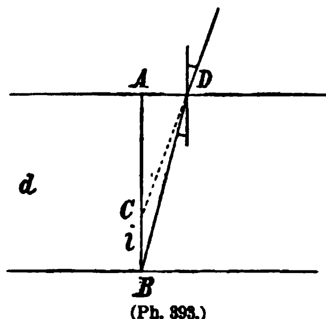
[2]) Die Anwendung eines Spectrometerfernrohres ist zwar methodisch einwandfrei, aber praktisch unbequem.

S. CZAPSKI.

Die dioptrischen Methoden zur Bestimmung von Brechungsindices und deren Ergebnisse.

A. Methoden.

Die zur Bestimmung des Brechungsindex[1]) eines Körpers eingeschlagenen Wege — ganz abgesehen von den nicht dioptrischen Bestimmungsmethoden (JAMIN, KETTELER, QUINCKE, WERNICKE, ARONS und RUBENS), bezüglich deren wir auf die betreffenden Artikel weiter unten verweisen — sind sehr zahlreich, da fast jede optische Relation, in welcher der Brechungsindex vorkommt, zum Ausgangspunkt einer neuen Methode genommen werden kann. Eine sehr grosse Verbreitung hat wegen ihrer hohen Leistungsfähigkeit die prismatische Ablenkungsmethode in ihren verschiedenen Abarten erfahren. Ein mindestens ebenbürtiger Platz ihr zur Seite ist durch die Arbeiten der letzten 20 Jahre der Totalreflexionsmethode zuerkannt worden. Zuerst sollen einige der weniger gebräuchlichen Methoden kurz besprochen werden.



(Ph. 393.)

Zur Bestimmung der Brechungsindices von planparallelen Platten hat zuerst DE CHAULNES[2]) eine Methode vorgeschlagen, welche diese Messung mit Hilfe eines Mikroskops auszuführen gestattet. Das Verfahren ist sehr einfach. Das Mikroskop wird zuerst auf eine beliebige, auf dem Objektträger befindliche Marke eingestellt, alsdann wird die Platte zwischen geschoben und nun das Mikroskop von Neuem auf die Marke eingestellt. Beträgt die (mikrometrisch gemessene) Verschiebung des Mikroskops l, die Dicke der Platte d (Fig. 393), so gilt angenähert für den Brechungsindex:

$$n = \frac{d}{d - l}.$$

Die Messung kann auch durch Einstellung des Mikroskops auf die obere und untere Fläche der Platte bewirkt werden. Man erhält dann die Differenz $d - l$ (AC in Fig. 393), die scheinbare Dicke der Platte, unmittelbar und der Brechungsindex ist gleich dem Quotienten aus wirklicher und scheinbarer Dicke.

BERTIN[3]) hat dieselbe Methode in einer etwas anderen Form angewandt, indem er nämlich allein durch Einschieben des Oculars das Mikroskop successive auf die den drei Punkten A, C und B entsprechenden Ebenen einstellte und mit

[1]) Ueber die Grundgesetze der Brechung vergl. oben pag. 14—37.

[2]) Duc DE CHAULNES, Mém. de l'Acad. des sc. 1767, pag. 431; Hist. de l'Ac. 1767, pag. 164. — Vergl. ferner: SABLER, POGG. Ann. 65, pag. 80. 1845; QUINCKE, POGG. Ann. 132, pag. 2. 1867; SORBY (grössere Genauigkeit), Fortschritte der Physik 1878, pag. 380; Bleckrode (Anwendung auf condensirte Gase, welche in zusammengekittete Glasgefässe mit parallelen Wänden eingeschlossen sind), WIED. Ann. 8, 400; Anwendung auf doppelt brechende Krystallplatten bei STOKES, Proc. Roy. Soc. 26, pag. 386. 1877; HECHT, Neues Jahrb. f. Min. 6. Beil., Bd. 258. 1889.

[3]) BERTIN, Ann. chim. et phys. 26, pag. 288. 1849; vergl. auch FORTHOMME, Nouveau procédé etc. Nancy 1860 (Flüssigkeiten).

Hilfe eines Mikrometers die Vergrösserungen maass Sind diese der Reihe nach G, g und γ, so erhält man:

$$n = \frac{G}{\gamma} \cdot \frac{G-g}{G-\gamma}.$$

Eine andere Art, den Brechungsindex von Platten mit parallelen Planflächen zu bestimmen, ist das von BERNARD[1]) beschriebene Verfahren. Es wird die Grösse der Verschiebung ermittelt, welche ein unter bestimmtem Winkel auf die Platte auffallender Strahl durch dieselbe erleidet. Zur Messung der Verschiebung dient bei dünneren Platten ein Mikroskop mit Ocularmikrometer, bei dickeren ein auf einem Maassstabe verschiebbares Beobachtungsrohr. Die Platte selbst ist drehbar an der Axe eines Theilkreises befestigt. Ein besonderes Interesse gewährt die Methode dadurch, dass man im Stande ist, durch Anwendung eines engen Spaltes bei hinreichend dicker Platte die FRAUNHOFER'schen Linien zu beobachten, d. h. also ohne Zuhilfenahme eines Prismas.

Die folgende Methode, eine Linse zu Messungen zu verwerthen, ist früher verschiedentlich benutzt worden[2]). Gegenwärtig findet dieselbe nur noch vereinzelt und auf Flüssigkeiten Anwendung[3]). Die Grundlage der Methode bildet die Beziehung, welche zwischen dem Brechungsindex und den Krümmungsradien der Linse einerseits und der Brenn- oder Bildweite andererseits besteht. Da man im Stande ist, nach bekannten Formeln die Brennweite aus den Radien und dem Index zu berechnen, so ist es auch umgekehrt möglich, wenn die Radien gegeben sind, durch Messung der Vereinigungsweiten der von einem bestimmten Punkte ausgehenden Strahlen den Brechungsindex zu finden. Die Bestimmung des letzteren kommt also wieder auf eine Längenmessung hinaus. Eigentliche Vortheile gewährt die Methode nicht.

Von besonderem theoretischen Interesse ist das von BILLET[4]) angewandte Verfahren, die Bestimmung der Brechungsindices und deren Veränderungen mit der Temperatur an dünnen Wasserstrahlen vorzunehmen, welche durch Ausfliessen des Wassers aus einem vertical gestellten Röhrchen gebildet werden. Die eigentliche Methode rührt ursprünglich von BABINET[5]) her, welcher dieselbe zum Studium der Regenbogenerscheinung benutzte. Das Beobachtungsverfahren bestand in der Hauptsache in der Anwendung eines schmalen Verticalspaltes, eines getheilten Kreises und eines kleinen Fernrohrs. BILLET suchte nicht nur durch Winkelmessungen am Regenbogen den Brechungsindex direkt zu bestimmen[6]), sondern auch die bei Anwendung kalter und heisser Wasserstrahlen

---

[1]) BERNARD, Compt. rend. 34 u. 41; POGG. Ann. 79, 145. 1854; Bd. 97, pag. 141 1856; in ähnlicher Art auf Flüssigkeiten angewandt von MONTIGNY, POGG. Ann. 123, pag. 581. 1864; FORTHOMME, l. c. Ferner über eine Verwendung des BERNARD'schen »Refractometers« zum Studium der Gesetze der Doppelbrechung vergl. BILLET, Compt. rend. 61, pag. 514; POGG. Ann. 97, pag. 148. 1856; ferner PICHOT, Compt. rend. 52, pag. 316. 1861.

[2]) Vergl. BREWSTER, Treatise on philos. Instrum., Edinb. 1814; BARLOW, Rules and Principles Philos. Trans. 1827; FORTHOMME l. c. 1860.

[3]) Eins der neueren Instrumente dieser Art findet sich bei PILTSCHIKOFF, Journal de Phys. élement. 1889, 4, pag. 193. (Ztschr. für Instrkde. 1889, pag. 488).

[4]) BILLET, Mém.. sur les dix neuf premiers arcs-en-ciel de l'eau, Ann. de l'École. Norm. V., pag. 67, 1868; vergl. ferner MILLER, POGG. Ann. 53, pag. 214. 1841; 56, pag. 358. 1842.

[5]) BABINET, POGG. Ann. 41. 1837, pag. 139.

[6]) Ueber Versuche, durch Zerstäuben von anderen Flüssigkeiten als Wasser die Abhängigkeit der Winkelgrössen von dem Brechungsindex der betreffenden Flüssigkeit experimentell zu prüfen, siehe HAMMERL, Wien. Ber. 86, 2. 1883, pag. 206; ferner TYNDALL, Phil. Mag. 9. 1884 u. 17. 1889, pag. 148.

hervorgerufenen Winkeländerungen zur Ermittlung der Temperaturvariationen der Brechungsindices zu verwerthen. Jedoch ist hierzu zu bemerken, dass schon für eine Messung am 1. Regenbogen die Auffindung des Brechungsindex an die Auflösung einer Gleichung dritten Grades geknüpft ist und dass sich die Rechnungen für die Regenbogen höherer Ordnung noch weiter verwickeln. Auch verlangt die richtige Lösung der Aufgabe eine vollständige Berücksichtigung der AIRY'schen Regenbogentheorie[1]).

Eine ebenfalls an die Regenbogentheorie anknüpfende Methode, den Brechungsindex von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche in Glasröhren eingeschlossen sind, und deren Anwendung auf condensirte Gase hat DECHANT beschrieben[2]).

Ein sehr sinnreiches und nützliches Verfahren ist das von S. EXNER[3]) zur Untersuchung kleiner Körper, Pulver, Niederschläge etc. angegebene. Wenn man nämlich die betreffenden Objekte in Flüssigkeiten von nahezu gleichem Brechungsvermögen einbettet und für eine geeignete, im Wesentlichen der TOEPLER'schen Schlierenmethode[4]) entnommene Beleuchtung Sorge trägt, so heben sich die Objekte selbst bei den minimalsten Unterschieden im Brechungsvermögen deutlich von ihrer Umgebung ab. Dabei macht es einen Unterschied für das Aussehen der Contouren, ob der Brechungsindex der Flüssigkeit grösser oder kleiner als der des Objektes ist. Indem man also das Objekt successive in Flüssigkeiten einbettet, deren Brechungsindices bekannt sind, und dann die Grenzen, zwischen denen der Brechungsindex eingeschlossen ist, immer enger zieht, erhält man schliesslich den Brechungsindex des betreffenden Körpers. Die Genauigkeit dieser Methode kann beliebig weit getrieben werden, sie richtet sich ganz nach der Genauigkeit, mit welcher die Brechungsindices der Einbettungsflüssigkeiten gemessen werden[5]). Eine Methode, die Brechungsindices pulverisirter Glaskörper mit Hilfe der Totalreflexionsmethode zu bestimmen, hat vor kurzem M. LE BLANC[6]) beschrieben.

Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens mit Hülfe eines Prismas.

1) Vorbemerkungen. Die Messung des Brechungsindex gründet sich auf die Bestimmung des »brechenden Winkels« des Prismas und des »Ablenkungswinkels«, um den ein im Hauptschnitt verlaufender Strahl nach seinem Austritt aus dem Prisma aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt ist.

Die Ausführung der Messung geschieht im allgemeinen mit Hülfe von Fernrohr und Theilkreis[7]). Zur Beleuchtung dient bei den drei nachstehend zuerst

---

1) Ueber neuere, zur Prüfung der Regenbogentheorie und für bestimmte FRAUNHOFER'sche Linien (spectrale Zerlegung des Regenbogens) ausgeführte Messungen siehe PULFRICH, WIED. Ann. 33, pag. 194. 1888.

2) DECHANT, Wien Ber. 90. pag. 539. 1881.

3) S. EXNER, Ueber ein Mikrorefractometer, Repert. der Physik 21. pag. 555. 1885. (Z. f. Instrumentenkunde 1886, pag. 139.)

4) TÖPLER, WIED. Ann. 27, pag. 556.

5) Die eigenthümlichen Erscheinungen, welche eintreten, wenn Pulver von sehr grosser Feinheit in Flüssigkeiten von derselben Lichtbrechung eingebettet sind, sind von CHRISTIANSEN beobachtet und WIED. Ann. 23, pag. 298, 439. 1885 beschrieben worden.

6) LE BLANC, Zeitschr. f. physik. Chemie X, 1892, pag. 433.

7) Ein auf nahezu gleichseitige Prismen beschränktes Verfahren, die Bestimmung der Winkel und Brechungsindices von Prismen mit Hülfe von Fernrohr und Scala vorzunehmen, ist von W. FEUSSNER, Sitz.-Ber. Marburg 1888, pag. 65, veröffentlicht worden.

beschriebenen Methoden ein feststehendes Collimatorrohr mit Spalt und Collimatorlinse. Die Strahlen passiren das Prisma als parallele Strahlenbündel und vereinigen sich im Ocularfeld des auf unendlich eingestellten Beobachtungsrohres zu einem Bilde des Spaltes, auf welches die daselbst befestigte Marke (Fadenkreuz) eingestellt wird. Die unter 5 stehende Methode bedarf des Collimators nicht.

Der gefundene Brechungsindex ist stets der relative, bezogen auf den Brechungsindex der umgebenden Luft gleich Eins. Behufs Reduction auf den leeren Raum ist der Index noch mit dem Brechungsindex der Luft — bei gewöhnlicher Temperatur mit 1·000294 — zu multipliciren.

Mit Hülfe der prismatischen Ablenkungsmethode ist die überwiegende Mehrzahl der bis jetzt bekannten Brechungsindices fester, flüssiger und zum Theil auch gasförmiger Körper (die beiden letzteren in Hohlprismen) von zahlreichen Forschern (FRAUNHOFER, BADEN-POWELL, DUTIROU, LANDOLT, MASCART, VAN DER WILLIGEN, DALE und GLADSTONE, RÜHLMANN, WÜLLNER u. A.) bestimmt worden.

Eine sehr umfangreiche Zusammenstellung von Brechungsindices der verschiedenen Körper und ein ziemlich vollständiges Literaturverzeichniss findet sich in den LANDOLT'schen Tabellen).

Die Untersuchung von Gasen (BIOT und ARAGO, DULONG, LE ROUX) ist natürlich mit erheblich grösseren Schwierigkeiten verbunden als diejenige fester oder flüssiger Körper, sie verlangt insbesondere eine äusserst sorgfältige Berücksichtigung der Druck- und Temperaturverhältnisse des Gases im Hohlprisma und der umgebenden Luft. An Genauigkeit stehen die mittelst der Ablenkungsmethode gefundenen Resultate für die Gase den nach Interferenzialmethoden gefundenen (KETTELER, JAMIN) erheblich nach. — Im ultravioletten Theile des Spectrums haben ESSELBACH, MASCART, SORET, SARASIN u. A. für eine Anzahl fester Körper Messungen angestellt. Auch im ultrarothen Theile ist die Kenntniss der Brechungsindices für mehrere durchsichtige Körper durch MOUTON, LANGLEY und RUBENS gefördert worden[1]). In methodischer Hinsicht erwähnenswerth an dieser Stelle ist bei den letztgenannten Untersuchungen der Ersatz des Fadenkreuzes durch ein Linearbolometer und die Verwendung des Princips, die Intensität einer Strahlung aus der Widerstandsänderung zu messen, welche der bestrahlte Leiter, das Bolometer, erleidet. — Ein hervorragendes theoretisches und practisches Interesse gewähren ferner die von KUNDT[2]) nach dem prismatischen Ablenkungsverfahren vorgenommenen Messungen der Brechungsindices verschiedener Metalle. Ist die Messung wie bei KUNDT auf Prismen von sehr kleinem brechenden Winkel — die Prismen wurden elektrolytisch als Doppelprismen auf platinirtem Glas niedergeschlagen — und auf kleine, wenig von Null verschiedene Einfallswinkel beschränkt, so erfolgt die Brechung in Metallprismen nach denselben Formeln wie bei durchsichtigen Körpern. Für grosse Einfallswinkel treten Complicationen ein, bezüglich deren auf die Arbeiten von VOIGT[3]), DRUDE[4]) und DU BOIS und RUBENS[5]) verwiesen wird.

2) Methode der minimalen Ablenkung (FRAUNHOFER). Das zuerst von

---

[1]) Ueber die von ARONS und RUBENS (WIED. Ann. 42, pag. 581. 1891) auf elektrische Wellen ausgedehnte Bestimmungsmethode von Brechungsindices von festen und flüssigen Isolatoren vergl. einen späteren Artikel.

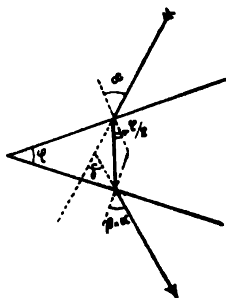
[2]) KUNDT, Sitz.-Ber. d. Berl. Acad. 1888. II. pag. 255 u. 1387.

[3]) VOIGT, WIED. Ann. 24, pag. 144. 1885.

[4]) DRUDE, WIED. Ann. 42, pag. 666. 1891.

[5]) DU BOIS und RUBENS, WIED. Ann. 41, pag. 507. 1891.

FRAUNHOFER gelehrte Verfahren[1]), den Brechungsindex einer Substanz zu bestimmen, welches seither fast ausschliesslich zu exacten Messungen benutzt worden ist, besteht darin, dass man dem Prisma diejenige Lage giebt, in welcher die Ablenkung der Strahlen ein Minimum ist (Fig. 394), Einfalls- und Austrittswinkel sind einander gleich, $\alpha = \beta$)[2]). Für die Genauigkeit der Messung ist diese Lage von grosser Wichtigkeit, sofern nur in der Minimalstellung des Prismas das Bild des durch das Prisma gesehenen Spaltes diesem vollkommen ähnlich ist. Ferner gestaltet sich auch die Berechnung des Brechungsindex wesentlich einfacher. Unter δ die Ablenkung eines bestimmten homogenen Strahlenbündels und unter φ den brechenden Winkel verstanden, ergiebt sich der Brechungsindex für die betreffende Lichtart zu:

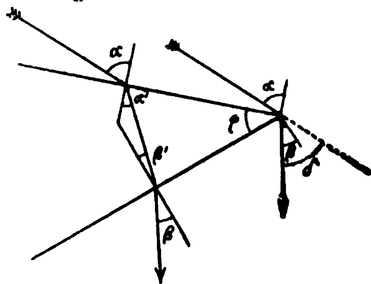


(Ph. 394.)

$$N = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Die Formel leitet sich in einfachster Weise aus dem Brechungsgesetz ab, sofern man berücksichtigt, dass der Strahl im Innern des Prismas mit der Normalen zur brechenden Fläche den Winkel $\varphi/2$ bildet und $\delta = 2\ (\alpha - \varphi/2)$ gesetzt werden kann.

Die Messungen, welche von FRAUNHOFER selbst an verschiedenen Gläsern und Flüssigkeiten vorgenommen wurden, besitzen, obschon sie mit einem etwas schwerfälligen Apparat ausgeführt wurden, bereits einen sehr hohen Grad der Genauigkeit und geben den ersten genaueren Aufschluss über die Grösse und den Verlauf der Dispersion in jenen Körpern. Gegenwärtig ist die Anwendung der Methode durch weit bequemer zu handhabende Instrumente — Spectrometer nach MEYERSTEIN, STEINHEIL, BABINET, V. v. LANG u. A. — erheblich erleichtert worden. Alle diese Apparate besitzen ausser dem Collimatorrohr ein um eine verticale Axe drehbares Fernrohr und einen mit Nonien oder Mikroskopen versehenen Theilkreis, in dessen Mitte auf einem besonderen Tischchen das Prisma seine Aufstellung findet. Um den Ablenkungswinkel zu messen, wird das Beobachtungsrohr zuerst auf den direkt gesehenen Spalt des Collimatorrohres (»gerade Durchsicht«) eingestellt und dann auf den durch das Prisma gesehenen. Die Bestimmung des Prismenwinkels erfolgt nach bestimmten goniometrischen Grundsätzen (nach zwei Methoden: Prisma fest und Fernrohr beweglich, oder Fernrohr fest und Prisma beweglich).



(Ph. 395.)

Es ist vielleicht noch erwähnenswerth, dass die Methode der minimalen Ablenkung als Specialfall der folgenden allgemeinen Methode betrachtet werden darf, die darin besteht, dass man für eine beliebig von der Minimalstellung abweichende Lage des Prismas

[1]) FRAUNHOFER, Denkschriften, München V., pag. 193. 1817. (Gesammelte Schriften, herausgegeben von LOMMEL 1888).

[2]) Eine Verallgemeinerung dieser Methode — der eintretende Strahl wird nach mehrfachen inneren Reflexionen so zum Austritt gebracht, dass seine ganze Ablenkung ein Minimum oder ein Maximum wird — hat SELLA, Rend. R. Acc. dei Linc. Roma 7, pag. 300. 1891; WIED. Beibl. 1892, pag. 423 (Anwendung auf Diamant), beschrieben.

die Ablenkung misst und nun das Prisma um eine parallel zur brechenden Kante gelegene Axe soweit dreht, bis die Ablenkung wieder die gleiche geworden ist. Der Erfolg ist derselbe, als wenn man bei festgehaltenem Prisma Einfalls- und Austrittswinkel mit einander vertauscht hätte. Bezeichnet man (Fig. 395) die Ablenkung mit δ' ($>\delta$), den Drehungswinkel mit ρ, so führt eine etwas umständliche Ableitung zu der folgenden Formel für den Brechungsindex

$$N = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta' + \varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \beta')},$$

worin $\alpha' - \beta'$ bestimmt ist durch

$$\tang\frac{1}{2}(\alpha' - \beta') = \frac{\tang\frac{1}{2}\rho}{\tang\frac{1}{2}(\delta' + \varphi)} \cdot \tang\frac{1}{2}\varphi.$$

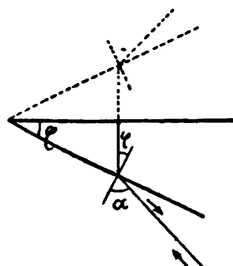
Wenn man in diesen Formeln $\rho = 0$, d. h. $\alpha' = \beta'$ setzt, so reduciren sich dieselben ohne Weiteres auf den früheren Ausdruck. Einen praktischen Vortheil gewährt die allgemeine Methode nicht.

Für Prismen von sehr kleinen brechenden Winkeln ist praktisch das Aufsuchen der Minimalstellung des Prismas werthlos, da die Ablenkung für kleine Einfallswinkel unabhängig von diesen ist. Für solche Prismen lässt sich einfacher schreiben

$$N = \frac{\delta + \varphi}{\varphi},$$

wobei die Grössen δ und φ in beliebigem Winkelmaass gemessen werden können (KUNDT, Brechungsindices der Metalle, l. c.)[1].

3) Methode des in sich zurückkehrenden Strahles (ABBE). Sehr nahe verwandt mit der Methode der minimalen Ablenkung ist das in seiner Grundlage von LITTROW[2]) erdachte und von ABBE weiter ausgebildete Verfahren[3]): die in das Prisma eintretenden Strahlen an der hinteren Fläche so reflectiren zu lassen, dass der austretende Strahl seiner Richtung und Lage nach mit dem eintretenden zusammenfällt, d. h. in sich zurückkehrt (Fig. 396)[4]). Collimator und Beobachtungsrohr sind hierbei in ein einziges feststehendes Fernrohr verschmolzen, was dadurch erreicht ist, dass der lichtgebende Spalt in der einen Hälfte des Ocularfeldes sich befindet, während die andere Hälfte für die Beobachtung frei bleibt.



(Ph. 396.)

Da nur das Prisma beweglich ist, so fällt das umständliche Aufsuchen des Minimums der Ablenkung hier ganz fort und es ist jedesmal nur eine einfache Einstellung des Spaltbildes vorzunehmen. Im Uebrigen entspricht der Strahlengang, wie aus der Figur zu ersehen ist, vollständig demjenigen in der Minimalstellung

1) Ueber den Einfluss der Fehler, denen die prismatische Ablenkungsmethode unterworfen ist (Krümmung der Prismenflächen etc.) vergl. W. VOIGT, Zeitschr. f. Kryst. 1880; A. und E. WEISS, Wien. Ber. 33, pag. 589. 1858; SIEBEN, Verh. d. Oberhess. Ges. f. Nat. u. Heilk. 29, pag. 149. 1884; WIED. Ann. 23, pag. 316. 1884.

2) LITTROW, Wien. Ber. 47, 2, pag. 26.

3) ABBE, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper, Jena 1874; vergl. ferner CZAPSKI, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1890, pag. 361 und PULFRICH, WIED. Ann. 45, pag. 609. 1892.

4) Denselben Strahlengang findet man bei der von DE WAHA (Journ. de Phys. VI. 186. 1877) zur Untersuchung von Flüssigkeiten in Vorschlag gebrachten Methode (Verwendung eines in die Flüssigkeit eintauchenden, drehbaren Spiegels, veränderlicher Prismenwinkel). Man vergleiche ferner PULFRICH »Totalreflectometer etc.« Leipzig 1890, pag. 136 (Verwendung der freien Oberfläche als brechende Fläche).

eines Prismas von genau dem doppelten brechenden Winkel, so dass also die Genauigkeit der Abbildung in beiden Fällen die gleiche ist. Die ABBE'sche Methode darf also den oben genannten Vorzug der FRAUNHOFER'schen Methode auch für sich in Anspruch nehmen, ohne aber an den Nachtheilen und Umständlichkeiten zu leiden, die jener noch anhaften.

Man erhält den Brechungsindex aus drei Einstellungen zu:

$$N = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

Ein weiterer Vorzug des Verfahrens besteht darin, dass es möglich ist, die Dispersionsbestimmung auf mikrometrischem Wege durch Differenzmessung und daher erheblich genauer auszuführen, als durch Ermittelung der Brechungsindices für einzelne Spectrallinien. Den Betrag β, um welchen sich die Einfallswinkel der einzelnen — an der Hinterfläche normal reflectirten — verschieden gefärbten Strahlenbündel von einander unterscheiden, erhält man hier ohne weiteres durch Drehung des Prismas und durch successives Einstellen der verschiedenen Spectrallinien, ablesbar an der Trommel einer Mikrometerschraube. Bezeichnet man den direct gefundenen Index für Natriumlicht mit N_0, so ergiebt sich die gesuchte Dispersion (Unterschied der Brechungsindices) zu:

$$N - N_0 = \frac{1}{\sin\varphi} \cos(\alpha_0 + \beta/2) \sin\beta.$$

Die numerische Berechnung gestaltet sich so wesentlich einfacher, als bei directer Bestimmung der verschiedenen Brechungsindices, sofern zur Ausrechnung der Differenz $N - N_0$ bis auf Einheiten der 5. Decimale von N genau meist schon eine vierstellige Logarithmentafel ausreicht[1]).

Auch bezüglich der Ermittlung des Temperatureinflusses auf Brechung und Dispersion[1]) verzichtet die Methode von vornherein darauf, die Brechungsindices für die verschiedenen Temperaturen einzeln zu messen; das Verfahren gestattet vielmehr die dem Einfluss der Temperatur unterworfenen Winkelgrössen in ihren Differenzen von einer Beobachtung zur anderen selbständig durch mikrometrische Messung zu bestimmen. Dieses Ziel ist dadurch erreichbar, dass das zu untersuchende Prisma mit einer Hilfsfläche versehen wird, die so gelegen ist, dass ihre Normale mit der Richtung des Beobachtungsrohres nahezu zusammenfällt. Bei festen Körpern wird die Hilfsfläche an das Prisma direkt angeschliffen, bei Flüssigkeiten an die vordere dem Fernrohr zugewandte Planparallelplatte. Es entsteht dann im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohrs ausser dem Spectrum noch ein von dem Temperaturwechsel in seiner Lage nicht beeinflusstes Spaltbild. Die Lagenänderungen der Spectrallinien zu dieser unveränderlichen Marke sind mikrometrisch messbar und gleich den zugehörigen Variationen, denen die Einfallswinkel der an der Rückfläche normal reflectirten Strahlen unterworfen sind. Man erhält die Temperaturvariation des Brechungsindex dirket zu:

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{\sin\varphi} \cos(\alpha_0 + \beta + \beta'/2) \cdot \sin\beta',$$

unter β' die beobachtete Variation des Winkels α und unter N_2 und N_1 die den beiden Temperaturen t_2 und t_1 zugehörigen Indices verstanden, letztere bezogen auf Luft von derselben Temperatur wie das Prisma. Die Aenderung des relativen Index pro 1° C. Temperatur ist dann

$$\Delta N = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1}.$$

1) ABBE, l. c., und PULFRICH, Einfluss der Temperatur auf Lichtbrechung des Glases, WIED. Ann. 45, pag. 609. 1892.

Die Kenntniss dieses Ausdruckes ist überall da von Interesse, wo, wie es in der Praxis meist der Fall ist, die Luft an den Temperaturvariationen des Körpers theilnimmt (Veränderung der Brennweite eines Objectivs etc.) Die wahre Aenderung des Brechungsindex wird indess durch eine andere Grösse dargestellt, die man erhält, wenn man die obigen relativen Indices N auf Luft von constanter Temperatur oder auf den leeren Raum reducirt. Man erhält dann, unter N den absoluten Index der Substanz und unter n denjenigen der Luft verstanden, wegen $\mathfrak{N} = N \cdot n$, für die Aenderung des absoluten Brechungsindex pro 1° C. den Ausdruck[1]):

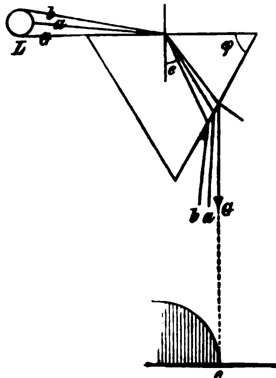
$$\Delta \mathfrak{N} = \Delta N + N \Delta n,$$

wo Δn die als bekannt vorausgesetzte Variation des Brechungsindex der Luft bedeutet (vergl. darüber weiter unten und l. c.).

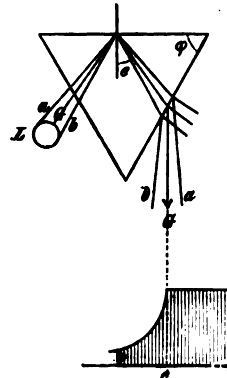
4) Die Methode des normal austretenden Strahles ist von geringem practischen Interesse. Sie beruht auf dem von MEYERSTEIN angegebenen Verfahren, das Prisma so zu placiren — in fester Verbindung mit dem Beobachtungsrohr und mit diesem um eine verticale Axe drehbar —, dass die vom Collimator kommenden Strahlen das Prisma normal zur Austrittsfläche verlassen. Bezeichnet man wieder mit δ die beobachtete Ablenkung, so wird

$$N = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

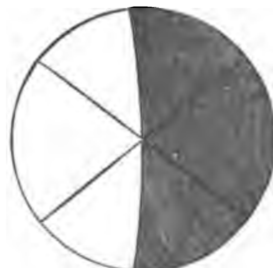
5) Methode des streifenden Eintritts und der Totalreflexion. Dem zu untersuchenden Prisma lässt sich endlich noch eine vierte Specialstellung geben durch Anwendung der von F. KOHLRAUSCH[2]) in Vorschlag gebrachten Methode des streifenden Eintritts (Einfallswinkel 90°). Der Name rührt daher, dass die Beleuchtung durch eine in der Verlängerung der einen Prismenfläche aufgestellte Flamme bewirkt wird (Fig. 397). Das frühere Collimatorrohr mit Spalt kommt hierbei ganz in Fortfall. Um die Unbequemlichkeit, welche durch die Nähe der Flamme entsteht, zu vermeiden, kann man letztere auch in grössere Entfernung bringen und die Strahlen mittelst einer Sammellinse convergirend auf die Prismenfläche senden. Sofern die Beleuchtung mit homogenem Lichte (Natriumflamme) geschieht, erscheint im Gesichtsfeld des auf unendlich eingerichteten Beobachtungsrohres ein breites Lichtband, welches auf der einen Seite wie mit dem Messer scharf abgeschnitten ist (Fig. 399). In der Trennungslinie zwischen hell und dunkel vereinigen sich alle diejenigen Strahlen, welche



(Ph. 397.)



(Ph. 398.)

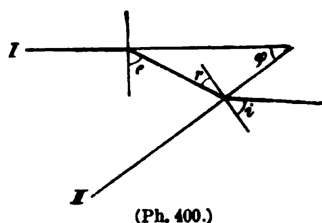

(Ph. 399.)

[1]) Bezüglich des von FIZEAU angewandten Verfahrens, die Veränderungen der absoluten Brechungsindices fester Körper durch Beobachtung der Lagenänderung von Interferenzstreifen zu bestimmen, sei auf einen späteren Artikel verwiesen.

[2]) F. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 16, pag. 603. 1882.

unter genau 90° auf die Prismenfläche fallen und unter dem Grenzwinkel (e) der Totalreflexion in das Prisma eintreten. Dieselbe Trennungslinie erhält man, wenn man die Hinterfläche des Prismas im reflectirten Lichte betrachtet (Fig. 398). Sofern sie hier die Gebiete der totalreflectirten und partiell reflectirten Strahlen von einander scheidet, wird sie allgemein als die Grenzlinie der Totalreflexion bezeichnet, gleichviel ob sie durch streifend eintretende oder reflectirte Strahlen erzeugt worden ist. Die Lage ist in beiden Fällen die gleiche, die Vertheilung der Helligkeiten zu beiden Seiten der Grenzlinie (in den obigen Figuren durch die beiden Curven graphisch veranschaulicht) ist aber für die reflectirten Strahlen eine ganz andere als für die gebrochenen Strahlen. Für den Ungeübten ist das Aufsuchen der Grenzlinie im reflectirten Licht meist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, während bei Anwendung streifenden Eintritts die Grenzlinie wegen gänzlichen Lichtmangels in der einen Hälfte des Gesichtsfeldes eclatant zu Tage tritt.

Die Bestimmung des Brechungsindex nach diesem Verfahren verlangt ausser der Kenntniss des Prismenwinkels φ noch die Messung des Winkels i (Fig. 400) welchen der Grenzstrahl mit der Normale zur Austrittsfläche bildet. Um letzteren zu finden, kann man in doppelter Weise vorgehen, entweder direkt mit Hülfe eines Fernrohrs mit sogen. GAUSS'schen Ocular, welches gestattet das Beobachtungsrohr senkrecht auf die Prismenfläche einzustellen, oder dadurch, dass man die Prismenflächen I und II nacheinander streifend beleuchtet und jedesmal das Fernrohr auf den an der gegenüber liegenden Fläche austretenden Grenzstrahl einstellt. Sei δ der gefundene Drehungswinkel des Fernrohrs, so folgt:



(Ph. 400.)

$$i = \pm [\tfrac{1}{2}(\delta + \varphi) - 90°].$$

Der Ausdruck hat zwei Vorzeichen, weil der Grenzstrahl je nach der Grösse des Winkels φ der brechenden Kante zu oder von ihr abgewandt ist: $e = \varphi \pm r$. Endlich führen die beiden Bedingungsgleichungen

$$N \cdot \sin e = 1 \quad \text{und} \quad N \cdot \sin r = \sin i$$

durch Elimination von e und r zu dem Ausdruck

$$\sqrt{N^2 - 1} = \frac{\cos \varphi \mp \sin i}{\sin \varphi}.$$

Vorstehend sind nur diejenigen Methoden zur Sprache gebracht, welche sich auf die Ermittelung des Brechungsindex mit Hülfe eines einzigen Prismas beziehen. Es sollen hier noch kurz einige der verschiedenen Prismencombinationen, welche zu Zwecken der refractometrischen Messung Verwendung gefunden haben, erwähnt werden: Ein Eintauchen des zu untersuchenden Prismas in ein von planparallelen Glasplatten geschlossenes Gefäss, oder was principiell dasselbe bedeutet, die Verbindung des Prismas mit einem anderen von entgegengesetzter Lage der brechenden Kante und annähernd gleicher Ablenkung, wodurch die Ablenkung des ersten Prismas entsprechend dem Brechungsindex der Umhüllungsflüssigkeit bezw. des zweiten Prismas mehr oder weniger aufgehoben wird, findet sich bei KUNDT, l. c. (Brechungsindices der Metalle), SORET, Arch. des soc. phys. et nat. 1871, POGG. Ann. Bd. 143 (anomale Dispersion von Farbstofflösungen); auf demselben Princip beruhen ferner die speciellen technischen Zwecken dienenden Refractometer: das Identimeter von TRANNIN, DOUMER, Journ. de Phys. 9, pag. 191. 1890. (Beibl. 1890, pag. 586), das Oelrefractometer von AMAGAT u. JEAN, WIED. Beibl. 1891, pag. 33, das Liquoskop von SONDÉN (Beibl. 1891, pag. 418, Zeitschr. f. Instr.-Kunde 1891, pag. 297), das Differenzrefractometer von ABBE, (Zeitschr. f. Instrkde. 1891, pag. 267). Die Verbindung des zu untersuchenden Flüssigkeitsprismas mit einem Glasprisma von gleichem brechendem Winkel hat DUPRÉ zur Construction eines besonderen Refractometers (PELLIN, Journ. de Phys. 8,

pag. 411. 1889; Beibl. 1890, pag. 35; Zeitschr. f. Instr.-Kunde 1890, pag. 908) verwandt. Die Beobachtung geschieht bei normalem Eintritt bezw. normalem Austritt, die Rechnung selbst ist nicht so einfach wie bei der FRAUNHOFER'schen Methode. Erheblich einfacher ist das von CHAPPUIS, Compt. rend. 114, pag. 286. 1889 (Beibl. 16, pag. 273) zur Untersuchung der Lichtbrechung verflüssigter Gase angewandte Verfahren, welches ebenfalls auf der Verbindung des Flüssigkeitsprismas mit einem Glasprisma beruht, vor dem sich ein sogen. Diasporameter befindet. Letzteres bildet mit dem Glasprisma zusammen ein Prisma von veränderlichem brechendem Winkel und es lässt sich demselben eine solche Lage geben, dass der normal in das Flüssigkeitsprisma (brechender Winkel A_1, Brechungsindex n_1) eintretende Strahl normal wieder das zweite Prisma verlässt. Bezeichnet man für das letztere den bekannten Brechungsindex des Glases mit n_2, den beobachteten Prismenwinkel mit A_2, so erhält man n_1 zu

$$n_1 = n_2 \frac{\sin A_2}{\sin A_1}.$$

Schliesslich mag noch erwähnt werden die von V. v. LANG zum Studium der Abhängigkeit der Brechungsindices der Luft von der Temperatur benützte Methode [Wien. Ber. 69 (2), 1874, pag. 451]. V. v. LANG stellt das Prisma so innerhalb des von planparallelen Glasplatten geschlossenen Luftraumes auf, dass beide Prismenflächen von dem parallelen Strahlenbündel getroffen werden, und beobachtet die beim Austritt aus dem Gefäss stattfindenden Richtungsänderungen der beiderseits reflectirten Strahlen.

Methoden der Totalreflexion zur Bestimmung der Lichtbrechung von Substanzen, welche mit einem stärker brechenden Mittel von bekanntem Brechungsindex in direkte Berührung gebracht werden.

1) Die WOLLASTON'sche Methode. In der oben (pag. 310) beschriebenen Form bietet die Methode der Totalreflxeion keinen bemerkenswerthen Vorzug vor anderen Methoden. Sie gestattet aber eine Nutzanwendung, die in neuerer Zeit eine hervorragend praktische Bedeutung angenommen hat, und welche für mancherlei Zwecke, namentlich für das Studium der Lichtbrechung in Krystallen, ein geradezu unersetzliches Hülfsmittel der Forschung geworden ist. Im Princip beruht das Verfahren auf der im Anfang dieses Jahrhunderts von LAPLACE[1]) vorgeschlagenen und später von WOLLASTON[2]) angewandten Methode, welche darin besteht, dass man die zu untersuchende Substanz (n) mit einem Prisma, dessen Brechungsindex N grösser sein muss als n und als bekannt vorausgesetzt wird, in direkte Berührung bringt und nun durch das Prisma den Eintritt der Totalreflexion beobachtet, den die an der Trennungsfläche reflectirten Strahlen erleiden. Zur Untersuchung von festen Körpern ist nur erforderlich, dieselben mit einer planen Fläche zu versehen und einen Flüssigkeitstropfen zwischen den Körper und das Prisma zu bringen. Die Flüssigkeitsschicht hat, sofern die beiden einschliessenden Flächen parallel zu einander gelegen sind, keinen Einfluss auf die Richtung der Strahlen, nur muss die Auswahl der Flüssigkeit so getroffen werden, dass der Brechungsindex derselben etwas grösser ist als derjenige des zu untersuchenden Objektes.

WOLLASTON bediente sich bei der Ausführung dieser Methode eines 90 grad. Prismas (Würfel), dessen untere Seite mit der zu untersuchenden Substanz in Berührung gebracht wurde. Später ist das Verfahren von MALUS[3]) auch auf Prismen mit beliebigem brechenden Winkel ausgedehnt worden[4]). Zur Berechnung des Brechungsindex dienen folgende Formeln

---

[1]) LAPLACE, Méc. cel. IV, pag. 241. 1800.

[2]) WOLLASTON, Phil. Trans. 1802, pag. 365—381; GILB. Ann. 31, pag. 252 u. 398. 1834.

[3]) MALUS, GILB. Ann. 225. 1834.

[4]) HECHT, Neues Jahrbuch f. Min. 1886. (2), pag. 186 (geeignete Form der Prismen).

$$N \cdot \sin e = n, \quad e = \varphi \pm r, \quad N \cdot \sin r = \sin i,$$

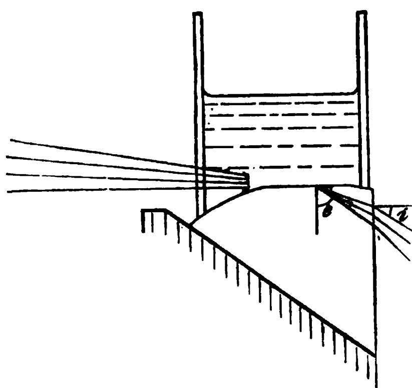
woraus sich für n ableitet:

$$n = \sin \varphi \sqrt{N^2 - \sin^2 i} \mp \cos \varphi \cdot \sin i.$$

Bezüglich des $\pm$ gilt wieder das oben Gesagte; für ein 90 grad. Prisma reducirt sich die Formel auf

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i}.$$

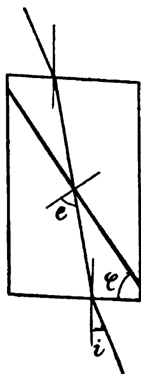
Um die Methode auch für streifenden Eintritt verwendbar zu machen[1]), ist nur nöthig die zu untersuchende Substanz so vorzurichten, dass der ungehinderte Eintritt des Lichtes erfolgen kann. Feste Körper werden zu dem Ende seitlich mit einer Eintrittsfläche versehen, die einigermaassen normal zur brechenden Fläche gelegen ist und mit jener in einer scharfen Kante zusammenstösst. Ist letzteres nicht der Fall, so ist die Erscheinung durch dunkle Schatten gestört und keine scharfe Grenzlinie sichtbar. Es gilt dies indessen nur für den direkten Uebergang der Strahlen aus Luft in das Objekt. Bettet man dagegen das Objekt in eine Flüssigkeit von nur wenig verschiedener Lichtbrechung ein, so können auch unregelmässig begrenzte Flächen zur Verwendung gelangen. Es empfiehlt sich zu dem Ende die Prismenfläche ringsum mit einer Facette und einer aufgekitteten Glasröhre zur Aufnahme der Flüssigkeit zu versehen. Die Figur 401 zeigt die vom Referenten zur Construction des Refractometers für Chemiker[2]) in Anwendung gebrachte Anordnung. Das hauptsächlich zur Untersuchung von Flüssigkeiten bestimmte Instrument bedient sich eines genau 90 gradigen Prismas. Im Interesse einer bequemen Handhabung ist diejenige Fläche des Prismas, mit der die Flüssigkeit in Berührung kommt, horizontal und nach oben gelegt. Auch vollzieht sich der streifende Eintritt über die Kittstelle der Glasröhre hinweg.



(Ph. 401.)

Auf die weitere Entwickelung, welche das WOLLASTON'sche Verfahren in der Anwendung auf doppeltbrechende Körper genommen hat, kommen wir später noch näher zurück.

2) Methoden durch Beobachtung der Grenzlinie der Totalreflexion im durchfallenden Lichte (ABBE, CHRISTIANSEN, WIEDEMANN-TRANNIN-KETTELER und QUINCKE)[3]). Die Bestimmung des Brechungsindex einer Substanz lässt sich auch in der Weise ausführen, dass man dieselbe als sehr dünne Schicht zwischen zwei Prismen aus stärker brechendem Glase einschliesst und die Grenzlinie der Totalreflexion an durchfallenden Strahlen beobachtet (Fig. 402). Die Methode hat vorzugsweise durch ABBE eine praktische Verwerthung gefunden.



(Ph. 402.)

Die Beobachtung kann in doppelter Weise ausgeführt werden: erstens dadurch, dass man das Verschwinden eines im Brennpunkt eines Objectivs befind-

1) PULFRICH, WIED. Ann. 30, pag. 193. 1887.

2) PULFRICH, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1888. pag. 47.

3) ABBE, l. c. Dieselbe Methode von CHRISTIANSEN in anderer Art angewandt, POGG. Ann. 143, pag. 258. 1871.

lichen Spaltes beobachtet — Collimator und Fernrohr stehen einander in unveränderlicher Lage gegenüber, während das Doppelprisma zwischen beiden um eine verticale Axe gedreht wird; — zweitens bei Anwendung diffuser Beleuchtung durch Einstellung der Grenzlinie der Totalreflexion auf das Fadenkreuz eines feststehenden Fernrohrs, vor dem das Doppelprisma drehbar angebracht ist. Zum Unterschiede von der WOLLASTON'schen Methode, bei welcher jedesmal das austretende Strahlenbündel eine andere Richtung als das eintretende hat, ist dasselbe hier keiner Richtungsänderung unterworfen. Im Uebrigen ist die Berechnung von n aus φ und i dieselbe wie oben.

Die Methode hat den grossen Vortheil, dass eine sichere Bestimmung des Brechungsindex schon mit einigen Tropfen der betreffenden Flüssigkeit ausgeführt werden kann. Auch die Handhabung der verschiedenen auf diesem Princip beruhenden Apparate ABBE'scher Construction ist eine ausserordentlich einfache, weshalb diese sogen. »Refractometer« eine vielseitige Anwendung für technische und wissenschaftliche Zwecke gefunden haben[1]).

Auf demselben Princip beruhen ferner die von E. WIEDEMANN[2]), TERQUEM und TRANNIN[3]) construirten Instrumente, ebenso das KETTELER'sche Refractometer[4]). Bei allen diesen Apparaten kommt eine zwischen zwei planparallelen Glasplatten befindliche dünne Luftschicht zur Verwendung. Das Plattenpaar ist um eine vertikale Axe drehbar und wird in die zu untersuchende Flüssigkeit eingetaucht, welch' letztere in einem Gefäss enthalten ist, das an zwei einander gegenüberliegenden Stellen mit planparallelen Glasplatten geschlossen ist. Das Ganze wirkt wie ein ABBE'sches Doppelprisma mit veränderlichem brechenden Winkel und normal austretendem Strahl. Aus zwei Einstellungen ergiebt sich sofort der Grenzwinkel e, und daraus der Index der Flüssigkeit mittelst $N \cdot \sin e = 1$. Die die Luftschicht einschliessenden Glasplatten üben auf die Richtung der Strahlen keinen Einfluss aus.

Das Verfahren, die Substanz als dünne Lamelle zwischen zwei Prismen einzuschliessen, ist später von QUINCKE[5]) auch auf feste Körper (Krystalle) ausgedehnt worden.

Gegen die sämmtlichen vorgenannten Methoden lässt sich der principielle Einwand erheben, dass streng genommen der Grenzstrahl der Totalreflexion bei dem Durchgang durch die dünne planparallele Schicht nur bei unendlich ausgedehnten Platten zur Beobachtung gelangen kann, sofern der Grenzstrahl parallel der Trennungsfläche verläuft und somit gar nicht aus der Flüssigkeit herauskommt. Nun aber liegen die Strahlen, welche wirklich zur Beobachtung gelangen, dem Grenzstrahl sehr nahe und es lässt sich der Einfluss dieser Fehlerquelle auf das Resultat practisch dadurch beseitigen, dass man die Dicke der Schicht möglichst klein macht (0·05 bis 0·1 *mm*).

Noch ein zweiter Umstand ist hierbei erwähnenswerth. In unmittelbarer Nähe der Grenzlinie ist nämlich die eine Hälfte des Gesichtsfeldes, infolge des Einflusses, welchen die dünne Lamelle auf die durchgehenden Strahlen ausübt, von einer grossen Anzahl von Interferenzstreifen durchzogen, die sämmtlich

[1]) Die Verwendung des ABBE'schen Refractometers für feste Körper (CARL's Repertorium d. Phys. 15, pag. 643. 1874) geschieht in der Weise, dass man das eine, lose, der beiden Prismen entfernt und dasselbe durch die zu untersuchende Objektplatte ersetzt.

[2]) E. WIEDEMANN, POGG. Ann. 158, pag. 375. 1876.

[3]) TERQUEM u. TRANNIN, POGG. Ann. 157, pag. 302. 1876.

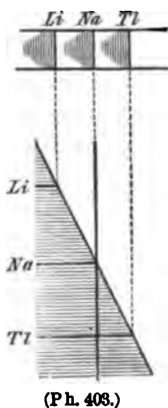
[4]) KETTELER, WIED. Ann. 33, pag. 360. 1888.

[5]) QUINCKE, Zeitschr. f. Kryst. 1, pag. 540. 1879.

parallel zur Grenzlinie gelegen sind. Je nach der Dicke der Schicht ist der Abstand der Interferenzstreifen von einander und von der Grenzlinie verschieden und man kann, wenn die Dicke der Schicht bekannt ist, statt der Grenzlinie auch die Interferenzstreifen selbst zur Einstellung verwenden. So ist KETTELER bei seinen Beobachtungen vorgegangen, auch findet sich bei ihm (l. c.) eine eingehende theoretische Behandlung der Erscheinung. Dieselbe Interferenzerscheinung macht sich im reflectirten Lichte bemerkbar. Auch diese Beobachtungsweise lässt sich zur Bestimmung der Lichtbrechung von Flüssigkeiten verwenden, wie v. LANG in einem dem KETTELER'schen Verfahren analogen gethan hat[1]).

3) Anwendung weissen Lichtes (spectrale Zerlegung und Compensation des Farbenstreifens). Bei den vorstehenden Erörterungen wurde vorausgesetzt, dass zur Beleuchtung nur monochromatische Flammen verwandt werden, weil nur dann, wenn die Lichtstrahlen homogen sind, eine scharfe Grenzlinie zu sehen ist. Wird die Beleuchtung mit weissem Lichte ausgeführt, so erscheint ein unbestimmter, mehr oder weniger breiter Farbenstreifen, auf welchen oder auf bestimmte Farben desselben eine genaue Einstellung nicht gut möglich ist. Das Auftreten dieses Farbenbandes erklärt sich dadurch, dass infolge der Verschiedenheit der Dispersion von Prisma und Substanz der Grenzwinkel der Totalreflexion für jede einzelne Strahlengattung ein anderer ist. Die Grenzlinien lagern sich successive nebeneinander, infolgedessen jede einzelne der Wahrnehmung entzogen ist. Der Farbenstreifen hat entweder eine vorwiegend blaue (NEWTON'scher blauer Bogen) oder eine vorwiegend rothe Färbung, je nachdem das blaue oder rothe Ende des Spectrums am wenigsten durch Uebereinanderlagerung der sichtbaren Strahlen betroffen worden ist. Dieser Unterschied kommt daher, dass die Dispersion der Substanz grösser oder kleiner sein kann als die des Prismas; je nachdem folgen die Grenzlinien in der einen oder anderen Richtung aufeinander.

Man kann die sämmtlichen Grenzlinien wieder sichtbar und damit der Messung wieder zugänglich machen, wenn man an die Stelle des Fadenkreuzes im Ocularfeld des Beobachtungsrohres den Spalt eines geradsichtigen Spectroskopes bringt. Es enthält dann das Spectrum immer nur diejenigen Strahlen, die im Spalte vorhanden sind. Liegt der Spalt genau parallel zu den Grenzlinien, so erscheint das Spectrum einseitig parallel zu den Spectrallinien abgeschnitten. Behufs Einstellung auf eine bestimmte Farbe lässt man die Grenzlinie mit der betreffenden Spectrallinie zusammenfallen.



(Ph. 403.)

Der Spalt kann auch senkrecht zu den Grenzlinien gelegt werden (Princip der gekreuzten Spectren, FRAUNHOFER, KUNDT). Durch das Spectroskop gesehen, erscheinen dann sämmtliche Grenzlinien als eine einzige das Spectrum schräg abschneidende Linie (Fig. 403). Als Einstellungsmarke dient ein vor dem Spalt befestigter Querfaden. Derselbe erscheint im Spectrum als eine dunkle, senkrecht zu den Spectrallinien gelegene Gerade, die man, behufs Einstellung auf eine bestimmte Farbe, mit dem Durchschnittspunkt von Spectrallinie und Grenzlinie zusammenbringt. Statt des Querfadens ist mit grossem Vortheil auch ein zweiter, senkrecht zum ersten gelegener Spalt zu verwenden (Kreuz-Russspalt). Es ist hierbei nothwendig, um die Grenzlinie an jeder einzelnen Stelle des Spectrums scharf hervortreten zu lassen, gleichzeitig noch weisses Licht zu verwenden. Bei Anwendung von Sonnenlicht dienen die einzelnen FRAUNHOFER'schen Linien zur Einstellung.

[1]) V. v. LANG, Wien. Ber. 84, II, pag. 361. 1881.

Während WOLLASTON noch mit dem von einer hellen Wolke reflectirten und unzerlegten Sonnenlichte arbeitete, hat die beschriebene spectrale Zerlegung in letzter Zeit vielfache Verwendung gefunden[1]).

Statt den Farbenstreifen zu zerlegen, lässt sich derselbe auch compensiren. Das Verfahren ist von ABBE angegeben und bei der Construction der oben erwähnten Refractometer verwerthet worden. Wenn man nämlich die aus den Refractometerprismen austretenden Strahlen, bevor dieselben auf das Objektiv des Beobachtungsrohres fallen, durch ein oder zwei geradsichtige Spectroskope (sogen. AMICI'sche Prismen) gehen lässt, welche um die optische Axe des Beobachtungsrohres drehbar gemacht sind, so lässt sich denselben eine bestimmte Stellung geben, in welcher die durch Totalreflexion entstandene Dispersion gerade compensirt ist durch die in entgegengesetzter Richtung wirkende prismatische Dispersion der AMICI-Prismen. Sämmtliche Strahlenbündel gehen dann in gleicher Richtung weiter und erzeugen im Beobachtungsrohr eine scharfe und völlig farblose Grenzlinie, auf die mit derselben Sicherheit eingestellt werden kann, wie bei Verwendung monochromatischer Flammen. Die Messung gilt natürlich nur für diejenige Lichtart (*D*-Linie), für welche das AMICI-Prisma geradsichtig ist. Ausser der grossen Bequemlichkeit, welche die Benutzbarkeit des gewöhnlichen Tages- oder Lampenlichtes gewährt, erlaubt dieses Verfahren auch eine Bestimmung der mittleren Dispersion, sofern die an einer Trommel abgelesene Stellung des Compensators in einer hier nicht näher zu besprechenden Weise dazu benutzt wird, die Differenz der Brechungsindices für die beiden Spectrallinien *C* und *F* zu bestimmen.

Die Achromasie der Grenzlinie der Totalreflexion lässt sich in der Anwendung des ABBE'schen Refractometers auf bestimmte Substanzen auch ohne einen besonderen Compensator, durch die Refractometerprismen selbst herbeiführen, indem nämlich die Farbenzerstreuung bei der totalen Reflexion zwischen Glas und der betreffenden Substanz gerade compensirt wird durch die Farbenzerstreuung an der Austrittsfläche des Doppelprismas nach der Seite des Beobachtungsrohres. Ein unter diesem Gesichtspunkte speciell für die Zwecke der refractometrischen Butterprüfung ausgeführtes Refractometer ABBE'scher Construction ist kürzlich von der Firma CARL ZEISS in Jena in den Handel gebracht worden. Die Unterscheidung gründet sich sowohl auf die Verschiedenheit der Lage (anderer Index) als auch auf die Verschiedenheit im Aussehen (andere Dispersion) der für Naturbutter völlig farblos gemachten Grenzlinie.

4) Die Grenzcurven der Totalreflexion für einfach und doppeltbrechende Körper; Messung der Hauptbrechungsindices. Die Grenzlinie der Totalreflexion besitzt im Allgemeinen eine bereits im Gesichtsfeld des Beobachtungsrohres deutlich erkennbare Krümmung. Lässt man das Fernrohr fort und betrachtet die Grenzlinie mit blossem weitsichtigen Auge, so ist die Krümmung deutlicher erkennbar, und wenn man das Auge möglichst nahe an die Prismenfläche heranbringt, so überblickt dasselbe sogar die Grenzlinie in einer Ausdehnung von nahezu 180°. Wäre man im Stande das Auge ganz in das Prisma hineinzutauchen, so würde dasselbe den ganzen Verlauf der Grenzlinie ringsum überschauen können.

Diese sogen. Grenzcurve der Totalreflexion besitzt nicht für alle Körper

---

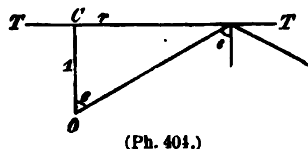
[1]) ABBE, l. c., MACH u. ARBES, Rep. d. Phys. 22, pag. 31. 1886; PULFRICH, WIED. Ann. 30, pag. 487. 1887; NORRENBERG, Inaug.-Diss. Bonn. WIED. Ann. 34, pag. 843. 1888; MÜHLHEIMS, Inaug.-Diss. Bonn. Zeitschr. f. Krystallogr. XIV. 1888.

gleiche Form. Für isotrope Körper ist dieselbe stets eine vollkommene Kreislinie, weil der Grenzwinkel der Totalreflexion nach allen Richtungen immer der gleiche ist. Nur der Durchmesser des Kreises variirt mit dem Brechungsindex der Substanz. Er wird um so grösser, je mehr der Index (n) der Substanz dem Index (N) des stärker brechenden Mittels näher kommt und wird für $n = N$ unendlich gross.

Für doppeltbrechende Körper sind die Grenzcurven natürlich nicht mehr so einfacher Natur. Im Allgemeinen treten hier zwei Curven auf, die sich gegenseitig umschliessen oder durchschneiden, und deren Form und gegenseitige Lage von der Art der Doppelbrechung der Krystalle, von der Lage der untersuchten Fläche zu den optischen Symmetrieaxen und endlich von dem Brechungsindex (N) des die Krystallfläche bedeckenden Mittels abhängen.

Im Einzelnen ist die Form der Grenzcurven für alle hauptsächlich in Betracht kommenden Fälle von DE SÉNARMONT[1]) bereits im Jahre 1856 in geometrischer Form aus den Gesetzen der Doppelbrechung abgeleitet worden. Ihm selbst erschienen die Schwierigkeiten einer experimentellen Behandlung noch als unüberwindlich, und erst in jüngster Zeit, nachdem das Beobachtungsverfahren eine wesentliche Vereinfachung und Vervollkommnung erfahren hatte, ist es möglich gewesen, die DE SÉNARMONT'schen Constructionen und die inzwischen besonders durch LIEBISCH[2]) geförderte Theorie aller hierher gehörigen Erscheinungen der Totalreflexion an Krystallen durch das Experiment zu prüfen[3]).

Die Art, wie die complicirten Vorgänge der Lichtbewegung in Krystallen durch die Grenzcurven der Totalreflexion zum Ausdruck gelangen, ist eine ausserordentlich einfache und übersichtliche. Sieht man von den Modificationen[4]) ab, denen die Grenzcurven durch die Modification des Brechungsindex N unterworfen sind, und nimmt man letzteren hinreichend gross, d. h. grösser als den grössten Brechungsindex des Krystalls, so besitzen die Grenzcurven eine sehr nahe Verwandtschaft mit den Schnittcurven durch die sogen. FRESNEL'sche Wellenfläche (vergl. unter Doppelbrechung).



(Ph. 404.)

Um diesen Zusammenhang einigermaassen überschauen zu können, setzen wir voraus, dass das beobachtende Auge (in O der Figur 404) von der Krystallfläche TT den constanten Abstand 1 habe. Unter Grenzcurve sei alsdann die Schnittlinie verstanden, welche der Strahlenkegel aller in O zusammentreffenden Grenzstrahlen mit der Krystallfläche bildet. Es ist dann der Radiusvector der Grenzcurve durch die einfache Beziehung definirt:

$$r = \tang e.$$

Andererseits ist die Lichtgeschwindigkeit v der in den Schnittgeraden von Einfallsebene und Krystallfläche, d. h. in der Richtung des Radiusvector sich fortpflanzenden Wellenebene für alle isotropen Körper und auch für die optischen

[1]) DE SÉNARMONT, Compt. rend. 42, pag. 65. 1856. (POGG. Ann. 97, pag. 605. 1856); Journ. de Math. 1, pag. 305.

[2]) LIEBISCH, N. Jahrb. f. Min. 1, pag. 246. 1885; 2, pag. 203; N. Jahrb. f. Min. 2, pag. 52. 1886. — Eine zusammenhängende Darstellung des Gegenstandes findet sich in dessen Physik. Krystallographie, pag. 404—427. 1891.

[3]) W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 6, pag. 86. 1879; WIED. Ann. 7, pag. 427. 1879; DANKER, N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. 4, pag. 265. 1885; PULFRICH, N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. 5, pag. 182. 1887; NORRENBERG, Inaug.-Dissert. Bonn 1888 (WIED. Ann. 34, pag. 843. 1888.

[4]) DE SÉNARMONT, l. c. PULFRICH, l. c. NORRENBERG, l. c.

Symmetrieebenen doppeltbrechender Körper mit dem Grenzwinkel e durch die Beziehung

$$v = \frac{1}{n} = \frac{1}{N \cdot \sin e}$$

verbunden. Bei beliebiger Lage der Schnittfläche durch den Krystall hat diese Beziehung nur noch für bestimmte Einfallsebenen strenge Gültigkeit. Wohl lässt sich auch für die übrigen Einfallsebenen ein Ausdruck von der Form $\frac{1}{N \cdot \sin e}$ aufstellen, doch ist derselbe dann nicht mehr einer Lichtgeschwindigkeit gleich wie vorher, sondern die Beziehungen zwischen N, e und den Hauptlichtgeschwindigkeiten sind weit verwickelterer Natur.

Mit dieser Einschränkung leitet sich aus den beiden Gleichungen ab:

$$1 = r \cdot \sqrt{N^2 v^2 - 1} \quad \text{oder} \quad r = \frac{n}{\sqrt{N^2 - n^2}}.$$

Sofern in dieser Gleichung N nur immer grösser bleibt als jedes vorkommende n, bleibt der Radiusvector r der Grenzcurve dem Brechungsindex n angenähert proportional. Ersetzt man allgemein die Geschwindigkeiten v durch ihre Reciprokalwerthe n, wodurch sich die sogen. Wellenfläche in eine Indexfläche verwandelt, so kann man sagen, dass die Grenzcurven der Totalreflexion mit sehr grosser Annäherung einen der Schnittcurve durch die Indexfläche proportionalen Verlauf haben. Ganz genau ist diese Proportionalität nicht, weil der Nenner der obigen Gleichung sich ja auch ändert, infolgedessen die einzelnen Theile der Grenzcurve in ihrer relativen Lage zu einander etwas weiter auseinander gerückt sind, als es bei den Schnittcurven der Index- oder Wellenfläche der Fall ist. Im Uebrigen aber besitzt jedesmal dann, wenn der Brechungsindex ein Maximum oder ein Minimum erreicht, auch der zugehörige Radiusvector der Grenzcurve ein Maximum oder ein Minimum, so dass also der Verlauf der beiderseitigen Curven im Wesentlichen derselbe bleibt.

Aus der Beobachtung der Maximal- bezw. Minimal-Werthe für den Grenzwinkel ergeben sich nun ohne Weiteres die Hauptbrechungsindices des doppeltbrechenden Krystalls. Für einaxige Krystalle besteht die Grenzcurve ausser dem Kreise für den ordentlichen Strahl noch aus einer Ellipse für den ausserordentlichen (veränderlichen) Strahl. Die eine der beiden Halbaxen der Ellipse ist für alle durch den Krystall gelegte Ebenen constant und liefert den ausserordentlichen Brechungsindex, die andere ist von Fläche zu Fläche verschieden und kann zur Ermittelung der Lage der Fläche zur optischen Axe benutzt werden.

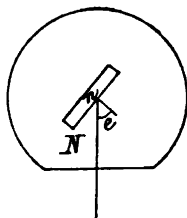
Auch für zweiaxige Krystalle genügt eine einzige, beliebig[1]) durch den Krystall gelegte Schnittebene zur Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices. Die Grenzcurven sind hier im Allgemeinen zwei Curven von elliptischer Gestalt, mit je einem Maximum und Minimum für den Grenzwinkel e. Von den 4 Werthen für das Maximum und Minimum, die sich für bestimmte Schnitte (Hauptschnitte) auf drei reduciren, gehören jedesmal drei den Hauptbrechungsindices an. Der vierte Werth ist mit der Lage der Fläche veränderlich. Kennt man die Orientirung der Fläche zu den Symmetrieaxen des Krystalls, so genügt eine einfache

---

[1]) In dieser Allgemeinheit erst vor kurzem erwiesen; vergl.: CH. SORET, Arch. des sciences phys. et nat. 20, pag. 263. 1888 (Compt. rend. 107, pag. 176 u. 479. 1888); GROTH's Zeitschrift für Kryst. XV., pag. 45. 1889; PULFRICH, WIED. Ann. 36, pag. 561. 1889; PERROT, Arch. des sc. phys. et nat. 21, pag. 113. 1889.

Ueberlegung, um die Entscheidung zwischen den beiden intermediären Werthen (denn nur diese beiden kommen in Betracht) zu treffen. Im anderen Falle kann eine zweite ebenfalls beliebig gelegene Fläche des Krystalls verwandt werden.

5) Die Vervollkommnung der WOLLASTON'schen Methode. Nachdem bis Ende der siebenziger Jahre das WOLLASTON'sche Verfahren zur Bestimmung der Brechungsverhältnisse von Krystallen so gut wie gar keine praktische Verwerthung gefunden hatte [1]), machte die Sache den ersten wesentlichen Fortschritt, als F. KOHLRAUSCH im Jahre 1878 das nach ihm benannte Totalreflectometer construirte [2]). Bei diesem Apparate ist die zu untersuchende Objektplatte, um eine vertikale Axe drehbar, in eine stärker brechende Flüssigkeit aufgehängt. Die Grenzstrahlen der Totalreflexion treten ohne Richtungsänderung (Fig. 405) aus dem mit einer planen Glasplatte versehenen Flüssigkeitsgefäss in das feststehende Beobachtungsrohr. Aus zwei Einstellungen (rechts und links) ergiebt sich sofort der Grenzwinkel e. Die später von W. KOHLRAUSCH dem Apparate beigefügte Vorrichtung, welche die Krystallfläche in ihrer Ebene um eine horizontale Axe zu drehen gestattet, ist von C. KLEIN [3]) und GROTH [4]) im einzelnen noch verbessert worden. Mit diesem Apparat hat nicht allein der Erfinder selbst eine grosse Anzahl von Messungen ausgeführt, auch später ist der Apparat wiederholt zur Bestimmung der Hauptbrechungsindices von Krystallen und zur Ausmessung von Grenzcurven verwandt worden.



(Ph. 405.)

Die Methode hat indess einige Nachtheile. Erstens bedarf sie stets grösserer Mengen der stark brechenden Flüssigkeit zur Füllung des Gefässes. Ferner ist wegen der beträchtlichen Schwankungen, denen der Brechungsindex der Flüssigkeit infolge von chemischen Veränderungen oder auch nur von Temperaturschwankungen unterworfen ist, die jedesmalige Neubestimmung des Brechungsindex der Flüssigkeit unerlässlich [5]). Endlich sind auch die Dimensionen des Azimutalkreises durch die Gefässwände erheblich eingeengt, infolge dessen die Ansprüche an die Genauigkeit der Messung in dieser Hinsicht keine allzu grossen sein dürfen.

Das eigentliche WOLLASTON'sche Verfahren (mit Prisma) hat zuerst K. FEUSSNER [6]) zur Untersuchung doppeltbrechender Krystalle verwendbar gemacht und zwar durch Anbringung einer Vorrichtung, welche gestattet, die mit dem Prisma in Berührung gebrachte Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene messbar zu drehen. Einen vollkommeneren Apparat zu demselben Zweck hat FUESS nach Angaben von LIEBISCH [7]) construirt, wodurch die Genauigkeit der Messung erheblich ge-

[1]) Die Bestimmung der Hauptbrechungsindices doppeltbrechender Krystalle geschah meist nach dem prismatischen Ablenkungsverfahren, obschon dasselbe auch nicht angenähert so einfache Verhältnisse darbietet, wie die Totalreflexionsmethode und zur Bestimmung der Haupt-Brechungsindices ein oder mehrere (bei zweiaxigen Krystallen) genau orientirte Prismen verlangt. Im einzelnen sei dieserhalb auf TH. LIEBISCH, Physikalische Krystallographie, pag. 376—404. 1891, verwiesen.

[2]) F. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 4, pag. 1. 1878.

[3]) Neues Jahrb. f. Min., pag. 880. 1879.

[4]) GROTH, Physik. Krystallogr.

[5]) Um sich von diesen Schwankungen frei zu machen, brachte CH. SORET (Compt. rend. 95, pag. 517. 1882) in die Flüssigkeit ein Glasprisma von bekanntem Index, und beobachtete nun die Lage der Grenzlinie abwechselnd an dem Objekt und an dem Prisma.

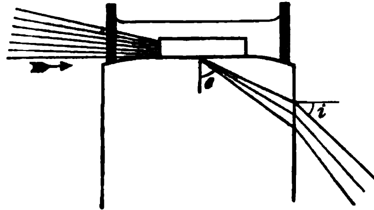
[6]) K. FEUSSNER, Diss. Marburg 1882.

[7]) LIEBISCH, Zeitschr. f. Instrumentenkunde pag. 185. 1884; pag. 13, 1885.

steigert wurde. Der Apparat ist in dieser Form namentlich von DANKER (l. c.) zu genauen Messungen verwendet worden. Den Dimensionen des Azimutalkreises sind zwar jetzt keine Grenzen gesetzt, aber dem Verfahren haftet noch der Nachtheil an, dass die zu untersuchende Objektplatte jedesmal an die Drehvorrichtung befestigt werden muss und dass sehr leicht, wenn die Drehung nicht mit der nöthigen Vorsicht geschieht, Beschädigungen der Prismenfläche oder des Objektes eintreten können.

Im Jahre 1886 ist es mir gelungen[1]), die vorstehend bezeichneten Uebelstände mit denen die einzelnen Methoden und Apparate behaftet sind, dadurch zu beseitigen, dass ich das Prisma der WOLLASTON'schen Methode durch einen um seine Längsaxe rotirenden Glascylinder mit polirter Mantelfläche ersetzte. Der Cylinder steht aufrecht und ist oben senkrecht zur Axe mit einer planpolirten Fläche versehen, auf welche die zu untersuchende Krystallplatte einfach aufgelegt wird (s. Fig. 406). Im Uebrigen ist die Wirkungsweise des Cylinders die gleiche wie die eines 90 grad. Prismas und die Berechnung des Brechungsindex erfolgt nach der oben erwähnten Formel $n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i}$.

Die Vortheile, die durch die Anwendung eines solchen, die Drehung der Krystallplatte vermittelnden Grundkörpers für die Totalreflexionsmethode herbeigeführt werden, sind folgende: Nicht nur legt sich die Krystallfläche an die ein für allemal justirte Planfläche des Cylinders ohne Weiteres an, auch ist die Möglichkeit einer Beschädigung des Objektes oder einer Verrückung desselben durch die Drehung des Cylinders jetzt von vornherein ausgeschlossen. Ob die beiden Flächen einander parallel gerichtet sind, ergiebt sich sofort bei der Drehung des Cylinders aus der Beobachtung der Grenzlinie selbst. Durch Ablesung in den beiden um 180° auseinander liegenden Azimuten lässt sich die Messung von einer etwa vorhandenen schiefen Lage der Objektfläche befreien. Endlich können die Grenzcurven der Totalreflexion in ihrer ganzen Ausdehnung und in ihrem Verlauf unmittelbar am Auge vorübergeführt werden[2]), was mit dieser Einfachheit und Sicherheit bei keiner anderen der bisherigen Untersuchungsmethoden möglich war. Man kann wohl behaupten, dass erst durch die Einführung des rotirenden Grundkörpers die Totalreflexionsmethode diejenige praktische Bedeutung erlangt hat, die ihr vom principiellen Standpunkte schon längst zuerkannt worden war[3]).



(Ph. 406.)

Was insbesondere die Wirkungsweise des Apparates anbetrifft, so ist der Einfluss, den die Mantelfläche des Cylinders auf die Deutlichkeit der Grenzlinien ausübt, nicht für alle Grenzcurven die gleiche. Vollkommen scharf erscheinen zunächst alle genau kreisförmigen Grenzcurven einfach und doppelt

---

[1]) WIED. Ann. 30, pag. 193, 317, 487; 31, pag. 724. 1887; 34, pag. 326. 1888; 36, pag. 561. 1889. Eine zusammenhängende Darstellung des Gegenstandes habe ich in der Schrift »Der Totalreflectometer« etc. Leipzig 1890, zu geben versucht.

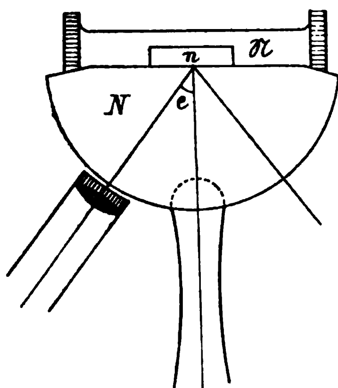
[2]) Ueber die Einrichtung des Apparates zu Demonstrationszwecken vergl. die angeführte Schrift pag. 22.

[3]) Bezüglich der Genauigkeit der Messungen, welche den sorgfältigsten spectrometrischen Messungen nur wenig nachstehen, vergl. insbesondere MÜLHEIMS (Inaug.-Diss. Bonn 1888) welcher den Apparat zu direkten Bestimmungen des Axenwinkels zweiaxiger Krystalle nach der Totalreflexionsmethode verwendet hat, und DUFET, Scéances de la Soc. franc. de Phys. pag. 143. 1890 (WIED. Beibl., pag. 283. 1891).

brechender Körper. Für die von der Kreisform abweichenden Grenzcurven (Ellipse, Gerade und Hyperbel) doppeltbrechender Körper haben nur noch die den Maximal- und Minimalwerthen des Grenzwinkels zugehörigen Theile der Grenzcurve (vergl. oben) die gleiche ungeminderte Schärfe. Alle dazwischen gelegenen Theile erscheinen verschwommen und zwar um so mehr in denjenigen Theilen der Curve, welche die grösste Neigung gegen die Horizontale besitzen.

Für die Ermittelung der Hauptbrechungsindices der Krystalle ist diese Wirkungsweise des Cylindermantels insofern von Nutzen, weil dadurch das Aufsuchen der für die Hauptbrechungsindices allein in Betracht kommenden Umkehrlagen, zwischen denen die Grenzlinie bei einer Drehung des Cylinders auf- und abwandert, erheblich erleichtert wird. Wenn es dagegen darauf ankommt, den Verlauf der Grenzcurven in ihrer ganzen Ausdehnung messend zu verfolgen, so erleidet die Genauigkeit durch die Trübung der mittleren Curventheile eine beträchtliche Einbusse. Man ist zwar im Stande, durch Anwendung eines vor dem Objektiv des Beobachtungsrohres angebrachten Vertikalspaltes, der von der ganzen Mantelfläche nur einen schmalen Streifen zur Geltung kommen lässt, auch für die schräg gelegenen Theile der Grenzcurve — falls die Doppelbrechung keine zu grosse ist — die Schärfe der Grenzlinie, freilich auf Kosten der Helligkeit, soweit wieder herzustellen, dass eine einigermaassen genaue Einstellung erfolgen kann. Weit vollkommener gelingt die Wiederherstellung der Schärfe der Grenzlinien, durch Vorsetzen einer planconcaven Cylinderlinse von gleicher Krümmung wie der Glascylinder, deren Herstellung aber erhebliche technische Schwierigkeiten entgegenstehen.

Der Cylinder ist später von Abbe durch eine Halbkugel mit plan geschliffener Kreisfläche ersetzt worden[1]). Die Vortheile einer solchen um die Normale zur Kreisfläche rotirenden Halbkugel für die Totalreflexionsmethode sind natürlich dieselben, wie die oben genannten für den Cylinder. Ohne weiteres ist eine Kugel als Grundkörper der Wollaston'schen Methode nicht zu verwenden, weil die Kugeloberfläche so auf den Strahlengang einwirkt, dass ein auf parallele Strahlen eingerichtetes Fernrohr nicht mehr benutzt werden kann[2]). Diese Wirkung der Halbkugeloberfläche hat nun Abbe dadurch wieder unschädlich gemacht, dass er die vordere Linse des Fernrohrobjektivs, welche aus demselben Glase besteht wie die Halbkugel, mit einer concaven Fläche ersieht, welche nahezu die gleiche Krümmung wie die Kugeloberfläche besitzt, und das so eingerichtete Fernrohrobjektiv der Halbkugel möglichst nahe bringt (Fig. 407). Ist dann die Halbkugel so justirt, dass die zwischen Objektiv und Halbkugel befindliche dünne Luftschicht in allen Lagen des Fernrohrs und bei der Drehung der Halbkugel um die Vertikale unver-



(Ph. 407.)

[1]) Beschreibung von Czapski, Zeitschrift f. Instrumentenkunde, pag. 246 u. 269. 1890.

[2]) Die aus der Halbkugel austretenden Grenzstrahlen vereinigen sich auf einer der Kugeloberfläche concentrisch gelegenen Fläche in dem Abstand der Brennweite zu einem Bilde der Grenzcurve, welches dann mit Hilfe einer Lupe oder eines Mikroskops direkt beobachtet werden kann. Das Verfahren zur Messung zu verwenden, erscheint deshalb nicht rathsam, weil die Schärfe der Grenzlinie infolge der starken sphärischen Aberration und der beträchtlichen Focusdifferenz für die verschiedenen Farben nur eine unvollkommene ist.

ändert bleibt, so wirkt der Apparat wie ein Prisma mit veränderlichem brechendem Winkel, dessen Austrittsfläche stets senkrecht zur Fernrohraxe sich befindet, und die Messung ergiebt direkt den Grenzwinkel der Totalreflexion. Für die Deutlichkeit der Grenzlinie macht es natürlich hier keinen Unterschied, ob dieselbe geneigt oder horizontal gelegen ist. Die Grenzcurve erscheint in allen Theilen gleich scharf. Die Anwendbarkeit der Halbkugel erstreckt sich auf sämmtliche Brechungsindices kleiner als der Brechungsindex der Halbkugel. Im Uebrigen ist der Aufbau und die Handhabung des Apparates die gleiche wie bei dem Cylinderapparat.

Noch zu erwähnen ist schliesslich ein kleines von BERTRAND[1]) construirtes Krystallrefractometer. Bei demselben kommt das Objekt ebenfalls auf die Planfläche einer Halbkugel zu liegen, doch ist letztere mit dem Beobachtungsrohr in fester, unveränderlicher Lage verbunden. In der Focalebene der Halbkugel, wo ein Bild der Grenzlinie entsteht, ist eine empirisch getheilte Mikrometertheilung angebracht, und auf diese eine Lupe eingestellt. Im Princip haben wir also dieselbe Wirkungsweise des Apparates, wie auf voriger Seite Anm. 2 angegeben. Die Genauigkeit der Messung ist aber eine geringe (dieselbe wird auf 2 Decimalen von n angegeben) gegenüber der Ablesung an einem Gradbogen und vor allem entbehrt das Verfahren alle jene Vortheile, welche durch die Einführung des drehbaren Grundkörpers für die ganze Totalreflexionsmethode herbeigeführt sind.

B. Resultate.

1. Abhängigkeit des Brechungsvermögens eines Körpers von der Wellenlänge (Dispersion).

Es ist nicht der Zweck dieses Artikels für die zahlreichen Körper, deren Brechungs- und Dispersionsvermögen bestimmt sind, die bezüglichen Werthe zahlenmässig hier anzugeben. Es muss dieserhalb auf die Originalarbeiten der zum grossen Theil weiter unten namhaft gemachten Autoren, sowie auf die ziemlich umfangreiche Zusammenstellung von LANDOLT und BÖRNSTEIN[2]) verwiesen werden. Wir beschränken uns hier darauf, das Verhalten der durchsichtigen festen, flüssigen und gasförmigen Körper in Bezug auf Brechung und Dispersion durch einige Beispiele zu illustriren und an diesen die Gesetzmässigkeiten, auf welche wir im Folgenden näher eingehen werden, zu besprechen. Auf das Verhalten der halbdurchsichtigen und undurchsichtigen Körper kann hier nur kurz eingegangen werden, sofern eine ausführliche Darlegung dieser Dinge einem späteren Aufsatz vorbehalten ist. Ebenso findet die Besprechung der Erscheinungen der Doppelbrechung an anderer Stelle ihre Erledigung.

Wir beginnen mit den beiden hauptsächlichsten Constanten, Brechungsindex und mittlere (relative) Dispersion. In der nachstehenden Tabelle bezeichnet n_D den Index der betreffenden Substanz für das gelbe Licht der Natriumflamme. Die mittlere Dispersion ist durch die Differenz der Indices für die beiden FRAUNHOFER'schen Linien C und F gekennzeichnet, das Intervall umfasst den mittleren lichtstarken Theil des Spectrums. Ferner stellt der Quotient $(n_F - n_C)/(n - 1) = 1/\nu$ die sogenannte relative Dispersion dar. Der Uebersichtlichkeit halber sind in der Tabelle die reciproken Werthe dieser Grösse angeführt. In jeder

[1]) BERTRAND, Bull. de la Soc. min. de France VIII., pag. 375; Journ. de Phys. (2) V., pag. 223. 1886.

[2]) LANDOLT-BÖRNSTEIN, Physikalisch-Chemische Tabellen, Berlin 1883, vergl. auch die in vorstehendem Theil B. angeführten Untersuchungen.

Gruppe sind die Substanzen in ihrer Reihenfolge so angeordnet, dass diejenigen mit kleinerer relativer Dispersion (grösserem ν) denjenigen mit grösserer relativer Dispersion (kleinerem ν) vorangehen.

Brechungsindex (n_D) und Dispersion (1/ν) für einige gasförmige, flüssige und feste Körper.

Substanz	n_D	$n_F - n_C$	$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$
Atmosphärische Luft (0° 760 *mm*) . .	1·00024289	0·00000295	99·0
Kohlensäure	1·00044922	0·00000460	97·6
Wasserstoff	1·00014294	0·00000195	73·3
Cyangas	1·00078440	0·00001430	54·8
Schweflige Säure	1·00068601	0·00001314	52·2
Aether (Zimmertemperatur)	1·3566	0·0052	68·5
Schwefelsäure	1·4367	0·0073	59·9
Alkohol	1·3597	0·0062	57·2
Wasser	1·3330	0·0060	55·5
Aethylenbromid	1·5246	0·0135	38·9
Benzol	1·5014	0·0167	30·0
Phenol	1·5503	0·0191	28·8
Anilin	1·5863	0·0248	23·7
Monobromnaphtalin	1·6582	0·0325	20·3
Schwefelkohlenstoff	1·6303	0·0345	18·3
Zimmtöl	1·6188	0·0431	14·4
Kaliumquecksilberjodid	1·7167	0·0607	11·9
Bariumquecksilberjodid	1·7928	0·0736	10·8
Flussspath	1·4339	0·00452	96·1
Quarz, ordinärer Strahl	1·5442	0·00777	70·1
Diamant[1]) (WALTHER)	2·4173	0·0254	56·5
Kalkspath, ordinärer Strahl	1·6585	0·0135	48·9
Steinsalz	1·5440	0·01267	42·9
Chlorsilber (WERNICKE)	2·0611	0·0496	21·4
Phosphor (SCHRAUF)	2·0741	0·0684	16·8
Zinkblende	2·3684	0·0882	15·5
Bromsilber (WERNICKE)	2·2533	0·0809	15·4
Jodsilber WERNICKE)	2·1816	0·1256	9·6
Jenaer Gläser:			
Leichtes Phosphat-Crown (O. 225) . .	1·5160	0·00734	70·3
Leichtes Borat-Crown (S. 205) . . .	1·5075	0·00838	60·6
Gewöhnliches Silicat-Crown (O. 1022) .	1·5173	0·00860	60·2
Schweres Barium Silicat-Crown (O. 211)	1·5727	0·00988	58·0
Baryt-Leichtflint (O. 527)	1·5718	0·01130	50·6
Leichtes Silicatflint (O. 154)	1·5710	0·01324	43·1
Schweres Silicatflint (O. 165)	1·7545	0·02738	27·6
Sehr schweres Silicatflint (S. 57) . . .	1·9625	0·04877	19·7

Es ist zunächst bemerkenswerth, dass die Gase trotz des ausserordentlich viel kleineren Brechungsvermögens doch ein ν besitzen, welches von gleicher Grössenordnung wie bei den festen und flüssigen Körpern ist. Im Einzelnen

[1]) Russ hat den gleichen Brechungsindex wie Diamant, s. ROSICKY, Wien. Ber. 78, Bd. 1, pag. 417.

sind die Werthe ν erheblich von einander verschieden. Von den in der Tabelle aufgezählten Substanzen besitzen eine verhältnissmässig geringe relative Dispersion Flussspath, Luft und Kohlensäure. Die Flüssigkeiten zeigen in der Regel bei gleichem Brechungsindex eine etwas grössere relative Dispersion als die festen Körper (vergl. Kalkspath und Monobromnaphtalin). Körper mit sehr hoher relativer Dispersion sind Zimmtöl, die Quecksilberverbindungen, die stark bleihaltigen Gläser (z. B. S. 57), ferner Phosphor, Jodsilber etc. Der stark brechende Diamant hat im Vergleich zu anderen gleichbrechenden Substanzen nur ein kleines Dispersionsvermögen.

Des Weiteren zeigen die angeführten Zahlen der Tabelle, dass die Erhöhung der Dispersion nur angenähert mit der Erhöhung des Brechungsindex Hand in Hand geht. Die Tabelle enthält verschiedene Substanzen, die in ihrem Brechungsindex fast genau übereinstimmen, aber in Bezug auf den Werth ν zum Theil ganz beträchtliche Unterschiede erkennen lassen, und zwar nicht allein, wenn man flüssige und feste Körper mit einander vergleicht; auch für ein und denselben Aggregatzustand treten diese Unterschiede auf, ja innerhalb einer bestimmten Gruppen von Substanzen, z. B. den Gläsern. Unter den der Productionsliste des Glastechnischen Laboratoriums Schott u. Gen. in Jena entnommenen Angaben für einige Gläser finden sich für drei Gläser (O. 211, O. 527 und O. 154), nahezu übereinstimmende Werthe für den Brechungsindex während die Grösse ν ganz erhebliche Unterschiede zu erkennen giebt.

Der Grund für die genannten Unterschiede liegt in der Verschiedenheit der chemischen Zusammensetzung. Für die meisten Körper ist der nähere Zusammenhang bis jetzt nur noch wenig erkannt und festgestellt worden. Erst in neuerer Zeit haben die auf die Erzielung einer grösseren Mannichfaltigkeit und Abstufung der optischen Constanten des Glases gerichteten Bestrebungen und ausgedehnten experimentellen Studien von Abbe und Schott[1]) die Kenntniss in dieser Richtung erweitert. Diese Untersuchungen, welche die chemisch-optischen Grundlagen für die Darstellung der verschiedenen Glasarten enthalten und welche fast alle Elemente umfassen, die in irgend einer Form in amorphe Schmelzverbindungen eintreten können, haben die specifische Wirkung der einzelnen Elemente auf Brechung und Dispersion klar zu Tage gefördert, auf Grund deren es in dem genannten Glaswerk jetzt möglich geworden ist, Glasflüsse von bestimmtem Brechungsindex und bestimmter Dispersion innerhalb der überhaupt möglichen Grenzen herzustellen.

Auch in Bezug auf den Gang der Dispersion innerhalb der einzelnen Spectralgebiete treten für die verschiedenen Substanzen Abweichungen auf, die ebenfalls von der verschiedenartigen chemischen Zusammensetzung dieser Körper herrühren. Um zwei Körper bezüglich des Verlaufs ihrer Dispersionscurven mit einander vergleichen zu können, kann man nach dem Vorgange von Abbe und Schott in einfachster Weise so verfahren, wie in den nachstehend beispielweise angeführten Tabellen geschehen ist. Es sind nämlich für die drei Spectralbezirke $A-D$, $D-F$

[1]) Man vergl. den Bericht Prof. Abbe's über die optischen Hilfsmittel der Mikroskopie auf der Ausstellung wissenschaftl. Apparate in London 1876 (Bd. V., pag. 383—420); ferner die Vorbemerkungen zu der oben genannten Productionsliste, sowie den ausführlichen Schlussbericht von Czapski, Mittheilungen über das Glastechnische Laboratorium in Jena und die von ihm hergestellten neuen optischen Gläser, Zeitschrift f. Instrumentenkunde 1886, pag. 293 u. 335; und endlich Schott, Vortrag, gehalten im Verein zur Beförderung des Gewerbefleisses zu Berlin 1888.

und $F-G$ bezw. $F-G'$[1]) die Differenzen der den einzelnen Spectrallinien zugehörigen Brechungsindices angegeben und unter diesen stehen mit kleineren Ziffern die Quotienten, gebildet aus diesen Differenzen und dem Betrag der mittleren Dispersion $C-F$, verzeichnet. Diese Art, die Dispersion eines Körpers zu kennzeichnen, gewährt gegenüber der bei den meisten Autoren üblichen Aufzählung der Brechungsindices für eine Anzahl FRAUNHOFER'scher Linien ganz erhebliche praktische Vortheile, da man im Stande ist, sich aus den Zahlen ohne Weiteres d. h. ohne weitläufige Rechnungen über die den Verlauf der Dispersion charakterisirenden Grössen zu orientiren. Sind insbesondere die einem bestimmten Spectralbezirk zugehörigen Quotienten der beiden mit einander verglichenen Körper gleich, so zeigt das eine Proportionalität der bezüglichen relativen Dispersionen an. Sind sie verschieden, so weist der grössere Quotient stets auf eine relative Verlängerung, der kleinere stets auf eine relative Verkürzung des betreffenden Spectralbezirkes hin. Direkte Gegensätze sind in dieser Hinsicht also die nachfolgend angeführten Körper Kalkspath und Monobromnaphtalin, deren Brechungsindices für D fast absolut gleich sind.

Substanz	$A-D$	$D-F$	$F-G'(H_\gamma)$
Monobromnaphtalin . . .	0·01770	0·02375	0·02215
$n_D = 1·6582$ $\nu = 20·3$	0·588	0·732	0·683
Kalkspath, ordinärer Strahl .	0·00833	0·00947	0·00827
$n_D = 1·6585$ $\nu = 48·9$	0·618	0·708	0·614

Kalkspath zeigt zwischen A und D ein relativ viel stärkeres Dispersionsvermögen als Monobromnaphtalin. Im mittleren und blauen Theile des Spectrums kehrt sich das Verhältniss um. Hier besitzt die Flüssigkeit neben der absolut grösseren auch die relativ grössere Dispersion.

Eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung der relativen Dispersion in allen drei Theilen des Spectrums zeigen die beiden Körper Steinsalz und Diamant, obschon sie in ihrem Brechungsvermögen ganz enorme Unterschiede zu erkennen geben:

Substanz	$A-D$	$D-F$	$F-G$
Steinsalz	0·00755	0·00900	0·00805
$n_D = 1·5440$ $\nu = 42·9$	0·592	0·710	0·632
Diamant	0·01489	0·01805	0·01602
$n_D = 2·4173$ $\nu = 56·5$	0·589	0·711	0·631

Die folgenden beiden Körper bieten ein Beispiel einer partiellen Uebereinstimmung. Die beiden Jenaer Gläser (S. 40 und S. 52) besitzen gleiche relative (und absolute) Dispersionen nur innerhalb der beiden Spectralbezirke $D-F$ und $F-G'$, während für den Spectralbezirk $A-D$ ein nicht unbeträchtlicher Unterschied sich bemerkbar macht.

Substanz	$A-D$	$D-F$	$F-G'(H_\gamma)$
Mittleres Phosphat Crown .	0·00546	0·00587	0·00466
$n_D = 1·5590$ $\nu = 66·9$	0·654	0·702	0·557
Leichtes Borat-Crown . . .	0·00560	0·00587	0·00466
$n_D = 1·5047$ $\nu = 60·0$	0·667	0·700	0·555

In der folgenden Zusammenstellung, welche die bezüglichen Werthe für

[1]) G' bezeichnet die dritte (violette) nahezu mit G zusammenfallende Spectrallinie des Wasserstoffspectrums.

einige Flüssigkeiten enthält, sei auf die bei der zuletzt angeführten Flüssigkeit auftretende abnorme (relative und absolute) Dehnung des Spectrums im Blau und Verkürzung im Roth besonders hingewiesen.

Substanz	$A-D$	$D-F$	$F-G$
Wasser	0·00409	0·00415	0·00344
$n_D = 1·3330$ $\nu = 55·5$	0·682	0·691	0·573
Alkohol	0·00406	0·00431	0·00369
$n_D = 1·3597$ $\nu = 57·2$	0·655	0·695	0·595
Schwefelkohlenstoff . . .	0·01898	0·02485	0·02446
$n_D = 1·6303$ $\nu = 18·3$	0·551	0·722	0·711
Piperin	0·03208	0·05342	0·07100
$n_D = 1·6845$ $\nu = 9·8$	0·461	0·768	1·021

Man kann sich fragen, in welcher Weise die Brechungsindices eines Körpers als Function der Wellenlänge sich darstellen lassen. Schon aus der vorstehend gegebenen Beschreibung des Verhaltens der einzelnen Körper muss geschlossen werden, dass zur Darstellung der Dispersion eines Körpers im allgemeinen ein Ausdruck von drei oder gar zwei empirisch zu bestimmenden Constanten nicht ausreicht. In der That findet sich diese Schlussfolgerung[1]) durch die ausgedehnten Berechnungen der Dispersionscurven zahlreicher Körper seitens KETTELER[2]) ihre Bestätigung. Diese Berechnungen haben zu dem Resultat geführt, dass sich die Dispersionscurven der sämmtlichen sogen. durchsichtigen Körper, bei passender Auswahl von Beobachtungspaaren behufs Berechnung der Constanten, durch die vierconstantige Formel

$$n = -k\lambda^2 + a + b/\lambda^2 + c/\lambda^4$$

berechnen lassen, in welcher die vier Werthe k, a, b und c sämmtlich positive Grössen sind. Auch trifft die Gültigkeit dieser Formel mit sehr grosser Annäherung auch dann noch zu, wenn man, wie KETTELER[3]) wiederholt gethan hat, die weit über die Grenzen des sichtbaren Spectrums hinaus ausgedehnten Messungen von MASCART[4]), SORET[5]) SARASIN[6]) im Ultrablauen (bis zur Wellenlänge 0·18 μ) und von MOUTON[7]), LANGLEY[8]) und RUBENS[9]) im Ultrarothen (bis zur Wellenlänge 5·7 μ) zum Vergleich heranzieht. Zur Darstellung der Dispersionscurven der Gase hat sich die Beschränkung auf die beiden mittleren Glieder (sogen. CAUCHY'sche Formel) als praktisch völlig ausreichend erwiesen[10]).

Um von dem Verlauf der durch den obigen Ausdruck für n (oder n^2 nach

---

1) Vergl. CZAPSKI, l. c., pag. 341,

2) KETTELER, POGG. Ann. 140, pag. 1. 1870, und Theoretische Optik, Braunschweig 1885, pag. 540, sowie WIED. Ann. 30, pag. 304. 1887. (Zur Handhabung der Dispersionsformeln.)

3) l. c. und WIED. Ann. 31, pag. 322. 1887; WIED. Ann. 46, pag. 572. 1892.

4) MASCART, Ann. de l'école 1, pag. 263. 1864; 4, pag. 7. 1867.

5) SORET, Ann. de Chim. et de Phys. 11, pag. 72. 1875.

6) SARASIN, Arch. des sc. phys. 10, pag. 303. 1883.

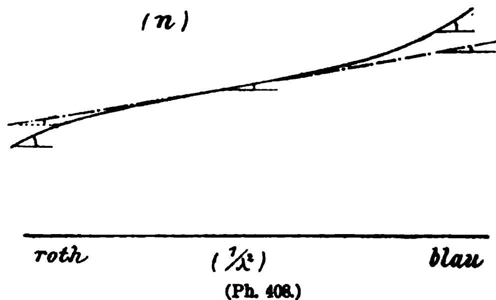
7) MOUTON, Compt. rend. 1879, pag. 1078 und 1189.

8) LANGLEY, WIED. Ann. 27, pag. 598. 1884; Ann. de chim. et de phys. 9, pag. 433. 1886.

9) RUBENS, WIED. Ann. 45, pag. 238. 1892. Die Messungen sind neuerdings von RUBENS und SNOW (WIED. Ann. 46, pag. 525. 1892), für Flussspath, Steinsalz und Sylvin sogar bis 8·3 μ ausgedehnt werden.

10) Es unterliegt indessen keinem Zweifel, dass in Bezug auf den Verlauf der Dispersionscurven bei den Gasen dieselben Verhältnisse vorliegen wie bei den festen und flüssigen Körpern. — Die ersten genauen Messungen der Dispersion der Gase hat KETTELER ausgeführt, Farbenzerstreuung der Gase, Bonn 1865; s. auch LORENZ, WIED. Ann. 11, pag. 70. 1880.

KETTELER) dargestellten Dispersionscurve eine klare Vorstellung zu erhalten, kann man den Weg der graphischen Darstellung einschlagen und zwar am besten in der Art, dass man als Abscissen die reciproken Werthe der Quadrate der Wellenlänge (also $1/\lambda^2$) und als Ordinaten die Brechungsindices wählt, wie in Fig. 408 geschehen ist. Es ist dann klar, dass die einfache CAUCHY'sche Formel einen völlig geradlinigen Verlauf der so dargestellten Dispersionscurve verlangt, und dass der Einfluss, den das erste und letzte Glied der oben genannten 4constantigen Formel ausüben, in der Figur als Abweichungen von der geraden Linie sich zu erkennen geben muss. Insbesondere macht das Glied $-k\lambda^2$ seinen Einfluss vorzugsweise im ultrarothen (grosse Wellenlängen), das Glied c/λ^4 vorzugsweise im ultrablauen Theil des Spectrums geltend.



(Ph. 408.)

Den durch die ausgezogene Linie in der Figur dargestellten Verlauf der Dispersionscurve haben sämmtliche sogen. durchsichtigen Körper. Die Abweichungen der beobachteten Curve von der geraden Linie finden überall in gleichem Sinne, im Roth stets nach der unteren, im Blau stets nach der oberen Seite statt. Die Lage derjenigen Punkte, wo die Abweichungen sich durch die Beobachtung bemerkbar machen, ist natürlich entsprechend der Grösse der bezüglichen Constanten für jeden Körper verschieden, und es giebt Körper, bei denen (z. B. Flussspath) der empirisch nachweisbare Einfluss der beiden Glieder $-k\lambda^2$ und c/λ^4 weit über die Grenzen des sichtbaren Spectrums hinaus zu suchen ist. Die Dispersionscurven solcher Körper lassen sich dann mit sehr grosser Annäherung innerhalb des Bereiches des sichtbaren Spectrums durch die zweiconstantige Dispersionsformel darstellen. Ausserdem macht sich die Verschiedenheit der Dispersionscurven noch durch den mehr oder weniger steilen Anstieg der Curve in ihrer Gesammtheit (die Constante b ist hierbei wie unser obiges $1/\nu$ als Maass der mittleren Dispersion anzusehen) und durch die Verschiedenheit der Werthe für die Constante a (dem sogen. Brechungsindex für unendlich lange Wellen) bemerkbar.

Man kann sich von dem beschriebenen charakteristischen Verlauf der Dispersionscurven auch ohne die in ihrer Anwendung immerhin etwas umständlichen Dispersionsformeln sehr bequem dadurch überzeugen, dass man den Neigungswinkel, welchen die an die einzelnen Theile der Dispersionscurve gelegte Tangente mit der Abscisse macht, etwas näher ins Auge fasst[1]). Denn das Auftreten eines constanten Neigungswinkels deckt sich vollständig mit dem Inhalt der CAUCHY'schen Formel und ebenso werden die Krümmungsverhältnisse der Dispersionscurven völlig ausreichend durch die Grösse und den Verlauf des Neigungswinkels gekennzeichnet. Ein geeignetes Maass für die Grösse des Neigungswinkels ergiebt der leicht zu berechnende Ausdruck

$$\tang \alpha = \frac{n_2 - n_1}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}},$$

[1]) In dieser Weise hat zuerst SELLMEYER, POGG. Ann. 143, pag. 272. 1871, den Verlauf der Dispersionscurven durchsichtiger Körper geprüft; man vergl. ferner PULFRICH, WIED. Ann. 45, pag. 647. 1892.

in welchem n_2 und λ_2 auf Strahlen kürzerer, n_1 und λ_1 auf Strahlen grösserer Wellenlänge sich beziehen. Die nachstehenden Zahlen mögen das Verhalten der Neigungstangente an einigen Beispielen illustriren. In der That nimmt, in Uebereinstimmung mit den obigen Angaben, für die angeführten Substanzen wie überhaupt für alle durchsichtigen Körper der Neigungswinkel vom rothen zum blauen Ende des Spectrums anfänglich ab, erreicht ein Minimum, und nimmt

Verlauf der Neigungstangente $10^4 \cdot tang\, \alpha$ für einige Dispersionscurven.

λ	Steinsalz	Flussspath	Schwefelkohlenstoff	Flintglas (1·58)	Kalkspath, ord. Strahl	Quarz, ord. Strahl	Borat-Crown S. 204	Wasser
5·0	1820	4060	—	—	—	—	—	—
3·5	482	1600	—	—	—	—	—	—
3·0	—	865	—	—	—	—	—	—
2·5	160	362	—	1400	—	—	—	—
2·0	102	175	280	488	—	640	860	—
1·5	74	82	180	195	—	214	265	400
1·0	65	38	156	92	—	70	80	78
0·8	64	28	160	75	83	50	50	46
0·7	65	25	165	72	74	44	39	36
0·6	67	24	176	71	71	41	35	31
0·5	69	24	200	75	70·5	40	33	29
0·45	72	24	—	80	71	40	—	—
0·40	—	24	—	87	73·5	40	—	—
0·35	—	24·5	—	100	74·5	41	—	—
0·30	—	26	—	—	90	44	—	—
0·25	—	28	—	—	113	50	—	—
0·20	—	34	—	—	195	60	—	—
0·185	—	37	—	—	—	—	—	—

dann wieder zu. Es kommt zuweilen vor, wenn man den Verlauf der Neigungstangente nicht weit genug in das Ultrarothe hinein verfolgen kann, dass derselbe von vornherein eine Zunahme zu erkennen giebt, niemals aber tritt der Fall ein, dass eine solche anfängliche Zunahme wieder in eine Abnahme übergeht. Diese Gesetzmässigkeit kann somit auch als ein sehr empfindliches Prüfmittel für die Genauigkeit von Dispersionsbestimmungen verwandt werden. —

Wir haben vorstehend nur das Verhalten der sogen. durchsichtigen Körper zur Sprache gebracht. Die halbdurchsichtigen und undurchsichtigen zeigen ein ganz anderes Verhalten. Eine ausführliche Darlegung der bei diesen Körpern geltenden Gesetze und Beziehungen ist einem späteren Artikel vorbehalten und wir beschränken uns deshalb hier darauf, das Verhalten jener Körper durch einige Zahlen zu illustriren:

Cyanin gelöst in Alkohol:

A	*B*	*C*	*E*	*F*	*G*
1·371	1·376	1·381	1·356	1·364	1·373.

Die Neigungstangente nimmt von beiden Seiten des Spectrums nach der Mitte desselben zu.

Joddampf:

(*C*) 1·0205 (*G*) 1·0190.

Metalle (nach KUNDT):

	Roth	Weiss	Blau		Roth	Weiss	Blau
Silber	—	0·27	—	Eisen	1·81	1·73	1·52
Gold	0·38	0·58	1·00	Nickel	2·17	2·01	1·85
Kupfer	0·45	0·65	0·95	Wismuth	2·61	2·26	2·13
Platin	1·76	1·64	1·44				

Man bezeichnet die Erscheinung, welche diese Gruppe von Körpern hinsichtlich ihres Dispersionsvermögens darbieten, mit dem Namen der anomalen Dispersion und versteht darunter den Einfluss, den die in den Körpern stattfindende Absorption auf die Grösse und den Verlauf der Brechungsindices ausüben (vergl. den Artikel über anomale Dispersion).

Es ist bekannt, dass auch die sogen. durchsichtigen Körper durchaus nicht dieser Absorptionswirkung entbehren. Nur liegen die Absorptionsgebiete ausserhalb des sichtbaren, in zum Theil weit entlegenen Räumen des ultrarothen und ultrablauen Spectrums. Aber in Bezug auf den Einfluss, den diese Absorptionswirkungen auf den Gang der Dispersionscurven ausüben, ist ein principieller Unterschied mit der für gewöhnlich als anomale Dispersion bezeichneten Erscheinung nicht vorhanden. Natürlich kann immer nur ein Theil dieses Einflusses in die Erscheinung treten, nämlich der, welcher sich auf den von der Mitte des Absorptionsgebietes dem sichtbaren Spectrum zugewandten Theil der Refractionscurve erstreckt. Auch kann der Einfluss immer nur in einer Vergrösserung des Dispersionsvermögens (Verlängerung des Spectrums) bestehen, denn die ultrablauen Absorptionen heben die Refractionscurve, die ultrarothen drücken dieselbe herab, und zwar ist für jeden einzelnen Punkt der Refractionscurve die Wirkung um so grösser, je näher das betreffende Curvenstück dem bezüglichen Absorptionsgebiete gelegen ist. Die Wirkung macht sich also vorzugsweise an den Enden bemerkbar und genau in dem Sinne, wie die vorstehenden Erörterungen über den Verlauf der Dispersionscurve bezw. des Neigungswinkels ergeben haben. Sind die Absorptionsgebiete in grosser Entfernung von den Enden des Spectrums gelegen, so gelangen nur die letzten Ausläufer und zwar in einer für alle Theile des Spectrums nahezu gleichen Weise zur Geltung.

In der That steht diese Erklärung im allgemeinen und im einzelnen in vollständiger Uebereinstimmung mit den Erfahrungen, die man auf direkter photometrischer Grundlage über den Grad der Durchlässigkeit der Körper für ultrarothe und ultrablaue Strahlen gewonnen hat. In der obigen Tabelle sind die Substanzen nach dem Grade der Zunahme der Neigungstangente im ultraroth angeordnet, was eine graphische Aufzeichnung der Werthe für *tang* a besonders deutlich zu erkennen giebt. Die gleiche Reihenfolge findet man aber auch, wenn man die Körper nach dem Grade ihres Absorptionsvermögens für strahlende Wärme zusammenstellt. Zu demselben Resultat wurde KETTELER durch Vergleich der für die Constante k der obengenannten Dispersionsformel erhaltenen Werthe geführt[1]).

Dass man auch umgekehrt im Stande ist, von der Existenz solcher weit ab gelegenen Absorptionsgebiete allein durch Betrachtung der Dispersionscurve eine sichere Kunde zu erhalten, ist eine Schlussfolgerung, die sich nach Vorstehendem von selbst versteht. Vielleicht ist auch der ganze molekulare Vorgang, dem

---

[1]) KETTELER, Zur Dispersion des Steinsalzes, WIED. Ann. 31, pag. 327. 1887.

die Dispersion überhaupt ihr Dasein verdankt, nur eine Folge der Absorptionswirkung kurzwelliger Strahlen.

Wie über die ultrarothen Absorptionsgebiete hinaus die Dispersionscurven weiter verlaufen, entzieht sich bis jetzt jeder Beurtheilung; es scheint nicht, als ob auf dem bisher beschrittenen Wege ein erheblich weitergehender Aufschluss in dieser Hinsicht zu erwarten wäre[1]). Dagegen haben neuere, die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer Strahlen betreffende Messungen an einigen festen und flüssigen Isolatoren zu sehr interessanten Ergebnissen[2]) geführt, die nicht allein als eine bemerkenswerthe Bestätigung der von MAXWELL aufgestellten Beziehung, dass der Brechungsindex gleich der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante sein müsse, anzusehen sind, sondern auch mit der Vorstellung einer für jene Strahlen zutreffenden »anomalen Dispersion« sich recht wohl vereinigen lassen.

2. Beziehungen des Brechungsindex zur Dichte, zur Temperatur und zum Druck; Satz vom constanten Refractionsvermögen.

Während der letzten 30 Jahre ist wohl kaum eine Frage so oft und von so vielen Seiten zum Ausgangspunkt von experimentellen Studien gegemacht worden, wie die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem

---

[1]) In der That schienen bis vor Kurzem alle Versuche, die im Ultraviolett erreichte Grenze $\lambda = 0{\cdot}185\ \mu$ noch weiter vorzurücken, erfolglos zu sein. Neuerdings ist es SCHUMANN (Wien. Ber. vom 10. Novbr. 1892) mit Hilfe eines aus Flussspathlinsen construirten und vollständig luftleer gemachten Spectrographen gelungen, die bisherige Grenze noch um ein ganz beträchtliches Stück (bis $0{\cdot}100\ \mu$) hinauszuschieben und insbesondere für das *H*-Licht einen ganz ausserordentlichen Strahlenreichthum zwischen 0·185 und 0·100 nachzuweisen. Es ist von ganz besonderem Interesse, dass gerade die Luft auf jenen Strahlencomplex eine ausserordentlich grosse Absorptionswirkung ausübt, und dass hierin der hauptsächliche Grund zu suchen ist, welcher bisher ein weiteres Vorschreiten verhindert hat. — Die von SCHUMANN nachgewiesene Absorptionswirkung der Luft zwischen den Wellenlängen 0·18 und 0·10 muss natürlich auch auf die Dispersionscurve der Luft ihren Einfluss ausüben und zwar muss die Zunahme der Brechungsindices der Luft mit abnehmender Wellenlänge in Wirklichkeit stärker erfolgen als durch den Verlauf der CAUCHY'schen Formel vorgeschrieben ist. Für spectrometrische Untersuchungen von festen Körpern (Flussspath etc.) in den vor der Wellenlänge 0·185 gelegenen Spectralgebieten ist dieser Umstand, worauf ich hier noch besonders aufmerksam machen möchte, wegen der Reduction der Messungen auf den leeren Raum von grosser Bedeutung. So lange keine Messungen über den Brechungsindex der Luft in jenen Spectralräumen vorliegen, ist es nicht gestattet, die aus der CAUNHY'schen Formel durch Extrapolation abgeleiteten Werthe zur Reduction auf den leeren Raum zu verwenden. An dem Verlauf der Dispersioncurven im Ultrablau wird sich aber im wesentlichen nichts ändern, sofern die Brechungsindices bezw. die die Neigungstangenten wohl eine Steigerung aber keine Verminderung in Folge der Reduction erleiden. (Von Interesse wäre gewiss in dieser Hinsicht, auch die Durchlässigkeit der Luft im Ultraroth einer Prüfung zu unterziehen.)

[2]) Für ein Pechprisma erhielt HERTZ (WIED. Ann. 36, pag. 769. 1888) nach dem Ablenkungsverfahren und für Strahlen von ca. 60 *cm* Wellenlänge den Werth 1·69; ELLINGER (WIED. Ann. 46, pag. 514. 1892) ermitteltelte für ein Wasserprisma mit einem brechenden Winkel von wenigen Graden mit Hilfe einer der HERTZ'schen nachgebildeten Anordnung den Brechungsindex des Wassers zu 9, der auch von COHN angegeben wird. Endlich haben noch ARONS und RUBENS (WIED. Ann. 42, pag. 582. 1891; ibid. 44, pag. 206. 1891) mit Hilfe besonderer Methoden den elektrischen Brechungsindex (Wellenlänge 6 *m*) für Paraffin, zwei Gläser und einige Flüssigkeiten bestimmt. Für die untersuchten Gläser ($n_D = 1{\cdot}5$) ergab sich der elektrische Index zu 2·4. Für die übrigen Körper weicht der elektrische Brechungsindex nur sehr wenig von dem optischen ab.

Brechungsindex eines Körpers und seiner Dichte oder genauer ausgedrückt die Frage nach den Beziehungen, welche die Veränderungen des Brechungsindex mit dem durch Druck, Temperatur oder Mischung hervorgerufenen Zustandsänderungen eines Körpers verknüpfen. Auch gegenwärtig ist diese mit grossem Eifer ventilirte Frage bis zu einem gewissen Grade noch immer eine offene, sofern die Ausdrücke und Formeln, welche man für die genannten Beziehungen aufgestellt hat, nur zum Theil eine theoretische Bedeutung besitzen und auch in Bezug auf ihre praktische Verwendbarkeit über den Charakter von Näherungsformeln nicht hinaus gekommen sind. In dem einen Falle entsprechen dieselben der Wahrheit, in dem anderen nicht, ohne dass man im Stande ist, zu sagen weshalb das so ist. Bei dem MARIOTTE'schen Gesetze, dem ja auch keine strenge Gültigkeit zukommt, weiss man, in welcher Weise sich die Abweichungen physikalisch erklären lassen, und dass man zu einer immer vollkommneren Uebereinstimmung der Erfahrung mit dem Gesetz gelangt, je weiter sich das Gas von seinem Condensationspunkt entfernt. Hier dagegen fehlt jeder innere Grund für die vorkommenden Abweichungen und man kann sich des Eindruckes nicht verschliessen, dass die in manchen Fällen beobachtete vollständige Uebereinstimmung mit der Erfahrung mehr Sache des Zufalls als die Folge eines bestimmten Gesetzes ist.

Es kommen hierbei in erster Linie drei Ausdrücke in Betracht, von denen verlangt wird, dass sie für alle durch Druck und Temperatur hervorgerufenen Dichteänderungen eines Körpers constant sein sollen:

$$\frac{n^2-1}{d} = const, \qquad \frac{n-1}{d} = const, \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{d} = const.$$

Der Inhalt dieser Gleichungen bildet den sogen. Satz vom constanten Brechungsvermögen, und die einzelnen Ausdrücke werden das specifische Brechungsvermögen oder kurz die Refractionsconstante des betreffenden Körpers genannt.

Für den ersten von NEWTON aufgestellten Ausdruck ist der genannte Satz von LAPLACE[1]) aus der Emissionstheorie abgeleitet worden. Die Formel hat aber nur bis zu einem gewissen Grade eine praktische Bedeutung erlangt. Für Gase trifft sie zu, ebenso wenn es sich darum handelt, das Brechungsvermögen von Gasgemischen nach dem gewöhnlichen Mischungsgesetz abzuleiten[2]). Dagegen ist für Flüssigkeiten wiederholt durch die weiter unten citirten Arbeiten von DALE und GLADSTONE, WÜLLNER, LANDOLT, RÜHLMANN und Anderen nachgewiesen worden, dass der Ausdruck $(n^2-1)/d$ keineswegs den Charakter einer Constanten beanspruchen darf[3]), sondern als eine Function der Temperatur bezw. des Druckes zu betrachten ist. Gewöhnlich differiren denn auch die mit Hilfe dieser Formel rückwärts berechneten Brechungsindices von den beobachteten Werthen schon in der dritten Decimale von n, und nicht selten machen sich die Abweichungen schon in der zweiten Decimale bemerkbar. Mit der Anwendung des Ausdrucks auf Flüssigkeiten hat sich in früheren Jahren namentlich SCHRAUF[4])

---

[1]) LAPLACE, Mécanique céleste 4, libre 10, pag. 237. 1805.

[2]) In dieser Weise von BIOT und ARAGO, Mém. de l'Acad. de France 7, pag. 301. 1806; und DULONG, Ann. de Chim. et de Phys. 31, pag. 154. 1826; POGG. Ann. 6, pag. 393. 1826, angewandt.

[3]) HOEK und OUDEMANS, Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides. La Haye 1864.

[4]) SCHRAUFF, POGG. Ann. 116, pag. 193. 1862; 118, pag. 359. 1863; 119, pag. 461, 553. 1863; 126, pag. 179. 1865; 127, pag. 175, 344. 1866; 133, pag. 479. 1868, u. Physikalische Studien, Wien 1867.

beschäftigt. Gegenwärtig ist der Ausdruck ganz verlassen, nachdem ihm schon lange mit dem Preisgeben der Emissionstheorie auch die theoretische Grundlage entzogen war. Vorübergehend hat SCHRAUF die Formel auch vom Standpunkte der Undulationstheorie aus zu stützen gesucht. —

Der zweite Ausdruck $(n-1)/d$ entbehrt überhaupt jeder theoretischen Grundlage. Derselbe ist von BEER[1]) versuchsweise eingeführt, indem dieser zeigte, dass man bei den Gasen ebenso gut diesen Ausdruck wie den vorerwähnten als constant ansehen könne. Später haben dann DALE und GLADSTONE[2]), LANDOLT[3]), WÜLLNER[4]) und Andere die Prüfung der Formel an einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten durchgeführt. Merkwürdiger Weise ergab der Ausdruck, dem später DE KLERCKER[5]) und CHRISTIANSEN[6]) auch eine theoretische Bedeutung beizulegen versucht haben[7]), für die Mehrzahl der Flüssigkeiten eine erheblich grössere Annäherung an die Constanz als der frühere Ausdruck. Zunächst gilt dies für die bei den vorgenannten Arbeiten vorzugsweise in Betracht kommenden Temperaturvariationen der Brechungsindices, ferner aber auch hinsichtlich der durch Druck hervorgerufenen Aenderungen, wie die diesbezüglichen Messungen von QUINCKE, RÖNTGEN und ZEHNDER[8]) dargethan haben.

Der Einfluss des Druckes auf den Brechungsindex einer Flüssigkeit ist natürlich, verglichen mit den Veränderungen, welche die Temperatur hervorzurufen im Stande ist, ausserordentlich klein. Für einen Ueberdruck von 1 Atmosphäre beträgt die Erhöhung des Brechungsindex beispielsweise für Wasser nur 1·5 Einheiten der 5. Decimale von n, während der Temperatureinfluss (pro 1° C.) meist schon die 4. Decimale um mehrere Einheiten abändert. Mit Hilfe besonderer Interferentialmethoden ist es aber möglich gewesen, die Veränderungen der Brechungsindices mit grosser Genauigkeit festzustellen, und über die Gültigkeit der Beziehung $(n-1)/d = const$ ein Urtheil zu gewinnen. Bezeichnet man mit n_1 und d_1 die einem Ueberdruck von 1 Atmosphäre entsprechenden Werthe für Brechungsindex und Dichte, so lässt sich dem Satz vom constanten Refractionsvermögen folgende Form geben:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{n_1 - 1}{n - 1} = 1 + \frac{n_1 - n}{n - 1}.$$

Der Compressibilitäts-Coefficient μ ist durch folgende Relation

$$\frac{d_1}{d} = 1 + \mu \frac{p}{760}$$

definirt, unter p den Ueberdruck in Millimeter Quecksilber verstanden. Der Nachweis der Identität von μ und $\frac{n_1 - n}{n - 1}$ (für einen Ueberdruck von 1 Atm.)

[1]) BEER, Einleitung in die höhere Optik, pag. 35. 1853.

[2]) DALE und GLADSTONE, Philos. Trans. 148, pag. 887. 1858.

[3]) LANDOLT, POGG. Ann. 123, pag. 595. 1864.

[4]) WÜLLNER, POGG. Ann. 133, pag. 1. 1868.

[5]) DE KLERCKER, Dispersion prismatique. Stockholm 1882.

[6]) CHRISTIANSEN, WIED. Ann. 23, pag. 298. 1884.

[7]) Desgleichen hat ZEHNDER (WIED. Ann. 34, pag. 117. 1888) für die mit Hilfe des Ausdrucks $n - 1/d$ gebildete Mischungsformel eine theoretische Grundlage zu schaffen gesucht.

[8]) QUINCKE, Ueber die Aenderungen des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck, WIED. Ann. 19, pag. 401. 1883; ZEHNDER, Ueber den Einfluss des Druckes auf den Brechungsexponenten des Wassers für Natriumlicht. WIED. Ann. 34, pag. 91. 1888; RÖNTGEN und ZEHNDER, Einfluss des Druckes auf die Brechungsexponenten von Wasser, Schwefelkohlenstoff, Benzol, Aethyläther und einigen Alkoholen. WIED. Ann. 44, pag. 24. 1891.

schliesst somit auch die Gültigkeit der Grundlage der ersteren Gleichung, das ist die Beziehung $(n - 1)/d = const$, in sich ein. Bis zu welchem Grade die Uebereinstimmung der beiden Werthe für eine Anzahl der in dieser Richtung untersuchten Flüssigkeiten zutrifft, ist aus der nachstehenden, einer Arbeit von QUINCKE[1]) entnommenen Zusammenstellung ersichtlich. Für Wasser ist die Uebereinstimmung der Werthe eine äusserst vollkommene, dagegen treten für die übrigen Körper noch ziemlich beträchtliche Abweichungen auf, die aber wegen der

Beobachter	Wasser	Schwefelkohlenstoff	Alkohol	Aether	Benzol
		Volumenänderung für 1 Atm. beobachtet $\mu \cdot 10^6$.			
QUINCKE	46·14 (20°)	62·62 (20°)	101·4 (20°)	142·6 (20°)	66·7 (20°)
RÖNTGEN	46·2 (18°)	89·5 (18°)	111·4 (19·3°)	163·8 (8·1°)	91·7 (17·9°)
COLLADON u. STURM	49·5 (10°)	—	96·2 (11·6°)	150 (11·4°)	—
GRASSI	46·1 (18°)	—	90·4 (13·1°)	140 (14°)	—
AMAURY u. DESCAMPS	45·7 (15°)	63·5 (14°)	91·1 (15°)	128 (14°)	—
ÇAILLETET	45·1 (8°)	98·0 (8°)	97·6 (9°)	144 (10°)	—
AMAGOT	—	87·2 (15·6°)	101 (14°)	190 (25·4°)	—
PAGLIANI u. PALAZZIO	—	—	104 (18·1°)	—	87·1 (15·4°)
G. DE METZ . . .	47·7 (12·6°)	—	—	—	74·7 (14·8°)
		Volumenänderung für 1 Atm. unter Annahme der Constanz der specifischen Brechung aus den beobachteten Werthen $n_1 - n$ berechnet $\mu \cdot 10^6$.			
QUINCKE	46·04 (20·4°)	64·88 (15°)	100·2 (20·2°)	144·83 (18°)	64—81 (16°)
RÖNTGEN	45·7 (17·9°)	103·3 (18°)	110·5 (19·3°)	171·4 (8·1°)	99·4 (17·9°)
MASCART	45·3 (15°)	—	—	—	—
ZEHNDER	45—50(0—23°)	—	—	—	—

Schwierigkeit dieser Untersuchungen wohl hauptsächlich auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind. Eine bessere Uebereinstimmung zeigt sich, wenn man nur die von RÖNTGEN und ZEHNDER auf Grund besonders sorgfältig ausgeführter Beobachtungen erhaltenen Zahlen mit einander vergleicht. Die beiden Beobachter ziehen aus ihren Versuchen den Schluss, dass die noch vorhandenen Abweichungen grösser seien als die möglichen Beobachtungsfehler, dass also für die durch Druck hervorgerufenen Aenderungen der Brechungsindices von Flüssigkeiten der Ausdruck $(n - 1)/d$ nur den Charakter einer angenäherten Constante besitze — also im Grossen und Ganzen dasselbe Resultat wie für die durch Temperatur bewirkten Veränderungen der Brechungsindices. RÖNTGEN und ZEHNDER haben ausser dem vorerwähnten Ausdruck auch noch den dritten der drei oben genannten auf dessen Leistungsfähigkeit untersucht. Es ergab sich, dass auch dieser Ausdruck die durch Druck erzeugte Aenderung des Brechungsindex mit einer innerhalb der Fehlergrenze der Versuche liegenden Genauigkeit nicht darstellt. Mit Ausnahme des Wassers liegt der wirkliche Werth zwischen den aus diesen Formeln sich ergebenden Werthen. Die Versuche scheinen in dieser Richtung noch nicht zu einem endgültigen Abschluss gekommen zu sein. Dasselbe gilt von dem Einfluss des Druckes auf die Dispersion. —

Die dritte Beziehung endlich ist von L. LORENZ[2]) in Kopenhagen und von H. A. LORENTZ[3]) in Leyden gleichzeitig aus verschiedenen theoretischen Gesichts-

[1]) QUINCKE, Ueber die Beziehungen zwischen Compressibilität und Brechungsexponenten von Flüssigkeiten. WIED. Ann. 44, pag. 774. 1885.

[2]) L. LORENZ, WIED. Ann. 11, pag. 70. 1880.

[3]) H. A. LORENTZ, WIED. Ann. 9, pag. 641. 1880.

punkten abgeleitet, von dem einen unter Zuhilfenahme gewisser Vorstellungen über die zwischen den Aether- und Körpertheilchen wirksamen Kräfte, von dem anderen aus den Vorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie. Man hat die so eingeführte Formel von vornherein mit grossem Wohlwollen aufgenommen und ihr den Vorzug vor der empirischen Formel gegeben. Gegenwärtig ist der Ausdruck in seiner Anwendung auf die von LANDOLT und BRÜHL entwickelte Theorie der Refractionsäquivalente (vergl. weiter unten) allgemein im Gebrauch.

Was die praktische Leistungsfähigkeit der neuen Formel anbetrifft, so zeigt zunächst die Anwendung der Formel auf die Gase, dass dieselbe ebensogut wie die beiden anderen zur Darstellung der in Betracht kommenden Veränderungen benutzt werden kann. Es kann das nicht auffallen, da wegen des geringen Ueberschusses der Brechungsindices über die Einheit die drei Ausdrücke der Reihe nach durch folgende

$$\frac{2(n-1)}{d}, \quad \frac{n-1}{d} \quad \text{und} \quad \frac{2(n-1)}{3}\frac{1}{d}$$

ersetzt werden können[1]), welche sich, wie man sieht, nur durch andere Zahlenfaktoren unterscheiden. Ist also der Nachweis der Constanz für einen der drei Ausdrücke erbracht, so ist er damit praktisch auch für die beiden andern dargethan. Die Gase können somit eine Entscheidung betreffs der grösseren Leistungsfähigkeit der theoretischen Formel nicht geben[2]).

Für die Flüssigkeiten schien nun allerdings nach den ersten von LORENTZ (l. c.), PRYTZ[3]) und BLEEKRODE[4]) vorgenommenen Prüfungen die Ueberlegenheit der neuen Formel über die frühere, empirische offenkundig zu sein. Der Ausdruck schien sogar das zu leisten, was den beiden anderen nicht, wenigstens nicht in dem Maasse, geglückt war, nämlich: beim Uebergang des Körpers aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand noch gültig zu bleiben. In der That ergab sich für eine Reihe von Substanzen eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung der aus dem gasförmigen und flüssigen Zustand eines Körpers berechneten Werthe. So wurde erhalten für:

	flüssig		gasförmig
Wasser	0·20615 (10°)	0·20608 (20°)	0·2068
Chloroform . . .	—	0·1791 (20°)	0·1796
Schwefelkohlenstoff	0·28052 (10°)	0·28086 (20°)	0·2898[5]).

[1]) Vergl. KETTELER, WIED. Ann. 30, pag. 287. 1887.

[2]) Dem Satze von constanten Refractionsvermögen lässt sich bei den Gasen die folgende für die Berechnung des einer bestimmten Temperatur und einem bestimmten Drucke zugehörigen Brechungsindex praktisch verwendbare Form geben:

$$n - 1 = (n_0 - 1)\frac{b}{(1 + \alpha t)\cdot 760}.$$

Prüfung und Verificirung durch CHAPPUIS und RIVIÈRE, Ann. de Chim. et de phys. XIV. pag. 5. 1888 (Atm. Luft, Kohlensäure und Cyan bei 20 Atmosphären Drucksteigerung); ferner bestätigt BENOIT, Trav. et Mém. du Bureau internat. des poids et mesures, I. 1881 u. VI. 1888 (Journ. de phys. (2) VIII. pag. 451) für Drucke zwischen 0 und 760 *mm* und Temperaturen von 0—80° die Identität des Coefficienten α mit dem Ausdehnungscoefficienten (0·00367) der Luft; MASCART, Ann. de l'Ecole normale (2) VI. pag. 9. 1877 hatte einen anderen Werth gefunden; ältere Versuche über die Abhängigkeit des Brechungsindex der Luft von der Temperatur (Temperaturformel) siehe V. v. LANG, Wien. Ber. 49, II. Bd. pag. 451. 1874 (MASCART, KETTELER).

[3]) PRYTZ, WIED. Ann. 11, pag. 104. 1880.

[4]) BLEEKRODE, Roy. Proc. Lond. pag. 233. 1884; Journ. de phys. 4, pag. 109. 1885 (Untersuchung condensirter Gase).

[5]) Weitere Werthe siehe bei BRÜHL, Z. f. physik. Chemie VII. pag. 4 und pag. 24. 1891.

Die noch vorhandenen Unterschiede der bezüglichen Werthe kommen kaum in Betracht, wenn man bedenkt, mit welch' ungeheuren Dichteänderungen man es hier zu thun hat.

Nun stellte sich aber bald heraus, als man anfing, den Ausdruck auch auf die durch Temperatur, Druck und Mischung hervorgerufenen verhältnissmässig viel geringeren Dichteänderungen anzuwenden[1]), dass derselbe doch nicht so constant war wie man nach den vorstehenden Resultaten erwartet hatte, dass er zwar in manchen Fällen mehr leiste als die empirische Formel, aber in anderen Fällen auch wieder weniger. Neuere Versuche von KETTELER[2]) an Wasser (0°—100°), Alkohol (—8°—76°) Schwefelkohlenstoff (—20°—40°) haben die Unzulänglichkeit der LORENZ'schen Formel über allen Zweifel klargestellt. Die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Brechungsindices übersteigen bei weitem alle möglichen Beobachtungsfehler. Zu dem gleichen Ergebniss führten die Untersuchungen von KNOPS[3]) und WEEGMANN[4]). Sehr anschaulich ist folgendes von KETTELER und WEEGMANN angewandtes Verfahren, die Unzulänglichkeit des L.'schen Ausdruckes zu erweisen. Wenn man nämlich die Zahl 2 in dem LORENZ'schen Ausdruck durch eine vorläufig noch unbekannte Grösse x ersetzt und zusieht, welche Zahl für x genommen werden muss, damit den Beobachtungen in aller Strenge Rechnung getragen werde, so erhält man beispielsweise für Schwefelkohlenstoff den Werth $x = 4{\cdot}2$, also eine Zahl, die die L.'sche um mehr als das doppelte übersteigt[5]).

In besonders eclatanter Weise wird die Unzulänglichkeit der vorstehenden Formeln[6]) durch ein Beispiel documentirt, das auch für sich selbst ein gewisses Interesse verlangt, nämlich durch das Verhalten des Wassers in der Nähe seines Gefrierpunktes[7]).

Bekanntlich besitzt das Wasser bei 4° das Maximum seiner Dichte. Die »Proportionalität von Brechungsvermögen und Dichte« vorausgesetzt, müsste auch der Brechungsindex bei 4° ein Maximum zu erkennen geben. Das ist aber durchaus nicht der Fall. Nach den Messungen von RÜHLMANN[8]) nimmt der Brechungsindex von 0° stetig und unbekümmert um das Dichtemaximum

---

1) RÖNTGEN und ZEHNDER, vergl. oben. — DAMIEN, Ann. de l'Ecole norm. 10, pag. 233. 1881. — LANDOLT, Berl. Ber. 1892, pag. 64 und LIEB. Ann. 203, pag. 75. 1882. — NASINI und BORNHEIMER, R. Accad. dei Lincei, Mem. 18. 1884. — SCHRAUF, WIED. Ann. 28, pag. 413 1886. — BRÜHL, LIEB. Ann. 235, pag. 1. 1886 und Andere.

2) KETTELER, Experimentaluntersuchung über das Refractionsvermögen der Flüssigkeiten zwischen sehr entfernten Temperaturgrenzen. WIED. Ann. 33, pag. 354 u. pag. 506. 1888; 35, pag. 662. 1888.

3) KNOPS, Inaug.-Diss., Bonn. — LIEBIG, Ann. 1887.

4) WEEGMANN, Inaug.-Diss., Bonn. — Zeitschr. f. physik. Chemie 2, pag. 218. 1888.

5) WEEGMANN fand im Mittel für die von ihm untersuchten Substanzen die Zahl 3·5.

6) Es ist wiederholt die Frage aufgeworfen worden, welcher Brechungsindex bei der Prüfung der Formel zu verwenden sei, und ob nicht die Dispersion die Abweichungen verschulde (SCHRAUF, BRÜHL etc.) Es ist deshalb lange Zeit der, wie man zu sagen pflegte, »von der Dispersion befreite Index« — die Constante A der CAUCHY'schen Dispersionsformel — zu den Rechnungen benutzt worden, ohne aber damit bessere Resultate erreicht zu haben.

7) RÜHLMANN, POGG. Ann. 133, pag. 184. 1867.

8) RÜHLMANN, l. c. Mit dem Brechungsvermögen des Wassers haben sich zahlreiche Forscher beschäftigt (dieselben sind zum Theil in LANDOLT's Tabellen namhaft gemacht). In LANDOLT's Tabellen findet man auch die direkten Temperaturformeln nach RÜHLMANN (n als Function von t) mitgetheilt.

mit zunehmender Temperatur ab. Es geht daraus ohne Weiteres hervor, dass bei Temperaturänderungen der Brechungsindex nicht einfach als Function der Dichte angesehen werden kann, dass vielmehr noch andere Kräfte thätig sein müssen, die ebenfalls einen Einfluss auf den Brechungsindex ausüben, deren physikalische Natur in den einzelnen Fällen aber noch nicht erkannt ist. Der Hauptsache nach scheint in der That der Einfluss der Dichte maassgebend zu sein, auch beim Wasser, denn wie meine eigenen Untersuchungen unzweifelhaft ergeben haben, findet auch für den Brechungsindex ein Maximum statt[1]), welches bei — $1\frac{1}{2}^{\circ}$ gelegen ist; auch der steilere Abfall der Curve der Brechungsindices für unterkühltes Wasser entspricht ganz den für die Dichte bekannten Verhältnissen. Worin aber die verschiedene Lage der beiden Maxima begründet ist, vermag man hier ebensowenig wie in anderen Fällen zu sagen.

Das zuletzt Gesagte gilt auch von der von KETTELER entwickelten Theorie der Volum- und Refractionsäquivalente[2]). Der von KETTELER abgeleitete Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{d}(1-\beta d)=C$$

oder

$$(n^2-1)(v-\beta)=C,$$

in welchem Ausdruck v das Volumen, welches die ponderable Masseneinheit thatsächlich einnimmt, β das Volumen, welches dieselbe bei continuirlicher Raumerfüllung einnehmen würde, also $(v-\beta)$ das Volumen des intermolekularen Aethers bedeuten, kann ebensowenig wie die früheren Ausdrücke zur Darstellung des Verhaltens des Wassers benutzt werden. KETTELER hat zur Prüfung dieser Beziehung nach einem totalreflektometrischen Verfahren (l. c.) die Brechungsindices von Wasser, Alkohol und Schwefelkohlenstoff zwischen den oben angegebenen Temperaturgrenzen bestimmt und ist zu dem Resultat gekommen, dass auch die Constante C nicht mehr als constant anzusehen, sondern durch

$$M=C(1-a\,e^{-k\cdot t})$$

zu ersetzen sei, in welchem Ausdruck unter den beiden ursprünglichen Constanten β und C noch zwei weitere a und k vorkommen. Mit Hilfe dieser Formel ist es KETTELER gelungen, den Verlauf des Wassers von 0—100°, sowie die Lichtbrechung des Alkohols über ein Temperaturintervall von 84° und die des Schwefelkohlenstoffs von —20 bis + 40° durch Rechnung in sehr naher Uebereinstimmung wiederzugeben.

Das Verhalten der festen Körper war man bisher gewohnt als ganz ausserhalb des Zusammenhanges mit dem Verhalten der übrigen Körper stehend zu betrachten. Man begnügte sich zu constatiren, dass bei vielen festen Körpern, insbesondere den Gläsern, mit wachsender Temperatur eine Erhöhung des Brechungsindex eintrete[3]), ohne dass es möglich war, eine Erklärung für

---

[1]) PULFRICH, Untersuchung über die Brechungsverhältnisse des Eises und des unterkühlten Wassers. WIED. Ann. 34, pag. 326. 1888. Entgegen den Angaben von DAMIEN, Ann. de l'Ecole norm. sup. II. 10, pag. 275. 1881 (LANDOLT's Tab. pag. 205. 1883).

[2]) KETTELER, Theoretische Optik, Braunschweig 1885, pag. 103; WIED. Ann. 30, pag. 286. 1887; WIED. Ann. 33, pag. 353 u. 35, pag. 662. 1888. Zeitschr. f. physik. Chemie II., pag. 905. 1888.

[3]) In der nachstehenden Literaturzusammenstellung sind die Namen derjenigen Körper, welche eine Zunahme des Brechungsindex mit der Temperatur ergaben, in gesperrtem Druck angeführt. Bei allen anderen angeführten Körpern nimmt der Brechungsindex mit der Temperatur ab:

diese dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsindex und Dichte direkt widersprechende Erscheinung zu geben. Da die beobachteten Temperaturvariationen im Vergleich zu den bei den Flüssigkeiten vorkommenden Werthen nur sehr klein sind, so war man geneigt, dieser Erscheinung nur eine nebensächliche Bedeutung beizulegen.

Ich habe vor kurzem versucht[1]), eine Erklärung für das Verhalten der festen Körper zu geben, die nicht allein den genannten Widerspruch beseitigt, sondern auch die Vermuthung nahe legt, dass bei den Flüssigkeiten die beobachteten Abweichungen von dem Satze der Proportionalität zwischen Brechungsvermögen und Dichte in manchen Fällen vielleicht auf die gleiche physikalische Ursache zurückgeführt werden können wie bei den festen Körpern. Während man bisher immer nur die Veränderungen der Dichte oder des Volumens, welche der Körper unter dem Einfluss der Temperatur erleidet, für die Variationen des Brechungsindex verantwortlich gemacht hat, bin ich von der Anschauung ausgegangen, dass bei der Natur der in Frage kommenden Volumvergrösserung es von vornherein als höchst unwahrscheinlich bezeichnet werden müsse, wenn man annehmen wollte, dass die Volumänderung die einzige Wirkungsäusserung der Temperatur sei. Für die gleiche Volumänderung, wenn dieselbe einmal durch Druck, ein andermal durch Wärme hervorgebracht ist, wird man nicht ohne Weiteres die gleiche optische Wirkung erwarten dürfen. Denn der Einfluss der Wärme besteht sowohl in einer Vergrösserung des Abstandes zwischen den einzelnen Körpermolekülen als auch namentlich in einer Steigerung des Schwingungszustandes der Körpertheilchen, während bei den durch Druck oder Zug bewirkten Volumänderungen nur die Abstände der Moleküle verändert werden.

Für die Erledigung dieser Frage war es von besonderem Interesse, den Einfluss der Temperatur auf den Verlauf der Dispersion kennen zu lernen. Es hat sich nun bei allen von mir untersuchten Substanzen — 10 verschiedene Gläser und mehrere durchsichtige Minerale — das bemerkenswerthe Resultat ergeben, dass die Dispersion mit wachsender Temperatur eine Steigerung erfährt, und zwar sowohl in den Fällen, wo der Brechungsindex zunimmt als auch in den Fällen wo er abnimmt. In nachstehender Tabelle sind für einige Körper die erhaltenen Werthe $\Delta\mathfrak{N}_0$ (vergl. oben pag. 309) zusammengestellt.

RUDBERG, POGG. Ann. 26, pag. 291. 1832 (Kalkspath, Quarz, Aragonit). — FIZEAU, Ann. chim. phys. (3) 66, pag. 429. 1862; POGG. Ann. 119, pag. 87, 297. 1863 (Kalkspath, Flussspath, Zinkglas von Maës, Glas von St. Gobain, Gew. Flintglas); Ann. chim. phys. (4) 2, pag. 143. 1864 (Quarz). — BAILLE, Dissert. Paris 1867. (Flintgläser, Gew. Crown (±), Zink-Crown (±), Flussspath, Diamant, Blende, Opal, Alaun). — STEFAN, Wien. Ber. (II.) 63, pag. 239. 1871 (Steinsalz, Sylvin, Kaliumalaun, Flussspath, Glas). — HASTINGS, Astr. Nachr. 2501; Ann. Journ. of sc. (3) 15, pag. 269. 1878 (zwei Flint- und zwei Crowngläser). — G. MÜLLER, Publicat. des astroph. Obs. zu Potsdam (16) 4, pag. 151. 1885 (Kalkspath, Quarz, mehrere Flint- und Crowngläser). — E. VOGEL, WIED. Ann. 25, pag. 87. 1886 (Kalkspath, schweres Flintglas, weisses Glas). — OFFRET, Bull. de la soc. franc. de min. 10, pag. 405—697. 1890 (Beryll, Phenacit, Kalkspath, Aragonit, Baryt, Topas de minas geraes, Topas von Schneckenstein, Cordierit, Sanidin, Oligoclas). — ARZRUNI, GROTH's Zeitschr. f. Kryst. 1, pag. 165. 1877 (Schwerspath, Coelestin, Anglesit). — DUFET, Bull. de la soc. min. de France 7, pag. 182; 8, pag. 187, 257 (Quarz, Beryll, Flussspath). — SELLA, WIED. Beibl. 16, pag. 424. 1892 (Diamant).

[1]) PULFRICH, Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases. WIED. Ann. 45, pag. 609. 1892.

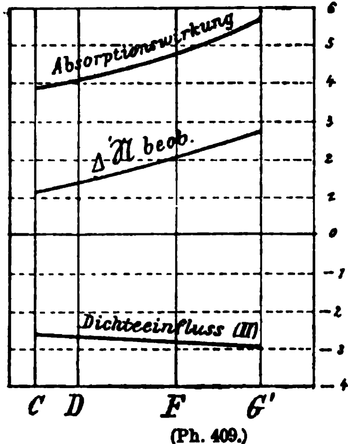
Name	Mittel-Temp.	C	D	F	G'	Cub. Ausdehnungs-coefficient
		Aender. d. Br.-Index pro 1° C. in Einh. d. 5. Dec.				
Schwerstes Silicatflint S. 57	58·8°	1·204	1·447	2·090	2·810	$10^{-8} \cdot 2804$
Leichtes Silicatflint O. 154	58·4°	0·225	0·261	0·334	0·407	$10^{-8} \cdot 2367$
Baryt-Leichtflint O. 527 .	58·3°	— 0·008	0·014	0·080	0·137	$10^{-8} \cdot 2696$
Phosphat-Crown S. 40 . .	60·3°	— 0·312	— 0·305	— 0·246	— 0·237	$10^{-8} \cdot 2613$
Steinsalz von Stassfurt . .	58·8°	— 3·749	— 3·739	— 3·648	— 3·585	$10^{-8} \cdot 12117$
Quarz, ordinärer Strahl . .	59·6°	— 0·649	— 0·638	— 0·599	— 0·577	$10^{-8} \cdot 3530$
„ extraordinärer Strahl		— 0·761	— 0·754	— 0·715	— 0·694	
Flussspath	60·5°	— 1·220	— 1·206	— 1·170	— 1·142	$10^{-8} \cdot 5734$
Kalkspath, ordinärer Strahl	103°	0·071	0·081	0·091	0·100	$10^{-8} \cdot 1447$
(nach Vogel) extraord. „		1·012	1·020	1·073	1·090	

Man sieht, in den Fällen, wo der Brechungsindex mit der Temperatur wächst, sind die Temperaturvariationen im Blau grösser als im Roth, und in den Fällen, wo der Brechungsindex mit der Temperatur abnimmt, ist die Abnahme im Blau kleiner als im Roth, d. h. also in allen Fällen wird das Spectrum gedehnt, die Dispersion vergrössert. Dasselbe gilt für das als Specialfall immerhin bemerkenswerthe Verhalten des Glases O. 527, bei dem im Blau positive, im Roth negative Variationen auftreten, und für einen mittleren Theil des Spectrums der Einfluss der Temperatur auf den Brechungsindex ganz verschwindet. Die gleiche Erscheinung der Dispersionssteigerung mit wachsender Temperatur ist auch von Offret (l. c.) an einer grossen Anzahl von Krystallen sowie von Baille (l. c.) an sämmtlichen von ihm untersuchten Körpern constatirt worden.

Während bei den Flüssigkeiten und Gasen in der Regel eine Abnahme der Dispersion mit wachsender Temperatur eintritt, findet somit hier das Umgekehrte statt, eine Thatsache, die dem Satze vom constanten Refractionsvermögen gegenüber als ebenso auffallend angesehen werden muss, als das Auftreten positiver Temperaturvariationen, die mir aber den Schlüssel zu der gesuchten Erklärung gegeben hat. Die nähere Betrachtung hat nämlich zu dem Resultat geführt, dass die Erklärung für das Verhalten der festen Körper in einer gleichzeitig neben der Dichteänderung herlaufenden Vergrösserung der Absorptionswirkung im blauen und ultrablauen Theile des Spectrums zu suchen sei.

Es ist weiter oben auf den Einfluss hingewiesen worden, den die Absorption auf die Dispersion eines Körpers ausübt, und dabei hervorgehoben, dass man im Stande sei, aus dem Verlauf des Neigungswinkel direkt auf das Vorhandensein von selbst weit entlegenen Absorptionsgebieten zu schliessen. Dasselbe gilt von den Veränderungen des Neigungswinkels und den Veränderungen der Absorptionswirkung mit der Temperatur. Wenn man die Veränderung des Neigungswinkels mit der Temperatur im einzelnen verfolgt, so gelangt man zu dem Schluss, dass dieselbe für eine Anzahl der untersuchten Substanzen nur durch eine Zunahme der Absorption im blauen Theile des Spectrums herbeigeführt werden kann, und dass für die übrigen Körper die gleiche Erscheinung wenigstens nicht unwahrscheinlich gemacht ist. Diese Schlussfolgerung erfährt in doppelter Weise eine Bestätigung, einmal durch das direkte Experiment, sofern bei den Flintgläsern, welche das am meisten abweichende Verhalten zu erkennen geben, die Absorptionszunahme im Blau in augenfälliger Weise (beträchtliche Steigerung der Gelbfärbung) zu Tage tritt; zweitens stehen die Resultate im Einklang mit einer gewissen Eigenthümlichkeit in dem Ver-

halten der durchsichtigen festen Körper zu dem Satze der Proportionalität von Brechungsvermögen und Dichte, die bisher noch keine Beachtung gefunden hat. Wenn man nämlich unter Zuhilfenahme einer der drei obigen Ausdrücke — gleichgültig welchen man dazu verwendet — aus dem bekannten cubischen Ausdehnungscoëfficienten die Veränderung des Brechungsindex berechnet, und diesen berechneten Werth mit dem beobachteten vergleicht, so zeigt sich, dass der Sinn der Abweichungen bei allen untersuchten festen durchsichtigen Körpern immer der gleiche ist. Ueberall bleibt ein positiver Rest übrig, wenn man die aus der Dichteänderung berechneten Aenderungen der Brechungsindices von den beobachteten Werthen subtrahirt. Nachstehendes Beispiel und Fig. 409 dienen zur Illustration des beschriebenen Verhaltens.



(Ph. 409.)

Schwerstes Silicatflint (S. 57). $3\alpha = 10^{-8} \cdot 2804$ (Fig. 409).

Linie	𝔑	Einfluss der Dichte (Einheiten der 5. Decimale)		
		$\frac{n^2-1}{d} = C$	$\frac{n-1}{d} = C$	$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = C$
C	1·9492	— 2·013	— 2·662	— 3·893
D	1·9625	— 2·037	— 2·699	— 3·973
F	1·9980	— 2·100	— 2·799	— 4·194
G'	2·0303	— 2·156	— 2·889	— 4·400

Linie	Δ𝔑 (1°) beobachtet	Restbetrag = Absorptionswirkung		
C	1·204	3·215	3·866	5·095
D	1·449	3·484	4·148	5·420
F	2·090	4·187	4·889	6·281
G'	2·810	4·964	5·699	7·208

Indem wir also den Restbetrag als die von dem Einfluss der Dichteänderung befreite Wirkungsäusserung des gesteigerten Absorptionsvermögens ansehen, erscheint der Temperatureinfluss als eine Differenzwirkung zweier einander entgegengesetzt wirkenden Kräfte, Dichte und Absorptionsvermögen. Die Abnahme der Dichte vermindert den Index, die zunehmende Absorption erhöht denselben wieder. Je nachdem die eine oder die andere der beiden Wirkungen überwiegt, findet eine Abnahme oder Zunahme des Brechungsindex statt; wenn sich die beiden Wirkungen gegenseitig aufheben, so bleibt der Brechungsindex anscheinend ganz befreit von dem Einfluss der Temperatur.

Bei den verhältnissmässig sehr geringen Dichteänderungen der festen Körper sind von vornherein alle drei Fälle möglich und nur dem Umstande, dass die Ausdehnungscoëfficienten des Glases beträchtlich kleiner sind als die der meisten übrigen festen Körper ist es zuzuschreiben, dass bei den Gläsern die positiven Temperaturvariationen der Brechungsindices überwiegen. Auch bei den Krystallen

treten die positiven Temperaturvariationen meist nur da auf, wo auch die kubischen Ausdehnungscoëfficienten sehr klein sind. —

Vielleicht lässt sich unter den genannten Gesichtspunkten auch das Verhalten der Metalle erklären. Nach den Untersuchungen von KUNDT[1]) (l. c.) nimmt der Brechungsindex der Metalle mit der Temperatur ebenfalls zu. Die Zunahme erreicht im Mittel den enormen Betrag von 0·0037 pro 1° C. Von einem etwaigen Zusammenhang zwischen Dichte und Brechungsindex ist natürlich hier gar keine Rede mehr. Es ist mir nicht bekannt, ob direkte Versuche über die Abhängigkeit der Absorptionswirkung der Metalle von der Temperatur ausgeführt sind. Eine Aenderung der Dispersion ist für die Metalle bis jetzt noch nicht constatirt.

Dagegen hat KUNDT auf eine andere Beziehung aufmerksam gemacht, welche den Brechungsindex der Metalle mit dem Leitungsvermögen derselben für Elektricität und Wärme verbindet. Demnach sind diejenigen Metalle, denen der kleinste Brechungsindex, also die grösste Lichtgeschwindigkeit zukommt, zugleich die besten Leiter für Elektricität und Wärme. Die in der früher mitgetheilten Tabelle angeführten Metalle ergeben die gleiche Reihenfolge wie dort, wenn man dieselben nach ihrem Leitungsvermögen für Elektricität und Wärme anordnet. KUNDT hat ferner darauf hingewiesen, dass auch der oben angegebene Temperaturcoëfficient für den Brechungsindex der Metalle sehr nahe mit dem Temperaturcoëfficienten für das galvanische Leitungsvermögen übereinstimme, und dass in einem und demselben Metall bei der Aenderung der Temperatur Lichtgeschwindigkeit und galvanisches Leitungsvermögen einander proportional bleiben.

3. Abhängigkeit des Brechungsvermögens von der bei Mischungen und Lösungen stattfindenden Volumenänderung.

Es ist an früheren Stellen schon bemerkt worden, dass man mit Hilfe der Refractionsconstante im Stande sei, das Brechungsvermögen der Mischung zweier Gase oder zweier Flüssigkeiten aus den Refractionsconstanten der Bestandtheile abzuleiten (BIOT und ARAGO, HOEK, LANDOLT, WÜLLNER u. A.) Bezeichnet man einen der früher erwähnten Ausdrücke für die Refractionsconstante allgemein mit dem Buchstaben R, unterscheidet also die den Bestandtheilen und der Mischung zukommenden Werthe mit R_1, R_2 und R, so schreibt sich die mit dem Namen der BIOT-ARAGO'schen Mischungsformel bezeichnete Beziehung folgendermaassen:

$$R \cdot P = R_1 p_1 + R_2 p_2$$

unter $P = p_1 + p_2$ die Summe der gemischten Bestandtheile nach Gewichten verstanden.

Für Gasgemische genügt die angegebene Formel. Für Flüssigkeiten gewährt sie aber nur in erster Annäherung eine Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Berechnete und beobachtete Brechungsindices unterscheiden sich hier oft um den 100fachen Betrag der überhaupt möglichen Beobachtungsfehler. Diese Unzulänglichkeit der Mischungsformel tritt auch bei den ebenfalls zur Berechnung herangezogenen Lösungen fester Körper (Salze etc.) zu Tage, wie auch umgekehrt die aus Lösungen berechnete Refractionsconstante des gelösten Körpers mit der des Körpers im festen Zustande nie vollständig übereinstimmt.

Man kann sich fragen, ob sich nicht die Brechungsindices von Mischungen und Lösungen berechnen lassen, ohne dass man auf einen der Ausdrücke für

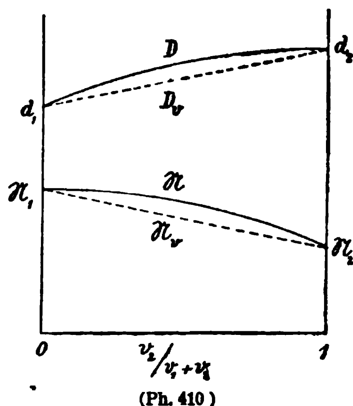
[1]) l. c. und KUNDT, Berl. Ber. 1888, pag. 1387.

das Refractionsvermögen zurückzugreifen braucht[1]). In der That ist diese Frage wiederholt gestellt worden, wobei man in erster Linie den Einfluss, welchen die beim Mischen eintretende Volumenänderung auf das Brechungsvermögen auszuüben vermag, in Rechnung zu bringen gesucht hat. Indessen haben die früheren Versuche[2]) infolge der wenig rationellen und zum Theil auch unrichtigen Definitionen für die Volumenänderung (Contractionscoëfficient) zu wenig befriedigenden Resultaten geführt. Vor einigen Jahren habe ich versucht[3]), den Nachweis zu führen, dass das Brechungsvermögen von Mischungen und Lösungen in der That in eine einfache Beziehung zu der bei der Mischung und Lösung stattfindenden Volumänderung zu bringen ist, und dass mit Hilfe des dafür aufgestellten Ausdruckes man im Stande ist, das Brechungsvermögen solcher Mischungen und Lösungen in sehr vielen Fällen mit einer erheblich weiter gehenden Annäherung an die Erfahrung abzuleiten, als mit Hilfe der BIOT-ARAGO'schen Formel bisher möglich gewesen ist.

Es werde angenommen, dass v_1 Volumen einer ersten Flüssigkeit von der Dichte $d_1 = p_1/v_1$ mit v_2 Volumen einer zweiten Flüssigkeit von der Dichte $d_2 = p_2/v_2$ gemischt seien und dass die Mischung die Dichte D habe. Würde bei der Mischung gar keine Volumenänderung eintreten, so müsste die Dichte der Mischung den Werth

$$D_v = \frac{p_1 + p_2}{v_1 + v_2} = d_1 + (d_2 - d_1)\frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

annehmen, wobei $v_2/v_1 + v_2$ den verhältnissmässigen Volumenantheil der zweiten Flüssigkeit bedeutet. Graphisch durch Ordinaten zum Ausdruck gebracht und bezogen auf die Werthe $v_2/v_1 + v_2$ als Abscissen (s. Fig. 410), stellt dann D_v das Gesetz einer geraden Verbindungslinie zwischen den Werthen d_1 und d_2 dar. Jede Abweichung der beobachteten Werthe D von der geraden Linie bedeutet eine durch die Mischung eingetretene Volumenänderung. Liegt D oberhalb D_v, so hat Contraction, liegt D unterhalb D_v, so hat Dilatation stattgefunden. Der numerische Betrag der Volumenänderung pro Volumeneinheit ergiebt sich zu:



(Fig. 410)

$$c = \frac{D - D_v}{D}.$$

Letzterer Ausdruck gilt für alle in Betracht kommenden Mischungsverhältnisse, einschliesslich den reinen Bestandtheilen. Für die gleichen Abscissen wie

[1]) Eine einfache Beziehung zwischen dem Brechungsindex und dem Procentgehalt einer Salzlösung existirt nicht; BEER und KREMERS, POGG. Ann. 101, 1857; HOFFMANN, POGG. Ann. 133, pag. 605. 1868; BÖRNER, Marburg 1869; Neuere Versuche von WALTER, WIED. Ann. 38. pag. 107. 1889 und DOUMER, Compt. rend. 110, pag. 40, 957. 1890, scheinen dem zu widersprechen. — Die Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen ist vor Kurzem von HALLWACHS, Göttinger Nachr. 1892, Nr. 9, zum Gegenstand einer experimentellen Untersuchung gemacht worden.

[2]) GRAILICH, Wien. Ber. pag. 25. 1857; A. WEISS und E. WEISS, Wien. Ber. pag. 33. 1889; SCHRAUF, POGG. Ann. 116. 1862; WÜLLNER, POGG. Ann. 133. 1868; v. REISS, WIED. Ann. 10, 1880; LÜDEKING, WIED. Ann. 27. 1886; BATTELI u. MARTINETTI, Rend. della Acc. Roma 1886.

[3]) PULFRICH, Z. f. physik. Chemie IV., pag. 561. 1889.

oben graphisch dargestellt gewährt c den Anblick einer Curve, beginnend und endigend mit dem Werth Null, und mit einem Maximum für ein bestimmtes mittleres Mischungsverhältniss.

Unter $\mathfrak{N}$ den um 1 verminderten Brechungsindex verstanden, seien die bezüglichen Werthe für die Bestandtheile und die Mischung mit $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Man sieht dann sofort, das sich dem Ausdruck D_v ein analoger für das Brechungsvermögen, nämlich:

$$\mathfrak{N}_v = \mathfrak{N}_1 + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

gegenüberstellen lässt, dessen graphische Darstellung wiederum das Bild einer geraden Verbindungslinie zwischen den beiden Endwerthen, hier also $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, zu erkennen giebt (s. Fig. 410).

Es hat sich nun zunächst durch Vergleich der beobachteten Werthe $\mathfrak{N}$ mit der Grösse $\mathfrak{N}_v$ ergeben, dass sich $\mathfrak{N}$ um so mehr dem $\mathfrak{N}_v$ nähert, je näher das beobachtete D dem D_v gelegen ist. Fälle, wo sich zwei Körper ganz ohne Volumenänderung mischen, scheinen in der Natur nur ausserordentlich selten vorzukommen. Gewöhnlich findet eine Contraction, weniger häufig eine Dilatation statt (letzteres z. B. bei Mischungen von Alkohol und Schwefelkohlenstoff, vergl. unten).

Eine weitere Uebereinstimmung besteht in Bezug auf den Sinn der Abweichungen. Jedesmal, wenn die D-Curve oberhalb D_v gelegen ist, liegt auch die $\mathfrak{N}$-Curve oberhalb $\mathfrak{N}_v$; und ist die $\mathfrak{N}$-Curve unterhalb $\mathfrak{N}_v$ gelegen, so kann man sicher sein, dass auch die D-Curve unterhalb D_v gelegen ist. Eine Ausnahme ist bisher noch nicht bemerkt worden.

Ich habe nun versucht, diesen Beziehungen dadurch Rechnung zu tragen, dass ich den dem Ausdruck für c analog gebildeten Ausdruck $\frac{\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}}$ einfach der Grösse c proportional setzte. In der That hat die von mir und BUCHKREMER[1]) an allen bis dahin untersuchten Mischungen und Lösungen vorgenommene numerische Prüfung die Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_v}{\mathfrak{N}} = \alpha \frac{D - D_v}{D}$$

dargethan. Der Proportionalitätsfactor α erwies sich stets als eine positive Grösse, die für die verschiedenen Körper verschieden war, aber für die sämmtlichen Mischungsverhältnisse zweier bestimmter Körper den Charakter einer angenäherten Constante annahm. Mit Hilfe des für α gefundenen Mittelwerthes liess sich dann die Beziehung dazu verwenden, die den einzelnen Mischungen zugehörigen Brechungsindices zu berechnen.

Dass in der That auf diese Weise eine erheblich weitergehende Annäherung an die Erfahrung erreicht ist, als die Anwendung der BIOT-ARAGO'schen Formel zu geben vermag, zeigt die nachstehend mitgetheilte Tabelle. Man sieht, dass die früheren Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung hier sogar auf weniger als $\frac{1}{10}$ ihres Betrages reducirt sind[2]). Es scheint indessen nicht, dass die genannte Beziehung für alle Fälle und in gleicher Strenge den Thatsachen genüge,

---

[1]) BUCHKREMER, Dissertation Bonn 1890; Z. f. physik. Chemie 1890, pag. 161.

[2]) Der obigen Formel lässt sich durch Umformung auch eine der BIOT-ARAGO'schen Mischungsformel ähnliche Gestalt geben. Die nähere Betrachtung dieser Formel (vergl. l. c.) giebt dann die Bedingungen, unter welchen die frühere BIOT-ARAGO'sche Formel der Erfahrung am nächsten kommt.

es kommen einzelne Fälle vor, wo der Proportionalitätsfaktor nicht mehr als Constante betrachtet werden kann[1]), obschon auch hier der Sinn der Abweichung des $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{N}_v$ derselbe ist wie des D von D_v.

Alkohol und Schwefelkohlenstoff (nach WÜLLNER).

Mischungsverhältniss in Gew.-Thln.	$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	${}^{n}H_{\alpha}$	$\frac{D-D_v}{D}$	$\frac{\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_0}{\mathfrak{N}}$	α	berech. — beob. für ${}^{n}H_{\alpha}$ in Einheiten d. 5. Dec. jetzt	früher
Alkohol	0	0·79628	1·36065	0	0	—	0	0
1 Alk. + 1·03111 CS_2	0·39386	0·97177	1·45450	− 0·00880	− 0·0169	1·92	+ 30	+ 367
1 „ + 2·12836 „	0·57289	1·05422	1·49996	− 0·00922	− 0·0168	1·82	− 14	+ 375
4 „ + 3·955 „	0·71367	1·12167	1·53771	− 0·00720	− 0·0129	1·79	− 22	+ 304
Schwefelkohlenstoff .	1·00000	1·26354	1·61847	0	0	—	0	0
					Mittel	1·85		

Die Beziehung lässt sich ferner mit sehr grossem Nutzen auch auf die durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Dichtigkeitsänderungen einer einzigen Flüssigkeit ausdehnen, sofern man sich eine Flüssigkeit von gegebener Temperatur entstanden denkt durch Mischung eines bestimmten Volumens der Flüssigkeit von höherer Temperatur mit einem bestimmten anderen Volumen derselben Flüssigkeit von niederer Temperatur, und die dabei stattfindende Volumänderung in Rechnung bringt. Wie ich an dem angeführten Orte des Näheren gezeigt habe, ist man auf diese Weise im Stande, selbst bei weit entfernten Temperaturgrenzen (z. B. Wasser zwischen 0 und 100°) eine fast absolute Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen.

4. Molekular- und Atomrefraction.

Der »Satz vom constanten Refractionsvermögen« ist nicht ohne praktischen Nutzen geblieben. In seiner Anwendung auf chemische Verbindungen ist derselbe sogar zum Ausgangspunkt einer jetzt vollständig entwickelten Theorie, der Lehre von den sogen. Refractionsäquivalenten, geworden, die man nach ihren Urhebern und Hauptförderern auch als die LANDOLT-BRÜHL'sche Theorie zu bezeichnen pflegt. Es soll im Folgenden der Inhalt dieser Theorie kurz skizzirt werden.

Der Umstand, dass jeder Körper ein ganz bestimmtes, von den durch Temperatur und Druck bewirkten Zustandsänderungen desselben nahezu unabhängiges specifisches Refractionsvermögen besitzt, und dass insbesondere die Refractionsconstante einer Mischung sich darstellen lässt als die Summe der Refractionsconstanten der Bestandtheile, jede multiplicirt mit dem Gewichtsantheil, mit dem der betreffende Körper in die Mischung eintritt, hat zuerst LANDOLT[2]) zu einer näheren Untersuchung der Frage veranlasst, ob nicht bei chemischen Verbindungen hinsichtlich ihrer atomistischen Zusammensetzung ähnliche additive Beziehungen vorhanden seien. In der That fand LANDOLT diese Vermuthung bestätigt. Bezeichnet man mit P das Moleculargewicht der Verbindung, mit p_1, p_2 etc. die Produkte aus den bezüglichen Atomgewichten m in die Zahl n, mit welcher jedes einzelne Element in der Verbindung auftritt, so lässt sich die oben

[1]) Vergl. BUCHKREMER l. c. und SCHÜTZ, Z. f. physik. Chemie 1890, pag. 349, und 1892, pag. 349.

[2]) LANDOLT, POGG. Ann. 123, pag. 595. 1864.

genannte Mischungsformel auf den vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen und man kann setzen

$$P \cdot R = n_1 m_1 r_1 + n_2 m_2 r_2 + \ldots = \sum n\, m\, r$$

unter R und r die Refractionsconstanten des Moleküls bezw. der Atome verstanden. Die Produkte $P \cdot R$ und $m \cdot r$ werden Molecularrefraction und Atomrefraction genannt und es lässt sich also kurz sagen: Die Molecularrefraction einer Verbindung ist gleich der Summe der Atomrefractionen der Bestandtheile.

Was zunächst den Ausdruck für R und r anbetrifft, so hat LANDOLT bei seinen ersten Rechnungen von der Formel $n - 1/d$ Gebrauch gemacht. Später hat er dieselben auch unter Anwendung der LORENZ'schen Formel $n^2 - 1/n^2 + 2$ durchgeführt[1]), und ist dabei zu dem Schlusse gelangt, dass beide Formeln im wesentlichen zu genau den gleichen Beziehungen zwischen chemischer Zusammensetzung und Lichtbrechung führen. Seit der Zeit findet der letztere Ausdruck bei chemischen Untersuchungen fast ausschliessliche Verwendung, wobei als Brechungsindex derjenige für die rothe Wasserstofflinie benutzt wird. In den letzten Jahren ist man dazu übergegangen, die Wasserstofflinie durch das praktisch bequemere Licht der Kochsalzflamme zu ersetzen.

LANDOLT hat die Gültigkeit des obigen Satzes an einer grossen Zahl von organischen Substanzen geprüft. Er fand zunächst, dass gleichen Differenzen in den empirischen chemischen Formeln gesättigter Körper (Zunahme um ein Atom oder eine bestimmte Atomgruppe) constante Unterschiede im Refractionsäquivalent entsprechen. Hieraus ermittelte dann LANDOLT zunächst die Atomrefraction der Elemente C, H, und O[2]) und war damit in der Lage, die Molecularrefraction eines beliebigen, aus diesen Atomen zusammengesetzten Körpers einfach durch Rechnung abzuleiten. Indessen ergaben sich in manchen Fällen noch ziemlich beträchtliche Abweichungen von der beobachteten Molecularrefraction, die weit über die Grenze des Zulässigen hinausgingen.

An der weiteren Ausbildung der Theorie haben sich namentlich GLADSTONE und BRÜHL in sehr zahlreichen Abhandlungen betheiligt[3]). Das Resultat dieser Arbeiten läuft im Wesentlichen darauf hinaus, dass neben der additiven Wirkung der einzelnen zu einer Verbindung zusammentretenden Atome auch noch die Struktur der Verbindung zu berücksichtigen ist, sofern die Art die Atomverkettung ebenfalls einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf der Molecularrefraction ausübt. LANDOLT hatte gefunden, dass bei Substanzen, deren C-Atome sämtlich durch eine Valenz vereinigt sind, und welche ferner die O-Atome in gleicher Weise gebunden enthalten, die übrige Verschiedenheit in der Atomgruppirung keinen bestimmt nachweisbaren Einfluss auf die Molekularrefraction auszuüben vermag. Ebenso ergaben die Untersuchungen von BRÜHL, dass alle einwerthigen Elemente immer nur die gleiche Atomrefraction ausüben; dass aber für eine Anzahl mehrwerthiger Elemente, insbesondere für den Kohlenstoff und den

1) LANDOLT, Berl. Berl. pag. 64. 1882; Ann. d. Chemie 213, pag. 75. 1882.

2) Eine direkte Berechnung der Werthe für Cl und H liess sich unmittelbar auch aus den Daten der gasförmigen Stoffe vornehmen.

3) Die Arbeiten BRÜHL's sind zum Theil in den Annalen der Chemie von LIEBIG Bd. 200, 203, 211, 235, ferner in den Ber. der deutsch.-chem. Ges. 12, 13 etc. bis 24, sowie neuerdings in der Zeitschrift für physik. Chemie (OSTWALD) 1 bis 7 veröffentlicht. Dort findet man auch die Literaturnachweise für andere diesen Gegenstand betreffende Arbeiten ziemlich vollständig zusammengestellt.

Sauerstoff, die Atomrefraction dieser Elemente sich um einen bestimmten Betrag erhöht, wenn mehr als eine Valenz des betreffenden Elements mit einem benachbarten Atom desselben Elements verbunden ist. Nachdem der Einfluss solcher Bindungen erkannt und festgestellt war[1]), hat die Molecularrefraction auch umgekehrt mehrfach zur Erforschung der chemischen Constitution von Substanzen Verwendung gefunden. Indessen muss bemerkt werden, dass gegen die Benutzbarkeit der Molekularrefraction für Constitutionsbestimmungen wiederholt lebhafter Widerspruch laut geworden ist[2]).

Es sei zum Schluss noch auf die Arbeiten von GLADSTONE (Phil. Mag. 1870 und 1885), SORET (Arch. des sc. ph. et nat., Genève 1884 bis 1888) u. Anderen hingewiesen, durch welche auch für die Körper der anorganischen Chemie ein Zusammenhang der Molecularrefraction mit der chemischen Zusammensetzung nachgewiesen ist. PULFRICH.

Dioptrik in Medien mit continuirlich variablem Brechungsindex.

A. Allgemeines.

Das vorliegende Capitel der Lehre vom Licht besitzt im Allgemeinen für Medien mit stetig veränderlichem Brechungsindex dieselbe Aufgabe, wie die vorangehenden Capitel für Medien, deren Indices in einer Reihe aneinandergrenzender Räume in jedem derselben constant, dagegen von Raum zu Raum endlich verschieden sind. Aber mit der Gleichheit der Aufgabe ist nicht die Gleichheit der Grundlagen verbunden. Denn die eine derselben, die Geradlinigkeit der Strahlen im selben Medium, kommt selbstverständlich hier nicht in Betracht, die andere aber, das Brechungsgesetz, ist weder noch kann es der Natur der Sache nach überhaupt direkt experimentell erhärtet sein. Wir müssen also betreffs der Richtungsbeziehung zwischen zwei aneinandergrenzenden Elementen des einen Strahles auf indirektem Wege den Nachweis liefern, dass der analytisch vollziehbare Grenzübergang auch physikalisch zulässig ist, da andernfalls die Anwendungsfähigkeit auf Naturerscheinungen hinwegfiele und das Kapitel in das Gebiet der reinen Mathematik gehören würde. Jener Nachweis ist nun von vornherein in zweifacher Art möglich, nämlich erstens durch Vergleichung der Resultate einer auf jenem hypothetischen Grundgesetz aufgebauten Theorie mit direkten Beobachtungen und zweitens durch Zurückgehen auf unsere als fundamental betrachteten mechanischen Grundbegriffe. Der erste Weg, das »Integralgesetz« der Theorie mit den Beobachtungen zusammenzustellen, und aus dem Zusammenfallen der Zahlenwerthe auf die Giltigkeit des »Differentialgesetzes« einen Rückschluss zu machen, ist hier im Gegensatz zu gewissen bekannten Gebieten zwar principiell möglich, leidet aber an der Schwierigkeit künstlich realisirbarer experimenteller Bestimmungen einerseits und der Complicirtheit der

---

[1]) Bezüglich der den einzelnen Atomrefractionen und Bindungen zukommenden Refractionswerthe sei auf die »Neuberechnung der Atomrefraction« von BRÜHL, Z. f. physik. Chemie 1891, pag. 191, verwiesen. In dieser Arbeit ist auch der Versuch gemacht, die Beziehungen der Dispersion mit der chemischen Zusammensetzung zu erforschen.

[2]) Vergl. insbesondere O. WALLACH, LIEBIG, Ann. 245, pag. 191. 1888.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule.)

HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PROF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, DR. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, DR. PULFRICH-JENA, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, DR. STRAUBEL-JENA, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

FÜNFZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1893.

Handbuch der Physik. — Fünfzehnte Lieferung.

Inhalt: II. Band. Optik. Artikel: »Dioptrik in Medien mit continuirlich variablem Brechungsindex« von DR. STRAUBEL (Seite 345—384). — »Scintillation« von PROF. EXNER (Seite 384—390). — »Spectralanalyse« von PROF. KAYSER (Seite 390—450). — »Photometrie« von DR. BRODHUN (Seite 450 bis 464).

in der Natur dargebotenen Erscheinungen andererseits. Denn die Refractionstheorie, die man bei dem heutigen Stande der Wissenschaft allein im Auge haben könnte, ist vermöge der Mannigfaltigkeit und des Wechsels der atmosphärischen Zustände für unseren Zweck nicht geeignet und nimmt überdies vielfach zum Zwecke besserer Anschmiegung der Theorie an die Beobachtungen ihre Constanten aus den letzteren. Wir sind also gezwungen, den zweiten Weg zu betreten und aus unseren mechanischen Grundbegriffen in Form der Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie die Berechtigung der Benützung des Brechungsgesetzes auch für den Fall eines Mediums mit stetig veränderlichem Brechungsindex herzuleiten. Dies zu thun, ist hier weder Ort noch Zeit; wir müssen uns vielmehr begnügen, die Resultate einer derartigen Untersuchung[1]), soweit sie für unseren Zweck erforderlich sind, anzugeben. Dieselben sagen aus, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und damit der Brechungsexponent allein vom Orte und nicht auch von der Fortpflanzungsrichtung abhängt, dass ferner die Schwingungsdauer und damit die Farbe unveränderlich ist, und drittens die Ablenkung des Strahles in der That nach dem Brechungsgesetze erfolgt, wobei als Normalen die Senkrechten zu den Flächen mit gleichem Brechungsexponenten gelten. Wir haben hier ausser dem zuerst erstrebten Resultate noch zwei weitere erhalten und es ist zu beachten, dass dieselben keineswegs selbstverständlich sind. Vielleicht sind dieselben im Allgemeinen, z. B. wenn man auch Absorptionswirkungen mit in Betracht zieht, nicht einmal richtig, da auf dem Boden der reinen Elasticitätstheorie Absorptionswirkungen überhaupt nicht stattfinden und in unserem speciellen Falle das Princip der kinetischen Energie gilt. — Nachdem so die Grundlagen für die Dioptrik der Medien mit stetig veränderlichem Brechungsindex auseinandergesetzt sind, soll im folgenden zunächst das System der Differentialgleichungen für die Curve, welche der Lichtstrahl in einem solchen Medium beschreibt, entwickelt werden. Es sollen dann weiter einige besonders einfache oder interessante Specialfälle nebst Anwendungen erörtert und zum Schlusse auf die durch unsere Atmosphäre verursachten normalen (Refractionstheorie) und anormalen Erscheinungen eingegangen werden.

Differentialgleichungen für die Trajektorie.

Um die Gleichungen für den Lichtstrahl im dreidimensionalen Raume zu entwickeln, benutzen wir ein im Raume festes, ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem und denken uns den Brechungsindex (n) an irgend einer Stelle des Raumes als Function der 3 Coordinaten xyz dieser Stelle gegeben. Indem wir diese Function nach einander den Gliedern einer in arithmetischer Progression fortschreitenden Reihe gleichsetzen, deren erstes und letztes Glied der niedrigste resp. höchste Brechungsindex ist, erhalten wir ein System von Flächen, auf deren jeder der Brechungsindex des Mediums constant ist und die ein anschauliches Bild von der für unseren Zweck in Betracht kommenden Constitution jenes letzteren geben. Diese Flächen (Curven) sollen Aequiindicial- oder kürzer Indicial-Flächen (Curven) heissen. Nach dem grösseren oder geringeren Grade der Einfachheit in der Constitution müssen wir für die Zwecke der Anschauung diese Indicialflächen in weiteren oder engeren Intervallen folgen lassen.

Für die Ableitung der Differentialgleichungen stützen wir uns auf das

[1]) Paul Harzer, Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr., No. 2554—56.

FERMAT'sche Princip, nach welchem die optische Länge eines Lichtstrahles zwischen zwei Punkten desselben, d. h. das Integral $\int n\,ds$ erstreckt vom ersten bis zum zweiten Punkte ein Grenzwerth ist, d. h. seine Variation verschwindet. ds bedeutet dabei ein Linienelement der Curve. Dass dieses Princip hier gilt, nachdem es nur für ein System Grenzflächen bewiesen ist, folgt sowohl physisch aus der Natur der Lichtausbreitung, als auch analytisch daraus, dass das Brechungsgesetz ebenfalls gültig ist und deshalb die Grenzen der Curven, von denen die eine nach dem Princip des Grenzwerthes construirt ist, wobei das Brechungsgesetz von selbst erfüllt wird, und die andere auf Grund des Brechungsgesetzes, nothwendig zusammenfallen müssen. Die Variation von $\int n\,ds$ ist also gleich Null und wir erhalten durch Ausführung der Variationsoperation unter dem Integralzeichen [1])

$$o = \int \delta n\,ds + \int n\,\delta ds.$$

Beachten wir die Beziehungen

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial x}\delta x + \frac{\partial n}{\partial y}\delta y + \frac{\partial n}{\partial z}\delta z,$$

sowie

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz$$

und integriren unter Berücksichtigung von $\delta dx = d\delta x$ das zweite Integral partiell, so erhalten wir geeignet angeordnet:

$$o = \left[n\left(\frac{\partial x}{\partial s}\delta x + \frac{\partial y}{\partial s}\delta y + \frac{\partial z}{\partial s}\delta z\right)\right]_1^2$$

$$+\int\left[\left[\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \left[\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y + \left[\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\right]ds.$$

Von diesem Ausdruck verschwindet der erste vom Integralzeichen freie Theil von selbst, da an den Grenzen 1 und 2 Variationen nicht gestattet sind; der zweite dagegen kann, bei der völligen Willkürlichkeit und Unabhängigkeit der Variationen in den Coordinaten, nur dann Null werden, wenn die mit den Variationen multiplicirten Glieder einzeln verschwinden. Man erhält also für die Trajektorie das Gleichungssystem:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}; \quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y}; \quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich leicht eine allgemein zuerst von HEATH[2]) entwickelte für die Trajektorie charakteristische Eigenschaft folgern, die einen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius (ρ) an einer Stelle einerseits und der Aenderung des Brechungsindex in der Richtung der Normale (N) zur Trajektorie andererseits angiebt. Benützen wir den Satz, dass die Richtungscosinus des Krümmungsradius der Reihe nach

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

sind und der Krümmungsradius selbst sich also aus der Gleichung

$$1 = \rho^2\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]$$

ergiebt, so erhalten wir durch Anwendung der Identität

$$\frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial x}{\delta N} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial N} + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial N},$$

---

[1]) R. S. HEATH, treatise on geometrical Optics, pag. 338.

[2]) a. a. O.

indem wir für $\frac{\partial x}{\partial N}$ etc. die Werthe $\rho\,\frac{d^2x}{ds^2}$ etc. und für $\frac{\partial n}{\partial x}$ etc. die Werthe aus den Differentialgleichungen setzen, das gesuchte Resultat. Es ist nämlich zunächst

$$\frac{\partial n}{\partial N}=\sum n\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\sum \rho\,\frac{dn}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2},$$

wo die Summenzeichen sich auf die Coordinaten beziehen. Hiervon verschwindet das zweite Glied, da

$$\sum\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2}=0$$

ist und das erste wird wegen

$$\sum\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{\rho}\quad\text{zu}\quad\frac{n}{\rho}.$$

Wir erhalten also die Gleichung $\frac{\partial n}{\partial N}=\frac{n}{\rho}$, oder auch $\frac{\partial l n}{\partial N}=\frac{1}{\rho}$. Dieses Resultat lässt sich auch leicht auf synthetische Weise ableiten. Wir denken uns zu diesem Zwecke am Ende eines Elementes der Trajektorie die Normale zur Indicialfläche gezogen und durch diese beiden Linien eine Ebene gelegt. In dieser Ebene wird dann nach dem Brechungsgesetz auch das folgende Element der Trajektorie und in Folge dessen auch der Krümmungsradius derselben liegen. Ziehen wir nun in dieser Ebene die Indicialcurve, welche die Medien vom Index n und $n+dn$ begrenzt und nennen den Einfalls- und Brechungswinkel an dieser $i_1 r_1$ sowie das aus den benachbarten Stücken der Trajektorie gebildete Linienelement ds, so ist die Richtungsänderung der Trajektorie nach dem Passiren der Indicialcurve i_1-r_1 und der Krümmungsradius $\rho=lim\,\frac{ds}{i_1-r_1}$. Hierin können wir i_1-r_1 für kleine Werthe der Differenz aus der Gleichung $n\,sin\,i_1=(n+dn)sin\,r_1$ durch $\frac{dn}{n}\,tg\,i$ ersetzen. Ziehen wir weiter die durch die Endpunkte des Linienelementes ds gehenden Indicialcurven, so lässt sich ds durch das zwischen denselben liegende Stück der in einem Endpunkte des Elementes errichteten Normalen ausdrücken und wir erhalten $ds=dN\,tg\,i$. Durch Einsetzen in unsere obige Gleichung folgt unmittelbar $\frac{1}{\rho}=\frac{dln}{dN}$.

Die drei Grundgleichungen für die Trajektorie in ebenen, rechtwinkligen Coordinaten können offenbar, um eine Curvenschaar vorzustellen, nicht unabhängig von einander sein. Dies erkennt man auch, indem man die Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und addirt, wobei sich eine Identität ergiebt. Wir können also, sofern dies wünschenswerth ist, bei dreidimensionalen Problemen uns auf zwei, und bei zweidimensionalen auf eine Gleichung beschränken und diese beliebig wählen.

Es sollen nun im folgenden zwei Specialfälle zweidimensionaler Natur behandelt werden und zwar erstens der Fall einer geradlinigen und zweitens der einer kreisförmigen Gestalt der Indicialcurven. Für den ersten Fall mögen die Indiciallinien der x Axe parallel sein, so dass also $\frac{\partial n}{\partial x}=0$ ist. Die Grundgleichungen ergeben dann unmittelbar $n\,\frac{dx}{ds}=C$, wo C eine Constante für die betreffende Curve ist. Diese Aussage besagt weiter nichts als die Gültigkeit des Brechungs-

gesetzes, da $\frac{dx}{ds} = \sin i$ ist. Die Differentialgleichung der Trajektorie ergiebt sich, indem man die Gleichung

$$n^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = C^2$$

und die aus ihr folgende

$$n^2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = n^2 - C^2$$

durch einander dividirt. Man erhält so

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2}{C^2} - 1.$$

Um die Ablenkung des Lichtstrahles auf seinem Wege zwischen zwei Punkten 1 und 2 zu erhalten, benützе man die Gleichung $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Die Ablenkung $i_1 - i_2$ häugt ausser von der Anfangs- oder Endrichtung nur von den Brechungsindices der beiden Punkte ab, ist also wie im Falle ebener homogener Platten unabhängig von den Zwischenzuständen. Die Curve des Lichtstrahles hat einen oder mehrere Scheitel, deren Coordinaten sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $n = C$ ergeben und deren X Coordinaten aus der integrirten Curvengleichung zu entnehmen sind. — Um zweitens bei kreisförmiger Gestalt der Indicialcurve die Curvengleichung zu finden, wenden wir dasselbe Verfahren, welches zu den Grundgleichungen in ebenen Coordinaten führte, bei Benützung von Polarcoordinaten $(r\varphi)$ an und erhalten, indem wir uns auf die eine für den vorliegenden Zweck bequemere Gleichung beschränken:

$$\frac{d}{ds}\left(n r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) - \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0.$$

Dieselbe geht für unseren Fall, in dem n von φ unabhängig ist, also als Coordinatenanfangspunkt der gemeinsame Nullpunkt aller Indicialcurven genommen ist, in $n r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$ über, wo wieder C für die betreffende Lichtcurve eine Constante ist. Da die Normalen zu den Indicialcurven mit den Radienvektoren zusammenfallen, so sagt diese Gleichung aus, dass das Produkt aus Brechungsindex, Radius und Sinus des Neigungswinkels von Curve und Radius im Verlaufe der Curve eine Constante ist.

Dieses wegen seiner Einfachheit wichtige Resultat lässt sich leicht auf synthetischem Wege ableiten. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch die Endpunkte eines Linienelementes die beiden Indicialcurven und Radien (r, r_1) und nennen die Einfalls- und Brechungswinkel der Reihe nach i, i', i_1, i_1', sowie die Brechungsindices n, n_1, n_2. Dann giebt das Brechungsgesetz an der ersten Fläche $n \sin i = n_1 \sin i'$. Ferner erhält man aus dem von den beiden Radien und dem Linienelement gebildeten Dreieck $r \sin i' = r_1 \sin i_1$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Multiplication $n r \sin i = n_1 r_1 \sin i_1 = C$, unsere obige Relation. Dieselbe lässt sich auch in der Form $np = C$ schreiben, wo p das vom Mittelpunkt der Indicialcurven auf die Tangente der Curve gefällte Loth bedeutet.

Um die Gleichung der Curve zu erhalten, ersetze man in

$$n r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C \quad ds \text{ durch } \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

und erhält nach geeigneter Umformung

$$d\varphi = \frac{C dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}.$$

Um weiter die Differentialgleichung für den Richtungsunterschied der Curve in zwei Punkten zu erhalten, ist zu bedenken, dass an den beiden Seiten jeder brechenden Fläche $n \sin i$ den gleichen Werth hat, also das Element des gesuchten Richtungsunterschiedes $(di) = -\frac{dn}{n} tg\, i$ ist. Setzt man hierin für $tg\, i$ seinen aus der Gleichung $n r \sin i = C$ folgenden Werth, so ergiebt sich

$$(di) = -\frac{dn}{n} \cdot \frac{C}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}},$$

welches die Funtamentalformel für die Theorie der atmosphärischen Refraction ist. Es könnte auffällig erscheinen, dass bei Ableitung der letzten Formel sowohl die Constanz von $n \sin i$ wie $r n \sin i$ benützt wurde, indess ist zu bemerken, dass die Constanz von $n \sin i$ sich nur auf die beiden Seiten einer und derselben Fläche bezieht, während $n r \sin i$ eine Invariante für die genannte Flächenschaar bildet und dass (di) keineswegs den Zuwachs des Einfallswinkels gegenüber dem jedesmaligen Einfallsloth, sondern den Zuwachs der Neigung des Strahles gegenüber der festen Normale der betreffenden Fläche, wie er durch die Brechung an dieser Fläche erzeugt wird, bedeutet. Der erstere setzt sich demgemäss additiv aus dem letzteren und der Richtungsdifferenz des Einfallslothes zusammen oder es ist $di = (di) + d\varphi$. Setzen wir für di seinen aus der Gleichung $n r \sin i = C$ folgenden Werth, so erhalten wir wieder unsere obige Gleichung

$$(di) = -\frac{dn}{n} tg\, i.$$

Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die Fälle geradliniger und kreisförmiger Indicialcurven wenden wir uns jetzt einigen Specialfällen zu und beginnen dabei mit einem, der wegen seiner Bedeutung für die ophthalmologische Optik einerseits und der relativen Leichtigkeit einer experimentellen Behandlung andererseits ein besonderes Interesse verdient und deshalb auch in erster Linie von zwei Forschern[1]) in Angriff genommen wurde. Es ist dies der Fall eines Cylinders, in dem der Brechungsindex von der Axe nach dem Mantel zu continuirlich, aber wenig und immer in gleichem Sinne variirt und nur eine Function der Entfernung von der Axe (y) ist. Nennen wir die Brechungsindices des Cylinders in der Axe und am Mantel n_0 und n_1 und seinen Radius b, so lässt sich offenbar in erster Näherung das genannte Gesetz nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze durch die Form

$$n = n_0 - (n_0 - n_1) \frac{y^2}{b^2}$$

darstellen, was wir in der Formel

$$n = n_0 \left(1 - \alpha \frac{y^2}{b^2}\right)$$

schreiben wollen. Dabei soll α als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet werden und speciell der Strahlenverlauf in einem Axenschnitte näherungsweise

[1]) S. EXNER, Ueber Cylinder, welche optische Bilder entwerfen. Archiv für die gesammte Physiologie, Bd. 38. Abdruck in EXNER's Rep., Bd. 22. S. EXNER, das Netzhautbild des Insektenauges, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 3. Abth., Bd. 98. Abdruck in EXNER's Rep., Bd. 21. — L. MATTHIESSEN, Ueber den Strahlendurchgang durch coaxial continuirlich geschichtete Cylinder etc. EXNER's Rep., Bd. 22. Derselbe, Die Phoronomie der Lichtstrahlen in anisotropen, unkrystallinischen Medien im Allg. und in sphärischen Niveauflächen im besonderen (behandelt nicht unseren Fall). EXNER's Rep., Bd. 25. Genaueres bei MATTHIESSEN, Bd. 22.

untersucht werden. Lassen wir zunächst ein der Axe und sich selbst paralleles Strahlenbüschel senkrecht auf die Grundfläche einfallen, so lautet die Differentialgleichung der Trajektorie, wenn der Brechungsindex von der Mitte nach dem Mantel zu abnimmt

$$dx = -\frac{C dy}{\sqrt{n^2 - C^2}}.$$

Setzen wir hierin für den Brechungsindex n seinen Werth aus obiger Formel, so erhalten wir näherungsweise

$$dx = -\frac{C dy}{\sqrt{n_0^2\left(1 - 2\alpha \frac{y^2}{b^2}\right) - C^2}}.$$

Dabei sind für periphere Strahlen Glieder relativ zweiter, für paraxiale Glieder relativ dritter Ordnung vernachlässigt. Um dieser Formel eine geeignete Form zu geben, drücken wir die Constante C durch die Einfallshöhe des Strahles beim Eintritt in den Cylinder (b_1) aus und erhalten, da die Curve an diesem Punkte der Axe parallel ist

$$n_0^2\left(1 - 2\alpha \frac{b_1^2}{b^2}\right) = C^2.$$

Dies giebt bei Vernachlässigung von Grössen erster resp. dritter Ordnung wie oben

$$dx = -\frac{b}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{b_1^2 - y^2}}$$

und integrirt

$$+ x = -\frac{b}{\sqrt{2\alpha}}\, ar \sin \frac{y}{b_1} + const.$$

Wählen wir den Anfang der Cylinderaxe als Coordinatenanfangspunkt, so ist für $y = b_1$, $x = o$; die Constante wird also zu

$$+ \frac{b}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und stellt zugleich die Entfernung des Schnittpunktes von Strahl und Axe von der Endfläche dar. Man sieht unmittelbar, dass diese Grösse, weil sie von b_1, der Einfallshöhe, nicht abhängt, für alle Strahlen dieselbe ist, diese also sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen. Wir nennen diese Grösse a_1 und erhalten durch Umkehrung die Formel

$$y = b_1 \cos \frac{\pi x}{2 a_1}.$$

Die Curve des Lichtstrahles ist demnach periodisch und zwar eine einfache Cosinuslinie mit der Periode $4a_1$ und der Amplitude b_1. Eine solche Linie schneidet die Axe unter einem Winkel, dessen Tangente gleich $\frac{\pi b_1}{2 a_1}$ ist, also wie die Schnitthöhe variirt. Wir haben also ein Resultat, welches vollständig analog dem in der allgemeinen Abbildungstheorie für geradlinige Strahlen gewonnenen ist. Dasselbe ist indess wegen der begangenen Vernachlässigungen nicht ganz exakt; der Cosinus des fraglichen Winkels ergiebt sich vielmehr leicht durch Anwendung des Brechungsgesetzes zu $1 - \alpha \frac{b_1^2}{b^2}$. Die Lichtcurve hat weiter die allgemeine Eigenschaft, dass alle Strahlen unseres Büschels beim Durchtritt durch einen Normalschnitt des Cylinders nach dem gleichen Punkte convergiren oder von demselben divergiren. Denn, wie leicht zu sehen, liegt für einen Normal-

schnitt in der Entfernung l der Convergenzpunkt von diesem aus gerechnet in der Entfernung

$$\frac{2a_1}{\pi} cotg\left(\frac{\pi l}{2a_1}\right),$$

ist also von dem Parameter b_1 unabhängig. Denken wir uns jetzt unseren Cylinder durch den ebengenannten Normalschnitt begrenzt und an ein Medium mit dem Index 1 angrenzend, so handelt es sich jetzt darum, den Abstand des Convergenzpunktes von dieser Grenzfläche (f_1) zu finden. Durch Anwendung des Brechungsgesetzes ergiebt sich

$$\left(f_1^2 + b_1^2 cos^2 \frac{\pi l}{2a_1}\right) n^2 = \left(\frac{2a_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2 + b_1^2 cos^2 \frac{\pi l}{2a_1},$$

worin

$$n = n_0\left(1 - \alpha \frac{b_1^2}{b^2} cos^2 \frac{\pi l}{2a_1}\right)$$

ist. Für Centralstrahlen folgt daraus unmittelbar

$$f_1 = \frac{2a_1}{\pi n_0} cotg \frac{\pi l}{2a_1}.$$

Wir haben also, da wir für Centralstrahlen uns früher nur eine Vernachlässigung dritter Ordnung erlaubt haben, hier eine Strahlenvereinigung zweiter Ordnung, wie es auch bei einer einfachen Linse der Fall ist. Was die peripherischen Strahlen anbetrifft, so dürfen wir, um nicht in der Differentialgleichung Glieder erster Ordnung zu vernachlässigen, das C des Zählers nicht durch n_0 ersetzen. Wir können dies berücksichtigen, wenn wir an Stelle von a_1 $\frac{C}{n_0} a_1 = \bar{a}_1$ gesetzt denken. Entwickeln wir unter diesen Umständen f_1^2, so erhalten wir

$$f_1^2 = \left[\left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 + b_1^2 cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right] \frac{1}{n_0^2}\left(1 + 2\alpha \frac{b_1^2}{b^2} cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right) - b_1^2 cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}$$
$$= \left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{n_0^2} \cdot 2\alpha \frac{b_1^2}{b^2} cos^2 \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2.$$

Da $a_1 \infty$ gross erster Ordnung ist, so sind bei endlicher Länge des Cylinders die Glieder der Reihe nach ∞ gross von der vierten und dritten Ordnung und falls der Cylinder die Grössenordnung von a_1 besitzt von der zweiten und ersten Ordnung. Um den Charakter der Strahlenvereinigung zu untersuchen, schreiben wir das Hauptglied

$$\left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2$$

in der Form

$$\left(\frac{2a_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{a}_1}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2\bar{a}_1}\right)^2 - \left(\frac{2a}{\pi} cotg \frac{\pi l}{2a_1}\right)^2,$$

worin die erste Form von der Einfallshöhe unabhängig ist und die zweite ein Glied dritter resp. erster Ordnung repräsentirt. Dieses Glied besitzt genau die Form des vorher erwähnten Gliedes gleicher Ordnung, aber einen anderen Zahlencoëfficienten; eine Compensation der Glieder findet also nicht statt und es lässt sich demnach bei peripherischen Strahlen nur eine Strahlenvereinigung erster Ordnung erzielen [1]).

Um jetzt auf den Fall eines in endlicher Entfernung befindlichen leuchtenden Punktes überzugehen, wobei wir uns auf Centralstrahlen beschränken wollen,

---

[1]) Die Abweichung dieses Resultates gegenüber MATTHIESSEN (Bd. 22, pag. 340) erklärt sich daraus, dass bei diesen in der Differentialgleichung bereits Glieder von relativ erster Ordnung vernachlässigt worden sind.

genügt die Bemerkung, dass, falls ein reelles Bild entstehen soll, die Trajektorie nothwendig an einer Stelle der Axe parallel sein muss; denken wir uns den Cylinder an dieser Stelle durch einen Normalschnitt getrennt, so lässt sich die obige Formel unmittelbar auf die beiden Stücke anwenden und es handelt sich noch darum, l_1 und l_2 zu eliminiren. Dies liefert

$$arc\ tang \frac{2a_1}{\pi n_0 f_1} + arc\ tang \frac{2a_1}{\pi n_0 f_2} = \frac{\pi l}{2a_1}.$$

Ist die Länge (l) des Cylinders gegen a_1 kurz, so lässt sich diese Formel in der Gestalt

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{\pi^2 l n_0}{4a_1^2} = \frac{2\alpha n_0 l}{b^2}$$

schreiben und stimmt mit der Formel für eine dünne Linse überein. Aus Gründen der Continuität wird diese Formel, welche nur für den Fall eines reellen Bildes abgeleitet wurde, auch allgemein gelten. Die Brennweite eines solchen kurzen Cylinders ist also dem Quadrat der Dicke direkt und der Länge umgekehrt proportional; dasselbe findet bekanntlich auch für jede schwache, biconvexe Linse statt. Hinsichtlich der allgemeinen Formel für Centralstrahlen ist noch eine Bemerkung zu machen. l_1 und l_2 waren von den äussersten Stellen, an denen die Kurve der Axe parallel war, an zu rechnen; $l_1 + l_2$ ist demnach im Allgemeinen $= l - 2a_1 p$, wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, welche $l - 2a_1 p$ positiv und kleiner als $2a_1$ macht; da indess die vorkommenden *arc tang* mit der Periode π vieldeutig sind, so kann die obige Formel ihre Gestalt behalten, und man mag im speciellen Falle die betreffenden Periodenmultipla berücksichtigen. Bei hinreichender Kürze besitzt der Cylinder, wie ersichtlich, den Charakter einer Sammellinse und liefert wie diese ein umgekehrtes Bild; mit wachsender Länge ändert sich dies indess und es können in der That[1]) alle möglichen Bilder entstehen. Wie man leicht sieht, liefert nämlich ein Cylinder für ein unendlich entferntes Objekt bei einer Länge zwischen 0 und a_1 ein umgekehrtes reelles, zwischen a_1 und $2a_1$ ein umgekehrtes virtuelles, zwischen $2a_1$ und $3a_1$ ein aufrechtes reelles und zwischen $3a_1$ und $4a_1$ ein aufrechtes virtuelles Bild. Von da an kehren die Verhältnisse mit der Periode $4a_1$ wieder.

Dem bisher behandelten Falle, in welchem nach dem obigen Gesetze die Dichtigkeit von dem Mantel nach der Axe des Cylinders hin zunahm, steht der umgekehrte gegenüber, bei welchem also $n_1 > n_0$ ist. Wir brauchen, um diesen Fall zu untersuchen, nur in den betreffenden Formeln α negativ $= -\alpha'$ zu nehmen. Ferner müssen wir noch, um das richtige Vorzeichen in der Differentialgleichung zu erhalten, x negativ setzen. Alle abgeleiteten Beziehungen und alle daraus gezogenen Schlüsse gelten dann in gleicher Weise. So gilt also die Formel

$$y = \frac{b_1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}\frac{x}{a_1'}} + e^{-\frac{\pi}{2}\frac{x}{a_1'}}\right),$$

wobei

$$a_1' = -\frac{b\pi}{2\sqrt{2\alpha'}},$$

welche besagt, dass die Curve eine Minimalentfernung gleich b_1 besitzt und nach beiden Seiten symmetrisch sich dann von der Axe wegwendet. Ferner besitzt die Curve die Eigenschaft, dass die Minimalentfernung von der Axe für die verschiedenen Strahlen des betrachteten Büschels in demselben Normalschnitt erreicht wird, gerade wie vorher die Maximalentfernung oder der Schnittpunkt mit der

[1]) MATTHIESSEN, l. c.

Axe. Auch die Identität des Divergenzpunktes für die einen Normalschnitt passirenden Strahlen oder, was hier dasselbe ist, die Proportionalität zwischen Einfallshöhe und der Tangente der Neigung der Kurve finden statt; f_1 ergiebt sich für Centralstrahlen zu

$$-\frac{2a_1'}{\pi n_0}\left(\frac{e^{+\frac{\pi l'}{2a_1'}}+e^{-\frac{\pi l'}{2a_1'}}}{e^{+\frac{\pi l'}{2a_1'}}-e^{-\frac{\pi l'}{2a_1'}}}\right)$$

und es besteht bei kurzen Cylindern für conjugirte Punkte die Relation

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f}=-\frac{2a'n_0l'}{b^2},$$

wobei f_1 und f_2 die Entfernungen von Objekt- und Bildpunkt von den zugewandten Seiten des Cylinders sind. Der Cylinder wirkt also bei mässiger Länge als Dispersionslinse und behält im Gegensatz zu vorhin diese Eigenschaft auch bei beliebiger Länge bei. —

Die beiden hier kurz behandelten Fälle wurden von S. Exner, Matthiessen[1]) und anderen experimentell untersucht. Die erstgenannten benützten Gelatine-, Leim- und Celloidin-Cylinder, welche durch Quellung resp. Trocknung die erforderlichen Refractionsunterschiede erhielten. Ein gequellter Cylinder entspricht unserem ersten, ein getrockneter unserem zweiten Falle. Beide Processe wurden nur so lange fortgesetzt, bis sie zur Axe vorgedrungen waren. Das Gesetz für die Veränderung des Brechungsindex gequellter Cylinder mit der Distanz von der Axe war schon vorher von Matthiessen und Schwarz[2]) bestätigt worden. Exner verificirte für kurze Cylinder die Gültigkeit der Linsenformel, während Matthiessen die theoretisch aus Dimensionen und Brechungsverhältnissen abgeleitete Brennweite mit der experimentell bestimmten verglich. Theorie und Beobachtung fanden sich innerhalb der Beobachtungsfehler in Uebereinstimmung. Aehnliche Beobachtungen, wie mit den erwähnten Cylindern, kann man auch mit Glascylindern machen, wenn man dieselben rasch erkalten lässt, also z. B. das flüssige Glas in eiserne Röhren giesst. Das Glas wird hierdurch in einen Spannungszustand versetzt, der den Brechungsexponenten einerseits durch eine entstehende Dichteänderung, andererseits direkt beeinflusst. Solche Cylinder sind von Schott[3]) hergestellt worden und wirken immer als Concavlinsen, wenn man ihre Endflächen plan macht.

Das oben zugrundegelegte Gesetz für die Veränderlichkeit des Brechungsindex ist desshalb von ganz besonderer Wichtigkeit, weil es für die Krystalllinsen der Säugethiere und Fische gilt. Denkt man sich nämlich in einer solchen Krystalllinse von dem Kern- oder Schichtungscentrum, welches den grössten Index besitzt, irgend eine gerade Linie nach der Oberfläche gezogen, so variirt der Brechungsindex auf derselben nach dem Gesetze

$$n=n_0\left(1-\frac{n_0-n_1}{n_0}\frac{y^2}{b^2}\right);$$

dabei bedeuten $n_0 n_1$ die Indices des Centrums resp. der peripheren Schicht, der sogenannten Corticalis, b ist die ganze Länge der Linie zwischen den Indicialflächen n_0 und n_1 und y der Abstand des betrachteten Punktes von Kerncentren.

1) S. Exner, l. c., Matthiessen, l. c.

2) Matthiessen, Gräfe's Archiv für Ophthalmologie, Bd. 31, 2; A. Schwarz, Ueber das Gesetz der Quellung von Leimcylindern, Exner's Rep., Bd. 21.

3) Czapski, Ueber die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten, Wiedemann's Annalen 42. 1891.

Bezeichnen wir für zwei dieser Linien ($b_1 b_2$) die Abstände der gleichen Indicialfläche mit $y_1 y_2$, so ist ersichtlich, dass $y_1 : y_2 = b_1 : b_2$ ist, dass also die Indicialflächen ähnlich und homothetisch um das Kerncentrum liegen[1]). Hiermit sind, in Verbindung mit den gemessenen Dimensionen und dem Maximal- wie Minimal-Index der Krystalllinse, die genügenden Grundlagen für eine strenge Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen sowie der Fundamentalpunkte und Constanten gegeben; aus Raummangel ist es nicht möglich, dies hier zu thun, und verweisen wir hierfür auf MATTHIESSEN[2]).

Der Fall der Krystalllinse der Vertebraten ist übrigens nicht der einzige, in welchem die oben charakterisirten Refractionsverhältnisse vorliegen, es kommen dieselben vielmehr auch bei den sogenannten zusammengesetzten Augen vor, welche aus radiär auf eine Kugelfläche aufgesetzten Cylindern bestehen. Auf diese Cylinder lässt sich sogar, abgesehen von den durch die Wölbung der Endflächen bedingten Verschiedenheit, die obige Theorie vielleicht unmittelbar anwenden, doch soll bei der Complication des Gegenstandes hierauf nicht eingegangen werden.

Wir wollen jetzt noch zwei Beispiele für ein sphärisch geschichtetes Medium nehmen und benützen zur Untersuchung die für derartige Medien charakteristische Beziehung $np = C$, sowie die allgemein gültige Formel $\rho\, dp = r\, dr$, in der man r und p von einem beliebigen aber demselben Punkte der betrachteten Ebene aus rechnen kann. Letzteres kann natürlich hier nicht in Betracht kommen, da wir p und damit r vom Mittelpunkte der Indicialcurven zu rechnen haben. Zuerst wollen wir eine mit dem Medium confocale Ellipse[3]) von der Gleichung

$$r = \frac{b^2}{a(1 - c\cos\varphi)}$$

als Trajektorie annehmen und die hierzu nöthige Beziehung zwischen Brechungsindex und Radiusvector suchen. Benützen wir die bekannte Formel

$$\rho = \frac{(2ar - r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

so ergiebt sich

$$dp = \frac{ab\, r\, dr}{(2ar - r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und, da für $p = b$ $r = a$ wird,

$$p = \frac{br}{\sqrt{2ar - r^2}}, \quad n \text{ wird also } = \frac{C\sqrt{2ar - r^2}}{br}.$$

Soll zu r_1 der Brechungsindex n_1 gehören, so ergiebt die Elimination von C

$$n = n_1 \cdot \frac{r_1\sqrt{2ar - r^2}}{r\sqrt{2ar_1 - r^2}}.$$

Da aus dieser Formel b verschwunden ist, so giebt es also bei einer gegebenen Constitution des Mediums durch einen Punkt eine ganze Schaar von Ellipsen, welche sich nach Lage und Gestalt unterscheiden. Falls diese Ellipsen geschlossen sind und dies ist der allgemeine Fall, wenn das Medium bis zum Brechungsindex o vorhanden ist, so kehren die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen wieder zu demselben zurück. Der Punkt ist also sein eigenes Bild und es sind

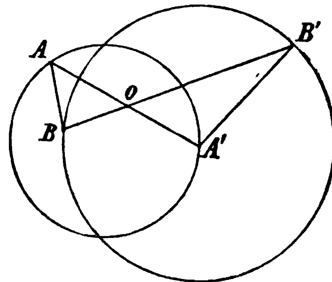
[1]) MATTHIESSEN, Ueber das Gesetz der Zunahme etc., GRÄFE's Archiv für Ophthalmologie, Bd. 31, 2.

[2]) Derselbe, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, sowie PFLÜGER's Archiv 1879, Bd. 19.

[3]) MATTHIESSEN, l. c., EXNER's Rep., Bd. 25.

nach dem Satze von MALUS für irgend eine Farbe die Umlaufszeiten der Lichtwellen gleich. Nennt man dieselben T und die, wie leicht einzusehen, für alle Ellipsen constante Geschwindigkeit im Scheitel der kleinen Axe v_1, so ist $v_1 T = 2a\pi$. Denkt man sich also um die grosse Axe $2a$ einen Kreis konstruirt und auf demselben einen Punkt mit der Geschwindigkeit v_1, so wird derselbe mit der Lichtwelle gleiche Umlaufszeit haben. Wie man sieht, haben wir hier ein Analogon zu dem bei der elliptischen Planetenbewegung benutzten ideellen Punkte, wie denn überhaupt die Planetenbewegung interessante Vergleichsmomente mit der betrachteten bietet, auf welche hier nur hingewiesen sein mag[1]). Während aber bei der ersteren bekanntlich die Geschwindigkeit mit wachsender Entfernung vom Centrum abnimmt, also im Pericentrum am grössten, im Apocentrum am kleinsten ist, ist hier das Umgekehrte der Fall, wenigstens für die Undulationstheorie. Auf dem Boden der Emissionstheorie dagegen würde vollkommene Identität in allen Verhältnissen herrschen.

Als zweites Beispiel sphärischer Indicialflächen wollen wir das von MAXWELL bei der Krystalllinse der Fische vermuthete Gesetz $n = \frac{b}{a^2 + r^2}$ annehmen, wo a und b für das Medium charakteristische Constanten sind. Benützen wir wiederum die Formeln $np = C$ und $r\,dr = \rho\,dp$, so ergiebt sich aus der Vergleichung von $\frac{bp}{a^2 + r^2} = C$ und $r\,dr = \rho\,dp$ zunächst $\rho = \frac{b}{2C}$ und dies besagt, dass für jede beliebige durch den Parameter b charakterisirte Trajektorie der Krümmungsradius constant, also die Trajektorie selbst ein Kreis ist. Nennen wir weiter die Entfernung eines Kreismittelpunktes vom Centrum der Indicialflächen d, so liefert die Natur des Kreises die Gleichung $r^2 + \rho^2 - d^2 = 2\rho p$ und dies giebt mit $r^2 + a^2 = \frac{b}{C} p$ verglichen, die Beziehung $\rho^2 - d^2 = a^2$. Alle Trajektorien haben demnach die Eigenschaft, dass ihre »Potenz« in Bezug auf den Mittelpunkt des Mediums gleich a^2 ist. Ziehen wir also durch diesen Mittelpunkt eine Gerade und nennen die beiden Abschnitte, in welche dieselbe durch irgend eine Trajektorie getheilt wird, r resp. r', so ist $rr' = a^2$. Da dies eine nur vom Medium abhängige Beziehung ist, so besitzen die Endpunkte der Sehne den Charakter conjugirter Punkte, verhalten sich also wie Objekt und Bildpunkt, und zwar ist die Abbildung aplanatisch. Wir können sie aber weiter in chromatischer Beziehung fehlerfrei machen, wenn wir nur annehmen, dass a^2 von der Farbe unabhängig ist. Das überraschend einfache Resultat, wonach conjugirte Punkte auf einer durch das Centrum des Mediums gehenden Geraden liegen, ist übrigens schon aus Symmetriegründen nothwendig. Bilden wir jetzt behufs näherer Untersuchung (Fig. 411) ein Linienelement AB ab, so ist zunächst klar, dass irgend zwei zu verschiedenen Punkten gehörige Trajektorien sich schneiden, falls sie in derselben Ebene liegen. Denken wir uns nun irgend wohin ein Auge o gesetzt, welches keinen Einfluss auf den Gang der Lichtstrahlen ausüben soll, so wird dieses, wenn es sich dem Objekte zuwendet, das Objekt aufrecht AB sehen; falls es sich aber abwendet, wird es dasselbe von der Kehrseite und umgekehrt $A'B'$ sehen.



(Ph. 411.)

[1]) Ibid.

B. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung.

Die die Erde umgebende Atmosphäre bewirkt im Allgemeinen eine Veränderung im scheinbaren Orte eines Objektes, welche Refraction heisst. Man nennt dieselbe, je nachdem das Objekt unserer Erde angehört oder nicht, astronomische resp. terrestrische. Beide sind also ihrem Wesen nach nicht verschieden, man könnte in der That sowohl die astronomische als Grenzfall der terrestrischen, als auch die terrestrische als Differenz zweier astronomischen Refractionen darstellen. Die speciellen Umstände indessen lassen es angezeigt erscheinen, eine Trennung in der Behandlung beider vorzunehmen. Die hauptsächlichste Wirkung der Refraction besteht in einer Vergrösserung der Höhe, in der uns ein Objekt erscheint; es würde dies sogar die einzige Wirkung sein, wenn wir die Erde als Kugel und die umgebende Atmosphäre im Zustande des Gleichgewichtes in mechanischer, thermischer und chemischer Hinsicht annehmen würden. Da beides nicht der Fall ist, so tritt zu der eben genannten, der Vertikalrefraction, noch eine zweite Wirkung, die Lateralrefraction hinzu, welche in der Veränderung des scheinbaren Azimutes eines Objektes besteht. Beide, Vertikal- wie Lateralrefraction, sind dem Wechsel der bewirkenden Ursachen entsprechend Veränderungen unterworfen, die bald einen äusserst rasch periodischen (siehe Scintillation), bald einen langsam veränderlichen Charakter tragen; diese entziehen sich jedoch bei der Unkenntniss der speciellen Vorgänge im Luftmeere einerseits und der Schwierigkeit der analytischen Behandlung andererseits bis jetzt der genaueren Erforschung und Berücksichtigung. Für unsere Behandlung, die nicht den Anspruch grösstmöglichster Genauigkeit und Vollständigkeit macht, wollen wir auch von der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt absehen und den Idealfall einer homogenen, concentrisch sphärisch geschichteten Atmosphäre zu Grunde legen. Wir können dann die früher entwickelte Differentialgleichung für die Refraction unmittelbar benützen und wollen dieselbe nur soweit verändern, dass wir das Vorzeichen der rechten Seite positiv nehmen. Wir fassen also die Refraction (ζ) auf als eine Correction, die man an der scheinbaren Zenithdistanz eines Punktes anzubringen hat, um die wahre zu erhalten. Die Differentialgleichung geht dadurch über in

$$d\zeta = \frac{dn}{n} \cdot \frac{C}{\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}.$$

Bezeichnen wir ferner alle Grössen, die sich auf die Oberfläche der Erde beziehen mit dem Index 0 und ersetzen C durch $n_0 r_0 \sin z$, wo z die scheinbare Zenithdistanz eines Punktes bedeutet, so erhalten wir

$$d\zeta = \frac{r_0 n_0 \sin z\, dn}{rn\sqrt{n^2 - \frac{r_0^2 n_0^2 \sin^2 z}{r^2}}}.$$

In dieser Gleichung können wir zunächst nach dem Gesetz von der »Constanz des specifischen Brechungsvermögens« n und n_0 durch ihre Werthe $\sqrt{1 + 4k\delta}$ resp. $\sqrt{1 + 4k\delta_0}$ ersetzen. Dabei bedeuten δ und δ_0 die Dichtigkeiten der Luft bezogen auf Luft von 0° und 760 *mm* Druck, und k eine nur von der Natur der Atmosphäre abhängige Constante. Führen wir weiter an Stelle von r die Variable s ein, welche mit r durch die Gleichung $\frac{r_0}{r} = 1 - s$ verbunden ist, und schreiben zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{2k\delta_0}{1 + 4k\delta_0},$$

so erhalten wir diejenige Gestalt der Differentialgleichung, welche der Ausgangspunkt der meisten neueren Refractionstheorien gewesen ist, nämlich

$$d\zeta = \frac{\alpha \frac{d\delta}{\delta_0}(1-s)\sin z}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, ist es, wie man sieht, nothwendig, den Zusammenhang zwischen s und δ resp. r und δ zu kennen. Hier muss man, da derselbe *a priori* nicht angebbar ist, zu Hypothesen seine Zuflucht nehmen, die allerdings nur dann befriedigend erscheinen können, wenn sie die wenigen von meteorologischer Seite aus bekannt gewordenen Daten darstellen. Man braucht hier nicht unmittelbar eine Beziehung zwischen Höhe und Dichtigkeit aufzustellen, es genügt vielmehr, irgend einen Zusammenhang zwischen diesen beiden und Druck und Temperatur festzulegen. Denn die Formel für das ärostatische Gleichgewicht einerseits und das combinirte Gesetz von MARIOTTE-GAY-LUSSAC andererseits liefern ja bereits zwei Zusammenhänge zwischen den genannten Grössen, die die Form

$$dp = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2}\delta dr \quad \text{und} \quad \frac{p}{\delta(1+\varepsilon t)} = \frac{p_0}{\delta_0(1+\varepsilon t_0)}$$

besitzen.

I. Astronomische Refractionstheorie.

Von den mannigfachen astronomischen Refractionstheorien, welche entwickelt worden sind, entweder auf Grund bestimmter Hypothesen oder nach analytischen Rücksichten, wollen wir nur drei etwas genauer behandeln und uns bei den übrigen mit einer Kritik der zu Grunde liegenden Annahmen begnügen. Die erste derselben, die von BOUGUER-SIMPSON-BRADLEY, möge deshalb Platz finden, weil sie eine im Vergleich zu ihrer grossen Einfachheit relativ gute Darstellung ist, die zweite, die BESSEL'sche Theorie, weil die auf ihrer Grundlage berechneten Tafeln bis auf die heutige Zeit fast ausschliesslich wegen ihrer Correctheit von den Astronomen benützt worden und die dritte, die Theorie von IVORY, weil die dieser zu Grunde liegende Hypothese berufen zu sein scheint, noch für längere Zeit als Fundament neuer Refractionstheorien zu dienen.

Die zuerst von BOUGUER aufgestellte Hypothese $r n^{m+1} = r_0 n_0^{m+1}$ liefert, in die Differentialgleichung eingesetzt

$$d\zeta = \frac{n^{m-1} dn \cdot \sin z}{n_0^m \sqrt{1-\left(\frac{n}{n_0}\right)^{2m}\sin^2 z}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich unmittelbar integriren und man erhält für das Integral zwischen den Grenzen 1 und n_0 den Werth

$$\zeta = \frac{1}{m}\left(z - ar\sin\cdot\frac{\sin z}{n_0^m}\right).$$

In dieser Form hat SIMPSON die Refraction dargestellt; um dieselbe in der ihr von BRADLEY gegebenen Gestalt zu erhalten, schreiben wir der Reihe nach

$$\frac{\sin z}{n_0^m} = \sin(z - m\zeta) \qquad \frac{\sin z - \sin(z-m\zeta)}{\sin z + \sin(z-m\zeta)} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1},$$

$$\tang \frac{m\zeta}{2} = \frac{n_0^m - 1}{n_0^m + 1}\cdot \tang\left(z - \frac{m\zeta}{2}\right).$$

Ist $\frac{m\zeta}{2}$ ein kleiner Bruch, so können wir schliesslich die letztere Form durch

$\zeta = g \, tang(z - f\zeta)$ ersetzen. Bradley fand, dass für einen mittleren Luftzustand von 9·3° C. und 751·85 *mm* die Constanten g und f die Werthe 57″ und 3 erhalten müssen, um die von ihm beobachteten Refractionen durch die Formel darstellen zu können. Die Horizontalrefraction ($z = 90°$) erhält danach den Werth 33′; sie war indess eines der Mittel gewesen, die Constanten zu bestimmen und darf also nicht als Beweis für die Güte der Hypothese herangezogen werden; die Prüfung dieser könnte höchstens durch eine vollständige Vergleichung der nach dieser Formel berechneten Refractionswerthe mit den von der Beobachtung gelieferten erfolgen.

Dass dieser Weg ziemlich misslich ist, werden wir später sehen, wir wollen lieber die Prüfung in der Weise vornehmen, dass wir einerseits aus physikalisch bestimmten Grössen unter Zugrundelegung der obigen Formel die Horizontalrefraction bestimmen und andererseits aus der Hypothese auf die Constitution der Atmosphäre Schlüsse machen. Setzen wir in der obigen Formel $n_0^2 = 1 + 4k\delta_0$, so erhalten wir mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, indem $4k\delta_0$ als Grösse erster Ordnung aufgesetzt wird,

$$tang \frac{m\zeta}{2} = m k \delta_0 \, tang\left(z - \frac{m}{2}\zeta\right)$$

und also für die Horizontalrefraction

$$tang \frac{m}{2}\zeta' = \sqrt{m k \delta_0}.$$

$4k$ hat nach den Bestimmungen von Biot den Werth 0·0005888; um die Grösse m zu bestimmen, benützen wir die Gleichgewichtsbedingung für ein Element der Atmosphäre

$$dp = -g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \delta \, dr = + g_0 r_0 \delta \, d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Setzen wir hierin

$$\frac{r_0}{r} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{m+1} = \left(\frac{1 + 4k\delta}{1 + 4k\delta_0}\right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

so erhalten wir wieder mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung $dp = 2(m+1) g_0 r_0 k \delta d\delta$ und durch Integration $p = (m+1) g_0 r_0 k \delta^2$, also für die Oberfläche der Erde $p_0 = (m+1) g_0 r_0 k \delta_0^2$. Andererseits ist $p_0 = g_0 \delta_0 l$. wo l die Höhe einer homogenen Atmosphäre von der Dichtigkeit δ_0, die den Druck p_0 ausübt, bedeutet. Hierin ist l bekannt, da es offenbar durch die Höhe der Quecksilbersäule multiplicirt mit dem Verhältniss der specifischen Gewichte von Quecksilber und Luft gegeben ist. Nehmen wir Normal-Druck und Temperatur (760 *mm* und 0°), so ist $l = 0·76 \cdot 10517·3 = 7993·15$ *m*. Der mittlere Erdradius ist ferner 6366738 *m*, wir erhalten also für ζ', indem wir die beiden Werthe von p_0 gleichsetzen und m ausrechnen, den Werth 1824″ oder 30′ 24″, während die Beobachtungen[1]) für die obigen atmosphärischen Verhältnisse $\zeta = 37' \, 31''$ ergeben haben. Die obige Hypothese liefert also eine über mehr als 7′ zu kleine Horizontalrefraction. Prüfen wir weiter die Hypothese an ihren Folgerungen für die Constitution der Atmosphäre, so zeigt die Vergleichung der Ausdrücke

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta^2}{\delta_0^2} \quad \text{und} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon t_0},$$

dass

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon t_0}.$$

---

[1]) Chauvenet, Manual of spherical and practical Astronomy.

Ersetzen wir in der letzteren Beziehung δ durch r, so erhalten wir in erster Annäherung mit Beachtung der Gleichung

$$(m+1)k\delta_0 = \frac{l}{r_0},$$

$$r - r_0 = 2l\varepsilon(t_0 - t).$$

Die Temperatur der Atmosphäre nimmt also in arithmetischer Progression mit der Höhe ab und zwar, da $\varepsilon = \frac{1}{273}$ ist, auf $2l\varepsilon$, d. h. 58·6 *m* um einen Grad Celsius. Alle neueren Beobachtungen führen aber auf einen Mittelwerth von ungefähr 172 *m*; die behandelte Hypothese ist also auch in dieser Beziehung nicht entfernt mit der Wirklichkeit übereinstimmend.

Theorie von BESSEL.

Wir wenden uns jetzt zur BESSEL'schen Theorie der Refraction, müssen jedoch, um die Motive für deren Hypothese würdigen zu können, kurz eine andere Annahme betrachten, die von NEWTON seiner Refractionstheorie zu Grunde gelegt worden ist und dies ist die Annahme einer gleichen Temperatur für alle Punkte der Atmosphäre. Unsere beiden Gleichungen geben dann durch Division

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 r_0 \delta_0 ds}{p_0}$$

und durch Integration durch die ganze Atmosphäre hindurch

$$\log nat\, p = -\frac{g_0 r_0 \delta_0}{p_0} s + \log nat\, p_0,$$

oder mit Anwendung der Grösse l

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0} = e^{-\frac{r_0 s}{l}}.$$

Bei der Annahme einer gleichen Temperatur fällt also die Dichtigkeit in geometrischer Progression mit der Höhe. Diese Eigenschaft behält nun BESSEL bei, aber er setzt, um der erfahrungsmässig falschen Consequenz einer constanten Temperatur zu entgehen, einen Faktor $\frac{h-l}{h}$ zu dem Exponenten, sodass die BESSEL'sche Hypothese

$$\delta = \delta_0 e^{-\frac{h-l}{h}\frac{r_0}{l}s} = \delta_0 e^{-\beta s}$$

lautet. Um mit dieser Annahme die Differentialgleichung zu integriren, lassen wir in derselben einige Vereinfachungen eintreten, indem wir erstens den Faktor

$$1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

im Nenner ausserhalb des Wurzelzeichens durch seinen Mittelwerth $1 - \alpha$ ersetzen, was, wie leicht einzusehen, eine Vernachlässigung von Grössen relativ zweiter Ordnung bedeutet. Dabei ist α als Grösse erster Ordnung betrachtet. Zweitens wollen wir s^2, was ebenfalls — wenigstens im wirksamen Theile der Atmosphäre — eine Grösse zweiter Ordnung ist, weglassen.

Dass diese letztere Vereinfachung gestattet ist, kann durch Reihenentwickelung nach der zu vernachlässigenden Grösse bewiesen werden. Beschränken wir uns zu diesem Zwecke auf die beiden ersten Glieder, so wird

$$d\zeta = \frac{-\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1-e^{-\beta s}) + 2s \sin^2 z}}$$
$$\frac{+\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} s\, ds\left[\cos^2 z - 2\alpha(1-e^{-\beta s}) + \frac{3}{2} s \sin^2 z\right]}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1-e^{-\beta s}) + 2s \sin^2 z}}.$$

Das zweite Glied hat einen Maximalwerth für $z = 90$, also für die Horizontalrefraction. Werthen wir hierfür dasselbe aus, so können wir zunächst, da s zwischen 0 und 1 liegt, α eine kleine Grösse ist, und der Hauptantheil des Integrales sehr kleinen Werthen von s entspricht, an Stelle von $1 - e^{-\beta s}$ βs setzen. Hiermit erhalten wir

$$\zeta_{90} = \frac{\alpha\beta(3 - 4\alpha\beta)}{2^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 s^{\frac{1}{2}} e^{-\beta s} ds.$$

Erstrecken wir das Integral nicht bis 1, sondern bis ∞, so erhalten wir offenbar einen zu grossen Werth. Dieser beträgt

$$\frac{\alpha(3 - 4\alpha\beta)}{8(1-\alpha)(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}},$$

oder mit den BESSEL'schen Daten $\alpha = 0{\cdot}000294211$ und $\beta = 768{\cdot}57$ $0{\cdot}72''$. Es ist demnach gerechtfertigt, dieses Glied zu vernachlässigen.

Für die weitere Entwickelung des nunmehr bleibenden Integrales

$$\zeta = \int \frac{-\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1 - e^{-\beta s}) + 2s \sin^2 z}}$$

machen wir nach dem Vorbilde von LAPLACE die Substitution $s' \sin^2 z = s \sin^2 z - \alpha(1 - e^{-\beta s})$ und erhalten zunächst

$$\zeta = \int \frac{-\alpha\beta \sin z\, e^{-\beta s} ds}{(1-\alpha)\sqrt{\sin^2 z + 2s' \sin^2 z}}.$$

Um auch im Zähler die Variable s' einzuführen, schreiben wir an Stelle von $\beta e^{-\beta s} ds$ $de^{-\beta s}$ und erübrigt es also bloss noch $e^{-\beta s}$ durch s' auszudrücken. Nach einem bekannten Satze von LAGRANGE erhalten wir

$$e^{-\beta s} = e^{-\beta s'} - \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}(1 - e^{-\beta s'})e^{-\beta s'} - \frac{\alpha^2\beta}{1\cdot 2 \sin^4 z}\frac{d}{ds'}[(1 - e^{-\beta s'})^2 e^{-\beta s'}]$$
$$- \frac{\alpha^3\beta}{1\cdot 2\, 3 \sin^6 z}\frac{d^2}{ds'^2}[(1 - e^{-\beta s'})^3 e^{-\beta s'}] - \text{etc.} - \ldots,$$

also

$$d\zeta = \frac{\alpha\beta \sin z\, ds'}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}}\, e^{-\beta s} + \frac{\alpha}{\sin^2 z}\frac{d}{ds'}[(1 - e^{-\beta s'})e^{-\beta s'}]$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1\cdot 2 \sin^4 z}\frac{d}{ds'^2}[(1 - e^{-\beta s'})^2 e^{-\beta s'}] + \ldots,$$

oder durch Entwickelung der Klammerinhalte

$$d\zeta = \frac{\alpha\beta \sin z\, ds'}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}}\Big[e^{-\beta s'} + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}(2e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) +$$
$$\frac{\alpha^2\beta^2}{1\cdot 2 \sin^4 z}(3^2 e^{-3\beta s'} - 2^2\cdot 2e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) +$$
$$\frac{\alpha^3\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3 \sin^6 z}(4^3 e^{-4\beta s'} - 3^3\cdot 3e^{-3\beta s'} + 2^3\cdot 3e^{-2\beta s'} - e^{-\beta s'}) + \ldots\Big].$$

Dies ist zu integriren zwischen $s = 0$ und $s = 1$, da aber bereits für $s = 1$ die Dichtigkeit eine ganz ausserordentlich geringe ist, nämlich ungefähr $\frac{1}{(2{\cdot}72)^{800}}$ der an der Oberfläche der Erde, so können wir auch ohne irgend welche merkbare Vernachlässigung zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriren. Die gleichen Grenzen hat dann s'.

Wie man sieht, haben alle Integrale den gleichen Typus; sie sind nämlich sämmtlich von der Form

$$\frac{\beta\, ds' e^{-p\beta s'} \sin z}{\sqrt{\cos^2 z + 2s' \sin^2 z}},$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet. Die Substitution

$$\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 2s' = \frac{2t^2}{p\beta}$$

verwandelt diese Form in

$$\sqrt{\frac{2\beta}{p}}\, e^{\frac{p\beta}{2} \operatorname{cotg}^2 z - t^2} dt.$$

Setze ich nun zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{p\beta}{2}} \cot z = T \quad \text{und} \quad \psi(p) = e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2} dt,$$

so kann ich das obige Integral durch

$$\sqrt{\frac{2\beta}{p}}\, \psi(p)$$

bezeichnen. Mit dieser Bezeichnung erhalte ich für den Werth der Refraction den Ausdruck

$$\zeta = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha} \psi(1) + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z} [2^{\frac{1}{2}}\psi(2) - \psi(1)] + \frac{\alpha^2\beta^2}{1\cdot 2 \sin^4 z} [3^{\frac{1}{2}}\psi(3) \mp 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2\psi(2) + \psi(1)]$$
$$+ \frac{\alpha^3\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3 \sin^6 z} [4^{\frac{1}{2}}\psi(4) - 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3\psi(3) + 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3\psi(2) - \psi(1)] + \ldots$$

oder anders geordnet

$$\zeta = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha} \left[e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}} \psi(1) + 2^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z} e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}} \psi(2) + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 2} \frac{\alpha^2\beta^2}{\sin^4 z} e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}} \psi(3) + \right].$$

Für die Horizontalrefraction ($z = 90$, $T = 0$) erhält man, da bekanntermaassen

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

wird, alle ψ also den Werth $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ annehmen,

$$\zeta_h = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} \left[e^{-\alpha\beta} + 2^{\frac{1}{2}} \alpha\beta e^{-2\alpha\beta} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 2} \alpha^2\beta^2 e^{-3\alpha\beta} + \ldots \right].$$

Das Problem, die Refraction nach Bestimmung der Constanten α und β für jede beliebige Zenithdistanz zu berechnen, ist hiermit auf die Berechnung der Function ψ zurückgeführt. Sind für ψ die Werthe tabellarisch niedergelegt, so wird man, falls die obige Reihe für praktische Zwecke genügend convergirt, die numerische Bestimmung ohne weiteres vornehmen können. Von den Hilfsmitteln, ψ zu berechnen, wollen wir hier nicht sprechen und genügt ein Hinweis auf LAPLACE, BRUHNS und CHAUVENET[1]).

Es handelt sich jetzt um die Berechnung der Constanten α und β; da die erstere, wie man sieht, von Druck und Temperatur, die letztere wenigstens von der Temperatur abhängt, so müsste man die genannten Constanten für die ganze Reihe der vorkommenden atmosphärischen Zustände tabellarisch niederlegen. Mit den jedesmaligen Constanten hätte man dann die Refractionsberechnung vorzunehmen. Um diese immerhin etwas langwierige und beschwerliche Arbeit zu vermeiden, hat BESSEL die einem gewissen mittleren Zustande der Atmosphäre entsprechenden Refractionswerthe berechnet und die bei veränderten Verhält-

[1]) LAPLACE, Mécanique céleste, livre X. BRUHNS, Die astronomische Strahlenbrechung. CHAUVENET, l. c.

nissen geltenden Werthe auf folgende Weise numerisch leicht bestimmbar gemacht. Er setzt nämlich, wenn wir die auf jenen mittleren Normalzustand bezüglichen Werthe mit dem Index 0 und die allgemeinen Werthe ohne Index bezeichnen, in einer für logarithmische Rechnung bequem brauchbaren Form

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^A \left[\frac{1}{1+\varepsilon(t-t_0)}\right]^\lambda.$$

Um hierin die Constanten A und λ zu finden, entwickelt er einmal ζ direkt nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze und andererseits aus der vorliegenden Formel nach Potenzen von $p-p_0$ und $t-t_0$. Die Entwickelungen lauten

$$\zeta = \zeta_0 \left[1 + \frac{p-p_0}{p_0} t + \left(\frac{p-p_0}{p_0}\right)^2 \frac{A(A-1)}{1\cdot 2} \cdots\right]$$
$$\left[1 - \varepsilon(t-t_0)\lambda + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 (t-t_0)^2 \cdots\right]$$

und

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial p_0}(p-p_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial t_0}(t-t_0) + \cdots$$

Vergleichen wir die ersten Potenzen der Variablen, welche hier allein beibehalten werden sollen, so ergiebt sich

$$A = \frac{p_0}{\zeta_0}\frac{\partial \zeta_0}{\partial p_0} \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{1}{\varepsilon \zeta_0}\frac{\partial \zeta}{\partial t_0}.$$

Bestimmen wir weiter aus der Formel für die Refraction die vorliegenden Differentialquotienten, so erhalten wir nach mancherlei Umformungen mit Anwendung der Abkürzungen

$$x = \frac{\alpha_0 \beta_0}{\sin_2 z}$$

und

$$Q = xe^{-x} 1\tfrac{1}{2}\psi(1) + \frac{x^2}{1\cdot 2} e^{-2x} 2\tfrac{1}{2}\psi(2) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} e^{-3x} 3\tfrac{1}{2}\psi(3) + \cdots$$

die folgenden Formeln:

$$(1-\alpha_0)\frac{\partial \zeta_0}{\partial p_0} = \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta_0}}\, Q \,\frac{(1-x)}{p_0}$$

$$(1-\alpha_0)\frac{\partial \zeta_0}{\partial t_0} = -\varepsilon \sin^2 z \sqrt{\frac{2}{\beta_0}}\, Q \left[\frac{2h-l_0}{h-l_0}(1-x) + \frac{h}{h-l_0}\frac{\beta}{2}\, cotg^2 z\right]$$
$$+ \varepsilon \left[(1-\alpha)\zeta_0 + \frac{\alpha_0\beta_0}{1-x}\, cotg^2 z\right]\frac{1}{2}\frac{h}{h-l_0}.$$

Aus diesen Ausdrücken hat BESSEL für eine hinreichend enge Reihe von Zenithdistanzen die obigen Coëfficienten A und λ berechnet; er hat dann weiter noch, da die Refraction für kleine Zenithdistanzen der Tangente fast genau proportional läuft, um die Tabellen auf möglichst kleinen Umfang einzuschränken, ζ_0 in der Form $x \tan g\, z$ dargestellt und also x tabellarisch niedergelegt.

Theorie von IVORY.

Wir wenden uns jetzt zu der Theorie von IVORY. Dieselbe verdankt, wie bereits erwähnt, ihre Bedeutung nicht so sehr dem Umstande, die mittleren Verhältnissen entsprechenden Refractionen gut darzustellen, als vielmehr dem anderen, auch complicirtere, ja anomale Verhältnisse ohne grössere Schwierigkeiten der Rechnung unterwerfen zu lassen. Die Fundamentalhypothese dieser Theorie lautet:

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right).$$

Wir schreiben dieselbe, indem wir eine neue Variable u einführen

$$\frac{\delta}{\delta_0} = e^{-u}, \qquad \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon t_0} = 1 - f(1 - e^{-u}).$$

f bedeutet darin eine Constante, deren Werth ungefähr 0·2 ist Um den Zusammenhang zwischen der Höhe über dem Boden einerseits und Temperatur, Druck und Dichtigkeit andererseits darzustellen, benutzen wir wiederum die atmosphärische Gleichgewichtsbedingung $dp = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \delta dr$ und ersetzen darin p und δ durch u. Dies liefert mit Benutzung der bekannten Abkürzungen

$$p_0 = g_0 \delta_0 l \quad \text{und} \quad s = 1 - \frac{r_0}{r},$$

$$(1 - f + 2f e^{-u})\, du = \frac{r_0 ds}{l},$$

oder, indem wir von der Erdoberfläche bis zu einem beliebigen Punkte der Atmosphäre integriren,

$$(1 - f)u + 2f(1 - 2^{-u}) = \frac{r_0}{l} s.$$

Ist f bekannt, so gestattet uns diese Gleichung, den Zusammenhang zwischen u und s resp. r tabellarisch niederzulegen, womit die obige Aufgabe gelöst ist.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung der Refraction, indem wir die Fundamentalgleichung derselben mit statthaften Vernachlässigungen transformiren. Wir schreiben nämlich der Reihe nach

$$d\zeta = \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{(1 - s) \sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) + (2s - s^2) \sin^2 z}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{(1 - s) \sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) - \sin^2 z (1 - s)^2}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{\delta_0} \cdot \frac{\sin z}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)}{(1 - s)^2} - \sin^2 z}}$$

$$= \alpha \frac{d\delta}{d_0} \cdot \frac{\sin z}{1 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) + 2s}}.$$

Indem wir weiter noch die neue Unbekannte x durch die Gleichung

$$x \frac{l}{r_0} = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

einführen, erhalten wir

$$d\zeta = -\frac{\alpha(1 + \alpha) \sin z\, e^{-u} du}{\sqrt{\cos^2 z + 2x \frac{l}{r_0}}}$$

und es handelt sich nur noch darum $e^{-u} du$ durch x auszudrücken. Dies geschieht aus der Gleichung

$$x \frac{l}{r_0} = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right),$$

indem wir dieselbe in der Form

$$x = u - \alpha \frac{r_0}{l} (1 - e^{-u}) + f(2 - u - 2e^{-u})$$

schreiben und nach einem bekannten Satze von LAGRANGE e^{-x} darstellen, woraus dann sofort durch Differentiation $e^{-x}du$ folgt. Wir brauchen dabei, wie eine genauere Discussion lehrt, nur die beiden ersten Glieder der Reihe von LAGRANGE, nämlich

$$e^{-x}dx \quad \text{und} \quad \frac{\alpha r_0}{l}(2e^{-2x}-e^{-x})dx - f(4e^{-2x}-3e^{-x}+xe^{-x})dx$$

mitzunehmen. Die hierbei gemachten Vernachlässigungen liegen nämlich vollständig innerhalb des Rahmens der bereits bei der Differentialgleichung gemachten und betragen im Falle der Horizontalrefraction nur wenig mehr als eine Bogensecunde.

Wir erhalten demnach als Ausdruck für die Refraction

$$d\zeta = \alpha(1+\alpha)\sin z\left[\int\frac{dx\cdot e^{-x}}{\sqrt{\cos^2 z+2x\frac{l}{r_0}}}+\frac{\alpha}{l}r_0\int\frac{(2e^{-2x}-e^{-x})dx}{\sqrt{\cos^2 z+2x\frac{l}{r^0}}}\right.$$
$$\left.-f\int\frac{(4e^{-2x}-3e^{-x}-xe^{-x})dx}{\sqrt{\cos^2 z+2x\frac{l}{r_0}}}\right]$$

Als Grenzen ergeben sich für x aus der Gleichung

$$x\frac{l}{r_0}=s-\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

die Werthe o und

$$\frac{1-\alpha\left(1-\frac{\delta'}{\delta_0}\right)}{l}\cdot r_0,$$

worin δ' die Dichtigkeit der Atmosphäre im Unendlichen bedeutet. Die IVORY'sche Hypothese leidet nämlich an dem Mangel, diese Dichtigkeit, obwohl ausserordentlich klein, so doch nicht gleich Null zu liefern. Da $\frac{r_0}{l}$ ungefähr den Werth 800 hat, so können wir indessen auch als obere Grenze für x den Werth ∞ annehmen. Die weitere Behandlung der Integrale kann nun genau wie bei der BESSEL'schen Theorie in der Weise erfolgen, dass man dieselben auf die Form $(e^{-t^2}dt)$ zurückführt. Wir wollen dies indess hier nicht thun und ebenso wenig die von IVORY selbst gegebene Entwickelung genauer verfolgen, sondern vielmehr nur das Wesen der letzteren kurz skizziren. IVORY setzt

$$\cos z=\frac{\sqrt{2}}{tang\,\varphi} \quad \text{und} \quad tang\frac{\varphi}{2}=c,$$

also

$$\cos^2 z=\frac{(1-c^2)^2}{2c^2}$$

und entwickelt die Wurzelausdrücke nach Potenzen von c, so dass die Refraction ζ sich in der Form $\zeta=\sin z\,(ca_1+c^3a_3+c^5a_5\ldots)$ darstellt. Die Convergenz dieser Reihe ist eine sehr gute, da selbst für eine Zenithdistanz von 89° die 7 ersten Glieder der Reihe die Refraction bis auf weniger als eine Secunde darstellen. Für die Horizontalrefraction findet sich nach IVORY mit

$$\alpha=58{\cdot}47'',\quad \frac{l}{r_0}=0{\cdot}0012958,\quad \frac{\alpha r_0}{l}-0{\cdot}21878,\quad f=\frac{2}{q}$$

der Werth 2072·5″, während er 2070 sein soll.

Eine Weiterbildung der Theorie von IVORY hat RADAU[1]) versucht und zwar

[1]) M. R. RADAU, Sur la Théorie des réfractions astronomiques. Bulletin astronomique, Tome I, 1884, pag. 489.

in zweifacher Hinsicht, indem er einmal für ein mittleres $f(0\cdot2)$ die Refractionen berechnete und die für $f = 0\cdot2 + \varphi$ anzubringenden Correctionen als Functionen von φ darstellte und indem er andererseits die IVORY'sche Hypothese insofern verallgemeinerte als er

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) - g\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)^2$$

setzte und f und g variiren liess. Die von ihm für 3 Zenithdistanzen gegebenen Resultate mögen in der folgenden Tabelle nebst dem Temperaturabfall für eine Erhebung von 1000 *m* Platz finden.

f	g	Δt für 1000 *m*	Refractionen für 10° und 0·76 *m*		
			84·5°	87·24°	90·00°
0·331	0·223	8·50° + 0·20° *h*	544·7″	901·4″	1963·1″
0·331	0·000	8·50° − 0·20° *h*	545·3	905·6	1987·5
0·200	0·000	5·69° − 0·19° *h*	546·0	911·0	2072·2
0·198	0·079	5·63°	545·8	909·5	2063·9
0·108	0·267	3·34° + 0·66° *h*	545·7	909·4	2104·1
0·108	0·000	3·34° − 0·15° *h*	546·5	915 0	2140·0
0·000	0·223	+ 0·92° *h*	546·4	915·0	2198·6
0·000	0·000	0	547·2	920·0	2232·7
−0·115	0·446	−4·42° + 3·02° *h*	546·3	915·2	2274·3
Nach den BESSEL'schen Tafeln			545·7	909·6	2107·6

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung zunächst, dass die 3., 4. und 5. Hypothese die besten Werthe liefern und dass speciell die 5. ganz ausgezeichnete Uebereinstimmung mit den empirisch bestimmten BESSEL'schen Werthen liefert. Man sieht aber auch vor allem, dass für eine Zenithdistanz von 84·5, sehr differente Werthe von f und g noch ganz ausgezeichnete Resultate geben. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dass bis zu diesen Zenithdistanzen die Krümmung der Indicialflächen noch keine grosse Rolle spielt, für ebene Indicialflächen aber andererseits die Refraction nur vom Orte des Beobachters und nicht von dem Gesetze, nach dem die Dichtigkeit mit der Höhe variirt, abhängt. In der That war es auch bereits ORIANI und LAPLACE gelungen, einen 2gliedrigen, die 1. und 3. Potenz von $tang\, z$ enthaltenden Ausdruck ohne irgend welche Hypothese abzuleiten. Zu dem Zwecke hatten sie den Ausdruck für das Refractionsdifferential nach Potenzen von α und s entwickelt und von diesen beiden nur erste Potenzen beibehalten. Es ist dies auch für s angängig, weil dasselbe wenigstens in dem wirksamen Theile der Atmosphäre eine kleine Grösse ist. Auf diese Weise erhält man

$$d\zeta = -\alpha \frac{d\delta}{\delta_0} tang\, z \left[1 - \frac{s}{cos^2 z} + \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)\frac{2\, cos^2 z + 1}{cos^2 z}\right]$$

und durch Integration zwischen den Grenzen δ_0 und 0

$$\zeta = \alpha\, tang\, z\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\frac{2\, cos^2 z + 1}{cos^2 z} + \frac{1}{cos^2 z}\int s\frac{d\delta}{\delta_0}\right).$$

Nun ist, wie man leicht durch partielle Integration von $\int s \frac{d\delta}{\delta_0}$ zwischen den erforderlichen Grenzen findet,

$$\int s\frac{d\delta}{\delta_0} = -\int_0^1 \frac{\delta}{\delta_0}\, ds,$$

welches in Verbindung mit der Gleichung

$$dp = -g_0 r_0 \delta ds, \quad \int_0^1 \frac{\delta}{\delta_0} ds = -\frac{p_0}{g_0 \delta_0 r_0} = -\frac{l}{r_0}$$

liefert. Setzen wir diesen Werth ein, so erhalten wir

$$\zeta = \alpha\left(1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l}{r_0}\right) tang\, z - \alpha\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right) tang^3 z,$$

oder mit den für 0° und 0·76 *m* von LAPLACE benützten Werthen

$$\zeta = 60{\cdot}567'' \, tang\, z - 0{\cdot}06702'' \, tang^3 z.$$

Die soeben nachgewiesene Thatsache, dass selbst bis zu bedeutenden Zenithdistanzen die Refraction unabhängig von der Hypothese dargestellt werden kann, hat natürlich die Consequenz, dass durch die Beobachtung bei kleineren Zenithdistanzen auch umgekehrt keine Entscheidung über die Constitution der Atmosphäre erfolgen kann. Wenden wir uns aber, um über die Constitution Aufschluss zu erhalten, an die nahe dem Horizonte gemachten Beobachtungen so liegt andererseits wieder die Schwierigkeit vor, dass diese entsprechend dem Wechsel der atmosphärischen Zustände zeitlich und örtlich stark abweichende Werthe liefern. Trotz dieser Schwierigkeiten ist es indess den Bemühungen der Astronomen gelungen, durch Refractionsbeobachtungen unsere Kenntniss von der Atmosphäre zu erweitern. Für einen sicheren Weg dürfen wir denselben freilich nicht halten und müssen lieber umgekehrt der direkten Erforschung der Atmosphäre durch Ballons mit oder ohne Beobachter es überlassen, genauere Grundlagen für neue Theorien oder die Constanten der alten zu liefern. Nichtsdestoweniger erscheint es nicht uninteressant, die Consequenzen einiger Hypothesen in Bezug auf die Constitution der Atmosphäre kennen zu lernen. Eine hierfür geeignete Zusammenstellung ist von BRUHNS[1]) und später mit Hinzufügung de, Höhe für 1° C. Temperaturabnahme und der seine eigene Theorie betreffenden Daten von C. M. BAUERNFEIND[2]) gegeben worden. Dieselbe enthält die Theorien von LAPLACE, BESSEL, YOUNG, SCHMIDT, IVORY, LUBBOCK und BAUERNFEIND. Mit Beibehaltung früherer Bezeichnungen und Abkürzungen geben wir zunächst die fundamentalen Beziehungen, die zu Grunde gelegt worden sind.

LAPLACE setzt

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + \frac{0{\cdot}49039}{0{\cdot}000741829}\, u\right) e^{-\frac{u}{0{\cdot}000741829}}$$

und

$$u = s - 0{\cdot}0002939\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right),$$

wodurch sich ergiebt

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0}\left(0{\cdot}59224 + \frac{0{\cdot}29045}{1 + u\, 661{\cdot}11} + 0{\cdot}11731\, \frac{\delta}{\delta_0}\right)$$

BESSEL hat

$$\delta = \delta_0 e^{-\beta s}, \quad \beta = 745{\cdot}75,$$

also

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{r_0}{l}\frac{e^{-\beta s}}{\beta} - \frac{r_0}{l\beta},$$

wobei $l = 7964$ *m*.

YOUNG wählt

$$p = \frac{3}{2}\delta^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\delta^2,$$

woraus

$$\frac{r_0}{r} = \frac{9}{2l}\sqrt[3]{\delta} - \delta l - \frac{7}{2l} + l$$

folgt.

---

[1]) L. c.

[2]) Die atmosphärische Strahlenbrechung. Astr. Nachr. 1478—1480.

Nach SCHMIDT ist

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - \frac{r-r_0}{b},$$

$b = 49100$ und demnach

$$log \frac{p}{p_0} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon t_0} \cdot \frac{1}{r_0+2b} \, log \frac{r_0(b-r+r_0)}{b(2r-r_0)}$$

und

$$log \frac{\delta}{\delta_0} = log \frac{p}{p_0} - log\left(1 - \frac{r-r_0}{b}\right).$$

Die IVORY'sche Hypothese lautet

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - \frac{2}{9}\left(1 - e^{-u}\right) \quad \text{und} \quad \delta = \delta_0 e^{-u},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{7}{9} u + \frac{4}{9} f(1 - e^{-u}) = \frac{s}{0{\cdot}0012958}.$$

LUBBOCK nimmt an

$$\frac{\delta}{\delta_0} = (1-q)^2 (1 - Hq),$$

wobei

$$q = 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad H = 9{\cdot}54378$$

und erhält

$$\frac{r-r_0}{r} = \frac{3l}{H} log(1 - Hq).$$

Endlich macht BAUERNFEIND die Annahme

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Mit diesen Hypothesen erhält man folgende Werthe:

Höhe	LAPLACE	BESSEL	YOUNG	SCHMIDT	IVORY	LUBBOCK	BAUERNFEIND
			1. Luftdruck ($p_0 = 1$).				
1600	0·62	0·65	0·62	0·62	0·62	0·62	0·62
4800	0·40	0·44	0·42	0·40	0·41	0·41	0·40
8000	0·24	0·26	0·27	0·26	0·26	0·26	0·25
24000	0·01	0·03	0·01	0·00	0·01	0·01	0·01
			2. Dichtigkeit ($\delta_0 = 1$).				
1600	0·858	0·829	0·840	0·843	0·849	0·846	0·842
4800	0·601	0·570	0·610	0·588	0·595	0·598	0·585
8000	0·348	0·392	0·410	0·400	0·402	0·414	0·395
24000	0·030	0·061	0·010	0·032	0·040	0·036	0·029
			3. Temperatur ($t_0 = 0$).				
1600	−13·2	− 2·0	− 13·0	− 8·7	− 8·2	− 8·3	− 9·2
4800	−34·1	− 8·0	− 33·0	− 26·1	− 24·0	− 24·6	− 27·7
8000	−48·7	− 17·0	− 48·0	− 43·5	− 34·9	− 42·5	− 46·2
24000	−85·2	−137·5	−225·0	−130·3	− 56·0	−153·4	−138·5
			4. Höhe für 1° C. Temperaturabnahme.				
0—1600	121·2	800·0	123·1	184·1	195·1	192·7	173·2
3200—4800	161·6	457·1	160·0	184·1	219·2	188·2	173·2
6400—8000	231·9	320·0	266·6	184·1	313·5	175·8	173·2
16000—24000	833·3	93·5	94·1	184·1	1481·5	132·6	173·2

Die Tabelle zeigt, dass der Luftdruck bis zu 8000 *m* Höhe fast identisch ist und höchstens LAPLACE eine kleine Differenz zu verzeichnen hat, dass weiter

wiederum bis auf LAPLACE auch die Dichtigkeit nicht allzu verschieden ist. Anders steht es dagegen bei der Temperatur. Hier hat die Theorie von BESSEL ganz ausserordentliche Abweichungen gegenüber den übrigen Theorien und auch der Erfahrung, sodass sie nach physikalischen Rücksichten gemessen die bei weitem unvollkommenste ist. Dieselbe giebt bei 4800 *m* gegenüber den übrigen ein Minus von ungefähr 20 und bei 8000 *m* ein solches von fast 30°. Entsprechend hat man dann an der Erdoberfläche für 1° 800 *m* zu steigen, während die Beobachtung im Mittel 172 *m* liefert. Ein specielleres Urtheil über den Werth der einzelnen Theorien ist nicht gut zu fällen, doch kann man sagen, dass von den in der Tabelle vertretenen die von SCHMIDT, IVORY, LUBBOCK und BAUERNFEIND ziemlich gleichwerthig sind. Wenn die von IVORY etwas zu langsamen Temperaturabfall zeigt, so besitzt sie als Aequivalent die analytische Eleganz und vor allem die schon betonte Möglichkeit einer Weiterbildung in der Richtung der Darstellung anomaler Refractionsverhältnisse. Ausser den erwähnten Theorien sind in neuerer Zeit noch eine ganze Reihe anderer gegeben worden, so von RADAU[1]), M. KOWALSKI[2]), BAEYER[3]), GYLDEN[4]). KOWALSKI nimmt als Fundamentalhypothese

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = 1 - f\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) - k\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\frac{4}{3}},$$

BAEYER

$$\delta = \delta_0 \cdot \frac{[1 + v(r - r_0)]^{\varepsilon - 1}}{[1 + w(r - r_0)]^{\varepsilon + 1}},$$

wo ε den Werth 4 erhält und v und w von der Höhe abhängige Grössen bedeuten, GYLDEN schliesslich

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_0} = \left(1 - \frac{\beta}{2} s\right)^2.$$

Für die Mehrzahl der Theorien existiren auch praktische Tafeln, indessen sind von diesen doch immerhin nur wenige in grössere Aufnahme gekommen. Sehen wir von der BRADLEY'schen ab, die noch längere Zeit benutzt worden ist, so kann man eigentlich sagen, dass erst die BESSEL'schen Tafeln vermöge ihrer Exaktheit einen wirklichen Erfolg gehabt haben, und dieser Erfolg erstreckt sich auch noch bis in die neueste Zeit, da die ganz neuen Tafeln von RADAU doch erst selten benutzt werden.

Wir haben bisher einen Punkt nicht berücksichtigt, der dies *a priori* beanspruchen kann, nämlich die Anwesenheit von Wasserdampf in der Atmosphäre; LAPLACE hat indessen bewiesen, dass die hierfür anzubringenden Correctionen ausserordentlich klein sind und BESSEL hat aus diesem Grunde dieselben von vornherein vernachlässigt. In den neuen Tafeln von RADAU ist jedoch auf dieselben Rücksicht genommen und zwar in Form einer Correction des Barometerstandes.

Wenn wir zum Schluss eine kleine Refractionstafel geben, so soll dieselbe nur den Zweck haben, eine Uebersicht über den Verlauf der Refraction zu bieten. Dieselbe gilt für den BESSEL'schen »Normalzustand« der Atmosphäre, nämlich

---

1) RADAU, l. c. und Essai sur les Réfractions astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires t. XIX, Paris 1889.

2) M. KOWALSKI.

3) J. J. BAEYER, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Mémoires de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersb. VII. Série Tome III, No. 5. 1860.

4) H. GYLDEN, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Mémoires etc. VII. Série Tome X, No. 1. 1866.

für eine Barometerhöhe von 751·5 *mm* und eine Temperatur von 9·31° C. und ist den BESSEL'schen Refractionstafeln entnommen. Daneben mögen noch des historischen Interesses wegen die BRADLEY'schen auf denselben Zustand der Atmosphäre bezogenen Werthe Platz finden.

Zenithdistanz	Refraction nach BESSEL	Refraction nach BRADLEY	Zenithdistanz	Refraction nach BESSEL	Refraction nach BRADLEY
0°	0′ 0·0″	0′ 0·0″	74	3′ 18·6″	3′ 16·9″
5	0 5·1	0 5·0	75	3 32·1	3 30·3
10	0 10·2	0 10·0	76	3 47·4	3 45·6
15	0 15·5	0 15·1	77	4 4·9	4 3·1
20	0 21·0	0 20·6	78	4 25·0	4 23·4
25	0 26·9	0 26·5	79	4 48·5	4 47·1
30	0 33·3	0 33·0	80	5 16·5	5 15·1
35	0 40·4	0 39·6	81	5 49·3	5 48·7
40	0 48·4	0 47·6	82	6 29·6	6 29·8
45	0 57·5	0 57·0	83	7 19·7	7 21·1
50	1 8·7	1 7·9	84	8 23·3	8 26·6
55	1 22·2	1 21·4	85	9 46·5	9 53·0
60	1 39·7	1 38·4	86	11 38·9	11 50·2
65	2 3·2	2 1·7	87	14 14·6	14 35·1
70	2 37·3	2 35·5	88	18 8·6	18 34·8
71	2 46·1	2 44·3	89	24 24·6	24 28·7
72	2 55·8	2 53·9	89·5	29 3·5	28 22·9
73	3 6·6	3 4·7	90·0	34 54·1	33 0·0

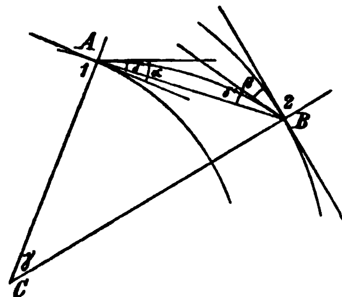
Was ferner die Correctionen anbetrifft, die bei einem anderen atmosphärischen Zustande an dieser Tafel anzubringen sind, so mag folgendes eine Uebersicht bieten. Bezeichnen wir mit a_0 die Normalrefraction, mit a eine beliebige andere, sowie die bezüglichen Barometerstände und Temperaturen mit b_0 b resp. t_0 t, so ist in erster Annäherung, $a = a_0\,[1 + (b - b_0)\,\alpha + (t - t_0)\,\beta]$, wo

α für b gleich	695	715	740	765
die resp. Werthe	0·00138	0·00134	0·00130	0·00126 und
β für t gleich	—15°	0°	+15°	+30°
die resp. Werthe	0·00376	0·00365	0·00351	0·00328

besitzen.

II. Terrestrische Refractionstheorie.

Auch dieses Capitel gehört, wie das vorige, seinem vollen Umfange nach nicht in das Gebiet der Physik und soll deshalb hier nur kurz behandelt werden. Es handelt sich in demselben um die (normalen) Richtungsänderungen, welche ein Lichtstrahl auf dem Wege von einem terrestrischen Punkte zu einem anderen erfährt. Diese Aufgabe ist für die Geodäsie und speciell für das Capitel der trigonometrischen Höhenmessung von der grössten Bedeutung. Wir wollen zunächst die genannte vertikale Richtungsänderung eines Lichtstrahls zwischen 2 Punkten unter der Voraussetzung kugelförmiger Indicialflächen durch beobachtbare Grössen darstellen. Nennen wir zu diesem Zwecke



(Fig. 412.)

(Fig. 412) die Winkel, welche die resp. Tangente an dem Lichtstrahl in den Punkten A und B mit der direkten Verbindungslinie von A und B macht,

δ und δ', ferner die Neigungswinkel dieser Tangenten gegen die Indicialflächen in A und B, α und $-\beta$, endlich den Winkel zwischen den Normalen dieser Indicialflächen γ, so erhalten wir aus dem Dreieck ABC, wo C das Centrum der Flächen ist,

$$\gamma + 90 + \alpha - \delta + 90 - \beta - \delta' = 180 \quad \text{oder} \quad \delta + \delta' = \gamma + \alpha - \beta.$$

Setzen wir jetzt unter Beschränkung auf Strecken AB, die gegen den Erdhalbmesser klein sind, die Bahn des Strahles als kreisförmig, also δ und δ' als gleich voraus, so ist $\delta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \alpha')$. Man pflegt nun in der Geodäsie den Krümmungsradius und zwar den für schwach geneigte Strahlen geltenden (ρ) in Beziehung zum Erdhalbmesser r zu setzen und das Verhältniss $\frac{r}{\rho} = k$ als Refractionscoëfficient zu bezeichnen. Um dieses k in die obige Formel $\delta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \alpha')$ einzuführen, nennen wir die horizontal entweder auf der Erdoberfläche oder in mittlerer Höhe zwischen A und B gemessene Entfernung von A und B a und erhalten damit für schwach geneigte Strahlen und mit Beschränkung auf Grössen 1. Ordnung.

$$2\delta = \frac{a}{\rho} = \frac{ak}{r} = \gamma + \alpha - \beta = \frac{a}{r} + \alpha - \beta$$

oder

$$1 - k = (\beta - \alpha)\frac{r}{a}.$$

Nach dem Princip, das in dieser Formel liegt, sind eine grosse Reihe von Bestimmungen der Refractionsconstante gemacht worden, die indess sehr beträchtliche Abweichungen von einander zeigen und nothwendiger Weise auch zeigen müssen. Im Mittel hat sich für k ungefähr 0·13 ergeben. Wir wollen jetzt zeigen, wie man bei der trigonometrischen Höhenmessung die Grösse k benutzt. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die Höhen- (Radien-) Differenz mit h, so erhalten wir aus dem Dreieck ABE, worin E der Durchschnittspunkt der durch A gelegten Niveaufläche mit dem Radius CB ist, bei Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung $\left(\frac{a}{r}\right)^2$:

$$\frac{h}{a} = \frac{\sin\left(\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin(90 - \alpha + \delta - \gamma}$$

oder

$$\frac{h}{a} = \frac{\sin\left(\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos(\alpha - \delta + \gamma)}.$$

Betrachten wir nun weiter δ und γ als Grössen erster Ordnung, so können wir diese Formel bei Vernachlässigung von Grössen 2. Ordnung in die Gestalt

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tang}\alpha - \delta + \frac{\gamma}{2} + (\gamma - \delta)\operatorname{tang}^2\alpha$$

bringen. Führen wir hierin schliesslich die Beziehungen

$$\gamma = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad 2\delta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{r}k$$

ein, so ergiebt sich das Schlussresultat[1])

$$h = a \operatorname{tang}\alpha + \frac{1-k}{2r}\cdot a^2 + \frac{2-k}{2r}a^2\operatorname{tang}^2\alpha.$$

---

[1]) JORDAN, Vermessungskunde Bd. II. Die Differenz des Resultates gegenüber JORDAN rührt davon her, dass dieser a selbst als Grösse erster Ordnung auffasst.

Diese Gleichung enthält ein neuerdings in Aufnahme gekommenes Verfahren, k zu bestimmen und dieses besteht darin, dass man h a und α direkt misst. Ersteres geschieht dabei durch Nivellirung.

Die gemachte Hypothese einer kreisförmigen Gestalt der Lichtkurve ist indess, wenn es sich um beträchtlichere Strecken und um grössere Elevationswinkel der Trajektorie gegenüber den Niveauflächen handelt, zu roh und man muss deshalb auf die Differentialgleichung der Curve zurückgehen[1]. Wir schreiben dieselbe, indem wir den Punkt A als Ausgangspunkt der Trajektorie nehmen und die auf ihn bezüglichen Grössen mit dem Index 1 versehen,

$$d\zeta = \frac{\alpha_1 \frac{d\delta}{\delta_1}(1-s)\sin z_1}{\left[1 - 2\alpha_1\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z_1 - 2\alpha_1\left(1-\frac{\delta}{\delta_1}\right) + (2s - s^2)\sin^2 z_1}}.$$

Dabei sind, wie früher, die Abkürzungen

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{2k\delta_1}{1 + 4k\delta_1}$$

benutzt. Es entsteht nun hier die Schwierigkeit, dass eine Entwickelung der Wurzel nach Potenzen des zweiten und dritten Gliedes für grosse Zenithdistanzen nicht angängig ist. Wir wollen diesen Fall, der praktisch am häufigsten sein wird, hier nicht diskutiren, sondern für das folgende $\cos z_1$ als endliche Grösse auffassen. Thun wir dies, so können wir für die Zwecke der terrestrischen Refraction bei Beschränkung auf kleine Strecken AB, das zweite und dritte Glied unter dem Wurzelzeichen als Grösse erster Ordnung vernachlässigen und erhalten dann bei gleicher Vernachlässigung in den übrigen Gliedern

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \operatorname{tang} z_1 \, d\delta.$$

Charakterisiren wir weiter den Punkt B durch den Index 2, so erhalten wir, indem wir auch die α's als Grössen erster Ordnung auffassen

$$\alpha_1 = \alpha_0 \frac{p_1}{760} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon t_1} \left(\alpha_2 = \alpha_0 \frac{p_2}{760} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon t^2}\right) \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1+\varepsilon t_1}{1+\varepsilon t_2}$$

$$= \frac{p_2}{p_1} \cdot [1 + \varepsilon(t_1 - t_2)]$$

und aus der barometrischen Höhenformel

$$h = K \log \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{t_1 + t_2}{2}\right).$$

K bedeutet dabei in der letzten Formel die barometrische Constante mit Einschluss der Correctionsglieder zweiter Ordnung, die sich auf den Einfluss der Feuchtigkeit und die Variationen der Schwere nach der geographischen Breite und mittleren Meereshöhe beziehen. Wir wollen nun weiter die Hypothese einer mit der Höhe gleichförmigen Temperaturabnahme machen und demnach $t_1 - t_2 = gh$ setzen, wo g eine Constante ist. Es handelt sich nun zunächst darum, in der Differentialgleichung

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \cdot \operatorname{tang} z_1 \, d\delta,$$

oder, wenn wir den Punkt 2 als variabel auffassen, in

$$d\zeta = \frac{\alpha_1}{\delta_1} \operatorname{tang} z_1 \, d\delta_2$$

[1]) Das folgende giebt auszugsweise die Theorie von JORDAN wieder. Handbuch d. Verm. Bd. II.

δ_2 durch h resp. a zu ersetzen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir die barometrische Höhenformel nach Potenzen von $p_1 - p_2$ und erhalten:

$$h = K\left[\frac{p_1 - p_2}{p_1} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 \ldots\right]\left(1 + \varepsilon\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_1 - \frac{gh}{2}$$

$$1 - \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \varepsilon t_1}{K} h + \ldots .$$

Damit wird

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(1 - \frac{1 - \varepsilon t_1}{K} h + \ldots\right)(1 + g\varepsilon h + \ldots) = 1 - \frac{1 - \varepsilon t_1}{K} h + g\varepsilon h + \ldots$$

und

$$\frac{d\delta_2}{\delta_1} = -dh\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon + \ldots\right).$$

Vernachlässigen wir weiter die angedeuteten Glieder und benützen die angenähert gültige Beziehung $h = a \operatorname{cotg} z_1$, so ergiebt sich $d\zeta = -\alpha_1 da\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - \varepsilon g\right)$ und demnach wird bei einer Integration vom Punkte 1 bis 2 der Richtungsunterschied der Curve in den genannten Punkten zu

$$\alpha_1 a\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon\right)$$

gefunden. Denken wir uns jetzt die Tangente im Punkte 1 als ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems $\xi\eta$, so können wir diesen Richtungsunterschied auch genähert durch

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_a$$

ausdrücken und wir erhalten also für

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_a$$

den Werth

$$\alpha_1\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g\varepsilon\right).$$

Für eine wenig gegen die Abscissenaxe geneigte Kurve stellt der zweite Differentialquotient in erster Annäherung den Werth des Krümmungshalbmessers (R) dar; es wird also der Refractionscoëfficient im Punkte 1

$$k_1 = \alpha_1\left(\frac{1 - \varepsilon t_1}{K} - g_1\varepsilon\right) r$$

und entsprechend im Punkte 2

$$k_2 = \alpha_2\left(\frac{1 - \varepsilon t_2}{K} - g_2\varepsilon\right) r,$$

wobei wir g_1 und g_2 unterscheiden wollen. Legen wir die Krümmungsradien in diesen Punkten zu Grunde, so können wir in erster Annäherung eine Gleichung für unsere Trajektorie gewinnen. Setzen wir nämlich dieselbe in der Gestalt $\eta = P\xi^2 + Q\xi^3$ an, so bestimmen sich die Coëfficienten P und Q durch die Krümmungsradien R_1 und R_2 zu

$$P = \frac{1}{2R_1} \quad \text{und} \quad Q = \frac{R_1 - R_2}{6aR_1R_2}.$$

Mit diesen Werthen ergiebt sich die Ordinate im Punkte 2 zu $\frac{a^2}{2R'}$, wo

$$\frac{1}{R'} = \frac{\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{3}$$

ist, und also mit Einführung der Abkürzung

$$k' = \frac{r}{R'}$$

der Richtungsunterschied der Tangente im Punkte 1 und der Verbindungslinie von 1 und 2 zu

$$\frac{a}{2R'} = \frac{a}{r} \cdot \frac{k'}{2} = \frac{1}{2} k'\gamma.$$

γ bedeutet dabei, wie schon oben, den Centriwinkel *ACB*. Hiermit ist die Aufgabe, die Refractionsbeträge an zwei, durch eine Trajektorie verbundenen Punkten zu finden, gelöst und es bedarf jetzt nur noch einfacher trigonometrischer Rechnung, um den Höhenunterschied derselben zu erhalten.

C. Anomalien der terrestrischen Strahlenbrechung.

An Stelle der regelmässigen astronomischen oder terrestrischen Strahlenbrechung ist eine ganze Reihe von unregelmässigen mehr oder weniger complicirten Phänomenen beobachtet worden, die man unter dem Namen Kimmung, Luftspiegelung und Fata morgana zusammengefasst hat. Dieselben bestehen kurz gesagt darin, dass von Gegenständen Bilder entstehen, die entweder nach Ort oder Lage oder Form oder Grösse oder nach mehreren dieser Rücksichten zusammen Anomalien zeigen. So z. B. werden Gegenstände sichtbar, die infolge der Krümmung der Erdoberfläche oder sonstiger physischer Hindernisse es im allgemeinen nicht sind und andererseits tauchen sonst sichtbare unter. Hierher gehören z. B. auch die Verfrühungen und Verspätungen im Sonnenauf- und Untergange, wie sie zum Theil in ganz abnormer Weise von Reisenden beobachtet worden sind. Weiter erscheinen Gegenstände in zu geringer oder bedeutender Höhe oder auch, was allerdings höchst selten ist, zu weit nach rechts oder links verschoben und zwar sowohl in congruenter wie symmetrischer Gestalt. Häufig ist vor allem auch das Auftreten doppelter, selten schon das dreifacher oder noch mehrfacher Bilder, die übereinander sich befinden. Alle diese Erscheinungen wechseln ferner mit dem Orte des Beobachters; bei Bewegung desselben ändern die Bilder im allgemeinen ihre Form und Grösse, einige schrumpfen zusammen, andere werden deutlicher und grösser, neue tauchen auf etc. Besonders merkwürdig ist auch die Erscheinung, dass ein Stück der Gegend wie von Wasser umgeben erscheint und also den Charakter einer Insel vortäuscht.

Es kann natürlich nicht unsere Aufgabe sein, für alle angeführten Fälle und deren Combinationen, soweit dieselben vorhanden, historisches Material anzugeben, indessen sollen doch einige der merkwürdigsten Fälle hier kurz geschildert werden. Auf Malta hat man einmal ein anomales Bild des Aetna für eine neue Insel gehalten und sich angeschickt dieselbe zu besetzen[1]). Nach einer Schilderung von LATHAM[2]) sah man von Hastings aus einmal die ca. 10 Meilen entfernte französische Küste mit voller Deutlichkeit. Stieg man auf einen Hügel, so konnte man die ganze Küste bis Calais und mit dem Fernrohr die dortigen Fischerboote erkennen. Es schien überhaupt alles stark vergrössert zu sein und

[1]) RADICKE, Handbuch der Optik, Bd. II.

[2]) LATHAM, Philos. Trans. 1798.

dicht vor den Augen zu liegen. Ein weiteres interessantes Phänomen ist von M. VINCE[1]) beobachtet und nebst einer grossen Reihe anderer höchst merkwürdiger Fälle beschrieben worden. Derselbe sah am Abend eines heissen Sommertages von den vorüberfahrenden Schiffen zwei, ja auch drei Bilder, unter denen jedesmal ein umgekehrtes war. Dasselbe lag, als drei Bilder vorhanden waren, in der Mitte und bei Anwesenheit von zweien bald ober-, bald unterhalb des aufrechten. Dabei veränderten sich alle Umstände mit dem Orte des gesehenen Schiffes. Eine weitere gut, weil von vielen Zeugen constatirte Luftspiegelung schildert MONGE[2]). Dieselbe überraschte die französische Armee, bei der sich MONGE befand, beim Eintritt in die ägyptische Wüste. Das flache Land vor den Blicken des Heeres schien mit Wasser bedeckt zu sein und bot ganz deutlich den Anblick einer Ueberschwemmung. Im Wasserspiegel selbst erblickte man ein zweites umgekehrtes Bild der Gegend. Bei Annäherung wich der Wasserspiegel immer mehr und mehr zurück, wurde dabei kleiner und verschwand schliesslich mit der ganzen Erscheinung.

VINCE wie MONGE haben auch versucht das Gesehene zu erklären, aber ihre Erklärungen tragen mehr einen geometrischen als physikalischen Charakter, insofern als sie die Möglichkeit solcher Bilder bei gewissen Gestaltungen der Indicialflächen nachwiesen, dabei aber nicht so sehr die Wahrscheinlichkeit der hierzu nöthigen physikalischen Bedingungen untersuchten. Durch Beobachtung und Experiment hat WOLLASTON[3]) im Jahre 1800 wichtige Beiträge für die Theorie der fraglichen Erscheinung geliefert. Er erklärte wie schon MONGE die beobachteten Thatsachen durch anomale Dichtigkeitsverhältnisse der Luft in der Nähe des Bodens, die ihrerseits durch die Sonnenwärme hervorgebracht würden, und wies durch Thermometerbeobachtungen die Richtigkeit dieser Ansicht an wirklichen Fällen nach. Vor allem aber unterwarf er die Erscheinung dem Experiment, indem er theils mit sorgfältig über einander geschichteten Flüssigkeiten von verschiedenem Brechungsindex operirte und den Durchgang des Lichtes durch die durch Diffusion entstehende Uebergangsschicht verfolgte, theils aber in noch grösserer Nachahmung der natürlichen Verhältnisse mehr oder weniger hochtemperirte Platten benutzte. Auch begnügte er sich nicht mit qualitativen Ergebnissen, sondern nahm direkte Messungen vor.

Wenn WOLLASTON vom Standpunkt des experimentellen Physikers aus eine ausgezeichnete Bearbeitung des Gegenstandes geliefert hatte, so that dies BIOT[4]) in einem grossen Memoire nach der mathematischen Seite hin und zwar sofort in einer so gründlichen Weise, dass der grösste Theil seiner Ausführungen auch noch heute Gültigkeit hat. Als Material für seine Rechnungen benutzte er Beobachtungen von WOLLASTON, WOLTMANN[5]), HUMBOLDT und solche, die er selbst in Gemeinschaft mit M. MATHIEU im Jahre 1808 zu Dünkirchen und zusammen mit ARAGO in Spanien gemacht hatte. Die Dünkirchener Beobachtungen sind desshalb so interessant, weil sie zeigen, dass Luftspiegelungen an einzelnen Orten äusserst häufig vorkommen. Es war nämlich an einer bestimmten Stelle alle Tage möglich, diese Anomalien zu beobachten. Das Hauptergebniss der in Spanien gemachten Beobachtungen war, dass auch mehr als dreifache Bilder

---

[1]) M. VINCE, Philos. Trans. 1799.

[2]) MONGE, Mémoires de l'Institut du Caire.

[3]) WOLLASTON, Philos. Trans. 1800.

[4]) M. BIOT, Recherches sur les Réfractions extraordinaires, qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810.

[5]) WOLTMANN, GILBERT's Annalen.

vorkommen. Beim Anvisiren eines Leuchtthurms zum Zwecke geodätischer Messungen bemerkte nämlich BIOT, dass neben und zwar über dem ersten Bilde plötzlich ein zweites auftauchte, das einen Abstand von ungefähr drei Minuten hatte, und höher sowie verbreitert und gefärbt war. Diesem folgten bald ein drittes, viertes und weitere Bilder, die ohne Regelmässigkeit verschwanden und wieder erschienen.

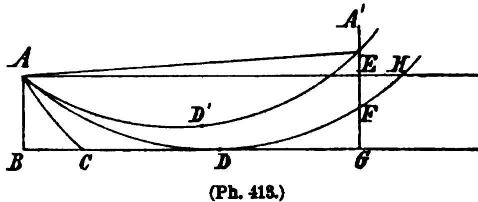
Die Hauptsache, die BIOT den Beobachtungen von WOLLASTON und WOLTMANN entnahm, war, dass in allen Fällen, wo Luftspiegelung beobachtet wurde, die Temperatur des Bodens höher als die der Luft war. Es scheint demnach ein Zustand von nach unten rasch abnehmender Dichte für die Erscheinung wesentlich zu sein. Wie wollen desshalb zunächst einmal die Consequenzen eines solchen Zustandes flüchtig skizziren. Zu diesem Zwecke wollen wir die Flächen gleicher Dichte als dem Erdboden parallel voraussetzen und die Dichte vom Erdboden aus nach irgend einem Gesetze zunehmen lassen. Die Voraussetzung paralleler Indicialflächen hat sofort zur Folge, dass jede Trajektorie gegen eine senkrecht zu jenen Flächen stehende Linie symmetrisch ist und demnach einen Scheitelpunkt besitzt, der in unserem Falle ein Minimum der Erhebung des Lichtstrahles repräsentirt. Denken wir uns jetzt das Auge als Ausgangspunkt einer Schaar von Trajektorien, so können offenbar zwei Fälle eintreten; entweder nämlich schneiden sich einige derselben oder nicht. Im ersten Falle wird das am Durchschnittspunkt befindliche Objekt doppelt oder dreifach u. s. w. gesehen, je nachdem der Durchschnittspunkt ein doppelter, dreifacher oder sonst mehrfacher ist; im zweiten Falle findet eine einfache Abbildung statt, die nur noch in Bezug auf die Lage, Form, Grösse und den Ort der Bilder Anomalien zeigen kann. Dabei ist nun eines zunächst klar, dass nämlich im Falle sich nicht schneidender benachbarter Trajektorien die Bilder aufrecht sein müssen und dass weiter dies ebenfalls stattfindet, wenn zwischen Objekt und Auge eine gerade Anzahl von Schnittpunkten zweier benachbarter Trajektorien liegt, dass dagegen für jede ungerade Anzahl dieser Schnittpunkte die Bilder umgekehrt sein werden. Auf diese Weise ist es also graphisch möglich, über die bei einer beliebigen Dichtigkeitsvertheilung vorkommenden Bilder Aufschluss zu erhalten; indess ist das Verfahren doch etwas beschwerlich und wir werden es deshalb später durch ein geeigneteres ersetzen, das von TAIT herrührt. Allerdings sind auch bereits von BIOT[1]) und GERGONNE[2]) Methoden angegeben worden, welche die Art und Anzahl der von einem Objekt entstehenden Bilder zu bestimmen gestatten. Dieselben grenzten das von einem Objektpunkte ausgehende Trajektoriensystem durch einhüllende Kurven so ab, dass in je zwei benachbarten durch diese Kurven begrenzten Gebieten die Anzahl der in einem Punkte sich schneidenden Trajektorien immer um eins differirte. Diese Kurven wurden von BIOT Brennlinien *(caustiques)* von GERGONNE Bestimmungscurven der Bilderzahl *(determinatrices)* genannt. Wenn wir hier nicht dieses Verfahren, sondern das von TAIT reproduciren, so geschieht dies, weil das letztere erheblich einfacher ist. Bevor wir dies indessen thun, wollen wir unser obiges Beispiel wieder aufnehmen und, um das Entstehen von Doppelbildern möglichst einfach zu exemplificiren, noch eine weitere Specialisirung eintreten lassen, die darin besteht, dass von der Augenhöhe aus nach oben die Dichtigkeit des Mediums constant bleiben soll. Wir nehmen jetzt eine Trennung der Aufgabe vor und

---

1) BIOT, l. c.

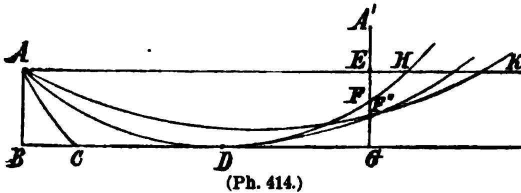
2) GERGONNE, Annales de mathematiques t. IV.

zwar je nachdem sich in dem unter Augenhöhe gelegenem Gebiete zwei Trajektorien schneiden oder nicht. Im letzteren Falle (Fig. 413) sehen wir, dass, wenn *ADF* die den Boden berührende Trajektorie ist und *AE* die durch das Auge gezogene Horizontale, von einem Objekt, welches wie *A'G* gelegen ist, der Theil *FG* gar nicht, *FE* einfach, gesenkt und aufrecht und *A'E* doppelt gesehen wird. Beide Bilder von *A'E* sind aufrecht; das untere ist gesenkt, das obere an seinem natürlichen Platze. Man sieht hier ohne weiteres, dass bei einer Annäherung des Objektes an *D* der nicht und der doppelt gesehene Theil mehr und mehr abnehmen und zuletzt verschwinden, dass dieselben dagegen bei einer Annäherung des Objektes an *H* mehr und mehr auf Kosten des einfachen Bildes zunehmen. Bei *H* ist dieses vollständig verschwunden.



(Ph. 413.)

Gehen wir dann noch weiter, so wächst wiederum der unsichtbare Theil auf Kosten des doppelt gesehenen, bis von einer gewissen Stelle an alles verschwunden ist. Betrachten wir jetzt einen der Fälle, wo die Trajektorien sich schneiden, wie derselbe z. B. auf Fig. 414 dargestellt ist. Es ist hier angenommen, dass die Scheitel der Trajektorien, welche unter geringerem Neigungswinkel als die den Boden berührende abgehen, sich vom Auge entfernen. *DF''K* sei die Verbindungslinie der Schnittpunkte je zweier benachbarten Strahlen und also *ADF''* so gewählt, dass der auf ihm liegende Schnittpunkt gerade im Objekte liegt. Dann ergiebt sich wiederum aus dem Anblick der Figur, dass *GF''* gar nicht, *F''F* doppelt, nämlich sowohl umgekehrt wie aufrecht und *FA'* einfach und zwar aufrecht abgebildet ist. Bei einer Annäherung des Objektes an *D* findet ein successives Abnehmen des nicht und des doppelt gesehenen Theiles statt, bei einer Annäherung an *H* ein Wachsen, bei einer Bewegung darüber hinaus ein Wachsen des unsichtbaren Theiles auf Kosten des doppelt sichtbaren, bis zuletzt alles verschwunden ist. Bei Bewegung des Objekts resp. des Beobachters treten also in beiden Fällen genau dieselben Erscheinungen auf. Die hier vorliegenden Verhältnisse würden also das Entstehen von Doppelbildern und zwar sowohl den Fall, wo beide aufrecht sind, als auch den, wo das eine aufrecht und das andere, nämlich das tiefer liegende, umgekehrt ist, zur Folge haben, sie würden aber nicht ausreichen, um z. B. die Beobachtungen von Vince zu erklären. Hierzu ist eine complicirtere Dichtigkeitsabstufung als die vorliegenden nöthig; wir wollen indessen dieselbe zunächst nicht untersuchen, sondern uns vielmehr zu der von Tait[1]) gegebenen Bestimmungsweise der Zahl und Art der Bilder für ein aus parallelen Ebenen bestehendes Indicialflächensystem wenden.

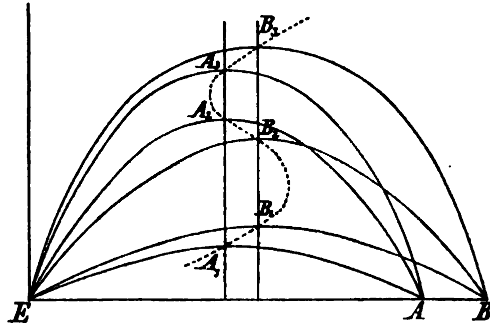


(Ph. 414.)

Tait geht von der Erwägung aus, dass wegen der Symmetrieeigenschaft der Trajektorien zwei benachbarte sich nur dann zum zweiten Male schneiden können, bevor die im ersten Schnittpunkte stärker geneigte Trajektorie die Horizontalebene erreicht hat, falls die Horizontalentfernung des Scheitels dieser vom ersten

1) Tait, On Mirage. Transactions of the Royal society of Edinburgh, Vol. XXX. 1883.

Schnittpunkte geringer ist als die der anderen. Denken wir uns nun als gemeinsamen ersten Schnittpunkt das Auge und betrachten wir vorläufig nur solche Objektpunkte, welche sich mit dem Auge in gleicher Höhe befinden, so ist klar, dass die Verbindungslinie der Scheitel sämmtlicher vom Auge ausgehender Trajektorien ohne weiteres die Zahl und Natur der Bilder erkennen lässt. Denn erstens wird das Objekt nur durch soviel Trajektorien gesehen, als ihre Scheitel in einer zwischen Objekt und Auge errichteten Vertikalen haben. Die Anzahl der Schnittpunkte dieser Linie mit dem geometrischen Ort für die Scheitelpunkte giebt demnach ohne weiteres die Anzahl der Bilder. Aber auch die Natur dieser Bilder lässt sich durch die Scheitelcurve erkennen. Wie der Anblick der Fig. 415 lehrt, bedeutet nämlich eine Annäherung der Kurve in horizontaler Richtung an das Auge mit wachsender Höhe ein Schneiden zweier benachbarter Strahlen und demnach ein umgekehrtes, eine Entfernung dagegen ein aufrechtes Bild, oder mit anderen Worten: Neigt sich die Kurve beim Schnitt mit der Vertikallinie nach dem Auge zu, so haben wir es mit einem umgekehrten, neigt sie sich weg, mit einem aufrechten Bilde zu thun. Bei der vorausgesetzten Anordnung gleicher Höhe von Auge und Objekt erhellt aus der Thatsache, dass die Kurve der Scheitel zwischen den beiden äussersten Schnittpunkten mit der Vertikallinie natürlich nur schlängelnd verlaufen kann, sofort der Satz, dass unter diesen Umständen aufrechte und umgekehrte Bilder abwechselnd auf einander folgen müssen. Sind Auge und Objekt in ungleicher Höhe, so können wir über die Aufeinanderfolge der beiden Bildarten nichts mehr aussagen, wohl aber können wir die obige Construction für diesen Fall erweitern. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur noch die Scheitelcurve für die durch das Objekt gehende Trajektorienschaar zu ziehen und die Schnittpunkte dieser beiden Scheitelcurven aufzusuchen. Dieselben werden, wie ersichtlich, die Scheitelpunkte der Lichtstrahlen liefern, durch welche das Objekt gesehen wird. Von dem hier gewonnenen Standpunkte aus würde jetzt die Entscheidung der Frage, ob von einem Objekte, das wir wiederum in gleicher Höhe mit dem Auge annehmen, drei oder eine beliebige andere Zahl von Bildern möglich ist, darauf reducirt sein, ob zu einer Scheitelabscisse drei oder mehr Ordinaten möglich sind. Wir müssten demnach zunächst die Scheitelcurve analytisch festlegen und sie nach dieser Richtung hin untersuchen. Der Punkt, an dem sich das Auge befindet, erhalte zu diesem Zwecke die Coordinaten o und b, ein beliebiger Punkt der Kurve x und y und der Scheitel derselben ξ und η. Rechnen wir weiter die y vom Boden aus und drücken die Relation zwischen Brechungsexponenten und der Höhe durch $n^2 = f(y)$ aus, so erhalten wir[1]) aus der Anwendung des Brechungsgesetzes:



(Ph. 415.)

$$x = \sqrt{f(\eta)} \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{f(y) - f(\eta)}},$$

und also als Scheitelcurve

[1]) Vergl. das Cap. Dioptrik in Medien mit . . .

$$\xi = \sqrt{f(\eta)} \int_b^\eta \frac{dy}{\sqrt{f(y) - f(\eta)}} .$$

Wir wollen nun zunächst einmal $f(y) = n_0^2 + \alpha^2 y^2$ setzen, wobei also der Brechungsexponent am Boden n_0 ist und von da continuirlich bis über alle Grenzen wächst. Dass eine solche Annahme, wie die letztere, natürlich unstatthaft ist, kommt für uns nicht in Betracht, da wir die Brechungsverhältnisse der Luft nur in niedrigen Höhen beanspruchen werden. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir, wenn wir noch das Zeichen der rechten Seite verändern, also von (im Sinne der Lichtbewegung) nach dem Boden zu sich neigenden Trajektorien ausgehen:

$$\xi = \sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2} + \eta^2} \int_\eta^b \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \eta^2}}$$

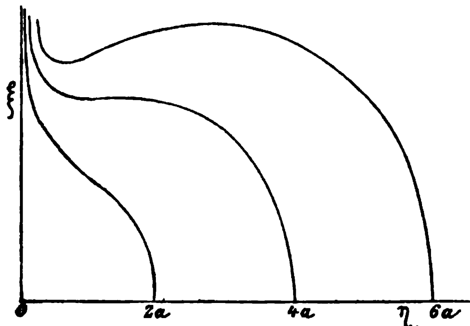
oder

$$\xi = \sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2} + \eta^2} \cdot ln \frac{b + \sqrt{b^2 - \eta^2}}{\eta} .$$

Setzen wir weiter der Abkürzung halber $\frac{n_0}{\alpha} = a$, so wäre also die durch

$$\xi = \sqrt{a^2 + \eta^2}\, ln \frac{b + \sqrt{b^2 - \eta^2}}{\eta}$$

dargestellte Kurve in der Richtung hin zu diskutiren, ob dieselbe für ein bestimmtes ξ mehrere Werthe von η hat. Natürlich wird dies von vornherein von dem Verhältniss der Werthe von a und b abhängen und wir werden demnach eine ganze Schaar von Kurven zu diskutiren haben. TAIT[1]) hat dies für die Verhältnisse $\frac{a}{b} = 2, 4$ und 6 gethan und geben wir nach ihm in Fig. 416 die entsprechenden Kurven.

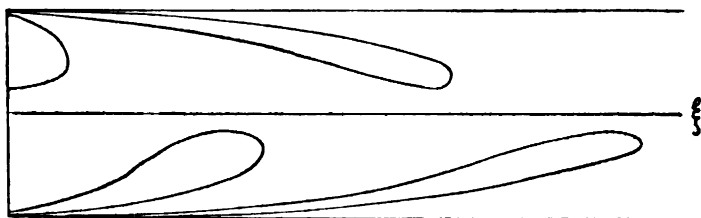


(Fig. 416.)

Man ersieht sofort aus denselben, dass die angenommene Beziehung zwischen Brechungsexponenten und Höhe in der That unter gewissen Umständen drei Bilder liefern kann. Hierzu ist nämlich erstens eine passende Entfernung des Auges vom Objekte nöthig, die übrigens, wie aus der Figur ersichtlich ist, um so mehr variiren kann, je grösser das Verhältniss von b zu a ist. Zweitens aber ist ein Minimalwerth dieses Verhältnisses, den man graphisch oder durch Rechnung zu 3·68 findet, vorhanden, unter dem nur ein Bild entstehen kann. Dieser Minimalwerth aber zeigt sofort, dass trotz der rein theoretischen Möglichkeit dieser Bilder bei den Verhältnissen unserer Atmosphäre die gegebene Erklärung hinfällig ist. Da nämlich der Brechungsexponent in der Höhe des Auges gleich $\sqrt{n_0^2 + \alpha^2 b^2}$ ist, so würde derselbe 3·8 mal grösser sein müssen, als am Boden, was also selbst dann unmöglich sein würde, wenn wir am Boden eine Luftdichte gleich Null und in Augenhöhe den Brechungsexponenten des Diamanten hätten. In derselben Weise, wie wir soeben am Boden ein Minimum

[1]) TAIT, l. c.

der Brechungsexponenten angenommen haben, wollen wir jetzt ein Maximum voraussetzen, also den Fall $f(y) = n_0^2 - \alpha^2 y^2$ behandeln. Wir erhalten dann mit der gleichen Abkürzung $\frac{n_0^2}{\alpha^2} = a^2$ wie oben, für die Scheitelkurve: $\xi = \sqrt{a^2 - \eta^2}\left(arc\,sin\,1 - arc\,sin\,\frac{b}{\eta}\right)$. Wie man aus derselben sieht, kann η nur Werthe zwischen b und a annehmen. Weiter ergiebt die Vieldeutigkeit vom *arc sin* eine Vielheit von Zweigen, so dass also die Curve einen ziemlich complicirten Charakter besitzt. Dieselbe ist für den Fall $a = 5b$ in Fig. 417 nach TAIT dargestellt. Nehmen wir wiederum der Einfachheit



(Ph. 417.)

halber Auge und Objekt in gleicher Höhe an, so sehen wir unmittelbar, dass für jede Distanz des Objektes eine unendliche Anzahl von Bildern existirt. Nähert sich das Objekt dem Beobachter, so tauchen immer wieder neue auf, entfernt es sich, so verschwinden entsprechend davon. Dieser »periodische Wechsel« aber ist nach TAIT gerade der entscheidende Grund gegen die Möglichkeit, die Luftspiegelungen mit der obigen Relation zwischen Brechungsindex und Höhe zu erklären. Denn niemals scheint etwas ähnliches beobachtet worden zu sein; es blieben vielmehr die Bilder selbst bei relativ grossen Distanzveränderungen ziemlich gleich und schrumpften dann bis zum Verschwinden zusammen. Die bis jetzt gemachten Annahmen über die Lichtbrechungsverhältnisse der Atmosphäre versagen also für die Erklärung der beobachteten Erscheinungen. Es würde nun zwar keineswegs schwer halten, für jede einzelne Beobachtung einen entsprechenden Zustand der Atmosphäre zu finden, aber man muss andererseits doch auch an eine Erklärung ausser der physikalischen Zulässigkeit noch die Forderung stellen, für möglichst viele Erscheinungen zu passen. Nun war beobachtet ein direktes aufrechtes Bild mit einem darüber befindlichen umgekehrten, ferner und zwar besonders häufig ein umgekehrtes Bild mit einem darüber befindlichen aufrechten weiter drei Bilder, von denen das mittelste umgekehrt war, schliesslich auch einzelne abnormale und zwar sowohl aufrechte wie umgekehrte Bilder. Die hierfür nöthige Erklärung fand TAIT, indem er zunächst die Gestalt der Scheitelcurve anticipirte und dann zu dieser das Medium suchte, in der folgenden Constitution einer atmosphärischen Schicht. In der Nähe des Bodens sei die Dichtigkeit der Luft entweder constant oder die Verminderung nach oben wenigstens unbedeutend, darüber liege dann eine Schicht, in der der Brechungsindex bis zu einem Minimum oder einem streng resp. praktisch genügenden stationären Zustand abfalle. Die erste Bedingung genügt dann für das Entstehen des oberen aufrechten, die zweite für das umgekehrte Bild, falls man den Beobachter in der unteren nahe constanten Schicht voraussetzt. Um die Constitution eines solchen Mediums mit genügender Genauigkeit analytisch einfach auszudrücken, wählt TAIT die Function $f(y) = n^2 = a^2 + e^2 \cos\frac{\pi y}{b}$. Dieselbe ergiebt nämlich sowohl am Boden, d. h. für Werthe von y in der Nähe von Null, wie für $y = b$ und Umgebung fast stationäre Zustände und erfüllt zu gleicher Zeit auch noch die Be-

dingung in der Mitte, nämlich für $y = \frac{b}{2}$, rasch abzufallen. Mit diesem Gesetze erhält man für die Scheitelcurve die Gleichung

$$e\xi = \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}} \int_b^\eta \frac{dy}{\sqrt{\cos\frac{\pi y}{b} - \cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

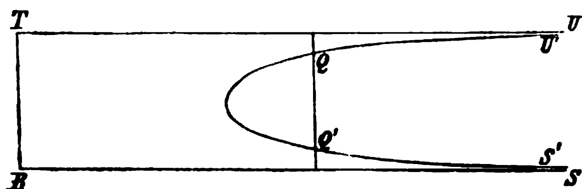
oder, wenn das Auge am Boden sich befinden soll, mit Einführung des vollständigen elliptischen Integrales 1. Gattung $F_1(k)$

$$e\xi = \frac{\sqrt{2}\cdot b}{\pi} \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}\, F_1(k), \quad \text{wo} \quad k = \sin\frac{\pi\eta}{2b}$$

gesetzt ist. Ebenso erhält man für die Gleichung einer Trajektorie, wenn man sich wiederum für das unvollständige elliptische Integral erster Gattung der Abkürzung $F_1(k, \varphi)$ bedient,

$$ex = \frac{\sqrt{2}\cdot b}{\pi} \sqrt{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}\, F_1(k_1 \varphi).$$

Wir können hier aus Mangel an Raum nicht *in extenso* darlegen, dass die hierdurch dargestellten Trajektorien wirklich der Forderung genügen, drei Bilder der bezeichneten Art zu liefern und ebenso wenig ist es uns möglich, die für eine bessere Darstellung der Beobachtungen nöthigen Correctionsglieder zu würdigen; wir wollen uns deshalb, indem wir noch die für den obigen Fall bestehende Scheitelcurve nach TAIT[1]) in Fig. 418 wiedergeben, etwas den physikalischen Bedingungen der bei Luftspiegelungen vorkommenden atmosphärischen Zustände zuwenden. In der genannten Fig. 418 bedeutet O den Ort des Auges, $RSUT$ die vorausgesetzte atmosphärische Schicht und $U'QQ'S'$ nebst RS die hier in zwei Zweige zerfallene Scheitelkurve. —



(Ph. 418.)

Wir wollen jetzt im Anschluss an TAIT einmal kurz erörtern, welche Werthe durch die Beobachtung für e gefordert werden und wie dieselben mit der Stabilitätsbedingung für die Atmosphäre verträglich sind. Nehmen wir zu diesem Zweck die Trajektorie des Lichtstrahls in der Gestalt der Differentialgleichung, so ist die Neigungstangente gegen die Axe an einer beliebigen Stelle

$$\frac{dy}{dx} = e \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi y}{b} - \cos\frac{\pi\eta}{b}}{a^2 + e^2 \cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

also am Auge, was wir in $x = 0$, $y = 0$ vorausgesetzt hatten

$$= \frac{e\sqrt{2}\cdot \sin\frac{\pi\eta}{2b}}{\sqrt{a^2 + e^2\cos\frac{\pi\eta}{b}}},$$

oder mit genügender Näherung

$$e\sqrt{2}\cdot \sin\frac{\pi\eta}{2b}\,.$$

[1]) Vergl. TAIT, l. c.

Nach Beobachtungen von SCORESBY war aber eine Maximalhöhe der Bilder von durchschnittlich 15 Bogenminuten vorhanden und demnach muss e mindestens einen Werth von $250 \frac{1}{\sqrt{2}}$ haben, also $e^2 = 0{\cdot}000008$ sein.

Wir wollen nun weiter untersuchen, welcher Temperaturabfall im Maximum gestattet ist, ohne dass Instabilität in der Luft auftritt. Die Gleichgewichtsbedingung, die hier natürlich auch den Fall labilen Gleichgewichtes mit einschliesst, liefert mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen p, δ, T, g für Druck, Dichtigkeit, absolute Temperatur und Beschleunigung der Schwere die Relation $dp = -dy \cdot g\delta$. Daraus erhalten wir mit Benutzung der Zustandsgleichung $p = R\delta T$

$$R\frac{d(\delta T)}{dy} = -g\delta.$$

Führen wir weiter die bekannte Grösse H durch die Gleichung $p_0 = g_0 \delta_0 H$ ein, wo g_0 den Werth von g am Boden bedeutet, und beachten, dass natürlich auch $p_0 = R\delta_0 T_0$, so können wir mit Vernachlässigung der Veränderlichkeit der Beschleunigung der Schwere

$$\frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT}{dy} = -\frac{1}{H} - \frac{T}{T_0}\frac{1}{\delta} \cdot \frac{d\delta}{dy}$$

setzen. Soll nun Stabilität vorhanden sein, so darf die Dichtigkeit nach oben nicht zunehmen und wir erhalten also als Maximum der Temperaturabnahme pro 100 m nach oben $\frac{dT}{dy} = -\frac{T_0}{H}$, also für $T_0 = 274$ und $H = 8000$, $3{\cdot}425°$ C. Diese Temperaturabnahme muss also in den von uns vorausgesetzten oberen und unteren Theilen der Schicht herrschen. Wir wollen nun weiter dazu übergehen, unter Voraussetzung einer bestimmten Dicke der Schicht die Temperaturverhältnisse in der Mitte zu untersuchen. Der Brechungsindex der Luft (n) ist, wenn derselbe für die Dichte δ_0 den Betrag $1{\cdot}000294$ hat, gleich $1 + 0{\cdot}000294 \frac{\delta}{\delta_0}$, woraus mit genügender Annäherung

$$n\frac{dn}{dy} = 0{\cdot}000294 \frac{1}{\delta_0} \cdot \frac{d\delta}{dy}$$

folgt. Nehmen wir nun eine Dicke von 50 Metern, so haben wir die Beziehung

$$n^2 = a^2 + e^2 \cos\frac{\pi y}{50},$$

also

$$n\frac{dn}{dy} = -e^2 \frac{\pi}{100} \sin\frac{\pi y}{50}$$

und andererseits

$$\frac{1}{\delta_0}\frac{d\delta}{dy} = -\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{T_0} \cdot \frac{dT}{dy}\right).$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{e^2\pi}{160} \sin\frac{\pi y}{50} = 0{\cdot}000294 \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{T_0}\frac{dT}{dy}\right)$$

oder

$$\frac{dT}{dy} = T_0 \left(\frac{e^2\pi}{100} \sin\frac{\pi y}{50} \frac{1}{0{\cdot}000294} - \frac{1}{H}\right).$$

Wie man sieht, liegt die grösste Temperaturveränderung bei $y = 25$, also in halber Höhe der Schicht, beträgt mit dem oben angenommenen Werthe von e $0{\cdot}20°$ pro Meter und ist ein Temperaturanstieg. Das gleiche Zeichen hat die genannte Temperaturdifferenz für die ganze Schicht. Die Temperatur hat also

beim Durchwandern der Schicht folgenden Gang. Zunächst findet ein Temperaturabfall statt, dieser wird allmählich geringer, wird zu Null, um dann in einen beschleunigten Anstieg umzuschlagen, der ebenso rasch wieder geringer, darauf zu Null wird und wieder einem Temperaturabfall Platz macht. Der obige Werth von 0·2° C. pro Meter Aufstieg ist für grössere Höhen zwar bedeutend, doch ist derselbe in der That von GLAISHER in einer Höhe von beinahe 6000 Meter einmal beobachtet worden. Wollen wir mit diesem etwas starken Anstieg nicht erklären, so müssen wir durch eine Veränderung der Constitution des Mediums physikalisch zulässigere Werthe für die Temperaturverhältnisse zu erlangen suchen. So wäre es in unserem Falle vielleicht möglich, den Temperaturanstieg in der Mitte der Schicht auf eine grössere Strecke zu vertheilen, ohne doch die Existenz des betreffenden Bildes zu gefährden. Es sind indess so viele Umstände noch nicht berücksichtigt worden, dass Verbesserungen unbedeutender Art noch nicht angebracht sind. In erster Linie hätte man nämlich einmal die Beobachtungen mit Rücksicht auf die Entfernungen der Objekte vom Beobachter zu diskutiren, da dies eine scharfe Diagnose für die Art der Entstehung von Bildern bietet, ferner wären zu beachten die Grössenverhältnisse und ein keineswegs zu verachtender Faktor, nämlich der Einfluss der Erdkrümmung. Freilich scheint zu einer erfolgreichen Verarbeitung noch nicht Material genug vorzuliegen, oder wenn auch das, so doch ein Material, das bei dem häufigen Mangel wichtiger Daten der Verarbeitung grosse Schwierigkeiten bieten würde.

Literaturübersicht über die wichtigsten Erscheinungen im Gebiete der normalen und anormalen Strahlenbrechung.

CASSINI, Des réfractions astronomiques, Mém. de l'Acad. des sc. 1714.

SIMPSON, Deter-mination of the astr. refractions. London 1743.

BOUGUER, Observations sur les réfractions astronomiques. Mém. de l'Acad. des. sc. 1739.

BOUGUER, Second mémoire sur les réfractions astronomiques. Mém. de l'Acad. 1749.

TOBIAS MAYER, de refractionibus objectorum terrestrium. Göttingen 1751.

LAMBERT, Bahn des Lichts durch die Luft und verschiedene Mittel 1772.

LAGRANGE, Sur les réfractions astr. Mém. de Berlin 1772.

EULER, De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphaere. Mém. de Berlin 1754.

HUDDART, Observations on horizontal refractions. Phil. Trans. 1797.

ORIANI, de refractionibus astr. 1788.

LATHAM, On a singular instance of atmospherical refraction Phil. Trans. 1798.

BRADLEY, Astronomical observations made at the Roy. Observatory at Greenwich from 1750 to 1762. Oxford 1798. Vol. I.

KRAMP, Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strassburg 1799.

KLÜGEL, Ueber die atmosphärische Strahlenbrechung. Berl. Jahrbuch 1804.

MONGE, Sur le phénomène d'optique connu sous le nom de mirage. Description de l'Egypte I. 1799.

VINCE, Observations on an unusual horizontal refraction of the air, Phil. Trans. 1799.

W. H. WOLLASTON, On double images caused by atmospherical refraction. Phil. Trans. 1800.

GRUBER, Theorie der mit Spiegelung verbundenen Senkung und Hebung der Objekte am Horizont. GILB. Ann. III. 1800.

WOLLASTON, Observations on the quantity of horizontal refraction etc. Phil. Trans. 1803.

BRANDES, Beobachtungen über die Strahlenbrechung. GILB. Ann. 17, 18, 20.

LAPLACE, Réfractions astronomiques, Mécanique céleste t. 4. 1805.

YOUNG, Remarks on looming or horizontal refraction, NICHOLSON's Journ. 6. 1807.

HUMBOLDT, Essai sur les réfractions astr. dans la zone torride, Journal de Phys. 66, GILB. Ann. 31. 1808 u. 1809.

BIOT, Sur les réfractions extraordinaires qui s'observent près de l'horizon. Paris 1810. Mémoires de l'Inst. 10.

Maskelyne, Observations on atmospherical refraction. Phil. Trans. 1810.

Vince, On a very remarkable effect of refraction. Trans. of the roy. Soc. of Edinb. 6, 1812.

Bessel, Schreiben an Bode über Refractionstafeln. Bode's astr. Jahrb. 1816.

Jurine, Note sur un phéonomène de mirage latéral. Journal de Physique 10. 1820.

Scoresby, Description of some remarkable atmospheric reflections and refractions. Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 9.

Ivory, On calculating astronomical refraction Phil. Magaz. 59. 1822; 63. 1824; 65. 1825; 68. 1826.

Bessel, Fundamenta Astronomiae. Plana Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des refractions astronomiques. Mem. di Torino 27. 1823.

Ivory, On the astr. ref. Phil. Trans. 1823.

Bessel, Königsberger Beob. Bd. 7 u. 8.

Bessel, Ueber Refraction Astr. Nachr. 2.

Bessel, Tabelau Regiomontanae.

Young, A finite and exact expression for the refraction of an atmosphere nearly ressembling that of the earth. Phil. Trans. 1824.

Bessel, Ueber die atmosphärische Strahlenbrechung. Bode, Astr. Jahrb. 1826.

Gauss, Refractionsbestimmungen von der hannoverschen Gradmessung. Berliner astr. Jahrb. 1826.

Schmidt, Lehrbuch der phys. Geographie. Göttingen 1829.

Scoresby, Description of some remarkable effects of inequal refraction Trans of the Roy. Soc. of Edinb. 11. 1831.

Schmidt, Theorie der astr. Strahlenbrechung. Göttingen 1828.

Biot, Mémoire sur les réfractions astronomiques. Compt. rend. 3. 1836.

Svanberg, Disquisitiones anal. in theoriam ref. astr. Nov. acta reg. soc. scient. Upsaliae 1827. 1839.

Barfuss, Beiträge zur Theorie astr. Strahlenbrechung. Astr. Nachr. 15. 1837.

Bessel, Gradmessung in Ostpreussen 1838.

Biot, Sur la vraie constitution physique de l'atmosphère terrestr. Compt. rend. 6. 1838.

Fuss, Ueber eine Gleichung Biot's für die Refractionsdifferenz bei gegenseitigen Zenithdistanzbeobachtungen. Bull. scient. de l'Academic de St. Petersbourg 4. 1838.

Ivory, On the theory of astronomical refractions. Phil. Trans. 1838. 1839.

Biot, Sur la mesure théorique et expérimentale de la refraction astr. Compt. rend. 7. 1838.

Ritter, Récherches analytiques sur le problème des réfractions astr. Compt. rend. 8, 1839.

Fuss, Note sur les causes et l'effet de l'inégale réfraction. Bulletin scient. de l'Acad. de St. Petersbourg 5. 1839.

Biot, Sur les réfractions astronomiques. Additions à la Connaissance des temps pour 1839.

Lubbock, On astronomical refractions. London 1840.

Bessel, Mémoires sur la réfraction astronomique. Compt. rend. 15. 1842.

Biot, Sur les réfractions astronomiques. Compt. rend. 39. 1854; 40. 1855.

Lubbock, On the theory of astr. refractions. Mem. of Ast. Soc. tome 24. 1855.

Plana, Mémoire sur la connexion entre la hauteur de l'atmosphère et la loi de décroissement de sa température. Mem. di Torino 15. 1855.

Heegmann, Théorie de la réfraction astr. Paris 1856.

Lindhagen, Om terrestra Refractions-theorie. Stockholm 1856.

Kummer, Ueber atmosphärische Strahlenbrechung, Monatsber. der kgl. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1860. Annales de chimie et de physique 61. 1860.

Babinet, Note sur la réfraction terrestre. Compt. rend. 53. 1861.

Babinet, Note sur la réfraction astron. Compt. rend. 53. 1861.

Baeyer, Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Mém. de l'acad. imp. des sciences de St. Petersb. 7. série, tome 3. 1860. Astr. Nachr. Bd. 41.

Bruhns, Die astr. Strahlenbrechung. Leipzig 1861.

Bauernfeind, die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung

über die physikalische Constitution der Atmosphäre. Astr. Nachr. 1478—1480, 1864, 1587 bis 1590, 1866.

GYLDEN, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die astronomische Strahlenbrechung in derselben. Mémoires de l'acad. imp. des sciences de St. Petersbourg, 7. série, tome 10. 1866.

BAUERNFEIND, Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. Kgl. Bayer. Akad. der Wiss. II. Kl., Bd. 13. 1880; Bd. 15. 1880.

JORDAN, Ein Beitrag zur Theorie der terr. Refraction. Astr. Nachr. 2095. 1876; Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 2.

HARTL, Ueber den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung und den meteorologischen Elementen. Med. Zeitschr. Bd. 16. 1881.

HARTL, Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung. Mittheilungen des k. k. militär-geogr. Institutes, Bd. 3. 1883.

HARTL, Ueber mittlere Refractionscoëfficienten. Mitth. des k. k. mil.-geogr. Inst. Bd. 4. 1884.

HELMERT, die math. und. phys. Theorien der höheren Geodäsie, Bd. 2.

Preussische Landesaufnahme 1870—1875.

HARZER, Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr. 2554—2556.

RADAU, Sur la Theorie des réfractions astronomiques. Bulletin astronomique, Tome 1. 1884.

TAIT, On mirage, Trans. of the Roy. soc. of Edinb. Vol. 30. 1883.

R. STRAUBEL.

Scintillation.

Blickt man an einem erhitzten Gegenstande vorbei, so zeigen die Umrisse der betrachteten Gegenstände eine zitternde Bewegung. Diese ist eine Folge der Brechungen, welche die Strahlen erfahren, indem sie die durcheinander fliessenden kalten und warmen Luftströmchen durchsetzen. Aehnliches gewahrt man an den Gegenständen, welche sich auf dem Grunde eines klaren, fliessenden Baches befinden; hier finden die Brechungen an der Wasseroberfläche statt.

Es bedarf jedoch zur Hervorbringung dieser Erscheinung einer kräftigen lokalen Wärmequelle nicht, wenn nur die Strahlen eine hinreichend grosse Wegstrecke in der freien Luft zurücklegen. So erscheinen die Conturen entfernter Gebirge durch ein Fernrohr in wellenartiger Bewegung, und ebenso die Ränder der Sonne und des Mondes. Man kann hieraus schliessen, dass jenes Durcheinanderfliessen kalter und warmer Luftströmchen ein habitueller Zustand der Atmosphäre ist.

Die Fixsterne zeigen stets mehr oder weniger die Erscheinung des Funkelns. Höher stehende Sterne zeigen rasche und unregelmässige Variationen der Helligkeit, tiefer stehende überdies ebensolche Variationen der Farbe. So verschieden diese letztere Erscheinung von der früher beschriebenen ist, so beruht sie doch genau auf derselben Ursache; die Verschiedenheit der Wirkung rührt einzig daher, dass man es im ersteren Falle mit ausgedehnten und im letzteren mit punktförmigen Lichtquellen zu thun hat.

Wenn nämlich die von einem Fixsterne kommenden ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen durch die Atmosphäre gehen, erfahren sie daselbst durch unregelmässige Brechungen beständig kleine Verbiegungen; dies anders ausge-

drückt, es erfahren die Strahlen, welche auf den Lichtwellenflächen senkrecht stehen, kleine Ablenkungen. Die Erstreckungen der Verbiegungen der Lichtwellenflächen, längs diesen Flächen selbst gemessen, sind von der Grössenordnung eines Decimeters gefunden worden, so dass im Allgemeinen auf das Objektiv eines grösseren Instrumentes in jedem Momente mehrere concave und convexe Theile einer Lichtwellenfläche fallen. Ebenso sind die Krümmungsradien der convexen und concaven Theile der Lichtwellenflächen der Grössenordnung nach bestimmt worden. Bringt man nämlich vor das Objektiv eines Fernrohrs einen Schirm mit hinreichend kleinem, kreisförmigem Ausschnitte, so dass in jedem Momente im Allgemeinen nur ein convexer oder concaver Theil einer Lichtwellenfläche in das Fernrohr gelangt, so wird in Folge dessen das Bild des Sterns etwas gegen das Objektiv hin oder von diesem weg verschoben. Man kann nun die Amplitude dieser Verschiebungen oder Schwankungen der Bilder längs der Axe des Fernrohrs messen und hieraus die Krümmungen der einfallenden Lichtwellenflächen berechnen. So haben sich maximale Krümmungen zwischen 1817 uud 19380 *m* Radius ergeben. Die Ablenkungen der Strahlen können in jedem Momente innerhalb eines Strahlenbüschels vom Querschnitte der Pupille als nahe identisch angesehen werden, verursachen also für das freie Auge eine Zitterbewegung des Sterns. Die grössten Ablenkungen oder Amplituden der Zitterbewegung können gemessen werden und betragen im Allgemeinen mehrere Secunden. Die Abweichungen der Lichtwellenflächen von der Ebenheit ist äusserst gering: der Pfeil oder die Vertiefung einer Unebenheit, senkrecht zur Lichtwellenfläche gemessen, ist im Allgemeinen mit der Grösse einer Lichtwellenlänge vergleichbar.

Jede stärker als die Umgebung brechende Stelle der Atmosphäre wirkt ähnlich einer schwachen Sammellinse und macht die Strahlen convergent, jede schwächer brechende ähnlich einer Zerstreuungslinse und macht die Strahlen divergent. Hieraus ergeben sich bei den grossen in der Atmosphäre zu durchlaufenden Strecken sehr merkliche gegenseitige Annäherungen, Sammlungen der Strahlen und ebensolche Zerstreuungen. Ist beispielsweise der Krümmungsradius eines Theiles einer Lichwellenfläche gleich +6000 *m* und jener eines unmittelbar benachbarten Theiles gleich —6000 *m*, pflanzt sich die Lichtwellenfläche um 1000 *m* fort und sind J_1, J_2 die Intensitäten jener zwei Theile der Lichtwellenfläche nach der Fortpflanzung, so ergiebt sich, die Krümmungen als sphärisch vorausgesetzt, nahezu $J_1 : J_2 = 2 : 1$. Es werden sich demnach in diesem Falle auf der fortgepflanzten Wellenfläche zwei benachbarte Stellen finden, deren Intensitäten sich wie 2 : 1 verhalten. Betrachten wir also das Licht eines Fixsterns, nachdem es durch die Atmosphäre gegangen ist, so sehen wir: die Lichtwellenflächen weichen kaum merklich von der Gestalt einer Ebene ab, die Strahlen kaum merklich vom Parallelismus, allein die Lichtwellenflächen bestehen aus dicht nebeneinander liegenden helleren und dunkleren Theilen, der Querschnitt eines dicken Strahlenbündels zeigt an manchen Stellen viele, an anderen wenige Strahlendurchschnitte; diese Vertheilung der Intensitäten längs den Wellenflächen und die Verdichtungen und Verdünnungen der Strahlenbündel unterliegen überdies mit dem Zustande der Atmosphäre einem beständigen und unregelmässigen Wechsel.

Diese Schlüsse bestätigt das Experiment in jeder Weise. Schon KEPPLER fand das Licht eines scintillirenden Sterns, welches durch ein Fenster auf eine Wand fiel, stark undulirend. Dieselbe Erscheinung zeigt sich bei totalen Sonnenfinsternissen, während der sichtbare Theil der Sonnenscheibe nahe punktförmig

ist, und heisst alsdann das Phänomen der fliegenden Schatten. Dasselbe Phänomen ist auch wiederholt von DUFOUR bei aufgehender Sonne beobachtet worden, so lange die Sonne nahe punktförmig erschien; hierbei scintillirte der punktförmige Theil der Sonnenscheibe wie ein Stern erster Grösse. Dasselbe Phänomen kann man ferner in jeder heiteren Nacht mittelst eines Fernrohrs an jedem Fixsterne in bester Weise wahrnehmen und studiren.

Richtet man nämlich ein astronomisches Fernrohr nach einem scintillirenden Fixsterne, so sind die einfallenden Strahlen zwar untereinander merklich parallel, doch an verschiedenen Stellen des Querschnittes des einfallenden Strahlenbündels sehr verschieden dicht. Schiebt man das Ocular ein, so dass man eine Ebene zwischen Focus und Objectiv deutlich wahrnimmt, so gewahrt man ein verkleinertes und intensiveres Bild des Querschnittes des einfallenden Strahlenbündels. Das durch Einschieben oder Ausziehen des Oculars zu einer kreisförmigen Scheibe erweiterte Bild des Sterns erscheint nun nicht gleichförmig hell: verschiedene Stellen der Scheibe erscheinen in jedem Momente in unregelmässiger Weise beträchtlich ungleich hell, und die Vertheilung der Helligkeiten wechselt unregelmässig von einem Momente zum nächsten. Es gleicht die Erscheinung dem Lichtspiele der Sonnenstrahlen auf einer Wand, wenn dieselben von einer leicht bewegten Wasserfläche reflektirt worden sind. Diese Erscheinung ist zuerst beobachtet von SIMON UARIUS.

Die Pupille des menschlichen Auges ist so klein, dass das in einem gegebenen Augenblicke durch dieselbe tretende Strahlenbündel als homogen angesehen werden kann: sämmtliche Strahlen des Bündels haben in einem gegebenen Augenblicke genau dieselbe Richtung und die Dichte der Strahlen ist längs des ganzen Querschnittes des Bündels constant. Ebenso im nächsten Augenblicke: doch hat alsdann das Bündel eine etwas andere Richtung und eine von der früheren beträchtlich verschiedene Dichte. Die Winkelamplituden sind nach dem früher gesagten so gering, dass die Zitterbewegung der Fixsterne an die Grenze der Wahrnehmbarkeit gerückt ist. Hingegen bewirken die beträchtlichen Dichtigkeitsveränderungen des durch die Pupille gehenden Strahlenbündels ausserordentlich merkliche Helligkeitsschwankungen des Bildes des Sterns. In diesen Helligkeitsschwankungen besteht bei hochstehenden Sternen die Erscheinung der Scintillation. Die Farbenwechsel, welche bei tiefstehenden Sternen gleichzeitig auftreten, sind eine accessorische Erscheinung und haben ihren Grund in der regelmässigen atmosphärischen Strahlendispersion.

Verfolgt man nämlich das von einem Fixsterne kommende, durch die Pupille des Beobachters tretende weisse Strahlenbündel vom Beobachter aus zurück auf seinem Wege durch die Atmosphäre, so sieht man, dass die verschiedenfarbigen Bündel, aus welchen sich das weisse Bündel zusammensetzt, in Folge ungleich starker atmosphärischer Refraction sich von einander trennen und an verschiedenen Stellen der Grenze der Atmosphäre untereinander parallel austreten, das violette Bündel höher als das rothe. Nach MOSSOTTI beträgt die gegenseitige Entfernung des rothen und des violetten Strahles ausserhalb der Atmosphäre in der Nähe des Horizontes ungefähr 10 Meter, während diese Distanz im Zenith gleich Null wird. Bei niedrigem Stande des Sterns werden demnach die verschiedenartigen Bilder, aus welchen sich das weisse Bild des Sterns zusammensetzt, mehr oder weniger unabhängig von einander scintilliren müssen. Da die Scintillation in einem unregelmässigen Wechsel der Helligkeit des Sterns besteht, und da diese Helligkeitswechsel für die verschiedenen Farben, aus welchen das Licht des Sterns besteht, zeitlich nicht coincidiren, so zeigt der Stern in jedem Momente eine andre Farbe.

Die Farbenwechsel sind nicht mehr merklich, wenn der Stern eine gewisse Höhe erreicht, die verschiedenfarbigen Strahlenbündel gehen dann nicht mehr hinreichend getrennt durch die Atmosphäre, und sie gehen bei einer Höhe gleich 90° genau denselben Weg und werden vollkommen gleichmässig modificirt, d. h. der Stern kann im Zenith beträchtliche Helligkeitsschwankungen zeigen, aber keine Spur von Farbentwicklung.

Hierdurch findet auch die Thatsache ihre Erklärung, dass bei niederem Stande des Sterns das durch Einschieben des Oculars erweiterte Bild des Sterns nicht nur Helligkeits- sondern auch sehr lebhafte Farbenfluctuationen zeigt.

Wenn ausgedehnte Objecte weder Helligkeits- noch Farbenwechsel zeigen, wie die Fixsterne, so rührt dies, wie schon ARAGO erkannt hat, daher, dass die einzelnen, sehr nahe benachbarten Punkte der leuchtenden Fläche, deren Verbindungslinien mit dem Auge in der Luft nicht dieselbe Lage haben, unabhängig von einander ihren Ort, ihre Helligkeit und ihre Farbe variiren, und dass alle diese von einander unabhängigen, raschen und unregelmässigen Veränderungen im Auge, indem sich die Eindrücke vermischen, eine gleichmässige Erhellung hervorbringen. Ueber jeden Zweifel erhoben wird diese Erklärung durch die oben erwähnten Messungsresultate. Beträgt beispielsweise der Durchmesser einer planetarischen Scheibe 40″, und der in der Atmosphäre durchlaufene Weg nur 10 Meilen, so ergiebt sich schon, dass jener Durchmesser mindestens 50 völlig unabhängig von einander scintillirende Theile enthalten wird.

Man kann am Tage und mit künstlichen Lichtquellen alle Erscheinungen der Scintillation der Sterne beobachten, ja besser, als an diesen selbst, da die Lichtquellen intensiver und der Zustand der Atmosphäre günstiger sein können. Als Lichtquelle bei kleinen Distanzen ist das Sonnenbildchen eines Convexspiegels (Gartenkugel) zu verwenden, bei grossen Distanzen das Heliotropenlicht (STEINHEIL'scher Handheliotrop). Dass entfernte terrestrische Lichtpunkte scintilliren, ist zu allen Zeiten beobachtet und bemerkt worden. Um auch die Farbenerscheinungen auf terrestrischem Wege zu erhalten, welche eine Folge der verschiedenen Brechbarkeit verschiedenfarbiger Strahlen in der Atmosphäre sind, indem verschiedenfarbige Strahlenbündel verschiedene Wege zwischen Lichtquelle und Auge in der Atmosphäre beschreiben, muss man die Entfernung zwischen dem als Lichtquelle dienenden Heliotropenspiegel und dem Beobachtungsorte hinreichend gross nehmen. Ein Versuch hat gelehrt, dass die Farbenerscheinungen im Fernrohre bei eingeschobenem Oculare wahrnehmbar wurden, wenn jene Distanz 1¼ geographische Meilen überschritt. Zur Beobachtung kann ein Fernrohr von 9 *cm* Oeffnung dienen. Bei Verkürzung der Distanz konnten Scintillationserscheinungen noch bei 20 Schritt Entfernung bemerkt werden.

Beobachtet man einen scintillirenden Stern durch ein Instrument von grosser Oeffnung, so besteht das einfallende dicke Strahlenbündel aus zahlreichen dünnen Bündeln, welche sich gleichzeitig in sehr verschiedenen Dichtezuständen befinden. Hierdurch geschieht es, dass im Focus eine gleichmässige, mittlere Helligkeit wahrgenommen wird: Bei Beobachtung durch grosse Instrumente zeigen die Sterne keine Helligkeitswechsel. Aus demselben Grunde zeigen sie auch keine Farbenwechsel. Da ferner jene dünnen Bündel unabhängig von einander schwankende Bewegungen ausführen, bewegt sich der Stern scheinbar nach allen Richtungen gleichzeitig, er erscheint vergrössert. Dass die Sterne bei Beobachtung durch grosse Instrumente nicht scintilliren, hingegen vergrössert erscheinen, hat schon NEWTON beobachtet und erklärt. Diese Zerstreuungskreise sind bei grossen Instrumenten ungleich beträchtlicher, als die durch Beugung

entstehenden, und verursachen eine Verundeutlichung der Bilder, so dass die Kenntniss der Scintillationsconstante eines Ortes, d. i. die mittlere Amplitude der Zitterbewegung der Sterne in Bezug auf die Aufstellung grosser Instrumente von Wichtigkeit zu sein scheint.

Um die Scintillation besser als mit freiem Auge zu beobachten oder messend zu verfolgen, kann man dem Beobachtungsfernrohre verschiedene Einrichtungen geben und gelangt so zu Scintilloskopen oder Scintillometern. Schiebt man beispielsweise das Ocular des Fernrohres ein, so dass sich das Bild des Sternes zu einer Kreisfläche erweitert, so gewahrt man in demselben die Helligkeits- und Farbenfluctuationen, welche MARIUS zuerst beobachtet hatte. Dieses Scintilloskop gestattet die Erstreckungen der hellen und dunklen Theile der einfallenden Lichtwellenflächen wahrzunehmen, die Richtung der Bewegung der Maxima und Minima der Helligkeit, wenn eine solche ausgesprochen ist, zu erkennen, und das Vorhandensein der Scintillation an den Helligkeits- und Farbenfluctuationen zu constatiren. Es ist leicht hergestellt, bequem und sehr empfindlich. NICHOLSON versetzte das Fernrohr in zitternde Bewegung, so dass das Bild des Sterns die Gestalt einer Linie annahm. Man sieht so die verschiedenen Farben- und Helligkeitsgrade, welche der Stern in raschem Wechsel annimmt, nebeneinander. Dieses Scintilloskop wurde von MONTIGNY vervollkommnet und bei seinen zahlreichen Messungen benutzt. Arago hat ein drittes Scintillometer erfunden. Verkleinert man die Oeffnung eines Fernrohres, indem man vor dem Objective einen mit einem kreisrunden Loche versehenen Deckel anbringt, so umgiebt sich das Bild des Sterns mit einer räumlichen Beugungsfigur. Ist das Ocular auf den Focus eingestellt, so nimmt man den der Focalebene entsprechenden Querschnitt der Beugungsfigur wahr. Schiebt man das Ocular ein, so gewahrt man immer andere Querschnitte der Beugungsfigur, und das Centrum erscheint hierbei während des Einschiebens abwechselnd hell und dunkel. Giebt man dem Oculare eine bestimmte Stellung, so erscheint das Centrum entweder constant hell oder constant dunkel. Scintillirt aber der Stern, so erscheint bei fixer Stellung des Oculars das Centrum abwechelnd hell und dunkel. Die Zahl dieser Wechsel in einer bestimmten Zeit misst nach ARAGO den Grad der Scintillation. Doch ist auch hier die physikalische Bedeutung der erhaltenen Zahlen unbekannt. Die Erklärung der Erscheinung ist die folgende. Indem das von einem scintillirenden Sterne kommende, durch die kleine Oeffnung tretende Strahlenbündel durch die Einwirkung der Atmosphäre abwechselnd schwach convergent und divergent ist, erfährt das Bild des Sterns beständig kleine Verschiebungen längs der Axe des Fernrohres, und mit dem Bilde des Sterns zugleich die ganze räumliche Beugungsfigur, welche dasselbe umgiebt. Ist also das Ocular auf einen Punkt nahe der Grenze eines dunklen und hellen Theiles der Axe des Fernrohrs eingestellt, so erscheint das Centrum des wahrgenommenen Querschnittes der Beugungsfigur abwechselnd hell und dunkel.

Versieht man den Auszug eines ARAGO'schen Scintillometers mit einer Theilung, welche die Verschiebungen des Oculars messbar macht, so kann man mittelst der ARAGO'schen Erscheinung die Amplitude der Bewegungen des Beugungsbildes und damit auch die Amplitude der Bewegungen des Bildes des Sterns längs der Axe des Fernrohres messen, und hieraus die wechselnden Krümmungen der einfallenden Lichtwellenflächen berechnen. Das giebt ein viertes Scintillometer. Die Krümmungsradien zeigen sich im Allgemeinen grösser bei höher stehenden Sternen. Ein fünftes Scintillometer erhält man dadurch, dass man vor das Objectiv des Fernrohres einen spaltförmig ausgeschnittenen

Schirm bringt und das Ocular einschiebt. Das Bild des Sterns nimmt dann die lineare Gestalt an, doch verursacht die Scintillation wellenförmige Verbiegungen des linearen Bildes, welche sich mit grösserer oder geringerer Schnelligkeit fortbewegen; bei langsamer Bewegung gleicht das Bild des Sterns einer kriechenden Raupe. Zählt man in einem gegebenen Momente die vorhandenen Wellenberge und Thäler, so erhält man unter Berücksichtigung der Grösse der Objectivöffnung eine Vorstellung von der Grösse der Erstreckungen der Aus- und Einbiegungen der einfallenden Lichtwellenflächen, längs diesen Flächen selbst gemessen. Sechstens wird jedes Fernrohr mit grosser Oeffnung zu einem Scintillometer, sofern mittelst desselben der Radius des Scintillationszerstreuungskreises gemessen werden kann. MONTIGNY beobachtete zuerst die scintillirenden Sterne mittelst eines Spectroskopes. Man erhält durch dieses siebente Scintillometer ein lineares Spectrum, und kann die Veränderungen des Sternbildes für die einzelnen homogenen Farben getrennt beobachten. Später hat WOLF durch Hinzufügung einer Cylinderlinse dem Spectrum eine zweite Dimension gegeben.

Die Erscheinungen der Scintillation lassen sich leicht nachahmen. Betrachtet man entfernte Gegenstände durch eine Fensterglastafel und bewegt hierbei das Auge parallel mit dem Umrisse des betrachteten Gegenstandes, so wird man die fortschreitende Wellenbewegung wahrnehmen. Die unregelmässigen Ablenkungen der Strahlen beim Durchgange durch die Glastafel vertreten hier die in der Atmosphäre vor sich gehenden, und die relative Bewegung der Glastafel jene des Windes. Concentrirt man die vom Heliostatenspiegel kommenden Sonnenstrahlen in einem Punkte, lässt den von diesem Punkte kommenden Strahlenkegel in einer Entfernung von einigen Metern durch eine Fensterglastafel treten und in einer weiteren, eben so grossen Entfernung auf eine weisse Wand fallen, so erscheint die letztere nicht gleichmässig erhellt, sondern mit intensiv hellen und dunklen Flecken bedeckt. Bewegt man die Glastafel in der eigenen Ebene, so bewegen sich auch die Flecken. Hier hat man das Phänomen der fliegenden Schatten. Setzt man das Auge an Stelle der Wand und bewegt die Glastafel, so scintillirt, während die Lichtmaxima und -minima über das Auge des Beobachters hinwandern, der Lichtpunkt lebhaft. Beobachtet man den letzteren durch ein MARIUS'sches Scintilloskop, so nimmt man dieselben Erscheinungen wahr, wie bei einem scintillirenden Fixsterne. Richtet man ein ARAGO'sches Scintillometer nach einem nicht scintillirenden Lichtpunkte, so zeigt das letztere lebhafte Scintillation an, sobald man vor der Oeffnung desselben ein Stück Spiegelglas vorschiebt, so dass die Strahlen der Reihe nach durch verschiedene Stellen desselben treten. Bei allen diesen Versuchen erhält man farblose Scintillation, wie bei hochstehenden Sternen. Man kann aber auch alle Farbenerscheinungen welche tiefstehende scintillirende Sterne zeigen, nachahmen, wenn man ein Prisma zu Hilfe nimmt, welches die regelmässige atmosphärische Strahlendispersion ersetzt. Lässt man nämlich im verfinsterten Saale Sonnenstrahlen durch eine Sammellinse von $\frac{1}{2}$ *cm* Brennweite, und den vom Brennpunkte der Linse kommenden Strahlenkegel durch ein 60grädiges Flintglasprisma treten, so nimmt das im abgelenkten Strahlenkegel befindliche Auge des Beobachters ein kleines lineares Spectrum wahr, dessen scheinbare Grösse mit wachsender Distanz zwischen Beobachter und Prisma abnimmt. Bei ungefähr 5 *m* Distanz reducirt sich das Spectrum auf einen weissen Punkt, einen künstlichen Stern. Bringt man sodann eine Fensterglastafel nahe an dem Prisma zwischen dieses und das Auge, und bewegt dieselbe, so scintillirt der künstliche Stern in allen Farben und zeigt bei Beob-

achtung durch verschiedene Instrumente alle Erscheinungen der Farbenscintillation der Sterne.

Eine vollständige Zusammenstellung und kritisch-historische Darstellung der gesammten Literatur des Gegenstandes von ARISTOTELES bis in die Gegenwart enthält KARL EXNER's Monographie »Ueber die Scintillation«, erschienen im 23. Bande von FRANZ EXNER's Repertorium und neuerlich in Druck gelegt bei F. TEMPSKY, Wien 1891. Eine vollständige Angabe der Literatur bis zum Jahre 1880 findet man auch in der Bibliographie Générale de l'Astronomie von HOUZEAU und LANCASTER.

Wichtigere Abhandlungen: K. EXNER, Sitzber. d. k. Acad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 2. 1881. — MONTIGNY, Mém. cour. de l'Acad. de Belg. 26. — JAMIN, Compt. rend. 67. — NEWTON, Principia, lib. 3; Optice, lib. 1, pars 1. 1719. — KEPPLER, Astronomiae pars optica und Stella nova. — ARAGO, Ueber das Funkeln der Sterne. — DUFOUR, POGG. Ann. 1853. — MOIGNO, Cosmos 2. 1851. — MONTIGNY, Bull. de l'Acad. roy. de Belg. (2) 29. 1870. — DONATI, Il nuovo cimento. 1855. — MOSSOTTI, Il nuovo cimento. 1855. — C. WOLF, Compt. rend. 66, pag. 792. — RESPIGHI, Atti dell' Acc. Pont. de nuovi Lincei 21, 22. 1868. 1869.

KARL EXNER.

Spectralanalyse.

1) Geschichte der Spectralanalyse.

NEWTON[1]) beobachtete zuerst im Jahre 1666, dass ein Lichtbündel durch ein Prisma gehend dispergirt wird, dass also auf einem Schirm ein farbiger Streif erzeugt wird, dessen eine, am wenigsten abgelenkte Seite rothes Licht enthält, während die am stärksten abgelenkte Seite blauviolett gefärbt ist. NEWTON zog daraus den richtigen Schluss, dass das weisse Licht aus verschiedenfarbigen Strahlen bestehe, und dass dieselben verschieden stark gebrochen würden; er nannte das farbige Bild ein Spectrum. WOLLASTON[2]) ersetzte die grosse runde Oeffnung, welche NEWTON meist zum Eintritt des Lichtes in das dunkle Zimmer benutzt hatte, durch einen engen Spalt, der der brechenden Kante des Prismas parallel stand; er erreichte dadurch, dass die Farben viel vollkommener getrennt wurden, und konnte daher auch zuerst, 1802, im Sonnenspectrum einige dunkle Linien bemerken. Auch beobachtete er zuerst das Spectrum einer Flamme und des elektrischen Funkens. Wesentlich förderte FRAUNHOFER[3]) die Kenntnisse; er fand zuerst die Natriumlinien im Licht verschiedener Quellen, ohne indessen ihren Ursprung zu errathen; er sah im Sonnenspectrum eine grosse Zahl dunkler Linien und lieferte eine Zeichnung des Spectrums mit 350 solcher Linien, welche von ihm ihren Namen erhalten haben. Auch das Licht der Sterne beobachtete er, fand auch dort die dunklen Linien, zum Theil andere als im Sonnenspectrum, und schloss daraus, dass die FRAUNHOFER'schen Linien der Sonne in ihr, nicht in der Erdatmosphäre ihren Ursprung haben müssten.

---

1) NEWTON, Opticks or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light. London 1704.

2) WOLLASTON, Phil. Trans. 1802.

3) FRAUNHOFER, Denkschrift d. Münch. Akad. d. Wiss. auf die Jahre 1814 und 1815; SCHUMACHER's Astronomische Abhandlungen, Heft 2, pag. 46. 1823; GILBERT's Annalen 74, pag. 337. 1823.

Ganz besondere Verdienste erwarb sich FRAUNHOFER dadurch, dass er die Beugungsgitter erfand und mit ihrer Hilfe genaue Bestimmungen der Wellenlänge einzelner Farben ausführte.

In der folgenden Zeit beginnen die Emissionsspectra verschiedener Substanzen das Interesse der Forscher zu erregen. HERSCHEL[1]), WHEATSTONE[2]), TALBOT[3]) kamen der Thatsache, dass jedes Element sein besonderes Spectrum emittirt, mehr oder weniger nahe, scheiterten jedoch stets wieder an scheinbaren Widersprüchen. So sagt HERSCHEL, dass die Färbung einer Flamme brauchbar sei, um kleine Mengen von Substanzen zu erkennen; TALBOT sagt, dass man Lithium und Strontium leicht in der Flamme unterscheiden könne, WHEATSTONE findet, dass bei Funken von Metallen bestimmte Linien auftreten, welche für die Elektroden charakteristisch sind. Andrerseits findet TALBOT überall die Natriumlinien, die er zuletzt dem Krystallwasser zuzuschreiben geneigt ist, und WHEATSTONE findet ganz andere Spectren, wenn er die Metalle im Knallgasgebläse verdampft, so dass schliesslich keinerlei Aufklärung gewonnen wird.

In den folgenden Jahrzehnten beschäftigte man sich mehr mit der Absorption des Lichtes und der Erklärung des Ursprungs der FRAUNHOFER'schen Linien. Namentlich BREWSTER[4]) regte diese Untersuchungen an, indem er die Absorption durch farbige Substanzen und Dämpfe studirte. HERSCHEL schrieb die FRAUNHOFER'schen Linien der Absorption der Sonnenatmosphäre zu, FORBES[5]) sprach sogar direkt aus, dass die allerdings irrthümlich von ihm angenommene Coincidenz einzelner FRAUNHOFER'scher Linien mit Absorptionslinien der salpetrigen Säure die Anwesenheit dieser Substanz in der Sonne beweise; als aber bei einer Sonnenfinsterniss 1836 die Linien vom Rande der Sonne nicht dunkler gegeben wurden als von der Mitte, verwarf man wieder die richtige Erklärung, und hielt die dunklen Linien einfach für Zwischenräume zwischen hellen Emissionslinien. BREWSTER hatte für einige FRAUNHOFER'sche Linien sicher irdischen Ursprung nachgewiesen und beschloss nun eine genaue Zeichnung des Sonnenspectrums herzustellen, welche er dann mit mehr als 3000 Linien 1860 publicirte[6]). Er zog hier den Schluss, dass alle Linien der irdischen Atmosphäre entstammten, ohne dies jedoch experimentell nachweisen zu können. Inzwischen war eine wichtige Beobachtung von FOUCAULT[7]) gemacht worden, freilich ohne dass er ihre Bedeutung, welche erst später nach Aufstellung des KIRCHHOFF'schen Satzes hervorgehoben wurde, verstanden hätte; er fand, dass die Natriumlinien genau mit den *D*-Linien der Sonne coincidiren, dass man die dunklen Linien künstlich erzeugen könne, wenn man weisses Licht durch glühenden Natriumdampf hindurchgehen lasse. — Auch die Untersuchung der Emissionsspectra wurde wieder aufgenommen; MASSON[8]) untersuchte die Funkenspectra, ebenso ANGSTRÖM[9]),

---

[1]) HERSCHEL, Trans. Edinb. Roy. Soc. Vol. 9. 1823; POGG. Ann. 16. 1829; On the theory of light. London 1828.

[2]) WHEATSTONE, Phil. Mag. (3) 7. 1835.

[3]) TALBOT, Edinb. Journ. of Sc. 5. 1826; Phil. Mag. (3) 4. 1834; Phil. Mag. (3) 7. 1835; Phil. Mag. (3) 9. 1836.

[4]) BREWSTER, Phil. Mag. (3) 2. 1833; Trans. Edinb. Roy. Soc. 12. 1834.

[5]) FORBES, Phil. Trans. 1836. II.

[6]) BREWSTER und GLADSTONE, Phil. Trans. 150. 1860.

[7]) FOUCAULT, L'Institut 1849, pag. 45.

[8]) MASSON, Ann. de chim. (3) 31. 1851.

[9]) ANGSTRÖM, Abh. d. Stockh. Akad. 1852; POGG. Ann. 94. 1855.

VAN DER WILLIGEN[1]), PLÜCKER[2]). ANGSTRÖM erkannte, dass man dabei die Linien der Metalle und der Gase erhalte, durch welche der Funke geht; er sprach sogar aus, dass leuchtende Dämpfe gerade die Linien absorbiren müssten, welche sie selbst emittiren, und deutete auf die Aehnlichkeit der Metallspectren und des Sonnenspectrums hin. PLÜCKER benutzt GEISSLER'sche Röhren und macht ganz zuverlässige Angaben, hält aber auch noch das Sonnenspectrum für ein discontinuirliches Emissionsspectrum. — Endlich wäre noch zu erwähnen, dass auch BALFOUR STEWART[3]) wiederholte, die leuchtenden Dämpfe absorbirten dasselbe Licht, welches sie emittiren, ohne dass er berücksichtigte, dass die Temperatur die gleiche sein müsse.

Auf diesem Standpunkte lagen die Kenntnisse, als KIRCHHOFF und BUNSEN eingriffen; es waren zahlreiche Thatsachen bekannt, die theils richtige, theils falsche Deutungen gefunden hatten; viele hatten sich der Wahrheit genähert, ohne sie zu erreichen, und Niemand hätte aus den vorliegenden Publicationen irgend sichere Schlüsse darüber ziehen können, wo die Wahrheit liege.

KIRCHHOFF und BUNSEN[4]) sprachen zuerst bestimmt aus, dass 1) jeder feste Körper beim Glühen ein continuirliches Spectrum emittire, dass 2) die Gase und Dämpfe ein discontinuirliches Spectrum geben, welches für jedes Element ein besonderes charakteristisches und unveränderliches sei. Das Spectrum sei von Temperatur und Druck fast unabhängig, so dass alle Flammen von derselben Substanz im Wesentlichen dasselbe Spectrum lieferten. Durch diese beiden Sätze war die Emissionsspectralanalyse geschaffen. Gleichzeitig bewies KIRCHHOFF[5]) sein Gesetz über das Verhältniss zwischen Emission und Absorption, welches aussagt, dass für jede Substanz bei gegebener Temperatur das Emissionsvermögen für jede Wellenlänge proportional sei dem Absorptionsvermögen für dieselbe Wellenlänge, und dass der Proportionalitätsfaktor gleich dem Emissionsvermögen eines absolut schwarzen Körpers von gleicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge sei. Dadurch waren die Absorptionsspectra auf die gleiche Stufe gestellt, sie wurden ebenso zur Analyse verwendbar, wie die Emissionsspectra.

KIRCHHOFF und BUNSEN stellten darauf die Spectra einer grossen Anzahl von Elementen fest und entdeckten deren zwei, das Rubidium und Cäsium, dadurch die grossen Vortheile der neuen Methode erweisend. Es folgte in den nächsten Jahren die Entdeckung des Thallium durch CROOKES[6]), des Indium durch REICH und RICHTER[7]), des Gallium durch LECOQ DE BOISBAUDRAN[8]), dann bis in die letzte Zeit reichend die Auffindung einer grossen Anzahl von seltenen Erden, deren Salze durch Absorptionsspectra ausgezeichnet sind. — Gleichzeitig hatte KIRCHHOFF[9]) eine genaue Zeichnung des Sonnenspectrums begonnen und zu deren Verwerthung die Funkenspectra der Elemente untersucht, wodurch er in die Lage kam, ganz neue Anschauungen über die Constitution der Sonne auszusprechen, und die Anwesenheit einer ganzen Anzahl von Elementen in der

---

1) VAN DER WILLIGEN, POGG. Ann. 106 u. 107. 1859.

2) PLÜCKER, POGG. Ann. 107. 1859.

3) BALFOUR STEWART, Phil. Mag. (4) 20. 1860.

4) KIRCHHOFF und BUNSEN, POGG. Ann. 110. 1860; POGG. Ann. 111. 1861; POGG. Ann. 113. 1861.

5) KIRCHHOFF, Abhandl. d. Berl. Akad. 1861.

6) CROOKES, Phil. Trans. 153. 1863.

7) REICH und RICHTER, Journ. f. pr. Chem. 81. 1863.

8) LECOQ DE BOISBAUDRAN, Compt. rend. 81. 1875.

9) KIRCHHOFF, Abhandl. d. Berl. Akad. 1861.

Sonne nachzuweisen. In den folgenden Jahren beschäftigten sich die Physiker zunächst mit den Emissionsspectren; einerseits wurden die Wellenlängen der von den verschiedenen Substanzen emittirten Linien viel genauer bestimmt, — es seien hier nur HUGGINS[1]) und ANGSTRÖM und THALÉN[2]) genannt — andererseits wurde das zweite KIRCHHOFF-BUNSEN'sche Gesetz vervollständigt. MITSCHERLICH[3]) wies zuerst darauf hin, dass verschiedene Salze desselben Elementes nur dann das gleiche Spectrum des Elementes geben, wenn die Salze alle bei der benutzten Temperatur dissociirt sind, dass sonst aber jede Verbindung ihr besonderes Spectrum erzeugt. Die Spectra von Verbindungen haben aber ein ganz anderes Aussehen als die der Elemente, letztere nennen wir Linienspectra, erstere Banden- oder kannelirte Spectra. PLÜCKER und HITTORF[4]) zeigten darauf, dass auch Elemente Bandenspectra geben können, dass z. B. die Metalloide bei niedriger Temperatur ein Bandenspectrum zeigen, bei höherer Temperatur ein Linienspectrum, eine Thatsache, welche anfangs viel bestritten, schliesslich aber allgemein anerkannt wurde.

Einen ganz besonderen Fortschritt machte die genaue Bestimmung der Linienspectra namentlich im Ultraviolett durch Benutzung der Photographie. Nachdem STOKES[5]) entdeckt hatte, dass das äusserste ultraviolette Licht durch Quarz hindurchgeht, photographirte MILLER[6]), wenn auch in höchst unvollkommener Weise, durch einen Quarzapparat die Spectra einiger Elemente. LOCKYER[7]) nahm die Arbeit in weit vollkommenerer Weise auf, liess sie aber bald wieder liegen. Gute photographische Messungen sind von HARTLEY und ADENEY[8]) und von LIVEING und DEWAR[9]) gemacht, in allerneuester Zeit von KAYSER und RUNGE[10]). Abgesehen von der genaueren Bestimmung der Wellenlängen hat man bei diesen neuen Messungen auch weit mehr auf den Charakter der einzelnen Linien und ihr Verhalten unter verschiedenen Umständen geachtet. Dabei spielt die verschiedene Länge der Linien nach LOCKYERS Bezeichnung, oder die verschiedene Leichtigkeit, mit der die Linie sich umkehrt, eine wichtige Rolle, ferner die ungleiche Verbreiterung bei zunehmender Dampfdichte.

Besonders gefördert wurde diese genauere Untersuchung durch die Herstellung vorzüglicher Gitter, namentlich der ROWLAND'schen Concavgitter, und durch die Benutzung der Photographie, welche durch VOGEL's Entdeckung des Princips der optischen Sensibilisatoren beinahe für alle Spectralbezirke brauchbar wurde.

Auch die Kenntniss des Spectrums und der Zusammensetzung der Sonne hat seit KIRCHHOFF gewaltige Fortschritte gemacht. Vor allem ist für den sichtbaren Theil ANGSTRÖM[11]) zu nennen, dessen Messungen von 1868 für die folgen-

---

1) HUGGINS, Phil. Trans. 154. 1864.

2) ANGSTRÖM, Recherches sur le spectre solaire, Upsala 1868; THALÉN, Nov. Act. reg. soc. Ups. (3) 6. 1868; ANGSTRÖM und THALÉN, Nov. Act. reg. soc. Ups. (3) 9. 1875.

3) MITSCHERLICH, POGG. Ann. 116. 1862; POGG. Ann. 121. 1863.

4) PLÜCKER und HITTORF, Phil. Trans. 155. 1865.

5) STOKES, Phil. Trans. 142. 1852; Phil. Trans. 152. 1862.

6) MILLER, Phil. Trans. 152. 1862.

7) LOCKYER, Phil. Trans. 163. 1873; Phil. Trans. 164. 1874; siehe auch LOCKYER, Studien zur Spectralanalyse, Leipzig bei Brockhaus 1879.

8) HARTLEY und ADENEY, Phil. Trans. 175. 1884.

9) LIVEING und DEWAR, Phil. Trans. 174. 1883; Phil. Trans. 179. 1888.

10) KAYSER und RUNGE, Abh. d. Berl. Akad. 1888 bis 1892.

11) ANGSTRÖM, Recherches sur le spectre solaire, Upsala 1868; THALÉN, Nov. Act. reg. soc. Ups. (3) 6. 1868; ANGSTRÖM und THALÉN, Nov. Act. reg. soc. Ups. (3) 9. 1875.

Kreuzpunkt das Bogenlicht entsteht. Der dritte Kreuzarm dient zum Austritt des Lichtes, der vierte zur eventuellen Zuführung eines Gases, das Loch von oben zum Einwerfen der Substanzen. KAYSER und RUNGE[1]) empfehlen, durch einen genäherten Magneten den Bogen zu zwingen, am Boden des Kreuzpunktes entlang zu brennen. — Diese Apparate sind namentlich sehr geeignet, um Absorptionserscheinungen, Umkehrung der Linien zu studiren, weil die Bohrung zum Austritt des Lichtes mit kühleren Dämpten gefüllt ist.

Zur Erzeugung leuchtender Dämpfe giebt es noch eine Methode, deren Wirkung indess bisher keineswegs ganz aufgeklärt ist: Die Benutzung des Inductionsfunkens. Wenn derselbe zwischen zwei Elektroden überspringt, so reisst er kleinste Theile los und verdampft sie, so dass der Funke das Spectrum der Elektrode zeigt; daneben tritt aber stets noch das Spectrum des Gases auf, in welchem die Elektroden sich befinden, in Luft erhält man also z. B. die Linien von O, N, H. Zur Untersuchung von Metallen stellt man einfach die Elektroden aus ihnen her. Für feste Salze ist ein Apparat von FRISWELL[2]) brauchbar, bestehend aus einem kleinen Aluminiumbecher, in dessen Mitte ein Platindraht steckt; in den Becher wird das Salz fest eingedrückt, die vom Platindrath ausgehenden Funken verdampfen dann Salztheilchen. Einfacher aber ist es, die Salze in Lösung zu benutzen: man macht die Flüssigkeit zu einer Elektrode, und zwar zur negativen, stellt dicht über ihre Oberfläche die andere Elektrode aus Platin, Aluminium oder am besten Graphit. Für Flüssigkeiten ist der sogen. Fulgurator von DELACHANAL und MERMET[3]) sehr bequem.

Die Inductionsfunken sind das einzige Mittel, um Gase leuchtend zu machen. Man schliesst dieselben in die zuerst von PLÜCKER angewandten GEISSLER'schen Röhren ein: in zugeschmolzene Glasröhren wird das Gas meist bei geringem Druck eingeführt; zwei eingeschmolzene Aluminiumdrähte bilden die Elektroden. Dabei wird (bei kleinem Gasdruck) der ganze Inhalt der Röhre leuchtend, desto stärker, je enger der Querschnitt der Röhre ist; man pflegt daher einen Theil der Röhre capillar zu machen. Noch grössere Helligkeit erzielt man, wenn man durch die Capillare der Länge nach durchsieht, was zuerst von MONKHOVEN[4]) benutzt wurde.

Die Inductionsfunken sind wesentlich verschieden, je nach Beschaffenheit des Inductoriums; sehr dünne und lange Drähte geben Elektrizität von hoher Spannung, kürzere dicke Drahtwindungen kleinere Spannung aber grössere Quantität. Die grösste Lichtstärke erhält man, wenn man ein dünndrathiges Inductorium benutzt, die Elektroden aber noch mit den Belegungen eines Sammelapparates verbindet; dabei verkürzen sich die Funken sehr wesentlich, werden aber gleichzeitig heller. In GEISSLER'schen Röhren ändert sich dabei mitunter das Spectrum; bei N z. B. erhält man ohne Lydener Batterie das Bandenspectrum, mit derselben das Linienspectrum.

Eine eigenthümliche, aber wie es scheint recht zweckmässige Benutzungsweise eines Funkens von niedriger Spannung empfiehlt AUER v. WELSBACH (Wien. Ber. 88, II. 1883).

Die Wirkung der Inductionsfunken beruht zum grossen Theil zweifellos auf der hohen Temperatur, welche durch den Widerstand der Funkenstrecke erzeugt

---

[1]) KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890.

[2]) LOCKYER, Phil. Trans. 163. 1873.

[3]) DELACHANAL und MERMET, Compt. rend. 81. 1875.

[4]) MONKHOVEN, Mondes. 1877.

wird. Daneben haben wir aber noch eine völlig davon verschiedene Wirkung der Elektrizität selbst anzunehmen. Dass diese existirt, ist zuerst von E. WIEDEMANN[1]) nachgewiesen, welcher zeigte, dass in GEISSLER'schen Röhren die Gase bei ganz niedriger Temperatur leuchten können; HASSELBERG[2]) bestätigte dies. Worin aber die Wirkung besteht, wissen wir nicht; vielfach wird eine elektrolytische Dissociation der Molekeln und eine stürmische Bewegung der Atome angenommen. Von verschiedenen Seiten (z. B. LIVERNG und DEWAR, AMES) ist daher die Vermuthung ausgesprochen, dass der Inductionsfunke uns nicht das reine Spectrum der Substanz zeige, dass die Atome nicht nur die ihnen eigenen Schwingungen ausführen, sondern auch noch andere, erzwungene. Thatsache ist, dass die Funkenspectra im Allgemeinen viel complicirter sind, viel mehr Linien enthalten, als die Flammenspectra, und zwar gerade solche Linien, welche sich dem bisher erkannten gesetzmässigen Bau der Spectren nicht fügen. — Dass die Temperatur im Inductionsfunken sehr hoch werden kann, zeigte WIEDEMANN, welcher in GEISSLER'schen Röhren auf calorimetrischem Wege 87000° nachwies.

Die Herstellung der Gasspectra gehört zur schwierigsten Aufgabe der Spectroskopie. In den GEISSLER'schen Röhren zeigen sich immer Linien, welche nicht dem zu untersuchenden Gase angehören, trotz aller Sorgfalt der Herstellung. Lässt man ein GEISSLER'sches Rohr eine Zeit lang liegen, so zeigt es sehr häufig ein ganz anderes Spectrum als vorher. Diese Erscheinungen erklären sich durch Adsorption an den Glaswänden und Absorption in den Elektroden. Zweckmässige Vorschriften zur Füllung von Röhren giebt CORNU und DESLANDRES[3]).

b) Spectralapparate mit Prismen.

Wenn ein homocentrisches Bündel weissen Lichtes auf ein Prisma fällt und gebrochen wird, so wird es in seine Farben zerlegt, und das Licht jeder Wellenlänge bildet ein je nach der Farbe mehr oder weniger stark abgelenktes Strahlenbündel. Jedes dieser Bündel ist nach der Brechung noch homocentrisch, wenn es das Prisma unter dem Minimum der Ablenkung passirt hat, und nur dann liegen die virtuellen Centren aller Bündel in gleicher Entfernung vom Prisma. — Setzen wir hinter das Prisma eine achromatische Linse, so wird jedes Bündel in einem Punkte vereinigt, wir erhalten ein Spectrum, in welchem die verschiedenen Farben neben einander liegen; um es vergrössert zu betrachten, benutzen wir eine Lupe, die mit der achromatischen Linse zu einem Fernrohre vereinigt wird.

An ein solches Spectrum werden nun die Anforderungen gestellt, dass es 1) möglichst lichtstark sein soll, 2) dass es möglichst scharf sei, d. h. dass noch Strahlen in ihm getrennt sind, die möglichst kleine Unterschiede der Wellenlänge haben.

Die Helligkeit eines continuirlichen Spectrums ist in erster Linie abhängig von der Dispersion, der Länge des Spectrums, und zwar ist es dieser umgekehrt proportional. Beim Linienspectrum ist dies weniger der Fall; die Helligkeit einer ∞ feinen Linie, welche einer einzigen Wellenlänge entspricht, wäre sogar ganz unabhängig von der Dispersion. In Wahrheit haben aber die Spectrallinien kaum absolut monochromatisches Licht, um so weniger, je mehr sie verbreitert sind, und in dem Fall gilt für sie das Gleiche, wie für continuirliche Spectra; aus diesem Grunde ist grosse Dispersion für unscharfe Linien, z. B. bei Beobachtung der Absorptionsspectren, sehr ungünstig.

---

1) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6. 1879.

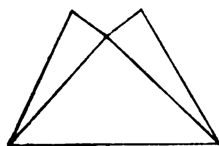
2) HASSELBERG, Mém. de l'ac. de St. Pétersb. (7) 27. 1879.

3) CORNU, d'Almeida Journ. de Physique (2) 5. 1886; DESLANDRES, Ann. de Chim. (6) 15. 1888.

Ein Lichtverlust entsteht weiter durch Absorption in der Substanz des Prismas; es sind daher möglichst durchsichtige Substanzen zu wählen. Endlich tritt ein Lichtverlust ein durch Reflexion an jeder Prismenfläche. Es ist daher zweckmässig, die Zahl der spiegelnden Flächen, d. h. der Prismen zu beschränken, und lieber wenig Prismen von grossem brechendem Winkel, als mehrere von kleinem zu nehmen; der Lichtverlust ist allerdings nicht proportional der Flächenzahl, da das Licht allmählich polarisirt und daher weniger reflektirt wird. — Sehr grosse brechende Winkel, ebenso stark dispergirende und daher auch stark brechende Substanz der Prismen führt aber andererseits, wenn man sich an das Minimum der Ablenkung bindet, den Nachtheil mit sich, dass der Einfallswinkel sehr gross wird, und mit demselben wächst die Menge des reflektirten Lichtes. PICKERING[1]) findet, dass es am zweckmässigsten sei, den brechenden Winkel so zu wählen, dass das reflektirte Licht vollständig polarisirt ist, dieser Winkel beträgt z. B. für gewöhnliches Flintglas 64°. PICKERING giebt folgende Tabelle für die Menge des durchgelassenen Lichtes, wenn die des einfallenden gleich 1 gesetzt wird, das Licht unter dem Minimum der Ablenkung durchgeht, und die Absorption in den Prismen nicht berücksichtigt würde.

Brechungsexponent	1 Prisma	2 Prismen	10 Prismen
	Prismen von 45°:		
1·5	0·916	0·841	0·461
1·6	0·862	0·799	0·391
1·7	0·859	0·745	0·324
	Prismen von 60°:		
1·5	0·895	0·811	0·509
1·6	0·853	0·748	0·491
1·7	0·801	0·681	0·505

Um Prismen von grossem brechenden Winkel benutzen zu können, ohne dass der Einfallswinkel zu gross wird, hat man nach dem Vorgange von RUTHERFURD zusammengesetzte Prismen construirt (Fig. 419), bei welchen an beide Flächen des eigentlich wirksamen Prismas zwei kleine Prismen in entgegengesetzter Stellung aus stärker brechendem, schwächer dispergirendem Glase gesetzt sind. Aehnliche Prismen sind z. B. von THOLLON[2]) aus Schwefelkohlenstoff und Crownglas, von WERNICKE[3]) aus Zimmtsäure-Aethyläther und Crownglas, von ZENGER aus verschiedenen Flüssigkeiten und Glassorten oder Krystallen gebaut worden. Durch passende Wahl der Winkel der seitlichen Prismen kann man das ganze Prisma natürlich auch geradsichtig machen.



(Ph. 419.)

Die Schärfe der Linien ist zunächst proportional der Breite des Spaltbildes. Nennen wir Einfalls- und Brechungswinkel an der ersten Prismenfläche e und b, an der zweiten ε und β, den brechenden Winkel γ, den Brechungsexponenten n, so gelten die Gleichungen:

$$\sin e = n \sin b; \qquad (1)$$

$$\sin \beta = n \sin \varepsilon; \qquad (2)$$

$$b + \varepsilon = \gamma. \qquad (3)$$

---

[1]) PICKERING, Phil. Mag. (4) 36. 1868.

[2]) THOLLON, Compt. rend. 88. 1879.

[3]) WERNICKE, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 1. 1881.

Sei der Spalt vom Prisma aus sichtbar unter der Breite de, so ist die Bildbreite $d\beta$. Nun ist nach (1), (2), (3), da n und γ constant sind:

$$\cos e\, de = n \cos b\, db; \quad \cos\beta\, d\beta = n \cos \varepsilon\, d\varepsilon; \quad db + d\varepsilon = 0,$$

also

$$d\beta = -\frac{\cos e \cos \varepsilon}{\cos b \cos \beta} de. \tag{4}$$

Die Bildbreite ist also proportional der Spaltbreite; es wird daher der Spalt möglichst eng gemacht und in die Unendlichkeit verlegt, d. h. man lässt von ihm paralleles Licht auf das Prisma fallen, indem man ihn in den Brennpunkt einer achromatischen Linse setzt. So entsteht das Collimatorrohr. Für das Minimum der Ablenkung wird $e = \beta$, $b = \varepsilon$, also $d\beta = -de$, die Bildbreite gleich der Spaltbreite.

Aber die Schärfe hängt nicht nur von der Bildbreite ab, sondern auch von der Dispersion: zwei scharfe Linien von kleiner Wellenlängendifferenz sollen möglichst weit getrennt werden. Die Schärfe oder das Auflösungsvermögen ist also bedingt durch den Quotienten der Dispersion durch die Breite. Wir können mit THOLLON[1]) folgende Rechnung darüber ausführen:

Um die Dispersion zu finden, nehmen wir an, zwei Strahlen mit der Differenz der Brechungsexponenten dn falle unter dem Winkel e auf; dann erhalten wir die Differenz $d\beta$ der Austrittswinkel aus den Gleichungen (1), (2), (3)

$$O = n \cos b\, db + \sin b\, db; \quad \cos\beta\, d\beta = n \cos \varepsilon\, d\varepsilon + \sin \varepsilon\, dn; \quad db + d\varepsilon = 0;$$

daraus folgt für die Dispersion

$$\partial\beta = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta \cos b} dn \tag{5}$$

(es ist hier das runde ∂ geschrieben, um dies $\partial\beta$ von dem in Gleichung (4) zu unterscheiden). Die Schärfe ist nun gegeben durch:

$$\frac{\partial\beta}{d\beta} = -\frac{\sin\gamma}{\cos e \cos \varepsilon} \frac{dn}{de}. \tag{6}$$

Setzen wir hier $de = 1$, so können wir sagen, die Schärfe sei gegeben durch: $S = \frac{\sin\gamma}{\cos e \cos \varepsilon} dn$, die Dispersion durch $D = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta \cos b} dn$. Diese Ausdrücke hängen für gleiche Werthe von γ und dn vom Werthe $\cos e \cos \varepsilon$ und $\cos\beta \cos b$ ab; diese Produkte aber ändern sich in entgegengesetztem Sinne zwischen denselben Grenzen, haben Maxima für nahezu $\varepsilon = n^2 b$ und $b = n^2\varepsilon$, sind gleich für das Minimum der Ablenkung. THOLLON berechnet für ein Prisma von 50°, $n = 1{\cdot}6$, folgende Tabelle:

	D	S
$e = 90°$	1·034	∞
$b = n^2\varepsilon$	1·027	2·301
$e = \beta$	1·147	1·147
$\varepsilon = n^2 b$	2·301	1·027
$\beta = 90°$	∞	1·034

Man erkennt, dass die Schärfe am grössten bei streifend einfallendem Licht ist, bei abnehmendem Einfallswinkel abnimmt, während die Dispersion sich gerade umgekehrt verhält.

RAYLEIGH[2]) beweist den wichtigen Satz, dass die Schärfe des Spectrums, welches durch eine Anzahl Prismen erzeugt wird, nur abhängt von der Gesammtdicke derselben, d. h. der Länge ihrer Basen, aber nicht davon, ob diese Länge

[1]) THOLLON, Compt. rend. 92. 1881.

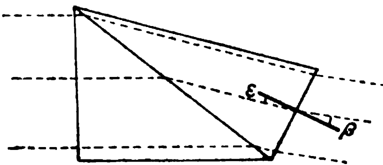
[2]) RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 9, pag. 269. 1879.

t durch viele scharfe Prismen oder durch wenige mit grossem Winkel hergestellt wird; zur Trennung zweier Linien von der Wellenlänge λ, und $\lambda + d\lambda$, dem Unterschied der Brechungsexponenten dn, muss $t > \frac{\lambda}{d\,n}$ sein. Zur Trennung der D-Linien durch ein Prisma vom Brechungsexponenten 1·65 muss z. B. die Basis 1·02 *cm* lang sein.

Von Interesse ist der Vergleich des Trennungsvermögens durch Prismen und Gitter. Wie wir später finden werden, ist für letztere $\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{mn}$, wo m die Ordnung des benutzten Spectrums, n die Zahl der Gitterfurchen bedeutet. Die grössten ROWLAND'schen Gitter haben 110000 Furchen, im Spectrum erster Ordnung können sie daher noch Linien trennen, deren Unterschied $\frac{1}{110000}$ der Wellenlänge beträgt, d. h. in der Gegend der D-Linien werden zwei Linien getrennt, deren Wellenlänge um 0·05 ANGSTRÖM'sche Einheiten verschieden ist.

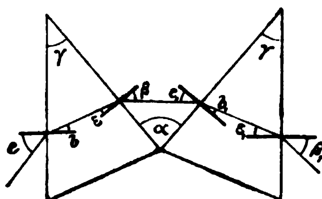
Nach obigem wäre dazu ein Prismenapparat nöthig, bei welchem die Summe der Prismenbasen 126 *cm* betrüge. Dies zeigt die gewaltige Ueberlegenheit der Gitter. Aber das Verhältniss ändert sich, sobald wir zu viel kleinerem λ gehen. Nach der CAUCHY'schen Dispersionsformel können wir setzen: $dn = \frac{d\lambda}{\lambda^3}$, also ist für Prismen: $\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{t}{\lambda^3}$, d. h. bei Prismen ist das Trennungsvermögen umgekehrt proportional der dritten Potenz der Wellenlänge, während es für Gitter constant ist. Wenn daher für $\lambda = 6000$ die Prismenlänge 126 *cm* betragen müsste, braucht sie bei $\lambda = 2000$ nur $\frac{1}{27}$, also etwa 4 *cm* zu betragen, um dasselbe zu leisten wie ROWLAND'sche Gitter, und bei der neuerdings von SCHUMANN erreichten Wellenlänge $\lambda = 1000$ würde gar ein Prisma von 0·6 *cm* Basis genügen.

Wir sahen, dass das virtuelle Bild des Spaltes bei der Brechung durch ein Prisma nur dann in der wirklichen Entfernung vom Prisma liegt, wenn das Licht unter dem Minimum der Ablenkung hindurchgeht; andernfalls liegt das Bild näher oder weiter vom Prisma, d. h. letzteres wirkt vergrössernd oder verkleinernd. So kann CHRISTIE[1]) jedes nicht unter dem Minimum vom Licht durchsetzte Prisma als Combination aus Prisma und Cylinderlinse betrachten, und diese Eigenschaft nutzbar machen. CHRISTIE benutzt namentlich zusammengesetzte Prismen von der Form Fig. 420; er nennt sie »Halbprismen«, weil man sie als die Hälfte eines compensirten Prismas betrachten kann. Das Licht fällt dabei auf die erste Fläche (welche die gedachte Schnittfläche ist) senkrecht auf oder verlässt sie senkrecht, und die Vergrösserung oder Verkleinerung ist, wie CHRISTIE zeigt, $= \frac{\cos\beta}{\cos\varepsilon}$.



(Ph. 420.)

Eigenthümlich in Bezug auf die Art der Dispersion sind die von THOLLON[2]) benutzten »Prismenpaare«. Zwei Prismen von gleichem brechenden Winkel γ sind gegeneinander geneigt um den Winkel α. Dann ist $\alpha = \beta + \varepsilon$ (Fig. 421);



(Ph. 421.)

[1]) CHRISTIE, Proc. Roy. Soc. 26. 1877.

[2]) THOLLON, Compt. rend. 86. 1878.

die ganze Ablenkung des Strahles ist $e + \beta_1 + \alpha - 2\gamma$. Steht der Strahl senkrecht zur Halbirungslinie des Winkels α, so ist die Ablenkung ein Minimum, $\beta = e_1$, $e = \beta_1$, $b = \varepsilon_1$, $\varepsilon = b_1$. Die Dispersion durch das Prismenpaar ist doppelt so gross, wie durch ein Prisma, also

$$d\beta_1 = \frac{2 \sin\gamma}{\cos\beta_1 \cos b_1} dn$$

[nach pag. 399, Gleichung (5)]. Aendert man den Winkel α, so kann man erreichen, dass e und β gleich 0° werden, dann wird

$$d\beta_1 = \frac{2 \sin\gamma}{\cos b} dn.$$

Dann ist aber $b_1 = \gamma$, also

$$\frac{d\beta_1}{dn} = 2 \tang\gamma.$$

Die rechte Seite ist also constant, die Dispersion ändert sich nicht mit der Wellenlänge.

Für alle Prismen ist noch zu erwähnen, dass das Bild des Spaltes, also die Spectrallinien, nicht eine gerade Linie ist, sondern eine gekrümmte, deren concave Seite nach violett gekehrt ist. Dies ist eine Wirkung der nicht im Hauptschnitt des Prisma verlaufenden Strahlen[1]).

Ueber den Aufbau der Spectralapparate mit Prismen müssen kurze Notizen genügen, da die Formen ausserordentlich variirt sind, die Prinzipien im Wesentlichen aber stets dieselben bleiben. Die Apparate bestehen zunächst stets aus dem Collimatorrohr, welches den Spalt ins Unendliche verlegt; dann folgt ein oder mehrere Prismen, endlich das Ablesefernrohr. Ist nur ein Prisma vorhanden, so kann dasselbe fest gegen das Collimatorrohr aufgestellt sein, so dass Strahlen von mittlerer Wellenlänge unter dem Minimum der Ablenkung durchgehen. Das Fernrohr ist drehbar an einem Theilkreis. Sind dagegen mehrere Prismen vorhanden, so muss, wenn man von einer Wellenlänge zu einer anderen übergeht, jedes Prisma einzeln auf das Minimum eingestellt werden. Dazu muss jedes Prisma gedreht werden, gleichzeitig aber auch verschoben werden in einer Richtung, welche durch die brechende Kante und die Mitte der Basis des Prismas geht; in jeder Stellung müssen die Basen der Prismen Tangenten an einem Kreise sein, dessen Mittelpunkt und dessen Radius aber von einer Wellenlänge zur andern variirt. Diese Bedingungen sind z. B. von H. KRÜSS[2]) ausführlich besprochen worden. Während KIRCHHOFF diese mühsame Einstellung für jedes Prisma mit der Hand vornahm, hat man später automatische Spectrometer hergestellt, bei welchen die Drehung des Fernrohres gleichzeitig die Prismen verstellt, so dass sie für die ins Fernrohr gelangenden Strahlen stets unter dem Minimum aufgestellt sind. Den ersten derartigen Apparat construirte LITTROW[3]), ihm folgte BROWNING[4]), SCHMIDT und HAENSCH[5]), GRUBB[6]), THOLLON[7]) und andere. Alle diese Apparate sind recht bequem, um ein Spectrum unter grosser Dispersion zu betrachten, für Messungen sind sie aber weniger geeignet, weil der Mechanismus für Verstellung der Prismen selten so sicher functionirt, dass man bei gleicher

1) CROVA, Ann. de Chim. 22. 1881.
2) H. KRÜSS, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 5. 1885.
3) LITTROW, Wien. Ber. 47. 1862.
4) BROWNING, Monthly. Not. Astr. Soc. 30, pag. 198 u. 378. 1879.
5) LÖWENHERZ, Ber. über d. wiss. Instr. auf d. Berl. Gewerbe-Ausstellung 1879.
6) GRUBB, Monthly Not. 30. 1879.
7) THOLLON, Almeida Journ. de Physique 7. 1878.

Einstellung des Fernrohres auch dieselbe Wellenlänge auf dem Fadenkreuz hätte. In dieser Beziehung ist folgende Einrichtung besser, deren Prinzip auch durch LITTROW eingeführt wurde: nachdem die Strahlen durch die ganze Prismenkette gegangen sind, fallen sie auf ein rechtwinkliges, total reflektirendes Prisma, dessen Kante horizontal liegt, so dass sie nach zweimaliger totaler Reflexion in ihrer eigenen Richtung, aber in anderer Ebene zurücklaufen und wieder durch die Prismen gehen, z. B. durch deren untere Hälfte. Sie treten aus dem ersten Prisma in Richtung der Collimatoraxe, aber unter derselben, aus, werden durch ein Reflexionsprisma um 90° gedreht und gelangen so ins Fernrohr. Bei dieser Einrichtung können Collimator und Fernrohr fest aufgestellt werden, nur die Prismenkette wird verschoben, um verschiedene Wellenlängen im Gesichtsfeld zu erhalten. Diese Verschiebung lässt sich mikrometrisch ausführen und so die Wellenlänge bestimmen. Die Idee, durch Rückkehr der Strahlen die Dispersion zu verdoppeln, ist sogar noch weiter geführt worden, so dass die Strahlen die Prismen vier Mal durchlaufen.

Es wären schliesslich noch die geradsichtigen Spectroskope zu erwähnen. Für manche Fälle ist es bequem oder nöthig, z. B. bei sich bewegenden Lichtquellen, wie Blitz, Sternschnuppen, das Spectroskop schnell auf die Lichtquelle richten zu können, was nur möglich ist, wenn die Strahlen nicht aus ihrer Richtung abgelenkt werden. Durch umgekehrte Benutzung des Prinzips, welches zur Achromatisirung führt, lässt sich das erreichen, worauf zuerst AMICI aufmerksam machte. Ueblich sind Combinationen von 3,5 oder 7 Prismen aus Crown- und Flintglas, die abwechseln und einen festen Prismenkörper bilden. Noch zweckmässiger sind Combinationen mit Flüssigkeiten, wie sie z. B. von THOLLON[1]), ZENGER[2]), WERNICKE[3]) berechnet wurden. — Auch durch totale Reflexion kann man das Licht in seine ursprüngliche Richtung zurückführen, und es sind viele Vorrichtungen dazu angegeben[4]); sie haben sich aber kaum in der Praxis eingebürgert. — Für kleine Taschenapparate wird das Collimatorrohr fortgelassen; hinter dem Spalt folgt eine Linse, welche dessen Bild in der Augenöffnung entwirft, und zwischen diese und die Linse ist der Prismenkörper eingeschaltet.

Zur Messung der Spectren befindet sich im Ocular des Fernrohres ein Fadenkreuz oder besser ein Fadenmikrometer, um Abstände gleichzeitig gesehener Linien zu messen. Bei lichtschwachen Spectren tritt die Schwierigkeit ein, dass man die Fäden nicht mehr sieht. Man kann dann eine dickere Spitze an Stelle des Fadenkreuzes setzen, oder man kann durch eine seitliche Oeffnung dasselbe schwach beleuchten. Es sind noch zahlreiche Hilfsmittel empfohlen, z. B. eine feine phosphorescirende Linie, ein Glasfaden u. s. w. Sie haben sich aber in der Praxis wenig eingebürgert. Sehr häufig hat man zwei Spectren zu vergleichen, theils um Identität zweier Linien festzustellen, theils um Wellenlängen durch andere bekannte zu ermitteln. Für solche Zwecke hat KIRCHHOFF das Vergleichsprisma eingeführt: vor einer Hälfte des Spaltes befindet sich ein kleines rechtwinkliges Prisma, welches durch totale Reflexion die Strahlen einer seitlich stehenden Lichtquelle auf die eine Spalthälfte wirft; man erhält so zwei sich berührende Spectren über einander.

---

[1]) THOLLON, Compt. rend. 86. 1878; D'Almeida Journ. de Physique 8. 1879; Compt. rend. 89. 1880.

[2]) ZENGER, Compt. rend. 92. 1881.

[3]) WERNICKE, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 1. 1881.

[4]) Siehe KAYSER, Lehrbuch der Spectralanalyse, pag. 55; LIVEING und DEWAR, Proc. Roy. Soc. 41. 1886.

Zur Beobachtung des ultravioletten Theils der Spectra muss alles Glas vermieden werden, und Linsen und Prismen aus Quarz oder aus Quarz und Flussspath hergestellt werden. Zur Sichtbarmachung der Linien schiebt man im Ocular eine fluorescirende Schicht ein; SORET[1]) hat solche fluorescirende Oculare zuerst construirt.

Für genaue Wellenlängenmessung hat in neuerer Zeit die Photographie die Ocularbeobachtung mit Recht fast ganz verdrängt, weil sie bei weit geringerer Mühe viel grössere Genauigkeit giebt. Man ersetzt dazu einfach das Fernrohr durch eine auf Unendlich eingestellte Camera. Man photographirt über oder unter das zu untersuchende Spectrum ein bekanntes Spectrum, z. B. das der Sonne oder des Eisens; oder besser lässt man in dem zu untersuchenden Spectrum einige Eisenlinien entstehen, aus deren bekannter Wellenlänge man leicht den Maassstab für jede Stelle der Platte ermitteln kann. Indessen ist für Photographie das ROWLAND'sche Concavgitter allen Apparaten mit Prismen so sehr überlegen, dass man es ganz allein verwenden sollte.

c) Diffractionsgitter.

Die Beugung des Lichtes ist zuerst von FRAUNHOFER zur Erzeugung von Spectren benutzt worden; er stellte Gitter durch parallel gespannte Drähte her, dann überzog er Glasplatten mit Russ oder Silber, und zog mit der Theilmaschine durchsichtige Linien hinein; endlich zog man in ungedeckte Glasplatten Furchen mit dem Diamant, und lange Zeit waren die von NOBERT in Barth so hergestellten Gitter, bei welchen bis zu 400 Furchen pro Millimeter gezogen waren, weit berühmt. Seit etwa 20 Jahren begann man die Gitter bei Reflexion zu benutzen, indem man sie versilberte; endlich wurde die Theilung direkt auf Spiegelmetall angebracht. Für die Vollkommenheit der Gitter kommt es natürlich auf constanten Abstand zwischen allen Furchen an, d. h. die Schraube, welche den Theildiamant führt, muss von höchster Vollkommenheit sein, damit gleicher Drehung derselben gleiche Verschiebung des Diamants entspricht. RUTHERFURD baute eine solche recht vollkommene Maschine, welche bis zu 700 Linien pro Millimeter zog, allerdings aber starke periodische Fehler zeigte. Dann construirte Professor ROWLAND in Baltimore[2]) zwei Maschinen, die das Vollkommenste leisten, was bisher erreicht ist. Die erste Theilmaschine zieht bis zu 1700 Linien pro Millimeter, die zweite, welche noch fehlerfreier ist, zieht 10000 oder 20000 Linien pro inch.

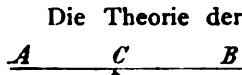
Die Theilung grosser Gitter, welche etwa 110000 Furchen enthalten, erfordert eine Zeit von 3 bis 4 Tagen und Nächten. In dieser ganzen Zeit darf sich die Temperatur nicht merkbar ändern, weil sonst in Folge der Wärmeausdehnung der Abstand der Furchen ein anderer würde. Die Theilmaschine ist daher in einem unterirdischen Raum aufgestellt, der während der Theilung nicht betreten wird, und sie wird von einem ausserhalb stehenden Motor in Bewegung gesetzt.

Die besprochenen Gitter waren alle auf ebener Fläche hergestellt, zu ihrer Benutzung brauchte man Collimator und Fernrohr, also Linsen, gerade wie bei den Prismen. Es war ein ungemein erfolgreicher Gedanke von ROWLAND, die Theilung auf einem Concavspiegel anzubringen. Hier vereinigt sich die Gitterwirkung mit der Fähigkeit der Hohlspiegel, Bilder zu entwerfen, so dass bei der Benutzung der Concavgitter alle Linsen überflüssig werden, und dadurch alle

[1]) SORET, POGG. Ann. 152; POGG. Ann. Jubelbd. 1874; LIVEING, Proc. Roy. Instit. 10. 1883.
[2]) ROWLAND, Phil. Mag. (5) 13. 1882.

Uebelstände derselben, nämlich Absorption, chromatische und namentlich sphärische Aberration, fortfallen.

Die Theorie der ebenen Gitter ist vielfach[1]) behandelt. Fällt paralleles Licht *EC* auf ein Gitter *AB* unter dem Incidenzwinkel i (Fig. 422), so wird das direkt reflektirte Licht *CF* den Reflexionswinkel i besitzen. Beobachten wir einen Strahl *CG*, der mit dem direkt reflektirten den Winkel δ bildet, so ist die Wellenlänge desselben



(Fig. 422.)

$$\lambda = \frac{e}{m}\left[\sin(i+\delta) - \sin i\right]. \tag{1}$$

Hier bedeutet e die Gitterconstante, d. h. die Grösse des Abstandes zweier benachbarter Linienmitten, oder die Breite von Linie und Zwischenraum; m bedeutet die Ordnung des beobachteten Spectrums. Für die Formel ist zu beachten, dass δ und m positiv zu nehmen sind, wenn der Strahl *CG* auf der anderen Seite des direkt reflektirten Strahles *CF* liegt, als der einfallende Strahl *EC*, sonst aber negativ. Für Messungen benutzt man meistens senkrechte Incidenz; dann ist $i = 0$, und (1) wird:

$$\lambda = \frac{e}{m}\sin\delta, \tag{2}$$

d. h. die Wellenlänge verschiedener gebeugter Strahlen ist proportional dem *sin* des Beugungswinkels. Für die Messung wird daher das Gitter auf das Tischchen des Spectrometers gesetzt, das Licht fällt durch das Collimatorrohr als paralleles Bündel senkrecht auf das Gitter; das Fernrohr wird gedreht um den Winkel δ, dessen *sin* die Wellenlänge des mit dem Fadenkreuz zusammenfallenden Lichtes proportional ist. Es handelt sich dann zur Bestimmung der Wellenlänge nur noch um die Kenntniss der Gitterconstante. Diese Kenntniss verschafft man sich gewöhnlich auf folgende Weise: Aus (2) folgt $e = \frac{m\lambda}{\sin\delta}$. Man bestimmt δ für einige Linien von bekannter Wellenlänge im Spectrum 1., 2. Ordnung; daraus ist dann e leicht zu berechnen. Gewöhnlich nimmt man die gelben Linien des Natriumspectrums, die *D*-Linien.

Es ist aber nicht nöthig, normale Incidenz des Lichtes zu benutzen. Gleichung (1) lässt sich umformen zu

$$\lambda = \frac{2e}{m}\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(i + \frac{\delta}{2}\right). \tag{3}$$

dies zeigt, dass ein Minimum der Ablenkung auch bei Gittern existirt, wenn nämlich $i = -\delta_2$ ist, also

$$\lambda = \frac{2e}{m}\sin\frac{\delta}{2}.$$

Auch diese Gleichung ist zur Messung zu gebrauchen, freilich nur bei durchsichtigen Gittern, bei welchen man auf das Minimum der Ablenkung in ganz derselben Weise einstellen kann, wie bei Prismen.

Für Reflexionsgitter hat man noch eine dritte Methode, welche ganz besonders empfehlenswerth ist, man lässt Collimator und Fernrohr unter beliebigem constanten Winkel und dreht das Gitter, dessen Drehungswinkel α heisse; dann wandern das direkt reflektirte Bild und die verschiedenen Spectren am Faden-

[1]) Siehe unter Anderem: Verdet, Wellentheorie des Lichts, deutsch von Exner, § 78 bis 80; Rayleigh, Phil. Mag. (4) 47. 1874; Rayleigh, Encyclopädia Brit. Artikel: Wave Theory of Light.

kreuz vorbei, und man hat zur Bestimmung der Wellenlänge einer Spectrallinie folgende Gleichung: stehen Collimator und Fernrohr fest, so ist $2i + \delta$ constant, also auch $cos\left(i + \delta\frac{\delta}{2}\right)$; folglich wird Gleichung (3):

$$\lambda = \frac{2e}{m} k \sin\frac{\delta}{2};$$

nun ist aber $\frac{\delta}{2} = \alpha$, denn nach dem Reflexionsgesetz dreht sich ein reflektirter Strahl doppelt so stark, wie der Spiegel; daher gilt hier die Gleichung:

$$\lambda = C \sin \alpha, \tag{4}$$

wo C wieder leicht zu bestimmen ist durch Einstellung auf eine Linie von bekannter Wellenlänge, z. B. die Natriumlinien.

Wir haben nun wieder die Helligkeit, Dispersion und Schärfe der Gitterspectren zu untersuchen. Was die Helligkeit betrifft, so zeigt die Theorie, dass sie von der Ordnung des benutzten Spectrums abhängt, und zwar der dritten Potenz der Ordnungszahl umgekehrt proportional ist. In der Praxis zeigt sich dies Gesetz indess gar nicht erfüllt; die Gestalt der Diamantstriche ist allein maassgebend, und bei den meisten Gittern sind einzelne Spectren einer Seite ganz besonders lichtstark; so kann es kommen, dass das Spectrum z. B dritter Ordnung auf einer Seite alle übrigen überwiegt, wie umgekehrt ein Spectrum so lichtschwach werden kann, dass es überhaupt unsichtbar ist. Auch können einzelne Theile einiger Spectren viel schwächer sein, als andere[1]). Die Helligkeit hängt weiter ab von der Menge des einfallenden Lichtes, also von der Breite der getheilten Fläche oder der Oeffnung von Collimator und Fernrohr; endlich ist auch das Verhältniss von Strichbreite und Zwischenraumbreite von Einfluss, aber praktisch in unbekannter Weise.

Gehen wir zur Dispersion über, so ist dieselbe gegeben durch das Verhältniss der Winkeländerung zu der entsprechenden Aenderung der Wellenlänge, also durch $\frac{d\delta}{d\lambda}$, dies ist nach Gleichung (1)

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{m}{e} \frac{1}{\cos(i + \delta)}. \tag{5}$$

Für ein und dasselbe Gitter, für constantes e, ist daher die Dispersion proportional zu m, der Ordnungszahl, d. h. das Spectrum 2., 3. Ordnung ist 2, 3 . . . Mal so lang als das 1. Ordnung. Ferner ist die Dispersion umgekehrt proportional zu $\cos(i + \delta)$, zum $\cos$ des Winkels, welchen das Fernrohr mit den Gitternormalen bildet. Ist $i = -\delta$, d. h. steht das Fernrohr normal zum Gitter, so ist der $\cos = 1$, die Dispersion ist am kleinsten; sie wächst, je mehr man nach der einen oder andern Seite das Fernrohr von dieser Stellung entfernt. Wir haben also bei Normalstellung des Fernrohrs einen Wendepunkt der Dispersionscurve, die Dispersion bleibt daher hier für eine grössere Strecke am constantesten, was für viele Messungen sehr zweckmässig zu beachten ist. Gleichung (5) zeigt ferner, dass die Dispersion umgekehrt proportional zu e, dem Abstand zweier Gitterstriche ist, oder proportional zur Zahl der Linien, welche pro Millimeter gezogen sind. Daher rührt das Bestreben, die Striche möglichst eng zu ziehen, und die Ueberlegenheit der neueren Gitter über die älteren.

Es bleibt noch die Schärfe oder Reinheit des Spectrums zu betrachten; dieselbe ist bedingt durch die Genauigkeit des gleichen Abstandes der Gitter-

---

[1]) Vergl. dazu die Abhandlung von ROWLAND: Gratings in theory and practice. Astronomy and Astrophysics 12, pag. 129—149. 1893.

striche, die Ordnung des benutzten Spectrums und die Zahl der benutzten Gitterlinien.

Nehmen wir der Einfachheit halber die Formel (2) für senkrechte Incidenz. Hätten wir ein Gitter, bei welchem die erste Hälfte 1000, die zweite 1001 Linien auf gleicher Strecke enthielte, und würde von der zweiten Hälfte unter einem Winkel δ eine Wellenlänge λ abgelenkt, so würde die erste Hälfte dorthin die Wellenlänge $\lambda\,(1 + \frac{1}{1000})$ ablenken, denn nach (2) wäre

$$sin\,\delta = \frac{m}{e}\,\lambda = \frac{m\lambda\,(1 + \frac{1}{1000})}{\frac{1}{1000}} = \frac{m\lambda}{\frac{1}{1001}}.$$

Zwei Spectrallinien, deren Wellenlänge A um $\frac{1}{1000}$ ihres Werthes verschieden ist, würden also nicht getrennt werden. Das Gleiche wäre selbstverständlich der Fall, wenn die verschiedene Entfernung der Striche nicht auf beide Hälften des Gitters vertheilt ist, sondern die Abstände bald $\frac{1}{1000}$ bald $\frac{1}{1001}$ betragen. Es ergiebt sich daraus, dass bei einem Gitter, welches zwei um $\frac{1}{1000}$ ihres Werthes verschiedene Linien trennen soll, der Linienabstand im Allgemeinen ebenfalls bis auf $\frac{1}{1000}$ seiner Grösse constant sein muss. Bei genauen Bestimmungen verlangt man Linien zu trennen, die nur um $\frac{1}{100000}$ ihres Werthes entfernt sind; haben wir daher ein Gitter von 500 Linien pro Millimeter, so müssen dieselben auf 0·000000002 *mm* constanten Abstand haben. Es scheint kaum begreiflich, wie diese Forderung in so vorzüglicher Weise durch die besten Gitter, z. B. die ROWLAND'schen, erfüllt wird. Bei schlechteren Gittern ist sie freilich auch oft genug nicht erfüllt; das giebt zu eigentümlichen Fehlern Veranlassung: hat nämlich die Mehrzahl der Striche gleichen Abstand, eine gewisse Anzahl aber einen anderen, so erzeugen die ersteren eine Reihe von Spectren, die letzteren eine schwächere zweite Reihe, die anders abgelenkt und dispergirt ist. Man sieht daher ausser den eigentlichen Linien noch schwächere Bilder an anderen Stellen.

Lassen sich im Gitter 2, 3 oder mehr Gruppen mit verschiedenem Abstand bilden, so erhält man 1, 2 oder mehr Bilder jeder Linie. Sind endlich gar nicht solche Gruppen zu bilden, sondern finden allmähliche Aenderungen des Abstandes statt, so erzeugt das Gitter ganz unscharfe Linien und ist unbrauchbar. Findet diese Aenderung aber gesetzmässig nach einer linearen Gleichung statt, so kann das Gitter ganz gute Bilder geben, wirkt aber gleichzeitig als Sammel- oder Zerstreuungslinse. Hat die Theil-Schraube einen periodischen Fehler, so entstehen sogen. Geister, d. h. die starken Linien sind begleitet von schwächeren, die in gleichen Abständen zu beiden Seiten der eigentlichen Linie liegen[1]).

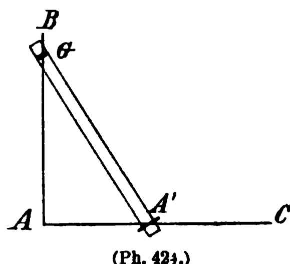
(Ph. 423.)

Sei ferner in Fig. 423 AB ein Gitter von n Linien, deren Abstand l sei, so dass die Gitterbreite gleich nl. Falle in die Richtung BD das Lichtmaximum für die Wellenlänge λ in der $m$ten Ordnung, dann ist die Projection von AB auf BD, also $BF = mn\lambda$. Fällt in die Richtung BE das nächste Minimum, so ist die Projection des Gitters auf diese Richtung: $BG = (mn + 1)\,\lambda$. Fällt in diese Richtung BE das $m$te Maximum der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$, so sind diese beiden Wellenlängen vollkommen scharf getrennt; das ist also der Fall, wenn $(mn + 1)\,\lambda = mn(\lambda + d\lambda)$; daraus folgt $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}$, d. h. der Bruchtheil $d\lambda$ der Wellenlänge, um welche zwei Spectrallinien verschieden sein können, wenn sie noch getrennt

[1]) Ueber Fehler der Gitter siehe QUINCKE, POGG. Ann. 146. 1872; CORNU, Compt. rend. 80. 1875; PEIRCE, Americ. Journ. Math. 2. 1879.

werden sollen, ist umgekehrt proportional zu *mn*, der Ordnungszahl des Spectrums und der Zahl der Gitterstriche. Um z. B. zwei Linien, deren Wellenlänge sich um $\frac{1}{1000}$ unterscheidet, zu trennen, wird ein Gitter mit 1000 Linien in der ersten Ordnung ausreichen, eines von 500 Linien erst in der zweiten Ordnung. Die grossen ROWLAND'schen Gitter mit 110000 Furchen werden danach in der ersten Ordnung in der Gegend der *D*-Linien noch zwei Linien trennen, die nur um 0·05 A. E. entfernt sind.

Für die Aufstellung der Concavgitter hat ROWLAND folgende Vorschrift gegeben, deren Gründe aus der gleich zu besprechenden Theorie erhellen werden: zwei Schienen *AB* und *AC* (Fig. 424) von der Länge des Krümmungsradius ρ des Gitters werden unter rechtem Winkel horizontal aufgestellt. Auf ihnen rollen zwei kleine Wagen, welche nach oben Zapfen tragen. Auf letzteren ruht ein Balken *GA'* von der Länge ρ, der wegen der Wagen und Zapfen in jede beliebige Lage geschoben werden kann, und stets die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks *AGA'* bildet. In *G* wird das Gitter aufgestellt, so dass seine getheilte Fläche genau über der Mitte das Zapfens, sein Krümmungsmittelpunkt in *A'* liegt. In *A'* befindet sich das Fadenkreuz eines Oculars, oder eine photographische Platte. Das Gitter ist an einem Halter befestigt, so dass man es um eine verticale und um eine horizontale Axe drehen kann. Der Spalt befindet sich in *A*; er lässt sich parallel *AC*, parallel *AB* verschieben, vertical heben und senken, und in seiner eigenen Ebene drehen, so dass er genau parallel den vertical gestellten Furchen des Gitters justirt werden kann.



(Ph. 424.)

Diese Vorrichtung bewirkt, dass Spalt, Gitter und Platte stets auf einem Kreise mit dem Radius $\frac{\rho}{2}$ liegen. Verschiebt man den Balken, so dass *A'* sich von *A* nach *C* bewegt, so hat man auf der Platte *A'* stets ein normales, scharfes Spectrum, und zwar zunächst bei *A* die kleinen Wellenlängen erster Ordnung, dann die grösseren, dann folgen die kleinen Wellenlängen zweiter Ordnung u. s. w.

Durch Benutzung dieser Einrichtung und Verwendung der Photographie hat man in den letzten Jahren mit Leichtigkeit eine ungeahnte Genauigkeit in der Wellenlängenbestimmung erreicht. Keine andere Methode leistet annähernd so viel, wie die Photographie mit ROWLAND's Concavgitter.

Die Theorie des Concavgitters ist von ROWLAND[1]), von GLAZEBROOK[2]), von MASCART[3]) angenähert behandelt worden, die Fehler bei der Einstellung von AMES[4]). Eine sehr vollständige, bisher nicht publicirte Behandlung hat das Gitter dann durch RUNGE gefunden, dessen Betrachtungen ich im Folgenden gekürzt wiedergeben will.

Von einem Punkte *A* gehen Lichtstrahlen aus; sie werden reflektirt von einer Fläche, deren einen Punkt wir *P* nennen; wir untersuchen die Lichtbewegung, welche in einem anderen Punkte *A'* des Raumes hervorgerufen wird. Dieselbe ist offenbar ein Maximum, wenn die reflektirende Fläche so gestaltet ist, dass für alle Punkte derselben $AP + PA'$ den gleichen Werth hat, weil dann

---

1) ROWLAND, Americ. Journ. (3) 26. 1883.
2) GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) 16. 1883.
3) MASCART, D'ALMEIDA, Journ. de Phys. (2) 2. 1883.
4) AMES, Phil. Mag. (5) 27. 1889.

alle Strahlen in A' mit der gleichen Phase anlangen. Die Fläche muss dazu ein Rotations-Ellipsoid sein, dessen Brennpunkte A und A' sind.

Denken wir uns nun eine bestimmte Wellenlänge λ, und alle Rotationsellipsoide construirt, für welche $AP + PA'$ ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist; das reflektirende Flächenstück durchsetze die Schaar von Ellipsoiden, so wird es in eine grosse Zahl schmaler Zonen zerschnitten, von welchen das Licht mit abwechselnd entgegengesetzten Phasen nach A' gelangt. Ist der Krümmungsradius des Flächenstücks und die Abstände von A und A' von der reflektirenden Fläche gross gegen λ, so haben benachbarte Zonen nahe die gleiche Ausdehnung, bringen in A' die gleiche Intensität hervor, und vernichten sich daher vollständig. Wenn wir aber auf dem von zwei benachbarten Zonen gebildeten Gebiet eine Furche ziehen, so heben beide Zonen ihre Wirkung in A' im Allgemeinen nicht mehr auf, und wenn auf jedem Zonenpaar eine analoge Furche gezogen ist, d. h. eine solche, welche das Uebrigbleiben von Licht von gleicher Phase bedingt, so werden alle Paare eine gewisse Intensität in A' erzeugen.

Es ist klar, dass auch Licht von der Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{4}, \ldots$ in A' eine gewisse Intensität erzeugt: die bisher betrachteten Zonen zerfallen dann in 2, 3, 4, u. s. w., also auf je 4, 6, 8 solcher Zonen kommt eine Furche, welche durch die Veränderung der Phase die vollständige Aufhebung dieser Zonen verhindert. Alle andern Wellenlängen dagegen geben, wie sich zeigen lässt, keine merkliche Intensität in A'.

Es soll nun untersucht werden, wie eine Kugelfläche gefurcht werden muss. Sie möge die YZ-Ebene im Coordinatenanfangspunkt berühren, ρ sei ihr Radius, also $x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x = 0$ ihre Gleichung. Die Punkte A und A' sollen in der XY-Ebene liegen, die Coordinaten a, b und a', b' haben. Ist dann P wieder ein Punkt der reflektirenden Fläche in der Nähe des Coordinatenanfangspunktes, so ist

$$AP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2 - 2ax - 2by + x^2 + y^2 + z^2,$$

wenn $a^2 + b^2 = r^2$ gesetzt ist. Nehmen wir y und z klein, berücksichtigen, dass x für die Kugelfläche von zweiter Ordnung gegen y und z ist, so folgt

$$AP = r - \frac{b}{r}y,$$

und ebenso

$$A'P = r' - \frac{b'}{r'}y, \quad \text{wo} \quad (r')^2 = (a')^2 + (b')^2.$$

Die Doppelzonen, in denen je eine Furche liegen soll, werden also von den Flächen begrenzt, für welche $AP + PA'$ ein Vielfaches der Wellenlänge ist, also

$$r + r' - \left(\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}\right)y = n\lambda.$$

Ist $+e$ die Zu- oder Abnahme von y von der $n$ten Furche zur $(n+1)$ten, so muss also $\left(\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}\right)e = \lambda$ sein, d. h. die Furchen liegen in äquidistanten, der XZ-Ebene parallelen Ebenen, in Abständen $e = \lambda\left(\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}\right)^{-1}$.

Dies gilt nur, wenn y und z sehr klein sind, was nicht der Fall ist; daher müssen wir die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigen. Ersetzen wir im Ausdruck für AP^2 das Glied $-2ax$ durch

$$-\frac{a}{\rho}\ (x^2+y^2+z^2),$$

so wird

$$AP^2 = r^2 - 2by + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)y^2 + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)z^2 + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)x^2,$$

also bei Vernachlässigung der Glieder dritten Grades

$$AP = r - \frac{b}{r}\,y + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)y^2 + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)z^2 - \frac{1}{2r^3}\,b^2y^2$$

$$= r - \frac{b}{r}\,y + \frac{a}{2r}\left(\frac{a}{r_2}-\frac{1}{\rho}\right)y^2 + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{a}{\rho}\right)z^2.$$

Es würde also, — bis auf Glieder dritter Ordnung, — bei den für kleine y und z gefundenen Begrenzungen der Werth von $AP + A'P$ abweichen, wenn y und z nicht klein sind, um

$$\frac{a}{2r}\left(\frac{a}{r^2}-\frac{1}{\rho}\right)y^2 + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{a}{3}\right)z^2 + \frac{a'}{2r'}\left(\frac{a'}{r'^2}-\frac{1}{\rho}\right)y^2 + \frac{1}{2r'}\left(1-\frac{a'}{\rho}\right)z^2.$$

So lange diese Abweichung kleiner als $\frac{\lambda}{4}$ ist, wird die Lichtbewegung in A, durch das Hinzukommen neuer Zonen wenigstens nicht geschwächt, wenn auch die Zonen nicht voll wirken[1]). Für besondere Lage der Punkte A und A' verschwinden aber diese Glieder. Um die dazu erforderliche Lage der Punkte zu finden, derken wir uns die reflektirende Fläche so beschränkt, dass die Glieder mit z gegen die übrigen nicht in Betracht kommen; dann braucht nur

$$\frac{a}{2r}\left(\frac{a}{r^2}-\frac{1}{\rho}\right) + \frac{a'}{2r'}\left(\frac{a'}{r'^2}-\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

zu sein.

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt durch $r^2 = a\rho$ und $r'^2 = a'\rho$, d. h. wenn A und A' auf einem Kreise mit dem Radius $\frac{\rho}{2}$ liegen, dessen Mittelpunkt auf der x-Axe im Abstand $\frac{\rho}{2}$ vom Coordinaten-Anfangspunkt, also auch vom Gitter, liegt. Dies ist daher die von ROWLAND adoptirte Lage: Spalt, Gitter und photographische Platte liegen auf einem Kreise mit dem Radius $\frac{\rho}{2}$. Die Lage des Bildes A' von A ist bedingt durch die Gleichung

$$\left(\frac{b}{r}+\frac{b'}{r'}\right)e = \pm\lambda,$$

oder wenn man Polarcoordinaten einführt durch: $(\sin\varphi + \sin\varphi')\,e = \pm\lambda$. Wir haben eben gesehen, dass auch Strahlen von der Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{4} \ldots$ an derselben Stelle ein Bild erzeugen; daraus folgt, dass die Strahlen von der Wellenlänge λ auch noch an anderen Stellen des Kreises vereinigt werden, nämlich dort, wo die Strahlen von der Wellenlänge 2λ, 3λ, 4λ Lichtquellen erzeugen. Die möglichen Lagen von A' für eine Wellenlänge λ sind alle gegeben durch:

$$\left(\frac{b}{r}+\frac{b'}{r'}\right)e = m\lambda,$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist; $m = 0$ entspricht dem direkten Spaltbilde, $m = \pm 1$ den Spectren erster Ordnung zu beiden Seiten u. s. w.

---

[1]) Streng genommen geben die äussersten Zonen ihr Maximum an einer andern Stelle, als A'; sie wirken also dahin, die Spectrallinien zu verbreitern.

Die Zahl der möglichen Ordnungen ist nicht unbegrenzt, sondern hängt für eine gegebene Wellenlänge von der Gitterconstante e, dem Abstand zweier Furchen ab; denn da $e \sin\varphi' = m\lambda - e \sin\varphi$, und $\sin\varphi$, zwischen $+1$ und -1 liegt, so muss $m\lambda - e \sin\varphi$ zwischen $+e$ und $-e$ liegen. Die grössten Werthe von m, welche noch vorkommen können, sind daher die grössten ganzen Zahlen welche in $\frac{e \sin\varphi + e}{\lambda}$ und $\frac{e \sin\varphi - e}{\lambda}$ enthalten sind.

Bei der ROWLAND'schen Aufstellung beobachtet man nur die Bilder von A, die dem Gitter diametral gegenüber liegen; für sie ist $b' = 0$, also wird die Gleichung $\frac{be}{r} = m\lambda$ oder $\sin\varphi \cdot e = m\lambda$. Dadurch ist für jedes λ und vorgeschriebene Ordnung des Spectrums die Lage des Balkens GA' bestimmt: die Entfernung $A'A$ ist für $b' = 0$ gleich $\rho \sin\varphi$ oder $\frac{\rho m \lambda}{e}$, d. h. AA' ist der Wellenlänge proportional. Man bringt daher auf der Schiene AC, auf welcher A' sich verschiebt, eine constante Theilung an, welche die Wellenlänge ablesen lässt, die auf der an die betreffende Stelle geschobenen photographischen Platte sichtbar ist.

Die ROWLAND'sche Aufstellung von Spalt, Gitter und Platte auf einem Kreise vom Radius $\frac{\rho}{2}$ war gewählt, weil dann die Glieder von 2. Ordnung in y verschwinden; gleichzeitig werden aber auch die Glieder 3. Ordnung 0, so dass nur die Glieder 4. Ordnung übrig bleiben, welche bei übermässiger Gitterbreite schädlich werden können; RUNGE berechnet, dass die äusserste erlaubte Gitterbreite

$$2\rho \sqrt[4]{\frac{2e \cot\varphi}{\rho m}}$$

ist. Bisher ist z stets als unendlich klein betrachtet, d. h. nur die in der XY-Ebene verlaufenden Strahlen sind berücksichtigt worden, während die Furchen eine gewisse Länge haben, also z von derselben Ordnung ist, wie y. RUNGE denkt sich das Gitter in Zonen parallel der Y-Richtung getheilt, so dass $AP + PA'$ von Zone zu Zone im Mittel um $\frac{\lambda}{2}$ wächst. Das von diesen Zonen nach A' kommende Licht hat also abwechselnd entgegengesetzte Phase, schwächt das von der mittelsten Zone kommende Licht; da aber die Zonen immer schmaler werden, je weiter sie von der Mitte des Gitters abliegen, und sich gegenseitig zum Theil vernichten, so bleibt ein grosser Theil des von der mittleren Zone herrührenden Lichtes wirksam. Immerhin ist das Licht schwächer, als wenn nur die mittelste Zone vorhanden wäre. RUNGE berechnet die Breite der Zonen für die Verhältnisse der grössten im Handel befindlichen ROWLAND'schen Gitter, für welche etwa $\rho = 650$ *cm*, $e = 127 \times 10^{-6}$ *cm* ist, und findet z. B. für die Wellenlänge $\lambda = 600\,\mu\mu$[1]) die Breite der mittleren Zone 0·76 *cm*, die zu beiden Seiten liegenden folgenden Zonen zusammen 0·56 *cm*, die folgenden 0·34 *cm* u. s. w. Je kleiner die Wellenlänge, desto breiter wird die mittelste Zone, so dass sie für $\lambda = 192\,\mu\mu$ gleich der Länge der Furchen sein würde.

---

[1]) $\mu\mu$ bedeutet Milliontel Millimeter. Ich habe (Lehrbuch der Spectralanalyse, pag. 11) diese Bezeichnung vorgeschlagen, und sie ist auch ziemlich allgemein acceptirt worden. Sehr häufig freilich ist sie auch falsch angewandt worden, z. B. für ANGSTRÖM'sche Einheiten, die gleich 0·1 $\mu\mu$ sind; oder es ist dafür μ geschrieben worden, was doch 0·001 *mm* bedeutet.

Man darf aber nicht schliessen, die Furchen, welche bei obigen Gittern 4 *cm* Länge haben, seien zu lang; denn wir haben keine punktförmige Lichtquelle sondern einen Spalt. RUNGE zeigt, dass das Gitter astigmatisch wirkt, dass jeder Punkt des Spaltes durch eine kurze, dem Spalt und den Furchen parallele Linie abgebildet wird. Indem RUNGE nun auch A und A' aus der XY-Ebene herausrücken lässt, zeigt er, dass die verschiedenen Punkte der Spaltes verschiedene astigmatische Bilder erzeugen; es ergiebt sich die Gleichung: $\frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} = 0$, d. h. wenn der leuchtende Punkt um c gehoben wird, senkt sich die Mitte seines Bildes um $c' = \frac{r'}{r} c$. Die Bilder der verschiedenen Punkte des Spaltes legen sich nun, wenn der Spalt genau parallel den Furchen steht, übereinander und interferiren nicht, da sie von verschiedenen leuchtenden Punkten herrühren. Sie bilden so eine Lichtlinie, die in dem mittleren Stück gleiche Helligkeit hat, an beiden Enden abfällt. RUNGE berechnet die Länge des astigmatischen Bildes eines Punktes, und die erforderliche Länge des beleuchteten Spaltes, wenn das Gitter ganz ausgenutzt werden soll.

Wir kommen endlich zur Dispersion des Gitters und werden hier den Grund finden, warum ROWLAND die Spalten nur an der dem Gitter diametral gegenüberliegenden Stelle des Kreises beobachtet. Wir fanden oben: $\left(\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}\right) e = m\lambda$ oder $(\sin\varphi + \sin\varphi') e = m\lambda$. Bezeichne λ_0 die Wellenlänge, welche im Spectrum $m$ter Ordnung $\varphi' = 0$, d. h. dem Krümmungsmittelpunkt des Gitters, oder der Mitte der photographischen Platte entspricht, so ist $\sin\varphi \cdot e = m\lambda_0$, also: $\sin\varphi' \cdot e = m(\lambda - \lambda_0)$ oder $e \cdot \sin\frac{s}{\rho} = m(\lambda - \lambda_0)$, wenn s die Bogenlänge des Kreises vom Mittelpunkt der Platte bis zum Punkt A' bezeichnet. Durch Differentiation folgt:

$$\frac{e}{\rho} \cos \frac{s}{\rho}\, ds = m\, d\lambda,$$

$\frac{ds}{d\lambda}$ ist der Maassstab, in welchem das Spectrum auf der Platte entworfen ist. Er hat seinen kleinsten Werth für $s = 0$, d. h. in der Mitte der Platte, nimmt nach beiden Seiten zu umgekehrt proportional zu $\cos\varphi$. In der Nähe des Minimums aber bleibt er so nahezu constant, dass man, wie RUNGE in einer ausführlichen Discussion zeigt, bei Platten von 50 *cm* Länge, welche in 1. Ordnung etwa 1000 ANGSTRÖM'sche Einheiten enthalten, an den Enden höchstens ein Fehler von 0·003 $\mu\mu$ macht, wenn man den Maassstab als constant betrachtet. Der Fehler ist der Ordnungszahl umgekehrt proportional. Diese für alle Messungen erwünschte Constanz des Maassstabes ist der Grund für die ROWLAND-sche Benutzungsweise des Gitters. Besonders wichtig ist noch, dass der Maassstab unabhängig von φ ist, d. h. für alle Stellungen des Balkens derselbe ist.

Betrachten wir den Maassstab als constant, so können wir $\frac{ds}{d\lambda} = \frac{me}{\rho} \cos\varphi$ auch schreiben: $s = \frac{me}{\rho} \lambda$; dies zeigt, dass der Maassstab der Platten derselbe ist, wie der, welchen wir auf der Schiene AC angebracht haben.

Wenn die Schienen AB und AC genau einen rechten Winkel bilden, über dessen Eckpunkt der Spalt steht; wenn der Balken GA' genau die Länge des Krümmungsradius ρ hat, so dass bei seiner Verschiebung Gitter und Platte sich stets genau über den Schienen befinden; wenn endlich die Mitte des Spaltes,

des Gitters und der Platte stets in einer Horizontalebene durch die Gitternormale liegen, so sollte, wenn der Spalt mit weissem Licht beleuchtet ist, bei jeder Stellung des Balkens auf derselben Stelle der Platte ein scharfes Spectrum entworfen sein. Die Praxis aber zeigt trotz grösster Sorgfalt bei der Aufstellung Abweichungen von zweierlei Art beim Hin- und Herfahren des Balkens GA'; erstens schwankt die Höhe des Spectrums, so dass es mitunter gar nicht auf die schmale Platte fällt, und zweitens ist das Spectrum nicht immer scharf, sondern man müsste dazu die Platte dem Gitter nähern oder entfernen. Diese Erscheinungen rühren theils von nicht absolut richtiger Justirung her, theils und hauptsächlich wohl davon, dass die Schienen nicht ganz gerade Linien sind und die Zapfen, welche den Balken tragen, nicht in allen Stellungen vertical bleiben, weil sie der Durchbiegung des Balkens in verschiedenen Stellungen desselben verschieden nachgeben können. Für die Benutzbarkeit des Gitters ist es aber von höchster Wichtigkeit, dass man diese Uebelstände beseitigt; es lässt sich das wohl rein empirisch machen, aber nur mit grossem Zeitaufwand und sehr unsicher. Dagegen lässt sich ziemlich leicht eine Justirung herstellen, wenn man untersucht hat, wie eine Verstellung des Spaltes oder des Gitters aus der richtigen Lage auf das Spectrum wirkt.

Ein Heben oder Senken des Spectrums wird hervorgebracht 1) durch Senken oder Heben des Spaltes; 2) durch Verstellung des Gitters, so dass dessen Normale sich hebt oder senkt; 3) durch Verstellung des Gitters, so dass dessen Normale sich in einer Horizontalebene dreht. Eine Hebung des Spaltes um 1 *cm* senkt das Spectrum um $\frac{1}{\cos\varphi}$ *cm*, wenn, wie früher, φ den Winkel zwischen Schiene AB und Balken GA' bedeutet. Eine Hebung der Gitternormale, so dass der Krümmungsmittelpunkt um 1 *cm* steigt, hebt das Spectrum: $(1 + \cos\varphi)$ *cm*. Eine Drehung der Gitternormale um den Winkel ω nach dem Spalt hin bewirkt eine Hebung des Spectrums um $\rho \sin\varphi \cdot \omega$, oder, wenn wir $\omega = \frac{1}{\rho}$ setzen, um $\sin\varphi$.

Runge berechnet eine Tabelle, indem er statt des Winkels φ die Wellenlänge einführt; sie giebt die Senkung (negatives Vorzeichen) oder Hebung des Spectrums für die betreffende Wellenlänge an, die Tabelle gilt für die grössten Rowland'schen Gitter, für welche $e = 127 \times 10^{-6}$ *cm*; für ein Gitter mit andern Gitterconstanten e' ist nur die erste Colonne mit $\frac{e'}{e}$ zu multipliciren. Folgendes ist ein Auszug aus derselben:

λ	Spalt um 1 *cm* gehoben	Krümmungsmittelpunkt um 1 *cm* gehoben	Gitter um den $\angle \frac{1}{\rho}$ dem Spalt zugedreht
200 $\mu\mu$	− 1·01 *cm*	+ 1·99 *cm*	+ 0·16 *cm*
400 „	− 1·05 „	+ 1·95 „	+ 0·32 „
600 „	− 1·13 „	+ 1·88 „	+ 0·47 „
800 „	− 1·29 „	+ 1·78 „	+ 0·63 „
1000 „	− 1·62 „	+ 1·62 „	+ 0·79 „
1200 „	− 3·00 „	+ 1·33 „	+ 0·95 „

Die Wirkungen der drei Verstellungen superponiren sich. Schwankt also das Spectrum, so kann man für drei Stellungen des Balkens nach obiger Tabelle das Spectrum an die richtige Stelle bringen. Durch Wiederholung des Verfahrens kommt man bald zu einer genügenden Constanz.

Ist ferner das Spectrum nicht durchweg scharf, d. h. der Abstand von Gitter und Spectrum veränderlich, so können folgende Verstellungen daran Schuld sein: 1) Wenn der Spalt vom Gitter um 1 *cm* entfernt wird, wird das Spectrum dem Gitter um 1 *cm* genähert. 2) Wenn der Krümmungsmittelpunkt nicht über der Schiene liegt, weil der Querbalken um α zu lang ist, so liegt das Spectrum um $\alpha(1 + \cos\varphi)$ vom Ende des Balkens nach dem Gitter zu. 3) Wird der rechte Winkel zwischen den Schienen um ε vergrössert, so wird das Spectrum um $\rho \sin\varphi \, tg\,\varepsilon$ vom Gitter fortgerückt. 4) Wird das Gitter um eine senkrechte Axe gedreht um den Winkel ε, so dass seine Normale vom Spalt fort rückt, so wird das Spectrum um $\rho \sin\varphi\,\varepsilon$ dem Gitter genähert. 5) Der Spalt werde auf der Schiene AC nach C zu verschoben um α, so ist das Spectrum vom Gitter um $\alpha\, tg\,\varphi$ abgerückt. 6) Das Gitter werde auf dem Querbalken m das Stück α zurückgeschoben, so dass es sich nicht mehr über der Schiene AB bewegt; dann ist das Spectrum um $\alpha(1 + \cos\varphi - \sin\varphi\, tg\varphi)$ von der Platte nach dem Gitter zu entfernt.

Runge berechnet auch hier eine Tabelle nach Wellenlänge, aus der wieder ein Auszug folgt:

λ	Spalt um 1 *cm* vom Gitter entfernt	Querbalken bei A' um 1 *cm* verlängert	Rechter ∠ um $\frac{1}{\rho}$ zu gross	Gitternormale um 1 *cm* nach dem Spalt gedreht	Spalt um 1 *cm* der Platte genähert	Gitter auf dem Querbalken um 1 *cm* zurückgeschoben
200 $\mu\mu$	− 1 *cm*	− 1·99 *cm*	+ 0·16 *cm*	− 0·16 *cm*	+ 0·16 *cm*	− 1·96 *cm*
400 „	− 1 „	− 1·95 „	+ 0·32 „	− 0·32 „	+ 0·33 „	− 1·85 „
600 „	− 1 „	− 1·88 „	+ 0·47 „	− 0·42 „	+ 0·54 „	− 1·63 „
800 „	− 1 „	− 1·78 „	+ 0·63 „	− 0·63 „	+ 0·81 „	− 1·27 „
1000 „	− 1 „	− 1·62 „	+ 0·79 „	− 0·79 „	+ 0·28 „	− 0·61 „
1200 „	− 1 „	− 1·33 „	+ 0·95 „	− 0·95 „	+ 0·85 „	+ 1·38 „

Das positive Vorzeichen bedeutet, dass das Spectrum sich dem Gitter nähert. Auch hier superponiren sich die einzelnen Fehler.

Im Allgemeinen wird man die Stellung der Schienen, d. h. den rechten Winkel, unverändert lassen, ebenso die Entfernung von Camera und Gitter. Man hat dann aber noch durch die zweite, fünfte und sechste Colonne die Möglichkeit, für drei verschiedene Stellungen des Querbalkens das Spectrum zu scharfer Einstellung auf der Platte zu bringen; man beobachtet also z. B. für die Stellungen 400 $\mu\mu$, 800 $\mu\mu$ (d. h. 400 $\mu\mu$ in zweiter Ordnung) und 1200 $\mu\mu$, wie weit das scharfe Spectrum vor oder hinter der Platte liegt, und berechnet nach obiger Tabelle die Correcturen, welche die drei Fehler zum Verschwinden bringen. Nach der Justirung wird das Spectrum gewöhnlich überall scharf sein, eventuell wiederholt man das Verfahren.

Für die praktische Benutzung der Concavgitter sei noch hervorgehoben, dass Parallelität von Spalt und Gitterfurchen die erste Bedingung für scharfe Spectren ist, wegen des Astigmatismus der Gitter.

3) Die Beobachtung des Spectrums.

Ueber die Beobachtung und Messung im sichtbaren Theil des Spectrums sind nur wenige Worte zu bemerken. Bei den kleinen, sogen. chemischen Spectralapparaten, welche nur durch ein schwach dispergirendes Prisma ein Spectrum erzeugen, wird auf dasselbe eine Scala projicirt. Dazu ist ausser Collimator und Fernrohr noch ein drittes Rohr vorhanden, welches an dem einen Ende eine photographische Mikrometertheilung trägt, am andern, dem Prisma zugekehrten Ende eine Linse, in deren Brennebene jene Theilung sich befindet. Dies Rohr steht

so, dass die von der Theilung kommenden Strahlen an der Austrittsfläche des Prismas reflectirt in das Fernrohr gelangen, so dass man die Theilung zugleich mit dem Spectrum scharf sieht. Nach BUNSEN's Vorgang pflegt man die Natriumlinien mit dem Theilstrich 50 oder 100 coincidiren zu lassen. Nachdem man die Lage einer Reihe bekannter Linien an der Scala abgelesen hat, kann man die Wellenlänge unbekannter Linien leicht angenähert aus ihrer Lage ermitteln, am besten graphisch.

Für grössere Apparate mit mehreren Prismen und automatischer Erhaltung des Minimums wird die Stellung des Fernrohrs am Theilkreis benutzt, oder wenn man Apparate mit Rückkehr der Strahlen hat, bei welchen auch das Fernrohr feststeht, die Stellung der Mikrometerschraube, welche das letzte Prisma bewegt Auch diese Theilungen müssen zuerst mit Hilfe bekannter Linien ausgewerthet werden. Indessen ist diese Methode von sehr zweifelhaftem Werth. Die mechanische Ausführung ist selten so vollkommen, dass derselben Einstellung des Fadenkreuzes die gleiche Wellenlänge entspricht, auch kommt in hohem Grade die mit veränderter Temperatur veränderte Brechung und Dispersion der Prismen in Betracht. Das einzig zuverlässige Mittel ist, dass man ein Vergleichsspectrum benutzt, z. B. das Sonnenspectrum oder Eisenspectrum. Entweder entwirft man dasselbe mittelst des Vergleichsprismas gleichzeitig im Apparat, was aber nicht zu empfehlen ist, da die Spectren bei etwas verschiedener Einfallsrichtung der beiden Strahlenbündel leicht etwas gegen einander verschoben sein können; oder man benutzt die Spectren hinter einander, stellt z. B. das Fadenkreuz auf die zu messende Linie ein, lässt dann Sonnenlicht eintreten und untersucht, bei welcher FRAUNHOFER'schen Linie das Fadenkreuz steht, resp. misst den Abstand zu den beiden benachbarten Linien, zwischen welchen man geradlinig interpolirt.

Für Beobachtung der ultrarothen Strahlung haben wir im Wesentlichen drei verschiedene Hilfsmittel, welche auf den drei Wirkungen dieser Strahlen beruhen, den wärmenden, den photochemischen und den Wirkungen auf phosphorescirende Körper.

HERSCHEL[1]) entdeckte die ultrarothen Strahlen, indem er ein Thermometer jenseits des rothen Endes des Spectrums am meisten steigen sah. Er glaubte später[2]) im Sonnenspectrum drei kalte Stellen, d. h. FRAUNHOFER'sche Linien zu finden, indem er ein ultrarothes Spectrum auf schwarzes mit Alkohol befeuchtetes Papier fallen liess und fand, dass an drei Stellen der Alkohol langsamer verdunstete. MELLONI und RAYLEIGH[3]) konnten den Versuch nicht wiederholen, sie vermuthen einen Versuchsfehler.

Mit einem sehr empfindlichen Thermometer, welches durch Mikroskop abgelesen noch $\frac{1}{400}$ Grad anzeigte, haben FIZEAU und FOUCAULT[4]) im Jahre 1847 schöne Untersuchungen ausgeführt.

In den folgenden Jahren nahm man statt des Thermometers die viel empfindlichere Thermosäule. FRANZ[5]), MÜLLER[6]), LAMANSKY[7]), MOUTON[8]), DESAINS[9])

---

1) HERSCHEL, Phil. Trans. 90. 1800.
2) HERSCHEL, Phil. Trans. 130. 1840.
3) MELLONI, Ann. de Chim. (2) 74. 1840; RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 4. 1877.
4) FIZEAU und FOUCAULT, Ann. de Chim. (5) 15. 1878.
5) FRANZ, POGG. Ann. 94. 1855.
6) MÜLLER, POGG. Ann. 105. 1858.
7) LAMANSKY, POGG. Ann. 146. 1872.
8) MOUTON, Compt. rend. 88 u. 89. 1879.
9) DESAINS und CURIE, Compt. rend. 90. 1880; Compt. rend. 94. 1882.

wären hier zu nennen. Sie haben meist das Sonnenspectrum, daneben auch das von Kalklicht oder glühendem Platin untersucht. Benutzt werden meist Prismen aus Steinsalz, auf deren Durchsichtigkeit für alle langen Wellen MELLONI[1]) vielfach hingewiesen. Später fand man, dass Sylvin und Flussspath ebenso gut geeignet seien.

Ein noch weit vollkommeneres Instrument zur Wahrnehmung dunkler Strahlen ist dann von LANGLEY[2]) eingeführt worden, welches er zuerst *actinic balance*, später Bolometer nannte. Es beruht auf der Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit mit der Temperatur: auf einen sehr dünnen Metalldraht, der berusst ist, fällt die Strahlung und erwärmt ihn, wodurch der Widerstand wächst. Der Draht bildet einen Zweig der WHEATSTONE'schen Brücke, deren Galvanometer ohne Bestrahlung in Ruhe war, nun einen Ausschlag giebt. Man hat eine solche Empfindlichkeit erreicht, dass noch eine Erwärmung um 1 Milliontel Grad CELSIUS nachweisbar ist. Das Bolometer ist ausser von LANGLEY[3]) selbst noch besonders von R. v. HELMHOLTZ[4]), W. H. JULIUS[5]), K. ANGSTRÖM[6]), RUBENS[7]) benutzt worden; seine Theorie behandelt namentlich REID[8]), LUMMER und KURLBAUM[9]). Von LANGLEY sind die Emissionsspectra der Sonne, des Mondes und verschiedener fester Körper zwischen 0° und 1500° untersucht worden, von den andern Beobachtern theils Emissionsspectra von Flammen, theils Absorptionsspectra. LANGLEY hat im Spectrum des Eises die Wellenlänge 30 μ erreicht. Einen Versuch, das Radiometer zu benutzen, hat PRINGSHEIM[10]) gemacht.

Die photochemische Wirkung des Lichtes auf Silbersalze macht sich bekanntlich namentlich im Blau, Violett und Ultraviolett geltend. Aber E. BECQUEREL[11]) fand, dass vorher kurz belichtetes Chlorsilber auch für Roth empfindlich werde, und DRAPER[12]) gelang es sogar, den Anfang des Ultraroth zu photographiren. Immerhin waren diese Resultate zu unvollkommen, als dass die Photographie ausgiebiger benutzt worden wäre, um die grünen bis ultrarothen Theile des Spectrums zu untersuchen. Erst als H. W. VOGEL[13]) sein Princip der optischen Sensibilisatoren entdeckte, wurden auch die längeren Wellen der Photographie zugänglich. Nach diesem Princip wird eine Platte durch Zusatz eines Farbstoffes, der bestimmte Wellenlängen absorbirt, für diese Wellen lichtempfindlich. So kann man die Platten durch Eosin, Erythrosin, Naphtolblau, Cyanin, Coerulein

[1]) MELLONI, Ann. de Chim. (2) 55. 1833.

[2]) LANGLEY, Americ. Journ. (3) 21. 1881.

[3]) LANGLEY, WIED. Ann. 19. 1883; WIED. Ann. 22. 1884; Americ. Journ. (3) 28, 1884; 31. 1886; 32. 1886; 36. 1888; 38. 1889.

[4]) R. v. HELMHOLTZ, die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase, Berlin bei Leonhard Simion. 1890.

[5]) JULIUS, die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase, ibid. 1890; Verhandel. Koninkl. Akad. v. Wetens, Amsterdam 1892.

[6]) ANGSTRÖM, WIED. Ann. 36. 1889; Oefvers. af Svensk. Vetensk. Akad. Förkh. 1890.

[7]) RUBENS und SNOW, WIED. Ann. 46. 1892.

[8]) REID, Americ. Journ. (3) 35. 1888.

[9]) LUMMER und KURLBAUM, WIED. Ann. 46. 1892.

[10]) PRINGSHEIM, WIED. Ann. 18. 1883.

[11]) E. BECQUEREL, Ann. de Chim. (3) 9, 1843.

[12]) DRAPER, Phil. Mag. (3) 22. 1843.

[13]) VOGEL, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1873.

für Grün, Gelb, Roth, sogar Ultraroth empfindlich machen[1]). Die Photographie der sichtbaren langen Wellen nach dieser Methode wird jetzt allgemein ausgeführt. Dagegen ist die Photographie des Ultrarothen bisher nicht recht gelungen. ABNEY[2]) hat eine andere Methode gefunden: eine besondere Emulsion von Bromsilber und Collodium fand er im Ultraroth empfindlich, und es gelang ihm, das Sonnenspectrum mit Prisma und Gitter zu photographiren, sowie wichtige Untersuchungen namentlich über Absorptionsspectra auszuführen. Er hat die Wellenlänge 2·7 μ erreicht.

Die dritte Methode zur Wahrnehmung ultrarother Strahlen beruht auf ihrer von E. BECQUEREL entdeckten Fähigkeit, vorher kurz belichtete phosphorescirende Schichten für kurze Zeit zu hellerem Leuchten anzufachen, worauf aber das Phosphorescenzlicht schnell verschwindet. Die gleiche Wirkung giebt Erwärmung einer leuchtenden Platte, also haben wir es auch wohl hier nur mit der Wärmewirkung der Strahlen zu thun. Lassen wir z. B. das ultrarothe Sonnenspectrum auf eine Schicht von BALMAIN'scher Leuchtfarbe fallen, welche vorher schwach belichtet wurde, oder auf welche gleichzeitig schwaches diffuses Licht fällt, so sieht man erst den Spectralstreif heller leuchten, die FRAUNHOFER'schen Linien unverändert bleiben; nach einiger Zeit aber wird der Spectralstreif dunkel, und nur die nicht vom ultrarothen Licht getroffenen Stellen, auf welche FRAUNHOFER-sche Linien fallen, leuchten noch, wir haben ein negatives Bild des Spectrums. Nach BECQUEREL ist besonders die natürliche oder künstliche hexagonale Blende geeignet, aber auch einige Schwefelcalciumarten sind sehr gut. — In dieser Weise haben E. und H. BECQUEREL[3]) das ultrarothe Sonnenspectrum, einige Emissionsspectra und Absorptionsspectra untersucht. LOMMEL[4]) hat das Verfahren noch dadurch verbessert, dass er die phosphorescirende Platte, nachdem sie dem ultrarothen Spectrum ausgesetzt gewesen, in Contakt mit einer gewöhnlichen photographischen Trockenplatte bringt. Das Phosphorescenzlicht wirkt sehr kräftig, so dass man das Bild nach kurzer Berührung entwickeln und so eine dauernde Ansicht des Spectrums herstellen kann. LOMMEL hat in dieser Weise das Sonnenspectrum mit Gitter aufgenommen.

Es ist endlich zu erwähnen, dass das menschliche Auge im Stande ist, noch längere Wellen zu sehen, als gewöhnlich angenommen wird. Wenn man die kürzeren Wellen vollständig abblendet, z. B. durch dunkelrothes Glas, kann man noch über 800 μμ hinaus sehen. BREWSTER[5]) giebt an, dass das Ultraroth besser sichtbar wird, wenn man die Augen vorher Ammoniakdämpfen aussetzt.

Das immer relativ schwache ultrarothe Spectrum ist meist mit Prisma untersucht. Es ist noch zu besprechen, wie in diesem Falle die Wellenlängen zu ermitteln sind, oder wie die Ablenkung durch das Prisma mit der Wellenlänge zu-

---

[1]) Von der sehr umfangreichen Literatur seien angeführt EDER, Wien. Ber. 92, Bd. 2. 1885; 94, Bd. 2. 1886; VOGEL, die Photographie farbiger Gegenstände, Berlin bei Oppenheim 1885; BURBANK, Phil. Mag. (5) 26. 1888; HIGGS, Nat. 43. 1891.

[2]) ABNEY, Phil. Trans. 171. 1880; Phil. Trans. 177. 1886; Proc. Roy. Soc. 31. 1881.

[3]) E. BECQUEREL, Compt. rend. 63. 1866; Compt. rend. 77. 1873; Compt. rend. 83. 1876; Ann. de Chim. (5) 10. 1877; Compt. rend. 104. 1887; Compt. rend. 107. 1888; H. BECQUEREL, Compt. rend. 96. 1883; Compt. rend. 97. 1883; Ann. de Chim. 30. 1883; Compt. rend. 99. 1884; Compt. rend. 102. 1886.

[4]) LOMMEL, WIED. Ann. 20. 1883; WIED. Ann. 30. 1887; Sitzungsber. d. k. Bayer. Akad. d. Wiss. 18. 1888; 20. 1890.

[5]) BREWSTER, Compt. rend. 30. 1850.

sammenhängt. Die älteren Dispersionsformeln verlieren in diesem Gebiet alle Gültigkeit.

Die erste Wellenlängenbestimmung haben FIZEAU und FOUCAULT[1]) gemacht. Sie bringen in den Gang der Strahlen vor dem Spalt zwei parallele oder gekreuzte NIKOL'sche Prismen, zwischen denen sich ein Gypsblättchen unter 45° gegen die NIKOL's befindet. Dann ist das Spectrum von dunklen Interferenzbanden durchzogen, deren Wellenlänge man leicht aus gleichzeitiger Beobachtung im sichtbaren Spectrum ermitteln kann. Dieselbe Methode verwendet MOUTON[2]), E. BECQUEREL[3]) vervollkommnete sie, indem er die Interferenz-Banden nicht durch Einschaltung einer doppeltbrechenden Platte hervorbrachte, sondern durch Reflexion des Lichtes an einer Luftplatte. Diese Methode hat neuerdings auch RUBENS[4]) adoptirt.

Wesentlich vollkommener ist die Benutzung des Gitters in Verbindung mit dem Prisma. DESAINS und CURIE[5]) entwerfen mit dem Prisma das Spectrum, in welchem dann der Spalt eines Gitterapparates verschoben wird. LANGLEY kehrt dies zweckmässiger um. Mittelst Concavgitters wird ein Spectrum entworfen, aus ihm z. B. die D-Linien in 6. Ordnung ausgeblendet durch einen Spalt, der für den Prismenapparat dient. An der Stelle der D-Linien in 6. Ordnung befindet sich bekanntlich gleichzeitig Licht von der Wellenlänge 589 $\mu\mu$, 2×589, 3×589, 4×589, 5×589, 6×585. Das Prisma zerlegt also das Licht in 6 verschieden abgelenkte Bündel, deren Wellenlänge genau bekannt ist, und für welche die zugehörige Ablenkung mit dem Bolometer ermittelt wird. In dieser Weise hat LANGLEY die Dispersionskurve für Flintglas[6]) bis 2·36 μ, für Steinsalz[7]) bis 5·3 μ bestimmt. RUBENS[8]) hat die Kurven für Steinsalz, Sylvin und Fluorit bis 8 μ verfolgt. Letzteres Material erweist sich als günstigstes für das Ultraroth, ebenso wie es für Ultraviolett das beste ist. — MOUTON[9]) hat für Quarz und Flintglas die Brechungsexponenten bis 2·14 μ ermittelt.

Es bleibt uns die Beobachtung des Ultraviolett zu besprechen. HELMHOLTZ[10]) fand zuerst, dass das Auge, wenn es vor längeren Wellen geschützt wird, weit ins Ultraviolette hinein zu sehen vermöge. SORET[11]) findet, das Auge könne etwa bis 330 $\mu\mu$ sehen, noch kleinere Wellen würden absorbirt, gelangten nicht bis zur Netzhaut. MASCART[12]) dagegen theilt mit, dass ein Beobachter bis 210 $\mu\mu$ habe sehen können. Es sind in der That einige Untersuchungen mit dem Auge ausgeführt worden. Wesentlich erleichtert wurden sie aber durch Benutzung der Fluorescenz, welche namentlich durch die kurzwelligen Lichtstrahlen hervorgerufen wird. Am besten ausgenutzt ist diese Methode wohl von SORET[13]). — In neuerer

---

1) FIZEAU und FOUCAULT, Ann. de Chim. (5) 15. 1878.
2) MOUTON, Compt. rend. 88 u. 89. 1879.
3) BECQUEREL, Ann. de Chim. (5) 10. 1877.
4) RUBENS und SNOW, WIED. Ann. 46. 1892.
5) DESAINS und CURIE, Compt. rend. 90. 1880; Compt. rend. 94. 1882.
6) LANGLEY, Phil. Mag. (5) 17. 1884.
7) LANGLEY, Phil. Mag. (5) 22. 1886.
8) RUBENS und SNOW, WIED. Ann. 46. 1892.
9) MOUTON, Compt. rend. 88 u. 89. 1879.
10) HELMHOLTZ, POGG. Ann. 94. 1855.
11) SORET, Compt. rend. 97. 1883.
12) MASCART, Compt. rend. 68. 1869; Compt. rend. 96. 1883.
13) SORET, Ann. de Chim. (5) 11. 1877; Arch. de Genève (2) 61; (2) 63. 1878; ibid. (3) 4. 1880; (3) 9. 1883; (3) 10. 1883.

Zeit aber hat die Photographie alle übrigen Methoden verdrängt. Und das mit Recht. Nicht nur im Ultraviolett, wo das Auge nicht concurriren kann, sondern auch im Sichtbaren ist die Photographie so sehr überlegen, dass sie allein den Ansprüchen genügen kann, die jetzt an spectralanalytische Messungen gestellt werden müssen. Als wichtigste Eigenschaft ist das dauernd entstehende Bild zu betrachten, welches uns in relativ kurzer Zeit ein Spectrum mit beliebig vielen Linien in absoluter Treue zu fixiren gestattet, an welchem nachträglich alle Messungen mit einer Sicherheit ausgeführt werden können, von welcher bei dem stets flackernden und daher das Auge ungemein ermüdenden gesehenen Spectrum keine Rede sein kann. Und nicht nur die Genauigkeit wird viel grösser, sondern namentlich die Zuverlässigkeit, da das Auge bekanntlich sehr häufig getäuscht wird. Dazu kommt noch die Fähigkeit der Platte, die Lichtwirkung zu summiren und so beliebig lichtschwache Linien zu zeigen, wenn man nur lange genug exponirt. Eder hat mit 14-tägiger Exposition das Spectrum der lichtschwächsten Theile des nicht leuchtenden Bunsen-Brenners erhalten.

Mit der Benutzung der Photographie hat Mascart den Anfang gemacht, um das ultraviolette Sonnenspectrum zu erhalten. Ihm folgte namentlich Cornu und mehrere andere, bis endlich Rowland diese Aufgabe durch seinen photographischen Atlas des Sonnenspectrums definitiv erledigte. — Die erste umfassende Anwendung auf die Spectra der Elemente hat, — wenn wir von den alten, heute werthlosen Arbeiten von W. A. Miller[1]) und Robinson[2]) absehen, Lockyer[3]) gemacht, der freilich nur ein sehr kleines Gebiet des Spectrums untersuchte. Ihm folgen Liveing und Dewar[4]) mit ganz vortrefflichen Arbeiten, dann Hartley und Adeney[5]) mit der umfangreichsten Abhandlung über die ultravioletten Funkenspectra der meisten Elemente, endlich Kayser und Runge[6]). Es sind damit nur die grösseren Untersuchungen genannt, es giebt noch eine grosse Anzahl solcher über einzelne Elemente, z. B. von Trowbridge, Ames, Hasselberg.

Bis vor Kurzem war die kürzeste bekannte Wellenlänge die einer Aluminiumlinien bei 185 $\mu\mu$. V. Schumann[7]) fand indessen, dass es allein die Gelatine unserer Trockenplatten ist, welche auch im Vacuum verhindert, weit kürzere Wellen zu erreichen. Es gelang ihm Platten in anderer Weise zu präpariren und damit Linien zu photographiren, deren Wellenlänge wohl nicht weit von 100 $\mu\mu$ entfernt ist.

Während die früheren photographischen Spectralaufnahmen stets mit Hilfe von Linsen gemacht wurden, hat Rowland diesen ausserordentlichen Uebelstand beseitigt, als er die Wissenschaft mit seinem Concavgitter beschenkte. Dasselbe sollte ausschliesslich angewandt werden, wenn es sich um Spectralphotographie handelt. Seine Ueberlegenheit beruht nicht nur auf der ausserordentlichen Bequemlichkeit, mit der es zu arbeiten gestattet, sondern auch auf der Genauigkeit der Messungen, die sich in seinem durchweg normalen Spectrum erreichen lassen. Die Genauigkeit der relativen Wellenlängenbestimmung mit Hilfe der Coincidenz-Methode[8]), die von Rowland zuerst in ausgedehnter Weise angewandt wurde, lässt sich auf anderem Wege nicht erreichen.

---

1) Miller, Phil. Trans. 152. 1862.

2) Robinson, Phil. Trans. 152. 1862.

3) Lockyer, Phil. Trans. 163, 1863.

4) Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174. 1883.

5) Hartley und Adeney, Phil. Trans. 175. 1883.

6) Kayser und Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1888 bis 1892.

7) Schumann, Photographische Rundschau. 1890 u. 1892.

8) Kayser und Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890.

4) Die Entstehung der Spectren[1]).

a) Emission des Lichts.

Die Erklärung der spectralanalytischen Erscheinungen geht von den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie und kinetischen Gastheorie aus. Wir setzen voraus, die Körper bestehen aus Molekeln, welche in fortwährender Bewegung begriffen seien; in den festen Körpern finden diese Bewegungen im Allgemeinen um feste Schwerpunkte statt, weil jedes Molekel von einer grossen Anzahl anderer dicht umgeben ist, welche ihm nicht gestatten, seinen Ort zu verlassen, sondern es festhalten und sofort zurückstossen. Dieselbe Betrachtung gilt auch angenähert für Flüssigkeiten. Bei Gasen dagegen befinden sich die Molekeln in relativ so weiten Abständen, dass sie frei umherschwirren können und nur zeitweilig mit andern zusammenstossen. — Die Molekeln selbst sind zusammengesetzt aus Atomen, wahrscheinlich aus einer variablen Anzahl derselben, je nach Temperatur und Druck; bei niedriger Temperatur, hohem Druck werden die Molekeln sehr viele Atome enthalten, bei Temperatursteigerung wird ein Zerfall eintreten, theils allmählich, theils und besonders bei bestimmten Temperaturgrenzen. Darauf deutet die variable Dampfdichte hin, und auch die sich immer mehr häufende Kenntniss von allotropen Modificationen findet so die leichteste Erklärung.

Bei gegebenen Werthen von Druck und Temperatur ist der Molekularbau ein ganz bestimmter, da er die chemischen und physikalischen Wirkungen bedingt. Speciell wird also das Molekel ganz bestimmte Masse haben, und zwischen seinen Atomen werden ganz bestimmte Kräfte wirken, so dass wir das Molekel als einen Körper betrachten können, welcher sich selbst überlassen nur einer begrenzten Anzahl ganz bestimmter Eigenschwingungen fähig ist. Solche Schwingungen werden angeregt durch die Zusammenstösse, welche in Folge der Wärmebewegung zwischen den Molekeln eintreten; diese Stösse setzen einen Theil der translatorischen Wärmebewegung in innere Molecularbewegung um, und die kinetische Gastheorie lehrt, dass die Energieen beider Arten von Bewegung gleichzeitig wachsen. Im Moment des Zusammenstosses steht das Molekel noch unter äusseren Kräften; es werden daher in diesem Moment die Eigenschwingungen sich nicht frei ausbilden können, vielmehr werden durch einen Stoss alle möglichen Schwingungen angeregt; wenn aber das Molekel in der folgenden Zeit sich selbst überlassen bleibt, klingen die ihm fremden Schwingungen sehr schnell ab, die Eigenschwingungen bleiben erhalten. Es lässt sich in Analogie mit den elastischen Schwingungen grösserer Körper vermuthen, dass die Natur des Stosses nicht ohne Einfluss ist; erstlich wird seine Stärke für die Zahl und Stärke der entstehenden Obertöne in Betracht kommen, ferner kann möglicher Weise auch die Art seines Angriffs, der Ort desselben von Einfluss sein, gerade so, wie es bei einer gespannten Saite nicht einerlei ist, wo und wie man sie anregt. Es wäre daher nicht undenkbar, dass der Zusammenstoss mit einem Molekel anderer chemischer Natur andere Schwingungen hervorriefe, als der mit einem gleichartigen, natürlich immer mit der Einschränkung, dass stets nur Eigenschwingungen entstehen.

Die besprochene Molekularbewegung ist für uns unsichtbar, aber sie ruft eine andere sichtbare Bewegung hervor. Zwischen den Molekeln und Atomen ist überall der Lichtäther vorhanden. Die Wärmebewegung der Molekeln wird

[1]) Vergleiche zu diesem Abschnitt die vorzügliche Uebersicht von SCHUSTER, Rep. Brit Ass. for the adv. of sc. 1880; ferner E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 5. 1878.

ihn zwar in Bewegung versetzen, aber kaum in Schwingungsbewegung; eine solche muss dagegen durch die Atomschwingungen hervorgerufen werden, und gerade so, wie die Schallwellen von einem schwingenden Körper ausgehen und uns treue Kunde von seiner Bewegung übermitteln, so wird eine Wellenbewegung des Lichtäthers uns die Atomschwingungen anzeigen. Wir haben somit in dem von einem leuchtenden Körper ausgehenden Lichte ein Mittel, die Eigenschwingungen der Atome zu studiren und etwaige Aenderungen im Aufbau der Atome, welche sofort Aenderungen der Schwingungen nach sich ziehen müssen, zu erkennen. Wir können geradezu die Schwingungszahlen der ausgesandten Lichtwellen als die Schwingungszahlen der Atome ansprechen.

Die Betrachtungen MAXWELL's lehren, dass die Molekeln eines Dampfes sich in allen möglichen Stadien der Temperatur befinden, nur die Mehrzahl entspricht der Mitteltemperatur. So können wir nicht erwarten, das Spectrum, welches einer bestimmten Temperatur zukommt, rein zu sehen, sondern wir erhalten stets nur ein Gemisch, in welchem die der mittleren Temperatur entsprechenden Strahlen dominiren. Wenn die Molekeln bei steigender Temperatur zerfallen, werden wir daher auch keinen plötzlichen Sprung im Charakter des Spectrums beobachten, sondern mit der Zahl der zerfallenen Molekel wird ganz allmählich das Spectrum niedriger Temperatur schwächer werden und schliesslich verschwinden.

Wenden wir diese Betrachtungen auf die Spectra der Körper an, so ist zunächst klar, dass die Molekeln der festen Körper, welche sehr nahe liegen, so dass ihre Atome fortdauernd unter dem Einfluss äusserer Kräfte stehen, ihre Eigenschwingungen nicht entwickeln können, dass vielmehr die fortwährenden Zusammenstösse alle möglichen Schwingungen erzeugen werden. Die Erfahrung lehrt, dass bei niedriger Temperatur nur langsame Schwingungen eintreten, welche strahlende Wärme erzeugen; je höher die Temperatur steigt, desto stärker werden die Stösse, desto schnellere Schwingungen werden hervorgerufen, zu den ultrarothen Strahlen kommen die rothen, dann die gelben und so fort, bis bei der höchsten Temperatur die kürzesten ultravioletten Wellen erschienen sind. Alle festen Körper geben daher ein sogen. continuirliches Spectrum, d. h. ein solches, in welchem alle denkbaren Wellenlängen vertreten sind. Nach dem KIRCHHOFF'schen Satz über das Verhältniss zwischen Emission und Absorption des Lichts soll die Emission derselben Wellenlänge für alle Körper bei derselben Temperatur beginnen, nämlich bei der, bei welcher ein absolut schwarzer Körper diese Wellenlänge zu emittiren beginnt. Ob dies schon früher durch DRAPER[1]) empirisch gefundene Gesetz ganz richtig ist[2]), müssen wir dahin gestellt lassen, bis neue genauere Untersuchungen angestellt sind; im Grossen und Ganzen giebt es jedenfalls den Verlauf der Emission richtig an. — Von Flüssigkeiten, soweit wir sie in den Zustand der Emission versetzen können, gilt dasselbe, dass sie nur continuirliche Spectren geben.

Ganz anders ist es bei den leuchtenden Dämpfen und Gasen; hier liegen zwischen je zwei Zusammenstössen der Molekeln relativ lange Pausen, daher können sich die Eigenschwingungen frei entwickeln, wir erhalten im Spectrum nur ihnen entsprechende Wellenlängen; dasselbe ist daher ein discontinuirliches Spectrum, d. h. ein solches, welches nur einzelne helle Stellen besitzt.

---

1) DRAPER, Phil. Mag. (3) 30. 1847.

2) Siehe WEBER, WIED. Ann. 32. 1887; STENGER, WIED. Ann. 32. 1887; EBERT, WIED. Ann. 33. 1888.

Gewöhnlich ist der Grund nicht ganz dunkel; wir können das schwache continuirliche Spectrum vielleicht den Momenten der Zusammenstösse zuschreiben.

Es giebt zwei vollständig verschiedene Arten discontinuirlicher Spectren, welche von PLÜCKER und HITTORF[1]) Spectrum erster und zweiter Ordnung genannt wurden, heute Banden- und Linienspectrum heissen. Erstere bestehen, bei geringer Dispersion betrachtet, aus breiten Lichtbänden, welche gewöhnlich an einer Seite, meist der der längeren Wellen, am hellsten sind, von dieser Kante erst schnell dann langsamer abnehmen, bis das Maximum einer zweiten Bande einsetzt, u. s. w. Sie machen daher den Eindruck einer seitlich beleuchteten cannelirten Säule und werden deshalb auch cannelirte Spectren genannt. Bei grösserer Dispersion erkennt man, dass die Banden aus Tausenden von Linien bestehen, welche an der Kante eng gedrängt liegen, dann immer weiter auseinanderrücken, und in ersichtlich regelmässigen Abständen und mit regelmässiger Abnahme der Intensität gelagert sind. — Die Linienspectra dagegen bestehen aus einzelnen, meist relativ wenigen (selten mehr als einige hundert) Linien, welche scheinbar ganz regellos gelagert sind, und ebenso regellos in der Intensität wechseln.

Man findet, dass die Bandenspectra einerseits von allen Verbindungen gegeben werden, andererseits auch bei niedriger Temperatur von Elementen, welche bei höherer Temperatur ein Linienspectrum zeigen. Diese Thatsachen deuten darauf hin, dass das Bandenspectrum zusammengesetztere Molekeln voraussetzt. Wir können auch leicht verstehen, dass solche linienreichere Spectren geben werden, als aus wenigen Atomen bestehende Molekeln; aber wie sich der Charakter des Spectrums dadurch so vollständig ändern kann, wie es beim Uebergang vom Linien- zum Bandenspectrum der Fall ist, darüber wissen wir noch gar nichts, und diese Frage gehört zu den schwierigsten, welche die Spectralanalyse zu lösen hat: wer einmal Banden- und Linienspectra gesehen und studirt hat, wird zugeben, dass wir es hier nicht mit einem quantitativen, sondern einem qualitativen Unterschiede zu thun haben. Bisher können wir nur sagen, dass wie das dampfförmige Molekel der Verbindung oder des Elementes bei niederer Temperatur eine mittlere Stellung zwischen dem Molekel des festen Körpers und dem des hoch erhitzten Dampfes einnimmt, so auch sein Spectrum zwischen den Spectren jener steht.

Zu erwähnen ist noch, dass während wir so drei Hauptstufen im Molekularbau unterscheiden, welche das continuirliche, das cannelirte und das Linienspectrum erzeugen, LOCKYER[2]) fünf Stufen annimmt, welchen entsprechen: 1) Linienspectrum, 2) cannelirtes Spectrum, 3) continuirliches Spectrum im Blau, 4) continuirliches Spectrum im Roth, 5) continuirliches Spectrum von Roth bis Blau; indess scheinen diese 2 neuen Stufen recht zweifelhaft zu sein.

Es fragt sich nun, ob wir innerhalb der Hauptstufen das Spectrum als unveränderlich zu betrachten haben oder nicht. Die Frage muss wohl mit ja beantwortet werden, wenn wir die Qualität des Spectrums im Auge haben. So lange das Molekel unverändert bleibt, muss es derselben Eigenschwingungen fähig bleiben. Aber es ist wohl zu beachten, dass es bei keiner Temperatur alle ihm möglichen Schwingungen auszuführen braucht, und vor Allem nicht alle mit gleicher relativer Intensität. Mit der Stärke der Zusammenstösse wächst im Allgemeinen die Intensität der kürzeren Wellenstärken. Diese Thatsache ist in vielen Fällen beobachtet: geht man von der Temperatur des BUNSEN-Brenners

---

[1]) PLÜCKER und HITTORF, Phil. Trans. 155. 1865.

[2]) LOCKYER, Studien zur Spectralanalyse, Leipzig bei Brockhaus. 1879.

zu der des galvanischen Lichtbogens über, so zeigt sich eine enorme Verstärkung der ultravioletten Linien. Es sei z. B. nur an das Verhalten der violetten Kaliumlinien erinnert. Aber auch die längeren Wellen werden heller, und so kann es kommen, dass das Spectrum mit steigender Temperatur linienreicher wird, weil vorher zu schwache Linien jetzt sichtbar werden. So zeigt z. B. Natrium im BUNSEN-Brenner nur wenige Linienpaare, während im galvanischen Bogen eine grosse Anzahl auftritt, deren Helligkeit mit der Stromstärke wächst.

Eine quantitative Aenderung tritt ferner bei Temperaturänderung dadurch ein, dass z. B. bei Steigerung die Linien, welche höherer Temperaturstufe angehören, heller werden, die, welche niedrigerer Stufe angehören, verblassen.

Als eine solche quantitative Aenderung der Emission wäre auch vielleicht der Umstand anzuführen, dass zur kräftigen Hervorbringung der Linien eines Elementes mitunter die Anwesenheit bestimmter anderer Dämpfe sehr nützlich ist. Solche Fälle haben namentlich LIVEING und DEWAR[1]) beobachtet; bei Zufügung kleiner Mengen eines Elementes, z. B. Mg, Al in den Kohlebogen, in welchem ein anderes verdampft, treten neue Linien des letzteren auf, ebenso wenn man andere Gase, als Luft, z. B. H, CO_2, in den Bogen leitet. Diese Fälle sind indess wohl noch nicht genügend aufgeklärt, es wäre wohl möglich, dass meist nur eine reducirende Atmosphäre geschaffen wird, welche dem Element gestattet, sein Spectrum besser zu entwickeln, so dass schwache Linien heller werden; auch kann in allen solchen Fällen die Temperatur möglicher Weise geändert werden durch den verschiedenen Widerstand, welchen die Dämpfe dem Strom darbieten.

Einen zweifellosen Beweis für die Unveränderlichkeit des Spectrums innerhalb der einzelnen Spectralstufen glaube ich in der Selbstumkehrung zahlreicher Linien zu sehen. Man versteht darunter die Thatsache, dass wenn heisser Dampf, von welchem das Licht ausgeht, von einer Schicht kühleren Dampfes umgeben ist, das Licht des heissen Dampfes absorbirt wird, und die helle Linie von einer dunklen durchzogen erscheint. Da aber dieselben Strahlen absorbirt und emittirt werden, haben wir damit den Beweis, dass der kühle Dampf die gleiche Welle emittirt, wie der heisse, nur mit geringerer Intensität. Wenn wir nun finden, dass diese Umkehrbarkeit zwischen den erreichbaren Temperaturgrenzen, also etwa 1000—5000°, unverändert bleibt, so ist damit der Beweis für die Continuität der Emission zwischen denselben Grenzen erbracht.

Bisher ist nur der Einfluss der Temperatur untersucht, es bleibt noch der des Druckes oder der Dampfdichte zu besprechen.

ZÖLLNER[2]) zog zuerst eine Folgerung in dieser Beziehung aus dem KIRCHHOFF-schen Satze, indem er den Einfluss der Dicke der strahlenden Schicht untersuchte. Eine Dampfschicht von der Dicke 1 emittire von einer beliebigen Wellenlänge ε, absorbire α, so ist $\varepsilon = \alpha e$, wenn e das Emissionsvermögen des absolut schwarzen Körpers von gleicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge bedeutet. Hat die Schicht die Dicke n, so wird ihre Emission $E = [1 - (1 - \alpha)^n] e$. Da α ein echter Bruch ist, nähert sich mit wachsendem n der Werth $(1 - \alpha)^n$ der Null, also E nähert sich e. Wäre α für die vom Gase nicht emittirten Wellenlängen absolut 0, so bliebe bei wachsender Dicke das Spectrum unver-

---

[1]) LIVEING und DEWAR, Proc. Roy. Soc., No. 214. 1881; Proc. Roy. Soc., No. 219. 1882, und an vielen anderen Stellen.

[2]) ZÖLLNER, POGG. Ann. 112. 1871; siehe auch WÜLLNER, WIED. Ann. 8. 1879; SCHUSTER, Rep. Brit. Ass. 1880.

ändert, würde nur heller; ist das aber nicht der Fall, so muss das Spectrum schliesslich continuirlich werden. Letzteres scheint indessen nicht einzutreten, denn eine GEISSLER'che Röhre zeigt dasselbe Spectrum, ob wir der Länge nach oder quer durchsehen, und auch die enorm dicken Schichten der Sonnenatmospäre und der Protuberanzen zeigen ganz scharfe Linien.

Man hat weiter geschlossen, die Vermehrung der Dichte müsse ebenso wirken, wie die der Dicke, so dass $E = [1 - (1 - a)^d] e$ zu setzen sei, wenn a das Absorptionsvermögen für die Einheit der Dichte, und d die Dichte bezeichnet. ZÖLLNER bemerkt, dass danach sich auch das Intensitätsverhältniss zweier Linien erheblich ändern kann durch blosse Veränderung der Dichte. Es scheint indessen, als ob diese Schlüsse aus KIRCHHOFF's Gesetz für uns wesentlich nicht in Betracht kämen; sie sind zwar zweifellos richtig, so lange das Molekel und seine Bewegungen unverändert bleiben. Aber sie genügen nicht, um die Thatsachen zu erklären, denn sie berücksichtigen nicht die Hauptwirkung der vermehrten Dichte, nämlich die Abnahme der freien Weglänge. Wie wir früher sahen, werden durch die Zusammenstösse alle denkbaren Schwingungen angeregt; nimmt die freie Weglänge ab, so muss der Einfluss der Momente des Stosses grösser werden, die Eigenschwingungen müssen zurücktreten gegenüber den andern. Die Versuche zeigen, dass bei Zunahme der Dichte viele Linien ihre scharfe Begrenzung verlieren, breiter werden. Man kann bei manchen Linien die Verbreiterung ausserordentlich weit treiben; so wird die Magnesiumlinie bei 2852 manchmal mehrere hundert ANGSTRÖM'sche Einheiten breit, und die Wasserstofflinien können durch erhöhten Druck des Gases so verbreitert werden, dass sie zusammenstossen und ein continuirliches Spectrum bilden[1]). Auch diese Thatsache lässt sich erklären, wenn man annimmt, dass die den Eigenschwingungen benachbarten leichter entstehen, als andere; man sollte indes erwarten, dass sich die Linien dann nach beiden Seiten gleichmässig verbreitern würden. Dies ist vielfach der Fall, fast ebenso häufig aber ist die Verbreiterung nur einseitig: so haben wir z. B. im Lithium eine Linienserie, die sich gleichmässig verbreitert, eine andere Serie, deren Linien nur nach der Seite der längeren Wellen unscharf werden[2]); ähnliches findet sich sehr häufig, z. B. bei den Elementen der zweiten MENDELEJEFF-schen Gruppe. Die einseitige Verbreiterung findet meist nach der rothen Seite statt, seltener nach der der kürzeren Wellen, z. B. bei den Na-Linien 5676, 5670, bei Jn 2781, 2751, 2737, bei Cd 2962, 2862, 2819, und manchen andern.

Es ist von vornherein anzunehmen, dass auch die Temperatur die Verbreiterung beeinflusst, da von ihr die Stärke der Stösse bedingt ist. Von manchen Seiten, z. B. von FIEVEZ[3]), wird sogar angenommen, dass hauptsächlich die Temperatur die Verbreiterung bewirke; allein es lässt sich in den zum Beweise angeführten Fällen stets nachweisen, dass die Temperatursteigerung eine Drucksteigerung bedingt habe. Die experimentellen Ergebnisse scheinen sogar zu zeigen, dass bei niedriger Temperatur die Verbreiterung durch Druck leichter erfolge, als bei hoher Temperatur, so dass LIPPICH[4]) diese Verbreiterung mit der Abweichung der Gase vom GAY-LUSSAC-MARIOTTE'schen Gesetz in Beziehung bringt.

Auch noch in anderer Richtung kann der Druck, die zunehmende Dichte wirken; nicht nur die freie Bewegung des Molekels wird gehemmt, sondern die

---

1) FRANKLAND, Proc. Roy. Soc. 16. 1868.

2) KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890 u. 1891.

3) FIEVEZ, Bull. Acad. roy. de Belg. (3) 1; Bull. Acad. roy. de Belg. (3) 7. 1884.

4) LIPPICH, POGG. Ann. 139. 1870.

Beschaffenheit des Molekels kann geändert werden, sein Bau wird complicirter. Es existirt ein eklatantes Beispiel hierfür. Der Sauerstoff giebt ein Absorptionsspectrum, welches aus Linien besteht. Bringt man ihn aber unter höheren Druck so tritt daneben noch ein zweites Absorptionsspectrum, ein Bandenspectrum auf, was JANSSEN[1]) zuerst beobachtete. Beide Spectra verhalten sich verschieden: die Intensität des ersten nimmt zu proportional der Dichte und proportional der Dicke der Schicht, entspricht also dem KIRCHHOFF'chen Gesetz. Das Bandenspectrum wird intensiver proportional der Dicke der Schicht, aber proportional dem Quadrat der Dichte. Mit zunehmender Dichte wächst offenbar die Zahl der zusammengesetzten Molekeln in der Masseneinheit, gleichzeitig die Masse der Volumeinheit, so dass sich das JANSSEN'sche Gesetz ergiebt. Die einfachen Molekeln geben das Linienspectrum, die zusammengesetzten das Bandenspectrum, sie müssen sich also verschieden verhalten. Diesen JANSSEN'schen Versuch können wir daher direkt als Beweis für die Anschauung auffassen, dass das Bandenspectrum anderem und zwar zusammengesetzterem Molekularbau entspreche. Absolut beweisend würde er sein, wenn man den Druck soweit fortsetzen könnte, dass das Linienspectrum ganz verschwände, weil alle einfachen Molekeln verschwunden sind; es scheint, als habe OLSZEWSKI[2]) im flüssigen Sauerstoff dieselben Banden beobachtet, während er von den Absorptionslinien keine Spur entdecken konnte. Damit wäre obiger Beweis erbracht.

Es ist mehrfach z. B. zuletzt von EBERT[3]) in Ueberlegung gezogen worden, ob nicht auch die Bewegung der Molekeln nach dem DOPPLER'schen Princip eine Verbreiterung hervorbringe. Bezeichnen wir mit u die Molekular-Geschwindigkeit, so werden von den Molekeln einer Gasmasse einzelne sich mit dieser Geschwindigkeit uns nähern, andere sich entfernen. Daher sollten nach dem DOPPLER'schen Princip die Ränder einer Linie von der Wellenlänge λ werden $\lambda_1 = \lambda\left(1 - \frac{u}{v}\right)$ und $\lambda_2 = \lambda\left(1 + \frac{u}{v}\right)$, wo v die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, also die Breite der Linie $= \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda\frac{u}{v}$.

u ist proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur, umgekehrt proportional der Wurzel aus dem Atomgewicht. Es würde also aus dem DOPPLER-schen Princip folgen, dass erstens die Linien von grösserer Wellenlänge breiter sind als die von kleinerer; zweitens, dass die Linien der Elemente von kleinem Atomgewicht dicker sind, als die von hohem Atomgewicht; drittens, dass mit steigender Temperatur die Linien breiter werden. Diese Folgerungen lassen sich wirklich bestätigen; wenn man die Spectra der Elemente untersucht, zeigt sich sehr auffallend die erste Folgerung; auch der ROWLAND'che Sonnenatlas zeigt, dass im Ultraviolett die Linien im Allgemeinen viel feiner sind, als im Roth. Auch für die zweite Folgerung habe ich bei Photographie der Spectren zahlreiche zutreffende Beispiele beobachtet.

Wenn man aber von der qualitativen zur quantitativen Beobachtung übergeht, die Breite nach dem DOPPLER'schen Princip berechnet und mit der Beobachtung vergleicht, so scheint das Gesetz sich nicht zu bestätigen, die Linien scheinen schmaler zu sein, als sie sein sollten. Ob aber der Schluss, den EBERT aus seinen Versuchen zieht, das DOPPLER'sche Princip gelte nicht, ganz fest steht, scheint mir noch zweifelhaft[4]).

---

[1]) JANSSEN, Compt. rend. 102. 1886.

[2]) OLSZEWSKI, WIED. Ann. 33. 1888.

[3]) EBERT, WIED. Ann. 36. 1889.

[4]) Vergl. RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 27, pag. 298. 1889.

Die hier entwickelten Anschauungen über die Entstehung der Spectren, namentlich die Annahme, dass das Spectrum sich nicht wesentlich ändere, so lange das Molekel dasselbe bleibt, dass daher das Banden- und das Linienspectrum allotropen Modificationen des Molekels zuzuschreiben seien, wird heute von fast allen Spectroskopisten getheilt. Aber es ist zu erwähnen, dass noch eine andere Auffassung existirt, welche WÜLLNER[1]) vertritt. Er nimmt an, das Molekel bleibe ganz unverändert, aber seine Emission sei Function der Temperatur, und zwar so, dass bei niedriger Temperatur das Bandenspectrum emittirt werde, bei höherer das Linienspectrum; beide zusammen bilden aber erst das ganze Spectrum der betreffenden Substanz, und es finde eine ganz continuirliche Verwandlung des einen Spectrums in das andere statt.

Als einzigen Beweis für diese Anschauung führt WÜLLNER nur die Thatsache an, dass bei gesteigerter Intensität der Entladung in GEISSLER'schen Röhren, also vermuthlich bei gesteigerter Temperatur, das Bandenspectrum allmählich schwächer wird, das Linienspectrum aber heller. Aber genau dasselbe muss nach unserer Auffassung eintreten: bei gesteigerter Temperatur wird die Zahl der Molekeln der ersten Modification immer kleiner, die der zweiten immer grösser, so dass das Bandenspectrum verblasst, das Linienspectrum intensiver wird, um schliesslich allein übrig zu bleiben. Nach der WÜLLNER'schen Auffassung sollte man aber einen ganz continuirlichen Uebergang des einen Spectrums in das andere, eine Verschiebung der Linien und ebenso noch weitere Veränderungen erwarten, nachdem das Linienspectrum erreicht ist, man könnte von einem bestimmten Spectrum überhaupt nicht sprechen, sondern nur von dem Spectrum bei bestimmter Temperatur. Aber dem widersprechen alle bekannten Thatsachen: das Spectrum des brennenden Magnesiumdrahtes z. B. ist im Wesentlichen ganz dasselbe, wie das des Magnesiumbogenlichtes, oder das der stärksten Inductionsfunken zwischen Magnesiumelektroden. Eine Verschiebung von Linien ist selbst bei den genauesten Messungen niemals beobachtet worden, weder beim Banden- noch beim Linienspectrum. Die WÜLLNER'sche Auffassung erklärt nicht eine einzige Thatsache besser, als die allgemein übliche Auffassung, dagegen kommt sie mit zahlreichen Erscheinungen, welche in diesem Abschnitt angeführt sind, in Widerspruch[2]).

Von LOCKYER[3]) ist eine Methode der Beobachtung ersonnen worden, deren Bedeutung lange nicht genug gewürdigt wird, die sogen. Methode der langen und kurzen Linien. Sie gestattet sofort im Spectrum den Einfluss von Temperatur und Dichte zu erkennen. Als Lichtquelle denken wir uns eine Bogenlampe oder den Inductionsfunken, welche horizontal gelagert seien. Man entwirft mittelst einer Linse ein Bild der Lichtquelle auf dem Spalt; dann wird jeder Punkt des Spaltes von Licht getroffen, welches von einem Punkte der Quelle herrührt, die Mitte des Bildes wird durch Strahlen aus der Mitte des Bogens gebildet, die Ränder durch Randstrahlen. Nun ist in der Mitte des Bogens der Dampf jedenfalls dichter, die Temperatur höher, als an den Rändern, und wenn die Emission dadurch beeinflusst wird, muss die Mitte des Spectrums anders aussehen, als die Ränder. Dies tritt wirklich ein: viele Linien finden sich nur in der Mitte, andere gehen von einem Rande zum andern, kurz die

---

[1]) WÜLLNER, WIED. Ann. 8. 1879; WIED. Ann. 34. 1888; Sitzungsber. d. Berl. Akad. 38. 1889; WÜLLNER, Lehrbuch der Physik.

[2]) KAYSER, WIED. Ann. 42. 1891.

[3]) LOCKYER, Phil. Trans. 163, pag. 253 u. 639. 1873.

Linien haben ganz verschiedene Länge. Gleichzeitig sind sie in der Mitte dicker, als an den Spitzen. Die langen Linien sind durchaus nicht immer die stärksten, sondern sowohl starke als schwache Linien können kurz oder lang sein. Die Bedeutung der Erscheinung ist klar: Die kurzen Linien sind solche, welche nur bei hoher Temperatur, grosser Dichte auftreten, die langen Linien aber solche, welche ausserdem auch bei niedrigerer Temperatur, geringer Dichte bestehen bleiben; dies sind also die Hauptlinien der Substanz, die wir immer zu sehen erwarten können, wenn auch nur Spuren des Elementes vorhanden sind, während das Auftreten der kurzen Linien an bestimmte Bedingungen geknüpft ist.

Es war vorher von der Selbstumkehr der Linien die Rede; die sich selbst umkehrenden Linien sind, was hier hervorgehoben sei, wenn auch nicht identisch, so doch nahe verwandt mit den langen Linien; denn, damit Umkehrung eintreten kann, muss der Dampf dieselbe Linie bei hoher und niedriger Temperatur emittiren, er braucht sie aber nicht auch bei dichtem und dünnem Dampf zu emittiren. LOCKYER hat für einige Elemente die Länge der Linien gemessen, leider aber die Untersuchung nicht systematisch durchgeführt.

Es ist bisher nur von einem Leuchtendwerden in Folge von Temperatursteigerung die Rede gewesen, weil man früher nur auf diese Weise Licht hervorbringen zu können glaubte. Aber wie unsere Betrachtungen zeigen, spielt die Wärme dabei keine andere Rolle, als dass sie die Molekeln in Bewegung bringt und Atomschwingungen erzeugt. Jedes andere Mittel zur Erzeugung von Atomschwingungen wird daher auch ohne Temperatursteigerung Licht hervorrufen können, und E. WIEDEMANN hat das grosse Verdienst, dies für GEISSLER'sche Röhren zuerst bewiesen zu haben.

Aber man ist einen Schritt weiter gegangen; HITTORF[1]) und SIEMENS[2]) haben Versuche mitgetheilt, nach denen bis auf etwa 2000° erhitzte Gase kein Licht aussenden, und daraus geschlossen, dass Gase überhaupt nicht durch Temperaturerhöhung leuchtend werden können. Diese Möglichkeit ist in der That noch nie bewiesen. Trotzdem kann ich den Schluss von SIEMENS nicht als genügend anerkennen. Die Gase haben ein ausserordentlich kleines Absorptionsvermögen, sie müssen daher auch ein sehr geringes Emissionsvermögen haben, und da auch noch die Masse des erhitzten Gases sehr klein ist, so scheint es nicht allzu überraschend, dass sie bei 1500° nicht leuchten. Erst viel stärkere Schwingungen, wie sie bei weit höherer Temperatur erregt werden, würden dann Licht erzeugen, und wir schliessen aus den Thatsachen, dass auch Inductionsstösse solche stärkere Schwingungen erzeugen.

PRINGSHEIM[3]) ist kürzlich sogar noch weiter gegangen; er bestreitet auch, dass bei Dämpfen überhaupt je die Temperatursteigerung ein Leuchten hervorbringe, und meint, dass nur chemische Processe dazu im Stande seien. Die Versuche, die PRINGSHEIM mit Natriumdampf ausgeführt hat, scheinen mir aber durchaus nicht beweisend zu sein, die von ihm angenommenen chemischen Wirkungen sind doch zum Theil recht künstlich und jedenfalls nicht zu beweisen. Ich gebe ohne weiteres zu, dass chemische Reactionen ein gewaltiges Mittel zu Erschütterungen der Molekeln sind, und daher Leuchten hervorrufen müssen, aber ich kann nicht einsehen, weshalb unsere einfachste Art, die Molekeln in heftige Bewegung zu versetzen und durch die Zusammenstösse Atomschwingungen

1) HITTORF, WIED. Ann. 7. 1879; 19. 1883.

2) SIEMENS, WIED. Ann. 18. 1883.

3) PRINGSHEIM, WIED. Ann. 45. 1892.

hervorzurufen, kein Licht geben soll. Bevor nicht zwingende Beweise für das Gegentheil erbracht werden, müssen wir dabei bleiben, dass es nur auf die Atomschwingungen ankommt, einerlei ob dieselben durch Wärme, durch Electricität, durch chemische Wirkungen oder wie auch sonst hervorgebracht seien. Auch der Umstand, dass wir einige Spectra in Emission und Absorption kennen, — und bei letzterer kann von chemischer Wirkung doch keine Rede sein — ist gegen Pringsheim beweisend. Es wäre hier das Cyanspectrum und ein Spectrum des Jods zu nennen.

b) Absorption des Lichts.

In Betreff der Absorption des Lichts können wir uns kürzer fassen, da sie nach dem Kirchhoff'schen Gesetz einfach eine Umkehrung der Emission ist: jede Substanz giebt das Absorptionsspectrum, welches sie bei derselben Temperatur und den gleichen molekularen Verhältnissen emittiren würde. So finden wir denn, dass im Allgemeinen feste und flüssige Körper continuirliche Absorption hervorbringen, Gase und Dämpfe aber discontinuirliche, und zwar bei niedriger Temperatur Banden, bei hoher Linien. Durch zahlreiche Versuche, namentlich von Lockyer und von Liveing und Dewar, ist nachgewiesen, dass Absorption und Emission der Dämpfe einander in der That proportional sind bei gleicher Temperatur; die Absorption ergänzt daher unsere Kenntniss für Temperaturen, bei denen noch gar keine Emission stattfindet.

Auf dem Gebiet der Absorption sind die Fälle sehr zahlreich, wo wir den Einfluss der veränderten Molekurlarconstitution oder der beschränkten Freiheit der Molekeln beobachten können; da die Beobachtungen vielfach bei niedriger Temperatur gemacht werden, sind wir den Punkten des Ueberganges aus dem dampfförmigen in den flüssigen oder aus dem flüssigen in den festen Aggregatzustand nahe, und kleine Aenderungen der Dichte oder der Temperatur müssen stark wirken. Einige Beispiele seien angeführt: Joddampf zeigt bei geringer Dichte ein sehr schönes Bandenspectrum; sowie die Dichte wächst, wird die Absorption continuirlich. Aehnliches zeigen sehr viele Dämpfe auch von Metallen. Den Einfluss der Molekularconstitution haben wir schon oben bei dem Sauerstoffspectrum besprochen, andere interessante Fälle hat Stenger[1]) angeführt; so zeigen viele Farbstoffe ein anderes Absorptionsspectrum in Lösung, als eingetrocknet, fest; stellt man aber Lösungen mit Gelatine, Leim oder dergleichen her und lässt sie eintrocknen, so bleibt das Absorptionsspectrum des flüssigen Zustandes bestehen, offenbar weil die Bewegung der Molekeln während des Erstarrens so gehindert ist, dass complicirtere Molekeln nicht entstehen können. Jod zeigt in Schwefelkohlenstoff gelöst die violette Farbe des Joddampfes, in Alkohol gelöst die braune Farbe des festen Körpers; diese wird daher wohl einem zusammengesetzteren Molekel angehören. Dem entsprechend wird auch die Lösung in Schwefelkohlenstoff braun, wenn man sie in fester Kohlensäure und Aether abkühlt[2]).

Von Kundt[3]) ist beobachtet worden, dass die Absorptionsstreifen vieler Farbstoffe in verschiedenen Lösungsmitteln etwas verschiedene Lage haben, dass sie um so mehr nach dem rothen Ende des Spectrums verschoben sind, je grösser das Brechungs- und Dispersionsvermögen des Lösungsmittels ist. Wir

---

[1]) Stenger, Wied. Ann. 33. 1888.

[2]) E. Wiedemann, Sitzungsber. d. phys. med. Soc. z. Erlangen. 1887.

[3]) Kundt, Pogg. Ann. Jubelbd. 1874; Wied. Ann. 4. 1878.

werden hierin eine Beeinflussung der Schwingungen des Farbstoffmolekels durch die des Lösungsmittels sehen können. In Fällen, wo die KUNDT'che Regel sich nicht bestätigt, wo das Spectrum sich ganz ändert, wie es z. B. von H. W. VOGEL[1]) beobachtet wurde, nehmen wir veränderten Molekularbau an.

Während die meisten Flüssigkeiten continuirliche Absorption wenigstens grösserer Theile des Spectrums zeigen, finden sich einige, welche mehr oder weniger scharf begrenzte Absorptionsstreifen erzeugen, und diese Fälle sind besonders wichtig und interessant. Es können hier nur einige besonders auffallende Thatsachen angeführt werden. In erster Linie seien die seltenen Erden genannt, welche fast sämmtlich im sichtbaren und ultravioletten Theil des Spectrums Absorptionsstreifen zeigen und fast nur dadurch erkannt und getrennt werden konnten. Jährlich wird ihre Zahl noch vergrössert, wenn auch meist in recht unsicherer Weise, da die chemischen Hilfsmittel zur Trennung hier zu versagen anfangen. Die Literatur, an welcher sich namentlich DELAFONTAINE, MARIGNAC, LECOQ de BOISBAUDRAN, CLEVE, NILSON, SORET, CROOKES, AUER, A. KRÜSS betheiligt haben, ist sehr umfangreich[2]).

Ferner sind unter den Körpern mit Absorptionsstreifen viele Salze von Cobalt, Chrom und Mangan zu nennen. Von practischer Wichtigkeit sind die Spectren der Farbstoffe, da sie vielfach das bequemste Unterscheidungsmittel für dieselben sind. Hierher gehören auch der Farbstoff des Blutes, das Oxyhämoglobin, und der Farbstoff der Pflanzen, das Chlorophyll, welches nach neuerer Untersuchung aus zwei Farbstoffen gemischt ist.

Zu wichtigen Resultaten hat die Untersuchung im Ultravioletten und Ultrarothen geführt. Namentlich HARTLEY und HUNTINGTON[3]) haben die Absorption der Kohlenwasserstoffe im Ultraviolett studirt und gefunden, dass dieselben charakteristische Spectra geben, durch welche sich isomere Körper leicht unterscheiden lassen.

Aehnliche Untersuchungen wurden von ABNEY und FESTING[4]) im Ultraroth ausgeführt. Sie fanden scharfe und unscharfe Linien und Banden. Die Absorptionslinien werden durch Wasserstoff hervorgebracht; sobald Sauerstoff in die Verbindung tritt, erscheinen Banden, welche das Licht zwischen zwei oder mehr Wasserstofflinien absorbiren, aber immer von solchen Linien begrenzt sind. Die Resultate werden in folgender Tabelle zusammengefasst:

Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff giebt cannelirte Bänder, wenige Linien.

Kohlenstoff, Wasserstoff und Chlor „ „ „ Brom „ „ „ Jod	giebt Bänder mit scharfen Rändern und viele Linien.
Kohlenstoff und Chlor . . . . . „ „ Stickstoff . . . „ „ Schwefel	giebt keine besondere Absorption.

---

[1]) H. W. VOGEL, Berl. Monatsber. 1878.

[2]) Einen Theil der Literatur und der Resultate siehe bei KAYSER, Lehrbuch der Spectralanalyse. 1883; CROOKES, Journ. chem. Soc. 1889.

[3]) HARTLEY und HUNTINGTON, Phil. Trans. 170. 1879; Proc. Roy. Soc. 31. 1880; siehe auch SORET ET RILLIET, Compt. rend. 110. 1890. Wichtige Untersuchungen über Zusammenhang zwischen Molecularbau und Absorptionsspectrum giebt HARTLEY: Journ. of the chem. Soc. 37, pag. 676; 39, pag. 153; 41, pag. 45; 47, pag. 685; 51, pag. 152; 53, pag. 641.

[4]) ABNEY and FESTING, Proc. Roy. Soc. 31. 1881; Nature 1881.

Wasserstoff und Sauerstoff giebt Banden und Linien.
Wasserstoff und Chlor . . . . . } giebt nur Linien.
„ „ Stickstoff . . . }

Es bleiben uns in Betreff der Absorption noch zwei praktisch wichtige Punkte zu besprechen. Alles Glas absorbirt die kurzen Wellen; je nach der Glassorte sind kleine Unterschiede vorhanden, aber bei etwa 350 μμ beginnt die Absorption stark zu werden, um bei etwa 300 μμ vollkommen zu sein. STOKES fand zuerst, dass Quarz diesen Uebelstand nicht theilt, dann fand CORNU im Schweizer Flussspath ein zweites geeignetes Material. Für Spectralapparate, die auch im Ultraviolett gebraucht werden sollen, stellt man daher Linsen und Prismen aus diesen Substanzen her; die Prismen werden meist so geschliffen, dass die optische Axe senkrecht zur Halbirungsebene des brechenden Winkels steht, dass die Strahlen, welche unter dem Minimum der Ablenkung das Prisma passiren, nicht doppelt gebrochen werden. CORNU setzt die Prismen aus zwei Hälften zusammen, deren eine rechtsdrehend, die andere linksdrehend ist. Quarz scheint für die Wellen unter 200 μμ auch undurchlässig zu werden, so dass für die allerkürzesten Wellen nur Flussspath brauchbar ist[1]).

Auch die atmosphärische Luft absorbirt nach CORNU[2]) die kurzen Wellen vollständig, wodurch das plötzliche Enden des Sonnenspectrums bei etwa 300 μμ hervorgebracht sein soll. CORNU fand, dass in grossen Höhen das Spectrum weiter reicht, ebenso bei hohem Sonnenstand weiter, als bei niedrigem. So erhält CORNU Photographien des Sonnenspectrums bis zur Wellenlänge

In Viege (660 *m* Höhe):		Auf dem Rigi (1650 *m*):		Am Riffelhaus (2570 *m*):	
Um 9 *h* 39 *m*	295·7	Um 9 *h* 20 *m*	295·7	Um 11 *h* 52 *m*	294·3
„ 1 *h* 20 *m*	295·4	„ 12 *h* 44 *m*	294·8	„ 1 *h* 44 *m*	294·5
„ 4 *h* 27 *m*	300·9	„ 4 *h* 17 *m*	300·6		

CORNU schliesst, dass auf je 700 bis 900 *m* Erbebung die Länge des Spectrums um 5 μμ wachse. Die Absorption durch die Luft soll es uns auch unmöglich machen, sehr kurze Wellen von irdischen Lichtquellen zu beobachten; eine Luftschicht von 10 *m* Länge soll die Wellen unter 211·8 μμ vollständig absorbiren, eine Schicht von 1 *m* die Wellen bis 184·2, eine Schicht von 0·1 *m* Wellen bis 156·6 μμ. In der That sind in Luft noch nie kürzere Wellen beobachtet worden, während es V. SCHUMANN gelungen ist, im Vacuum oder in verdünntem Wasserstoff Linien zu erhalten, die wohl von 100 μμ nicht weit abliegen[3]). Nach HARTLEY[4]) soll Ozon der Bestandtheil der Luft sein, der die Absorption hervorbringt.

5) Beziehungen zwischen den verschiedenen Linien desselben Elementes und zwischen den Spectren verschiedener Elemente.

a) Linienspectra.

Wenn wir annehmen, dass die Linien eines Spectrums uns direkt die Schwingungen des emittirenden Atoms kennen lehren, so ist die grosse Anzahl der Linien bei vielen Elementen sehr auffallend; besitzt doch das Eisenspectrum

---

1) SCHUMANN, Photographische Rundschau 1890.
2) CORNU, Compt. rend. 88. 1879.
3) SCHUMANN, Photographische Rundschau 1892.
4) HARTLEY, Journ. of the chem. soc. 39, pag. 111. 1881.

an 5000 Linien[1]). Wir können freilich wohl mit Recht annehmen, dass die Linien eines Spectrums nicht von lauter gleichartigen Atomen erzeugt werden; wir werden in einem leuchtenden Dampf Molekeln von sehr verschiedener Temperatur, daher sehr verschiedenem Bau haben, und wir beobachten stets nur die Summe der Wirkungen aller; das ist auch der Grund, weshalb bei Temperaturänderungen sich das Spectrum nur langsam, nie sprungweise ändert. Wollte man aber so weit gehen, jede einzelne Linie einem besonders gebauten Molekel, oder einem Atom desselben zuzuschreiben, so wäre eine solche Erklärung höchst unbefriedigend. Sie ist indessen auch nicht nöthig: wir wissen, dass jeder schwingende Körper gleichzeitig eine ganze Anzahl von Schwingungen ausführt, dass wir ausser dem Grundton Obertöne haben, und es liegt nahe, diese akustische Thatsache auf die Optik zu übertragen. Die möglichen Obertöne sind stets bedingt durch die Beschaffenheit des schwingenden Körpers, durch seine Dimensionen, die elastischen Kräfte, die schwingende Masse; die Schwingungszahlen der möglichen Töne werden durch eine Gleichung gegeben, in welche diese Grössen als Constanten eingehen. Freilich bietet die theoretische Ableitung dieser Gleichung in den meisten Fällen unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten dar, und nur für die einfachsten Fälle, für einen Stab, eine Platte, eine Kugel, einen Ring u. s. w. ist die Gleichung ermittelt worden, aber sie muss immer existiren.

Uebertragen wir dies auf die Spectren, so können wir annehmen, dass ein Atom nicht nur eine Linie erzeugt, sondern eine ganze Serie derselben, welche sich durch eine Gleichung müssen zusammenfassen lassen. Kennten wir den Bau des Molekels und die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte, so würden wir die Gleichung theoretisch entwickeln können. Da das nicht der Fall ist, können wir versuchen, sie empirisch aus den Linienserien zu ermitteln; dann wird sie uns umgekehrt Fingerzeige für den Bau des Molekels geben können, und darin beruht die grosse Wichtigkeit dieser Untersuchungen.

Musikalisch allein brauchbar sind die Fälle, wo die Obertöne harmonisch zum Grundton sind; dieser Fall ist daher der bekannteste und da er gleichzeitig der einfachste ist, so begann man damit, nach harmonischen Obertönen zu suchen, in welchem Falle also die Wellenlängen oder Schwingungszahlen im Verhältnisse ganzer Zahlen stehen müssen. Stoney[2]) fand, dass die Wasserstofflinien C, F, h im Verhältniss 20:27:32 stehen, und auch die erste der später gefundenen Ultravioletten Linien bei H steht mit der Linie bei G im Verhältniss 35:32, so dass wir die Anfänge von zwei harmonischen Serien im Wasserstoff hätten. Dann haben Stoney und Reynolds[3]) gefunden, dass von den 108 Absorptionslinien des Chromoxychlorids 31 sich als Obertöne darstellen lassen, deren Ordnungszahl zwischen 628 und 733 liegt. Ebenso macht Soret[4]) darauf aufmerksam, dass drei dreifache Gruppen des Mg sich als der 20., 27., 31. Oberton angenähert darstellen lassen, und 4 Linien im Cd als der 20., 23., 27., 31. harmonische Oberton. Nach diesen recht ärmlichen Resultaten hat Schuster[5]) dem Suchen nach harmonischen Tönen ein Ende gemacht. Er berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei ganz willkürlicher Vertheilung von Linien über

---

1) Kayser und Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1888.
2) Stoney, Phil. Mag. (4) 41. 1871; Nat. 21, pag. 508. 1880.
3) Stoney und Reynolds, Phil. Mag. (4) 42. 1871.
4) Soret, Phil. Mag. (4) 42. 1871.
5) Schuster, Proc. Roy. Soc. 31. 1881.

das Spectrum eine gewisse Zahl von Linien nahezu in ganzzahligem Verhältniss stehe; er prüft darauf hin das von ANGSTRÖM gemessene Eisenspectrum und stellt die Resultate in folgender Tabelle zusammen:

Nenner	Fehler ± 0·0000505		Fehler ± 0·0000755	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
0— 10	48	52	64	77
10— 20	180	206	250	308
20— 30	329	363	469	544
30— 40	478	521	664	779
40— 50	625	679	912	1015
50— 60	777	837	1163	1251
60— 70	886	968	1318	1447
70— 80	924	896	1337	1340
80— 90	667	629	989	940
90—100	253	241	393	361

Die Rechnung ist für zwei zugelassene Fehler-Grenzen der Wellenlängen durchgeführt; die erste Spalte giebt den Namen des Bruches, der das ganzzahlige Verhältniss darstellt, die 2. und 4. Spalte die Zahl der für diesen Fall beobachteten Linien, die 3. und 5. die Zahl der berechneten Linien. Es zeigt sich deutlich, dass die vorkommenden ganzzahligen Verhältnisse zufällige sind, dass wir nach harmonischen Obertönen nicht suchen dürfen.

Trotzdem sind zweifellos zusammengehörige Linien, Linienserien, in zahlreichen Spectren vorhanden. Wenn man findet, dass z. B. im Na und K sich stets Paare von Linien zeigen, im Mg, Ca, Zn und anderen Spectren Gruppen von 3 Linien, welche allmählich enger an einander rücken, je mehr man nach dem ultravioletten Ende kommt, wenn man die Reihe der ultravioletten Linien des Wasserstoffs ansieht, welche zuerst von HUYGINS[1]), dann von H. W. VOGEL[2]), CORNU[3]), AMES[4]) gemessen sind; wenn man ferner findet, dass häufig die Linien abwechselnd scharf und unscharf sind, worauf zuerst LIVEING und DEWAR[5]) aufmerksam gemacht haben, so ist man nicht zweifelhaft darüber, dass ein gesetzmässiger Zusammenhang zwischen den Linien existirt, dass sie sich in Serien ordnen lassen, wenn auch nicht in harmonische Serien.

Der erste, dem es gelang, für eine solche Serie die Gleichung aufzustellen, war BALMER[6]); er fand, dass die Gleichung $\lambda = A\frac{n^2}{n^2-4}$ die 14 Linien des Wasserstoffs ergiebt, wenn man für n die Zahlen von 3—15 einsetzt und die Constante A passend bestimmt. Die folgende Tabelle zeigt die Uebereinstimmung, wenn die Messungen von CORNU[7]) oder die zuverlässigeren von AMES[8]) benutzt werden, wobei sich A zu 3645·42 oder 3647·20 ergiebt:

[1]) HUYGINS, Phil. Trans. 171. 1880.
[2]) H. W. VOGEL, Berl. Mon.-Ber. 1879 u. 1880.
[3]) CORNU, Journ. d. Phys. (2) 5. 1886.
[4]) AMES, Phil. Mag. (5) 30. 1890.
[5]) LIVEING und DEWAR, Phil. Trans. 174. 1883.
[6]) BALMER, WIED. Ann. 25. 1885; HAGENBACH, WIED. Ann. 25. 1885; Beibl. WIED. Ann. 11. 1887.
[7]) CORNU, Journ. d. Phys. (2) 5. 1886.
[8]) AMES, Phil. Mag. (5) 30. 1890. Die Zahlen von AMES sind auf das Vacuum reducirt.

n	Cornu	berechnet	Differenz	Ames	berechnet	Differenz
3	6562·1	6561·8	+ 0·3	6564·97	6564·96	0·0
4	4860·7	4860·6	+ 0·1	4862·93	4862·93	0·0
5	4339·5	4339·8	— 0·3	4342·00	4341·90	+ 0·1
6	4101·2	4101·1	+ 0·1	4103·11	4103·10	0·0
7	3969·2	3969·5	— 0·3	3971·40	3971·4	0·0
8	3888·1	3888·4	— 0·3	3890·3	3890·3	0·0
9	3834·9	3834·8	+ 0·1	3836·8	3836·7	+ 0·1
10	3797·3	3797·3	0·0	3799·2	3799·2	0·0
11	3769·9	3770·0	— 0·1	3771·9	3771·9	0·0
12	3750·2	3749·6	+ 0·6	3751·3	3751·4	— 0·1
13	3734·1	3733·8	+ 0·3	3735·3	3735·6	— 0·3
14	3721·1	3721·4	— 0·3	3722·8	3723·2	— 0·4
15	3711·2	3711·4	— 0·2	3712·9	3713·2	— 0·3

Man kann nach diesen Zahlen sagen, dass die Formel in der That nahezu innerhalb der Beobachtungsfehler, die bei Ames etwa 0·1—0·2 *A.-E.* betragen mögen, mit den Messungen übereinstimmende Werthe liefert. Ganz kürzlich hat Deslandres noch 5 weitere Linien dieser Serie in dem Spectrum der Protuberanzen aufgefunden, die ebenfalls vortrefflich mit der Rechnung stimmen. Gleichzeitig mit der Balmer'schen Formel erschien eine Mittheilung von Cornu [1]), nach welcher im Spectrum des Aluminium und des Thallium Serien liegen sollten, welche sich aus der Wasserstoffserie ableiten lassen durch die Gleichung $\lambda = a + b\lambda_1$, wo λ_1 eine Wasserstofflinie, *a* und *b* Constante sind. Diese Angabe hält indess bei genauerer Messung nicht Stich [2]).

Im Jahre 1887 nahmen Kayser und Runge [3]) die Frage auf, und fanden, dass durch eine etwas erweiterte Balmer'sche Formel sich in vielen Elementen Serien darstellen lassen. Führen wir statt der Wellenlängen ihr Reciprokes, also eine der Schwingungszahl proportionale Grösse ein (wenn man nämlich den Brechungsexponent der Luft als constant betrachtet), so wird die reciproke Balmer-sche Formel: $\frac{1}{\lambda} = A + Bn^{-2}$. Es liegt nahe, eine Reihe nach steigenden negativen Potenzen von *n* auf der rechten Seite zu setzen. Ob aber eine solche Reihe mit etwa 3 Gliedern wirklich die Serie genügend darstellt, liess sich wegen der mangelhaften Kenntniss der Wellenlängen nicht ermitteln. Kayser und Runge unternahmen daher ganz neue Bestimmungen der Linienspectren und fanden [4]), dass die Formel $\frac{1}{\lambda} = A + Bn^{-2} + Cn^{-4}$ sich am besten den Beobachtungen anschliesst.

Um ein Bild der Genauigkeit zu geben, sei eine Serie im Lithiumspectrum angeführt.

n	beobachtet	berechnet	Differenz	n	beobachtet	berechnet	Differenz
4	3232·77	3232·77	0·00	8	2425·55	2425·56	— 0·01
5	2741·39	2741·39	0·00	9	2394·54	2394·25	+ 0·29
6	2562·60	2562·60	0·00	10	2373·9	2373·2	+ 0·7
7	2475·13	2475·33	— 0·20	11	2359·4	2358·2	+ 1·2

1) Cornu, Compt. rend. 100. 1885.

2) Ames, Phil. Mag. (5) 30. 1890; Kayser und Runge, Abhandl. der Berl. Akad. 1892.

3) Runge, Rep. Brit. Ass. 1888.

4) Kayser und Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890, 1891 u. 1892; Ueber die Spectren der Elemente, 3., 4., 5. und 6. Abschnitt.

Die Serie ist gegeben durch die Gleichung

$$10^8 \lambda^{-1} = 43584{\cdot}73 \quad - 133669 n^{-2} \quad - 1100084 n^{-4}.$$

Aber die Formel ist jedenfalls noch nicht richtig, es fehlt noch ein Glied mit n^{-6} oder n^{-8}; berechnet man nämlich die Wellenlänge für $n = 3$, so ergiebt sich 6600, während der beobachtete Werth 6708 ist. Aehnliches findet sich in allen Fällen, die längsten Linien werden immer zu klein gefunden; ein Glied mit grossen negativen Potenzen von n würde aber gerade für diese langen Wellen stark wirksam sein, sie vergrössern, für die kleineren Wellen, grössere Werthe von n, würde es fast verschwinden. Es lässt sich indess die Constante eines solchen Gliedes nur so ungenau bestimmen, und seine Einführung würde die übrigen Constanten so wesentlich fälschen können, dass Kayser und Runge darauf verzichtet haben, dies Glied noch zu berechnen.

Die bisherigen Resultate von Kayser und Runge sollen im Folgenden im Auszug zusammengestellt werden. In den meisten der bisher untersuchten Spectren der Elemente der drei ersten Mendelejeff'schen Gruppen finden sich Serien, die sich durch obige Formel darstellen lassen. Bei den Elementen der ersten und dritten Mendelejeff'schen Gruppe, d. h. bei Na, K, Rb, Cs, Cu, Ag, Al, In, Tl, finden sich je zwei Serien, für welche B und C identisch, nur A verschieden ist; zwei solche Serien kann man daher als eine Serie von Linienpaaren auffassen, deren Paare die gleiche Schwingungsdifferenz besitzen. Die Elemente besitzen wahrscheinlich alle zwei solche Serien von Paaren. Die erste Serie enthält sehr starke und unscharfe Linien, sie heisse erste Nebenserie, die zweite Serie enthält viel schwächere und schärfere oder nur einseitig nach Roth hin verbreiterte Linien, sie heisse die zweite Nebenserie. Diese schwächere zweite Nebenserie ist bisher nicht beobachtet für Rb und Cs. In jedem Element ist die Schwingungsdifferenz bei beiden Serien fast identisch. Li hat auch eine erste und zweite Nebenserie, aber nicht von Paaren, sondern von einfachen Linien. Bei allen diesen Serien, wie überhaupt bei allen bisher beobachteten, finden Kayser und Runge, dass $n = 3$ die kleinste Zahl ist, für welche sich ein positiver Werth der Schwingungszahl ergiebt, also $n = 3$ stellt die längste mögliche Welle vor, gerade wie es die Balmer'sche Formel auch für Wasserstoff ergiebt.

Die Alkalien sind vor den übrigen Elementen dadurch ausgezeichnet, dass sie noch eine dritte Serie von Paaren (nur bei Li wieder einfache Linien) besitzen, die die stärksten, am leichtesten umkehrbaren Linien des ganzen Spectrums enthält. Sie ist Hauptserie genannt. In ihr ist aber die Schwingungsdifferenz der Paare nicht constant, sondern nimmt ab mit wachsendem Werth von n, ist der 4. Potenz von n umgekehrt proportional. Die grösste vorkommende Schwingungsdifferenz, für $n = 3$, ist aber gleich der der beiden Nebenserien.

Von den Elementen der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe sind Mg, Ca, Sr, Ba, Zn, Cd, Hg untersucht. Mit Ausnahme von Ba besitzt jedes Element 6 Linienserien; von ihnen haben je 3 gleiche Constanten B und C, so dass die 6 Serien aufzufassen sind als 2 Serien von Linientriplets. Eine Tripletserie ist wieder stärker und unschärfer, sie heisst wieder erste Nebenserie, die zweite Nebenserie enthält schwächere und schärfere Triplets. Auch hier sind die Schwingungsdifferenzen der Triplets für beide Serien in jedem Element constant. — Bei Sr ist nur die erste Nebenserie gefunden.

Es ist oben die Hauptserie des Li als Beispiel für die Genauigkeit, mit der die Formeln die Wellenlängen darstellen, gegeben. Hier sei als weiteres Bei-

spiel die erste Nebenserie des Mg aufgeführt. Die erste Linie jedes Triplets ist gegeben durch

$$10^8\lambda^{-1} = 39796{\cdot}10 - 130398 n^{-2} - 1432090 n^{-4},$$

die zweite und dritte Linie jedes Triplets erhält man aus der ersten, indem man die Constante A vergrössert um 40·69 oder 60·90.

	berechnet	beobachtet	Differenz		berechnet	beobachtet	Differenz
$n=4$	3838·46	3838·44	− 0·02	$n=7$	2736·84	2736·84	0·00
	3832·47	3832·46	− 0·01		2733·80	2733·80	0·00
	3829·51	3829·51	0·00		2732·29	2732·35	+ 0·06
$n=5$	3097·05	3097·06	+ 0·01	$n=8$	2673·15	2672·90	− 0·25
	3093·15	3093·14	− 0·01		2670·25	2669·84	− 0·41
	3091·21	3091·18	− 0·03		2668·81	2668·26	− 0·55
$n=6$	2851·53	2852·22	—	$n=9$	2633·80	2633·13	− 0·67
	2848·22	2848·53	+ 0·31		2630·98	2630·52	− 0·46
	2846·58	2846·91	+ 0·33		2629·58	—	—

Für $n = 3$ ergiebt sich 13111; 13041; 13007, also ultrarothe Linien, die bisher nicht beobachtet worden sind, wahrscheinlich aber nach der obigen Bemerkung noch um einige hundert ANGSTRÖM'sche Einheiten grösser sein werden. — Die grössere Abweichung bei 2852 erklärt sich daraus, dass hier gar nicht die Tripletlinie beobachtet ist, sondern eine andere, die stärkste Linie des Mg-Spectrums, welche dicht daneben fällt und die Tripletlinie verdeckt.

Eine Controlle für die Richtigkeit der aufgestellten Formeln kann durch die berechneten ultrarothen Linien geübt werden. Einzelne derselben, z. B. für Li und Na, sind schon länger durch BECQUEREL und ABNEY bekannt. Zwei für Cs berechnete Paare hat SNOW kürzlich mit dem Bolometer aufgefunden[1]).

Während bei den Alkalien alle existirenden Linien durch die Serien aufgenommen werden, ist dies bei den übrigen Elementen nicht der Fall; es zeigt sich, dass je höher der Schmelzpunkt des Elementes ist, desto weniger Prozent aller vorhandenen Linien durch die Serien gebildet werden; es ist offenbar, dass das Serienspectrum eine Temperatur charakterisirt, die ziemlich hoch über dem Siedepunkt liegt, und dass daher die Temperatur des Kohlenbogens bei vielen Elementen nicht ausreicht.

Es sei noch mit Rücksicht auf das Folgende bemerkt, dass die Constante B für alle Elemente nahe gleiche Werthe hat, sie liegen zwischen 109025 und 155000; nach der BALMER'schen Formel ist für Wasserstoff diese Constante 109721·6.

Zu ganz ähnlichen Resultaten wie KAYSER und RUNGE ist auch RYDBERG[2]) gelangt. Derselbe hat nicht neue Bestimmungen der Wellenlängen gemacht, sondern seine Schlüsse aus den älteren Messungen gezogen. RYDBERG stellt die Serien durch die Formel $\frac{1}{\lambda} = A + \frac{B}{(n+\mu)^2}$ dar, wo B für alle Elemente denselben Werth 109712·6, der sich aus der BALMER'schen Formel ergiebt, haben soll. Die Formel stellt in der That die Serien angenähert dar, aber wesentlich schlechter als die Formel von KAYSER und RUNGE, es ergeben sich vielfach Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung, die weit grösser sind, als die möglichen Fehler der experimentellen Bestimmung. RYDBERG gelangt zu dieser

1) SNOW, WIED. Ann. 47. 1892; KAYSER und RUNGE, WIED. Ann. 48. 1893.

2) RYDBERG, Kongl. Swenska Vetensk. Akad. Handl. 23. 1891.

Formel durch eine Betrachtung, die hier nicht angeführt werden soll, da KAYSER und RUNGE ihre Unrichtigkeit nachgewiesen haben[1]).

Bisher sind nur die experimentellen Daten angeführt, es sind aber auch einige theoretische Versuche zur Erklärung der Linien zu erwähnen. Der erste Versuch stammt von LECOQ DE BOISBAUDRAN[2]). Nach ihm sollen die Molekeln Hervorragungen haben und sich um eine Axe drehen. Beim jedesmaligen Passiren einer Hervorragung soll der Aether in Bewegung gesetzt werden. Gleichzeitig soll das Molekel sich in gestreckter elliptischer Bahn mit variabler Geschwindigkeit bewegen. Wie bei der Erde in Folge des letzteren Umstandes die Tage verschieden lang sind, sollen bei dem Molekel dadurch an verschiedenen Stellen der Bahn verschiedene Schwingungsdauern und somit verschiedene Linien erzeugt werden. Die ganze elliptische Bahn des Molekels soll sich ihrerseits wieder in einer Ellipse bewegen, wodurch neue Unterschiede an verschiedenen Stellen, neue Linien hervorgerufen werden. Das ganze Resultat dieser künstlichen Hypothese wäre aber wohl ein anderes, als LECOQ angiebt; es würden nicht mehrere Linien entstehen, sondern nur jede sich verbreitern, da ja die Bewegung auf den Ellipsen nicht sprungweise, sondern continuirlich erfolgt.

Ferner hat STONEY[3]) versucht nachzuweisen, dass in den Spectren harmonische Schwingungen vorhanden sein müssten, da die periodische Bewegung des Aethers sich jedenfalls nach dem FOURIER'schen Theorem müsse zerlegen lassen. Da die Erfahrung diese Schlüsse als falsch bewiesen hat, können wir sie bei Seite lassen. Zur Erklärung der Linienpaare sind 2 Theorien aufgestellt. V. A. JULIUS[4]) vermuthet, es seien die Atomschwingungen nicht ∞ klein, daher müssten Combinationstöne entstehen; wir würden dann in den Spectren häufig den gleichen Abstand, die gleiche Schwingungsdifferenz zwischen Linien finden. Er berechnet nur mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie oft wir in einem Spectrum mit willkürlich vertheilten Linien denselben Abstand finden müssten und vergleicht die berechneten Zahlen mit den beobachteten bei den Spectren von H, K, Na, Cu, Rb, Ag, Mg, O, und findet stets die beobachtete Zahl grösser, zum Theil viel grösser, als die berechnete; er sieht darin eine Bestätigung seiner Annahme. JULIUS weist ferner auf die Paare und Triplets beim Na, Al, Mg hin.

Es lassen sich indess verschiedene Einwände machen; zunächst finden sich zwar, wie KAYSER und RUNGE nachwiesen, in den Spectren der Alkalien zahlreiche Paare mit constantem Abstand, die Nebenserien, aber die Hauptserien mit den stärksten Linien haben verschiedenen Abstand der Paare. Man sollte ferner erwarten, dass die stärksten Linien Veranlassung zu Combinationstönen geben; aber das ist nicht der Fall, wie AMES[5]) bemerkt.

Eine ganz andere Anschauung hat STONEY[6]) entwickelt. Er betrachtet die Bewegung eines Atoms. Wenn von den Kräften, die darauf wirken, eine viel grösser ist, als die andern, so wird die Bahn des Theilchens wesentlich durch diese Kraft bestimmt. Durch die anderen Kräfte aber wird die Bahn 1) allmählich verschoben, 2) in Grösse und Gestalt geändert. Die Bahn lässt sich zerlegen in elliptische Bahnen, die Partialschwingungen. Jeder solchen Ellipse würde eine

---

[1]) KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890, 1891 u. 1892; Ueber die Spectren der Elemente, 3., 4., 5. und 6. Abschnitt.

[2]) LECOQ DE BOISBAUDRAN, Compt. rend. 69, pag. 445, 606 u. 657. 1869.

[3]) STONEY, Phil. Mag. (4) 41. 1871.

[4]) V. A. JULIUS, Annal. de léc. polyt. de Delft 5. 1889.

[5]) AMES, Phil. Mag. (5) 30. 1890.

[6]) STONEY, Trans. Dubl. Soc. (2) 4. 1891; Phil. Mag. (5) 33. 1892.

Linie des Spectrums entsprechen. Die störenden Kräfte bewirken: 1) Drehung der grossen Axe in der Ebene der Ellipse; 2) Präcessionsbewegung der Knotenlinie, in welcher diese Ebene die invariable Ebene schneidet; 3) Periodische Aenderung des Winkels zwischen diesen Ebenen; 4) Periodische Aenderung der Ellipse. Endlich kann noch 5) eine nutations-artige Wirkung eintreten. Diese Veränderungen der elliptischen Bahn bewirken im Spectrum Folgendes: 1) Drehung der Axe: die Bewegung lässt sich dann zerlegen in zwei kreisförmige Bewegungen mit den Schwingungszahlen $m + n$ und $m - n$. Es werden also Doppellinien erzeugt. 2) Präcessionsbewegung: die Bahn zerfällt in 2 mal 2 Kreise und 1 Linie, es entstehen im Spectrum zwei Gruppen von je 3 Linien. 3) Aenderung des Winkels verbreitert die Linien. 4) Aenderung der Ellipse giebt auch Doppellinien. 5) Nutation macht die Linien unscharf. In der zweiten Abhandlung macht STONEY noch eine interessante Bemerkung. In der Formel von KAYSER und RUNGE ergab sich stets für $n = 3$ der kleinste positive Werth von $\frac{1}{\lambda}$, für kleinere n wird die Schwingungszahl negativ; STONEY bemerkt nun, dass negative Schwingungszahlen auch einen Sinn haben, sie bedeuten nur, dass die Bahn der Ellipse in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Dadurch wird im Spectrum bei einer Doppellinie der Platz der beiden vertauscht und bei jeder rechts und links. Er findet nun, dass das einzige Linienpaar im Natriumspectrum, welches unscharf nach Violett ist, während alle übrigen unscharf nach Roth sind, als Glied der zweiten Nebenserie mit negativer Schwingungszahl dargestellt werden kann. Es ist freilich zu bemerken, dass dieser Fall auch der einzige ist, der sich so erklären lässt; um ähnliche Liniengruppen im Zn, Cd, Hg zu erklären, ist eine weitere Hypothese nöthig, auf die ich hier nicht eingehen will.

In dieser Abhandlung versucht übrigens STONEY noch die Serien des Na durch die Gleichung eines Kegelschnitts darzustellen; die Uebereinstimmung ist aber mässig.

Noch eine rein theoretische Untersuchung ist der Vollständigkeit halber zu nennen: KÖVESLIGETHY[1]) behandelt die Theorie der continuirlichen Spectren, welche nach seiner Ansicht ebenfalls für jeden Stoff charakteristisch sind. Er macht davon eine kurze Digression zu den Linienspectren, und gelangt schliesslich zu der Formel $\lambda^2 = \mu^2 \frac{1}{\varphi(r) - 1}$, wo μ eine Function der Temperatur und Constitution des Körpers sein soll, $\varphi(r)$ eine Function der ganzen Zahlen und der Beschaffenheit des Körpers. Die Gleichung hat Aehnlichkeit mit der BALMERschen, wird denn auch mit ihr verglichen und daraus weitere Schlüsse gezogen, welche scheinbar die Gleichung wichtig und fruchtbar machen. Verfolgt man aber die Rechnung des Verf. näher, so findet man, dass in Wahrheit gar nichts aus der Gleichung zu entnehmen ist, was nicht vorher absichtlich hineingelegt war; die ursprüngliche Formel enthält in Wahrheit nichts anderes, als die selbstverständliche Annahme, dass die Bewegung der Molekeln Function der Kräfte zwischen ihnen ist und weiteres ist aus ihr auch nicht zu entnehmen. Wir wollen auf diese Benutzung der Mathematik nicht weiter eingehen.

b) Bandenspectren.

Wenn in den Linienspectren die gesetzmässige Lage nur in wenigen Spectren auffallend hervortritt, so ist bei den Bandenspectren das Gegentheil der Fall;

---

[1]) v. KÖVESLIGETHY, Grundzüge einer theoretischen Spectralanalyse, Halle bei Schmidt 1890.

sobald man sie unter genügender Dispersion betrachtet, findet man sofort, wie das Spectrum sich aus mehreren Bandengruppen zusammensetzt, deren jede wieder aus verschiedenen Serien besteht. In jeder Serie kann man eine Kante unterscheiden, von welcher aus die Bande beginnt; hier liegen die Linien ausserordentlich nahe an einander und sind sehr stark, um mit weiterer Entfernung von der Kante schwächer zu werden und namentlich weiter auseinander zu rücken, wodurch die scheinbare Abschattirung entsteht. Die Serien laufen von der Kante meist nach der Seite der kürzeren Wellen, seltener nach der entgegengesetzten Seite. Auf eine solche Serie kann sich dann eine zweite, dritte u. s. w. legen, und diese verschiedenen Liniensysteme können ein sehr schönes Bild geben, indem die Linien der verschiedenen Serien bald zusammenfallen, bald sich trennen, um wieder zusammenzufallen, wenn die eine Serie der andern um eine Linie vorausgeeilt ist. Noch complicirter wird das Bild dadurch, dass die Linien der einzelnen Serien häufig doppelte oder dreifache Linien sind. Manchmal besitzt die erste Bandengruppe eine Bande, die zweite deren 2, die dritte und alle folgenden 3; es kann die Zahl der Banden aber auch höher steigen, z. B. bei den Cyanbanden bis 7. Jedenfalls erkennt man bei den Banden auf den ersten Blick ihren gesetzmässigen Bau, und es ist merkwürdig, dass man nicht längst versucht hat, das Gesetz zu ergründen.

Lecoq de Boisbaudran[1]) suchte zuerst für zwei Banden des Stickstoff nachzuweisen, dass die Wellenlängen sich Linie für Linie glichen und im Verhältniss von 4 : 3 standen. Doch waren seine Wellenlängenbestimmungen zu ungenau. Dann machte Thalén[2]) auf die regelmässige Lage der Banden im Absorptionsspectrum des Joddampfes aufmerksam, und zerlegte dasselbe in 7 Systeme von Serien, ohne aber ein zuverlässiges Gesetz für ihre Lage zu geben. Erst Deslandres[3]) stellte solche, freilich nicht ganz streng richtige Gesetze auf. Dieselben lauten: 1) In jeder Serie bilden die Differenzen von je zwei auf einander folgenden Schwingungszahlen eine arithmetische Progression; giebt man der Kante die Ordnungszahl 0, und den folgenden Linien der Reihe nach die Ordnungszahlen 1, 2, 3 . . ., so ist die Schwingungszahl der $n$ten Linie gegeben durch $\frac{1}{\lambda_n} = a + bn^2$, wo a die Schwingungszahl der Kante, b die Differenz zwischen der Schwingungszahl der Kante und der ersten Linie ist.

2) Die verschiedenen Serien einer Bande sind »identisch«, d. h. man erhält die Schwingungszahlen der Linien jeder Serie der Bande, wenn man zu den Schwingungszahlen der Linien einer Serie eine Constante fügt.

3) Die verschiedenen Banden desselben Spectrums sind so mit einander verbunden, dass die 1., 2. . . . Kanten aller Banden einer Gleichung von ähnlicher Form folgen, wie die Linien einer Serie: $\frac{1}{\lambda} = A + Bn + Cn^2$, wo A, B, C Constante sind, und für n die aufeinander folgenden Werthe der Zahlenreihe zu setzen sind.

An den Cyanbanden, namentlich der regelmässigsten derselben, bei 3883 haben dann Kayser und Runge[4]) diese Sätze geprüft. Das erste Gesetz erwies

[1]) Lecoq de Boisbaudran, Compt. rend. 69. 1869.

[2]) Thalén, Jodgaseors Absorptionsspektrum Kongl. Swenska Vetensk. Akad. Handl. 8. 1869.

[3]) Deslandres, Compt. rend. 103. 1886; Compt. rend. 104. 1887; Ann. d. Chim. (6) 15. 1888.

[4]) Kayser und Runge, Abhandl. der Berl. Akad. 1889. Vergl. dazu: Deslandres, Journ. de Physique (2) 10, pag. 276. 1890.

sich als eine erste Annäherung. Besser passt eine Gleichung mit mehr Gliedern, z. B. $\frac{1}{\lambda} = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4$, aber auch diese stellt nur etwa die ersten 150 Linien richtig dar, man müsste also noch weitere Glieder hinzunehmen. Am besten passte die empirische Gleichung $\frac{1}{\lambda} = a + bc^{cn} \sin(dn^2)$, trotzdem sie nur 4 Constanten a, b, c, d besitzt. — Auch das zweite uud dritte Gesetz von DESLANDRES hielten KAYSER und RUNGE nicht für streng richtig. Indessen macht DESLANDRES aufmerksam, dass sie ihn missverstanden haben, und zeigt, dass bei richtiger Anwendung seiner Sätze, die er an zahlreichen Bandenspectren geprüft habe, dieselben auch für die Kohlebanden passen.

c) Beziehungen zwischen verschiedenen Spectren.

Die Molekeln der chemischen Elemente werden von einander unterschieden sein entweder nur durch verschiedenen Aufbau aus Atomen der gleichen Ursubstanz, oder durch verschiedenen Bau und verschiedene Materie. Wenn wir unter den Elementen solche finden, die in ihrem chemischen Verhalten sehr ähnlich sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass auch der Bau ihrer Molekeln und die Kräfte zwischen den Atomen ähnliche sein werden; da ferner von denselben Umständen die Spectren bedingt werden, sieht man sich veranlasst zu prüfen, ob die Spectra chemisch verwandter Körper Aehnlichkeiten zeigen, und in wiefern das Atomgewicht zur Modification des Spectrums einwirkt.

Das MENDELEJEFF'sche System der Elemente fasst dieselben in Gruppen zusammen, welche in gewissen Beziehungen verwandt sind. In den Gruppen können wir dann noch Unterabtheilungen bilden, welche in noch höherem Grade einander nahe stehen. So haben wir in der ersten MENDELEJEFF'schen Gruppe die Alkalien, welche die Gipfel der Kurve bilden, die aus Atomgewicht und Atomvolumen als Ordinaten construirt werden kann (vergl. L. MEYER, die modernen Theorien der Chemie, 5. Aufl., Breslau bei Maruschke und Berendt, 1884); sie stehen sich besonders nahe, während Cu, Ag, Au, auf den steigenden Aesten der Kurve liegend, mit jenen nur geringe Aehnlichkeit zeigen. Ebenso würden wir in der zweiten Gruppe Be, Mg, Ca, Sr, Ba, die auf dem fallenden Ast liegen, zusammenfassen können, und Zn, Cd, Hg, die auf dem steigenden Ast liegen, von jenen sondern. Das natürliche System wird jedenfalls als Wegweiser bei den ersten Untersuchungen zu dienen haben.

LECOQ DE BOISBAUDRAN[1]) hat zuerst in dieser Richtung die Alkalien untersucht; er findet, dass die Spectra ähnlich seien, wählt Linien, die sich nach seiner Meinung entsprechen, und die er homolog nennt, und kommt zum Schluss, dass diese homologen Linien desto mehr nach dem rothen Ende des Spectrums rücken, je grösser das Atomgewicht des Alkali ist. LECOQ hat, wie wir nachher sehen werden, einen guten Blick gehabt, und hat im Allgemeinen das Richtige getroffen; aber das Verfahren ist in keiner Hinsicht beweisend; die Auswahl der homologen Linien ist eben eine ganz willkürliche, Andere könnten andere Linien homolog nennen. Bei der Wahl der Linien ist eben das Gesetz schon maassgebend, welches nachher bewiesen werden soll; wenn LECOQ die rothen *Ka*-Linien den *D*-Linien homolog setzt, so ist dazu nur die Vermuthung bestimmend, dass die *K*-Linien grössere Wellenlänge haben müssen, sonst hätte er ebensogut das violette Paar als den *D*-Linien homolog betrachten können. Wenn er trotzdem

---

[1]) LECOQ DE BOISBAUDRAN, Compt. rend. 69. 1869.

bei den Alkalien das Richtige fand, so war es mehr Zufall, dem glücklichen Umstande zu danken, dass diese Spectren sehr linienarm sind. Für andere Gruppen von Elementen hat er daher aus seinem Gesetz keinerlei Consequenzen ziehen können. — Eine ähnliche Betrachtung von TROOST und HAUTEFEUILLE[1]) sei nur erwähnt; sie bezog sich auf C, B, Si, Ti, Zr, ist aber aus denselben Gründen nicht brauchbar. Dasselbe lässt sich über eine Untersuchung von DITTE[2]) sagen. Noch bedeutend bedenklicher sind die nun folgenden Untersuchungen von CIAMICIAN[3]). Auch er sucht in den Spectren der Elemente homologe Gruppen. Bei CIAMICIAN übersteigt aber die Willkür alle Grenzen des Erlaubten; die Gruppen werden gewaltsam homolog gemacht, indem fehlende Linien einfach als noch unbekannt, überzählige als anderer Temperatur angehörig bezeichnet und fortgelassen werden. Dass man auf diese Art alles beweisen kann, was man nur will, ist klar. Noch schlimmer fällt das Urtheil über die Arbeiten von CIAMICIAN aus, wenn man die Spectren näher ansieht, welche er zur Vergleichung benutzt; dieselben haben mit den wirklichen Spectren, soweit sie bisher oder zur damaligen Zeit bekannt waren, manchmal gar keine Aehnlichkeit. Es verlohnt somit nicht, die Resultate zu erwähnen, welche CIAMICIAN über Verwandtschaft und Zusammengesetztheit der Elemente ableitet.

Die nächste Untersuchung, die wir zu verzeichnen haben, ist von HARTLEY[4]) über die Spectren von Mg, Zn, Cd angestellt. In der That sind diese Spectren ungemein ähnlich durch Serien von Triplets, wie schon oben besprochen wurde. HARTLEY bemerkte zuerst, dass die Differenzen der Schwingungszahlen für die drei Linien aller Triplets jedes Elementes constant sind. Er suchte dann Homologien zwischen den Triplets, aber auch hier haben wir den Vorwurf der Willkür zu machen, in deren Folge denn auch HARTLEY nur theilweise das Richtige traf. AMES[5]) hat die Beziehungen zwischen Zn und Cd in Bezug auf die Triplets zuerst richtig angegeben.

Er unterscheidet unter den Triplets zwei Reihen, scharfe und unscharfe; indem er für jede dieser Reihen die Differenz der Schwingungszahlen der ersten Linie der Triplets berechnet, findet er z. B. für die stärkere unscharfe Serie

im Zn	581,	263,	141,	84
„ Cd	587,	264,	141,	84.

Dadurch ist wirklich jedes Triplet des einen Spectrums als homolog einem bestimmten des andern erwiesen.

Der Vollständigkeit halber müssen noch die Versuche GRÜNWALD's, Beziehungen zwischen den Spectren zu finden, erwähnt werden. Sie bilden ein interessantes Beispiel dafür, wohin kritiklose Phantasie in der exacten Wissenschaft führen kann[6]).

Es ist noch eine Arbeit von LECOQ[7]) zu nennen, die scheinbar zu ganz

[1]) TROOST und HAUTEFEUILLE, Compt. rend. 72. 1871.

[2]) DITTE, Compt. rend. 73, pag. 622. 1871; Compt. rend. 73, pag. 738. 1871.

[3]) CIAMICIAN, Wien. Ber. 76, Bd. 2. 1877; Wien. Ber. 78, Bd. 2. 1878; Wien. Ber. 82, Bd. 2. 1880.

[4]) HARTLEY, Journ. of the chem. soc. 1882 u. 1883.

[5]) AMES, Phil. Mag. (5) 30. 1890.

[6]) Die Publikationen von GRÜNWALD und die Kritik derselben findet sich: GRÜNWALD, Astronom. Nachr. 117. 1887; Wien. Ber. 96, Bd. 2. 1887; Wien. Ber. 97, Bd. 2, 1888; Wien. Ber. 98, Bd. 2. 1889; Wien. Anzeiger 1890; AMES, Nat. 38. 1888; KAYSER, Chem. Ztg. 13. 1889; GRÜNWALD, Chem. Ztg. 14, pag. 325. 1890; KAYSER, Chem. Ztg. 14. 1890; RUNGE, Phil. Mag. 1890.

[7]) LECOQ DE BOISBAUDRAN, Compt. rend. 102. 1886.

sicheren Resultaten führt, weil LECOQ dadurch im Stande gewesen ist, das Atomgewicht des Gallium und des Germanium richtig zu berechnen, bevor dieselben chemisch bestimmt waren. Aber leider ist auch dies Gesetz nur scheinbar bestätigt. Das Gesetz wird am deutlichsten durch das von LECOQ gegebene Beispiel erläutert werden.

Homologe Wellenlängen:	Differenz	Differenz	Variation	Atomgewicht:	Differenz	Differenz	Variation
Al 3952				27·5			
	149				42·4		
Ga 4101		56	$\frac{56}{149} = 0·37584$	69·9		1·2	$\frac{1·2}{42·4} = 0·0283$
	205				43·6		
In 4306				113·5			

Der Quotient aus den beiden Variationen, $\frac{0·37584}{0·0283} = 13·28$ soll nun für alle verwandten Elemente identisch sein. Wenn wir danach das Atomgewicht des Germanium berechnen wollen, welches zwischen Si und Sn steht, haben wir:

Wellenlängen:	Differenz	Differenz	Variation	Atomgewicht:	Differenz	Differenz	Variation
Si 4010				28			
	443				$x - 28$		
Ge 4453		181	$\frac{181}{443} = 0·4051$	x		$146-2x$	$\frac{146-2x}{x-28} = X$
	624				$118 - x$		
Sn 5077				118			

Nun soll $\frac{0·4051}{X} = 13·28$ sein, also $X = 0·03051$, woraus dann folgt $x = 72·32$, also das richtige Resultat.

Gegen dies Gesetz sind aber folgende Einwände zu machen. Erstlich ist in der Wahl der homologen Linien der Willkür wieder Thür und Thor geöffnet, vorausgesetzt, dass dieselben nicht auf anderem zuverlässigen Wege gefunden sind. Zweitens sind die Atomgewichte viel zu ungenau bekannt, um den Quotienten aus den Variationen zu ermitteln. So sind z. B. die Atomgewichte von Al, Ga, In nur bis auf 0·5 sicher[1]); nimmt man nur das Atomgewicht von Ga um 0·5 höher an, so wird die Variation der Atomgewichte statt 1·2 zu 0·2 und jener Quotient statt 13 zu 86. Wenn also die Rechnung für Germanium so gut übereinstimmt, so liegt das an der zufälligen Wahl der Atomgewichte.

AMES[2]) hat denn auch vergebens versucht, dies Gesetz bei Mg, Zn, Cd zu bestätigen, wobei er noch den Vortheil hatte, zweifellos homologe Linien benutzen zu können. Vielleicht steckt in dem Gesetz ein richtiger Kern, aber in dieser Form ist es heute noch nicht brauchbar.

Der einzige zuverlässige Weg, homologe Linien in den Spectren verschiedener Elemente aufzufinden und daran weitere Vergleichung der Spectren zu knüpfen, ist der der Rechnung. Finden wir nach demselben Gesetz gebaute Linienserien, so werden wir die der gleichen Ordnungszahl entsprechenden Linien als homolog betrachten dürfen. Die Rechnung allein reicht freilich für richtige Schlüsse noch nicht aus, da in jedem Spectrum mehrere Serien vorkommen; es ist auch der Charakter und das physikalische Verhalten der Serien zu beachten, und nur die mit gleichem Charakter sind in Beziehung zu setzen. Auf diesem Wege sind RYDBERG[3]) und KAYSER und RUNGE[4]) vorgegangen, und im Allgemeinen zu den gleichen Resultaten gelangt.

1) Vergl. LANDOLT-BÖRNSTEIN, Physikalisch-Chemische Tabellen, Berl. bei Springer 1883.

2) AMES, Phil. Mag. (5) 30. 1890.

3) RYDBERG, Kongl. Swenska Vetensk. Akad. Handl. 23. 1891.

4) KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890, 1891 u. 1892; Ueber die Spectren der Elemente, 3., 4., 5. und 6. Abschnitt.

Die Elemente, welche zu derselben Gruppe des MENDELEJEFF'schen natürlichen Systems gehören, besitzen Spectra, welche wenigstens in ihren Hauptlinien homolog gebaut sind. Dies ist für die 2 ersten Gruppen und einen Theil der dritten festgestellt, für die folgenden ist noch nichts bekannt. Der ersten und dritten Gruppe entsprechen Serien von Linienpaaren, der zweiten Serien von Triplets. Innerhalb jeder dieser drei Gruppen kann man bekanntlich noch zwei Abtheilungen chemisch näher verwandter Elemente bilden. Auch spectralanalytisch zeigen sich diese Unterabtheilungen. Wir haben somit: I. Li, Na, K, Rb, Cs. II. Cu, Ag. III. Mg. Ca, Sr. IV. Zn, Cd, Hg. V. Al, In, Tl. Innerhalb jeder dieser Abtheilungen rückt das Spectrum mit wachsendem Atomgewicht nach der Seite der längeren Wellen; von einer Abtheilung zur folgenden indessen rückt das Spectrum sehr bedeutend nach der Seite der kürzeren Wellen. In umstehender Figur sind für die 5 Abtheilungen die Serien gezeichnet nach dem Maassstab der Schwingungszahlen. Dabei ist aber, um nicht die Uebersichtlichkeit zu verlieren, von jedem Paar oder Triplet nur die erste Linie gezeichnet. Bei Li, Na, K sind 3 Serien gezeichnet, die Hauptserie mit punktirten Linien, die erste Nebenserie mit dick, die zweite mit dünn ausgezogenen Linien. Rb und Cs haben nur Haupt- und erste Nebenserien, die übrigen Elemente nur die beiden Nebenserien. Es sind nur die experimentell durch KAYSER und RUNGE beobachteten Linien oder Serien eingetragen.

Die gesetzmässige Verschiebung der Serien von einem Element zum andern tritt am deutlichsten bei den Constanten der Serien hervor, die wie oben besprochen, durch die Gleichung $10^8 \lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$ dargestellt sind. Es folge hier eine Zusammenstellung von KAYSER und RUNGE berechneter Constanten für die beiden Nebenserien.

	Erste Nebenserie			Zweite Nebenserie				
	A	B	C	A	B	C	ν	$\frac{\nu}{a^2}$
Li	28587	109625	1847	28667	122391	231700	—	—
Na	24475	110065	4148	24549	120726	197891	17	325
K	21991	114450	111146	22021	119393	62506	57	381
Rb	20939	121193	134616	—	—	—	234	322
Cs	19743	122869	305824	—	—	—	545	309
Cu	31592	131150	1085060	31592	124809	440582	249	622
Ag	30712	130621	1093823	30696	123788	394303	921	794
Mg	39796	130398	1432090	39837	125471	518781	41	713
Ca	33919	123547	961696	34041	120398	346067	102	638
Sr	31031	122328	837473	—	—	—	394	517
In	42945	131641	1236125	42955	126919	532850	386	918
Cd	40755	128635	1289619	40797	126146	555137	1159	929
Hg	40159	127484	1252695	40218	126361	613268	4633	1161
Al	48308	156662	2505331	48245	127527	687819	112	1534
In	44515	139308	1311032	44535	126766	643584	2213	1721
Tl	41542	132293	1265223	41506	122617	790683	7795	1879

Die Betrachtung dieser Zahlen zeigt Folgendes: die Constante B ändert sich sehr wenig, ist aber nicht constant, wie RYDBERG annehmen zu dürfen glaubte. Ebensowenig streng richtig ist eine andere Annahme RYDBERG's, A sei für beide

(Ph. 425.)

Serien jedes Elementes identisch. Da die Constante A die Schwingungszahl für $n = \infty$, d. h. für die letzte Linie der Serie ist, so würden nach RYDBERG die beiden Serien an derselben Stelle endigen. — Man sieht, wie innerhalb jeder Abtheilung die Constanten sich gesetzmässig ändern, wachsen oder abnehmen. A nimmt stets ab, d. h. die Serie rückt nach Roth hin; so läuft z. B. für Li die erste Nebenserie bei 350 μμ aus, für Cs bei 507 μμ. Dagegen rücken von Abtheilung zu Abtheilung die Serien nach kürzeren Wellen; wir haben die letzte Linie für Li bei 350 μμ, für Cu bei 316 μμ, für Mg bei 251 μμ, für Zn bei 233 μμ, für Al bei 207 μμ.

Es hat sich noch eine weitere wichtige Gesetzmässigkeit ergeben, die uns einen Zusammenhang zwischen dem Atomgewicht und dem Spectrum zeigt. Es ist oben angegeben, dass zwischen allen Paaren der beiden Nebenserien desselben Elementes die gleiche Schwingungsdifferenz vorhanden ist, und ebenso zwischen den 3 Linien der Triplets. Nennen wir diese Differenz für die Paare und die beiden ersten Linien der Triplets ν. Sie ist in der vorigen Tabelle angegeben und dahinter der Quotient von ν durch das Quadrat des Atomgewichts. Man sieht, dass innerhalb jeder Abtheilung dieser Quotient nahe denselben Werth hat, wir können also sagen: die Weite der Paare und Triplets, gemessen durch die Schwingungsdifferenz, ist angenähert dem Quadrat des Atomgewichts proportional.

5) Das Spectrum der Sonne.

a) Atlanten des Sonnenspectrums.

Das wichtigste Beispiel eines Absorptionspectrums bildet für uns das Sonnenspectrum. Zuerst wurde nur der sichtbare Theil desselben gezeichnet, dann kam unter Beihülfe der Photographie der ultraviolette hinzu, dann mit Benutzung der Wärmewirkung der ultrarothe, bis endlich das ganze Spectrum auf photographischem Wege mit ungeahnter Vollendung reproducirt wurde.

Die erste kleine Zeichnung stammt von FRAUNHOFER[1]), die nächste von BREWSTER[2]), der namentlich den Zweck im Auge hatte, den Ursprung der Linien zu erkennen. Dann folgte KIRCHHOFF[3]) mit seinem Atlas, für die damalige Zeit und ihre Hilfsmittel ein Muster von Genauigkeit und Sorgfalt; KIRCHHOFF benutzte 4 Flintglasprismen, hatte daher leider eine willkürliche Skala, so dass eine Bestimmung der Wellenlänge nur durch umständliche Rechnung und in unvollkommener Weise möglich wurde[4]). Die nächste Zeichnung von ANGSTRÖM[5]) gab das erste normale Spectrum mit genauer Bestimmung der Wellenlängen, wie sie durch Anwendung von Gittern ermöglicht wird. Es reicht von A bis H, und ist bis in die neueste Zeit die Grundlage aller Wellenlängen-Angaben geblieben. — Die neueren Zeichnungen des Sonnenspectrums — es seien nur die von H. C. VOGEL[6]), FIEVEZ[7]) und THOLLON[8]) genannt -- zeigen grösseren Maassstab und Linienreichthum, sind aber sonst von dem ANGSTRÖM'schen Atlas nicht wesentlich unterschieden, namentlich nicht in der Genauigkeit der Wellenlängen-

1) FRAUNHOFER, Denkschriften der K. Acad. d. Wissensch. zu München' 5. 1814—1815.

2) BREWSTER und GLADSTONE, Phil. Trans. 150. 1860.

3) KIRCHHOFF, Untersuchungen über das Sonnenspectrum, Abh. d. Berl. Akad. 1861.

4) GIBBS, Americ. Journ. 45. 1867; Americ. Journ. 47. 1869; WATTS, Index of Spectra, London, Gillmann. 1872.

5) ANGSTRÖM, Recherches sur le spectre solaire, Upsula bei Schulz 1868.

6) H. C. VOGEL, Publikat. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam, I. 179.

7) FIEVEZ, Ann. de l'obs. de Bruxelles, (3) 4. 1882; 5. 1883.

8) THOLLON, Ann. de l'observ. de Nice 3. 1890.

angaben. Nur BECKER (Trans. Roy. Soc. Edinb. 36. 1890) ist wohl wesentlich weiter gekommen.

Die erste nennenswerthe Photographie des ultravioletten Theiles rührt von MASCART[1]) her; er wurde wesentlich übertroffen von H. DRAPER[2]), dieser wieder durch CORNU[3]), welcher im Maassstabe des ANGSTRÖM'schen Atlas, und an dessen Wellenlängen sich anschliessend, das normale Spectrum bis $\lambda = 294 \cdot 8\ \mu\mu$ nach Photographien zeichnete.

Für den ultrarothen Theil des Sonnenspectrums war durch die früheren Beobachter eigentlich nur nachgewiesen, dass derselbe auch FRAUNHOFER'sche Linien besitze, wenn auch nur relativ wenige. Eine genauere Kenntniss wurde erst ermöglicht, als ABNEY[4]) photographische Platten erfand, welche für Ultraroth empfindlich sind. Er gebraucht zuerst Prismen, dann ROWLAND'sche Concavgitter, und erreicht damit das Beste, was wir bisher für den ultrarothen Theil kennen. Erst in allerneuester Zeit ist auf anderem Wege von LOMMEL[5]) das ultrarothe Sonnenspectrum photographirt worden. Er verwendet die schon von BECQUEREL benutzte Fähigkeit der Wärmestrahlen, das Phosphorescenzlicht auszulöschen; lässt man daher auf eine leuchtende Platte das ultrarothe Spectrum fallen, so leuchten nur die FRAUNHOFER'schen Linien weiter; bringt man dann die Platte in Contact mit einer photographischen Platte, so wirken auf diese nur die leuchtenden Linien, und man kann die Platte wie eine gewöhnliche Aufnahme entwickeln.

Im Jahre 1887 veröffentlichte ROWLAND einen mit seinen Concavgittern photographirten Atlas des Sonnenspectrums; im Jahre 1888 folgte eine 2. Auflage, welche von etwa 700 $\mu\mu$ bis 300 $\mu\mu$ reicht, und von tadelloser Schärfe und Vollkommenheit ist; die Länge des photographirten Spectrums beträgt etwa 12 *m*, die Wellenlänge jeder Linie lässt sich auf einige Hundertstel der ANGSTRÖM'schen Einheit genau ablesen. Die Genauigkeit der über dem Spectrum angebrachten Theilung reicht ebenso weit, so dass man die relative Wellenlänge jeder Linie auf mehr als 0·01 $\mu\mu$ gesichert hat.

In Betreff der absoluten Wellenlängen ist zu bemerken, dass man sich Jahrzehnte nach ANGSTRÖM's Messungen richtete, bis nach dessen Tode bekannt wurde, dass sein Maasstab falsch gewesen sei; es wurden darauf von verschiedenen Seiten[6]) neue absolute Bestimmungen gemacht, welche aber weniger gut überein stimmten, als man hätte erwarten sollen. Mit den besten Mitteln arbeitete BELL, sein Werth[7]) liegt in der Mitte zwischen den übrigen, ROWLAND hat ihn seinem neuen Atlas zu Grunde gelegt, alles Umstände, welche es dringend erscheinen lassen, dass diese Zahlen allgemein angenommen, die alten ANGSTRÖM'schen Werthe aufgegeben werden.

Die stärksten Linien des sichtbaren Theils hat schon FRAUNHOFER mit den grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet, für den ultravioletten Theil haben MASCART und CORNU die Buchstaben fortgesetzt, für den ultrarothen Theil hat ABNEY Zeichen eingeführt. In der folgenden Tabelle sind die Wellenlängen dieser

---

1) MASCART, Ann. de l'école norm. sup. 1. 1864.

2) H. DRAPER, Americ. Journ. 1873, auch POGG. Ann. 151. 1874.

3) CORNU, Spectre Normal de Soleil, Paris bei Gauthier-Villars. 1881.

4) ABNEY, Phil. Trans. 171. 1880; Phil. Trans. 177. 1886.

5) LOMMEL, Münch. Sitzungsber. 18. 1888; Münch. Sitzungsber. 20. 1890.

6) MÜLLER und KAEMPF, Publik. d. Astrophys. Inst. z. Potsdam, Bd. 5. 1886; KURLBAUM, WIED. Ann. 33. 1888.

7) BELL, Phil. Mag. (5) 25. 1888.

wichtigsten Linien zusammengestellt; hinter der Wellenlänge ist der Beobachter angegeben, dahinter das irdische Element, welchem die Linie angehört. Die Wellenlängen sind in ANGSTRÖM'schen Einheiten, d. h. zehnmillionstel *mm*, gegeben. Die Zahlen von ROWLAND sind seiner neuesten Veröffentlichung entnommen (Astronomy and Astrophysics 12, pag. 321. 1893).

ψ_2 }	27000	ABNEY		F	4861·496	ROWLAND	H
ψ_1 }				G {	4308·071	"	Fe
Φ_2	12400	"			4307·904	"	Ca
Φ_1	12000	"		h	4101·85	AMES	H
Y {	8990·4	"		H	3968·620	ROWLAND	Ca
	8986·5	"		K	3933·809	"	Ca
X_4	8806·1	"		L	3820·566	"	Fe
X_3	8661·4	"		M {	3727·768	"	Fe
X_2	8541·8	"			3727·10	KAYSER u. RUNGE	Fe
X_1	8497·0	"		N	3581·344	ROWLAND	Fe
Z	8226·4	"		O	3441·135	"	Fe
A	7594·059	ROWLAND	O	P	3361·30	KAYSER u. RUNGE	Fe
B	6867·461	"	O	Q	3286·87	"	Fe
C	6563·054	"	H	R {	3181·40	"	Ca
D_1	5896·154	"	Na		3179·45	"	Ca
D_2	5890·182	"	Na	r	3144·58	"	Fe
E_1 {	5270·533	"	Fe	S_1 {	3100·779	ROWLAND	Fe
	5270·448	"	Ca		3100·415	"	Fe
E_2	5269·722	"	Fe	S_2	3100·064	"	Fe
b_1	5183·792	"	Mg	s	3047·720	"	Fe
b_2	5172·871	"	Mg	T {	3021·191	"	Fe
b_3 {	5169·218	"	Fe		3020·759	"	Fe
	5169·066	"	Fe	t	2994·542	"	Fe
b_4 {	5167·686	"	Fe	U	2947·993	"	Fe
	5167·501	"	Mg				

b) Ursprung der FRAUNHOFER'schen Linien.

Schon FRAUNHOFER selbst schloss aus dem Umstande, dass verschiedene Sterne verschiedene FRAUNHOFER'sche Linien zeigen, dieselben müssten von der Lichtquelle selbst herrühren; trotzdem war, wie in dem Abschnitt über die Geschichte der Spectralanalyse ausführlich angegeben, bis zu KIRCHHOFF ihr Ursprung ganz zweifelhaft. Rühren sie von Absorption in der Erdatmosphäre her, so müssen sie sich in allen ausserirdischen Spectren finden, ausserdem müssten sie dunkler werden, wenn das emittirende Gestirn niedrig steht, seine Strahlen also eine dickere Schicht der Atmosphäre zu durchlaufen haben. Dies ist für eine ganze Anzahl der Linien der Fall, aber doch nur für einen kleinen Bruchtheil; von ihnen soll später die Rede sein, die übrigen aber müssen, wie KIRCHHOFF schloss, von einer Absorption in der Sonnenatmosphäre herrühren. KIRCHHOFF stellte die Hypothese auf, die Sonne sei eine feurige Masse[1]) von hoher Dichte, die ein continuirliches Spectrum emittirt. Von ihrer Oberfläche steigen Dämpfe der in ihr befindlichen Substanzen auf, welche sich abkühlen; sie bilden eine Hülle um die Sonne, die Photosphäre, und bringen durch ihre Absorption die FRAUNHOFER'schen Linien hervor. Ist das richtig, so müssen, wir im Stande sein, durch Vergleichung der FRAUNHOFER'schen mit irdischen Spectren die chemische Zu-

[1]) Ob die Sonnenmasse flüssig oder gasförmig sei, ist eine viel umstrittene Frage. Für die Spectralanalyse ist dies ganz gleichgültig, da jedenfalls die Dichte des Kerns so gross ist, dass ein continuirliches Spectrum emittirt wird.

sammensetzung der Photosphäre und damit der Sonne selbst zu ermitteln. Zu diesem Zweck unternahm KIRCHHOFF die Zeichnung des Sonnenspectrums und die Feststellung der Funkenspectren vieler Elemente und schloss, in der Sonne seien die Elemente:

Na, Fe, Ca, Mg, Ni, Ba, Cu, Zn, Co (?).

ANGSTRÖM und THALÉN setzten die Untersuchung fort, und es ergiebt sich folgende Tabelle, welche in Klammer neben jedem Element die Zahl der in der Sonne nachgewiesenen Linien enthält:

Na (9), Fe (450), Ca (75), Co (19), Mn (57), Ba (11), Mg (4), Cr (18), Ni (33), H (4), Ti (118), Al (2)?, Zn (3)?

Ueber Al und Zn waren die Forscher nicht sicher, da nur zwei resp. drei der vielen Linien des Elementes sich unter den FRAUNHOFER'schen Linien finden. LOCKYER[1]) benutzte die Methode der kurzen und langen Linien; da wir in gemischten Dämpfen nur die langen Linien eines Elementes zu finden erwarten dürfen, so hielt er die Anwesenheit einer Substanz für bewiesen, wenn auch nur die zwei oder drei längsten Linien unter den FRAUNHOFER'schen Linien gefunden werden. So fügte LOCKYER zu der Liste der in der Sonne vorhandenen Elemente Al (2 Linien), Sr (4), Pb (3), Cd (2), Ce (2), Ur (3), K (2), Va (4), Pd (5), Mo (4).

Ferner nennt er als Elemente, welche wahrscheinlich in der Sonne vorhanden sind:

Zn (1 Linie), Li (1), Rb (1), Cs (2), Bi (1), Sn (1), Be (1), La (3), Ag?, Y oder Er (2).

Zu dieser Liste wären noch hinzuzufügen C und N, da die Banden, welche einer Verbindung von C und N angehören und gewöhnlich Cyanbanden genannt werden, sicher im Sonnenspectrum vorhanden sind[2]). Dagegen sind aus der LOCKYERschen Liste wahrscheinlich viele Elemente zu streichen. KAYSER und RUNGE[3]) haben das zunächst nachgewiesen für K, Li, Rb, Cs, welche sicher nicht in der Sonne vorhanden sind.

Neuerdings hat ROWLAND[4]) eine vorläufige Liste über das Vorkommen der Elemente in der Sonne veröffentlicht. Er hat die Spectra der meisten Elemente mit Concavgitter photographirt und mit seinem Sonnenatlas verglichen, und ordnet die in der Sonne vorhandenen Elemente der Intensität der von ihnen herrührenden FRAUNHOFER'schen Linien nach oder der Zahl nach

der Intensität nach:

Ca	Na	Co	Ti	Sr	C	Zr	Nb	Cu	Ce	Rh	Pb
Fe	Ni	Si	Cr	Va	Sc	Mo	Pd	Zn	Be	Ag	Er
H	Mg	Al	Mn	Ba	Y	La	Nd	Cd	Ge	Sn	K

der Zahl nach:

Fe (2000 oder mehr)	Va (200 oder mehr)	Y (75 oder mehr)	Sr	Cu (2)
Ni	Zr	Nb	Ba	Ag (2)
Ti	Ce	Mo	Al (4)	Be (2)
Mn	Ca (75 oder mehr)	Pd	Cd	Ge
Cr	Sc	Mg (20 oder mehr)	Rh	Sn
Co	Nd	Na (11)	Er	Pb (1)
C (200 oder mehr)	La	Si	Zn	K (1)

1) LOCKYER, Studien zur Spectralanalyse, Leipzig bei Brockhaus 1879, pag. 223 u. ff.

2) LOCKYER, Proc. Roy. Soc. 27. 1878; LIVEING und DEWAR, Proc. Roy. Soc. 30. 1880; KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1889.

3) KAYSER und RUNGE, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890.

4) ROWLAND, Johns Hopkins University Circulars 10. 1891.

Zweifelhafte Elemente:
Ir, Os, Pt, Ru, Ta, Th, Wo, Ur.
Nicht in Sonne:
Sb, As, Bi, Bo, N, Cs, Au, In, Hg, P, Rb, Se, S, Tl, Pr.
Nicht untersucht:
Br, Cl, J, Fl, O, Te, Ga, Ho, Tm, Tb.

Ob wirklich alle von ROWLAND angeführten Elemente ihre Linien unter den FRAUNHOFER'schen Linien haben, scheint mir noch nicht sicher; wenn von zahlreichen Linien eines Elementes nur eine oder zwei gefunden werden, so ist daraus doch kaum ein Schluss zu ziehen. — Durch diese Elemente ist bei weitem der grösste Theil der FRAUNHOFER'schen Linien erklärt. Es bleiben freilich noch eine ganze Anzahl unbekannter Linien übrig, die entweder uns noch unbekannten Elementen angehören, oder nur wegen ungenügender Kenntniss der Spectren der Elemente uns fremd sind. Es giebt ja eine grosse Zahl von Elementen, deren Spectra wir eigentlich noch gar nicht kennen; es sei z. B. nur auf die seltenen Erden hingewiesen. Auch ist noch zu berücksichtigen, dass unter den Verhältnissen von Druck und Temperatur auf der Sonne viele andere Linien auftreten können, als wir mit unseren, namentlich in Bezug auf die Temperatur beschränkten Mitteln erzeugen können.

Höchst auffallend ist das gänzliche Fehlen aller Metalloide mit Ausnahme der oben erwähnten Cyanbanden, worauf LOCKYER zuerst aufmerksam machte; die Versuche, Sauerstoff- oder Schwefellinien im Sonnenspectrum nachzuweisen[1]), sind wohl als verfehlt zu bezeichnen.

Das ganze Spectrum zeigt sehr auffallend seine Entstehung aus der Superposition verschiedener Metallspectra; denn die Eigenschaft derselben, mit abnehmender Wellenlänge immer linienreicher zu werden, eine Eigenschaft, die sich durch das Gesetz der Linienserien erklärt, tritt im Sonnenspectrum noch mehr hervor.

Ein Theil der FRAUNHOFER'schen Linien wird desto dunkler, je niedriger die Sonne steht, und dokumentirt dadurch seinen Ursprung in der Erdatmosphäre; man nennt sie atmosphärische, terrestrische oder tellurische Linien. Sie sind vielfach untersucht und gezeichnet worden[2]); es gehört dazu die Liniengruppe *A* und *B*, die von ANGSTRÖM *a* genannte Gruppe zwischen 715 $\mu\mu$ und 730 $\mu\mu$, eine Gruppe bei *C*, die Gruppe α bei 630 $\mu\mu$, viele Linien um *D* u. s. w. Die meisten dieser Linien und Banden verdanken ihren Ursprung dem Wasserdampf der Atmosphäre, wie ANGSTRÖM und JANSSEN[3]) nachwiesen. EGOROFF[4]) fand zuerst, dass die Gruppen *A* und *B* und andere Linien vom Sauerstoff herrühren, was dann JANSSEN[5]) bestätigt. CORNU zeigt, dass wahrscheinlich auch α

---

[1]) SCHUSTER, Phil. Trans. 170. 1879; P. SMYTH, Trans. Edinb. Roy. Soc. 30. 1882; H. DRAPER, Sill. Journ. 14. 1877; J. CH. DRAPER, Sill. Journ. 16. 1878.

[2]) BREWSTER, Edinb. Phil. Trans. 1833; BREWSTER und GLADSTONE, Phil. Trans. 150. 1860; HENNESSAY, Proc. Roy. Soc. 19. 1870; Phil. Trans. 165. 1875; ANGSTRÖM, Recherches sur le spectre solaire 1868; SECCHI, Compt. rend. 60. 1865; JANSSEN, Ann. d. Chim. et de Phys. (4) 23; EGOROFF, Compt. rend. 93, pag. 385 u, 788; Compt. rend. 85. 1882; CORNU, Ann. de l'ecole norm. 1883; BECKER, Trans. Roy. Soc. Edinb. 36. 1890; THOLLON, Ann de l'observ. de Nice 3. 1890.

[3]) JANSSEN, Compt. rend. 56. 1860; Compt. rend. 60. 1864; Compt. rend. 63. 1866; Compt. rend. 78. 1874; Ann. de Chim. (4 23. 1871.

[4]) EGOROFF, Compt. rend. 95. 1882.

[5]) JANSSEN, Compt. rend. 101. 1885; Compt. rend. 102. 1886; Compt. rend. 106. 1888; Compt. rend. 107. 1888; Compt. rend. 108. 1889.

vom Sauerstoff herrührt und BECKER fügt noch eine vierte Gruppe hinzu. Wasserdampf und Sauerstoff sind aber bisher die einzigen Substanzen, deren Wirksamkeit sicher nachgewiesen ist, während Linien von Stickstoff, Kohlensäure, Ozon nicht gefunden sind. Die Aufsuchung der terrestrischen Linien ist ziemlich mühselig, da man bei verschiedenem Sonnenstande die Intensitäten zu vergleichen hat; CORNU[1]) hat eine schon früher vorgeschlagene schöne Methode benutzt, welche ihr Auffinden erleichtert: entwirft man auf dem Spalt ein Bild der Sonne und lässt den sich uns nähernden oder den sich entfernenden Stand derselben auf den Spalt fallen, so haben die FRAUNHOFER'schen Linien nach dem DOPPLER-schen Princip eine etwas verschiedene Lage, während die terrestrischen Linien unverändert bleiben. Lässt man daher das Sonnenbild sich hin und her bewegen, indem die dasselbe entwerfende Linse schwingt, so werden die FRAUNHOFER'schen Linien unscharf, die terrestrischen bleiben scharf und sind dadurch leicht zu erkennen.

c) Sonnenflecken und Protuberanzen.

Das Spectroskop hat bei anderer Benutzung noch zahlreiche weitere Resultate in Betreff der Sonne ergeben, über welche wir uns aber kürzer fassen müssen. Entwirft man ein Bild der Sonne auf dem Spalt, so kann man die Spectren verschiedener Stellen der Sonne gesondert untersuchen, und auf diese Weise die Spectren der Sonnenflecken, Fackeln, Protuberanzen erhalten. Das Licht, welches die Protuberanzen aussenden, ist so schwach gegen das Sonnenlicht, dass man es früher nur bei totalen Sonnenfinsternissen beobachten konnte; aber LOCKYER und JANSSEN[2]) kamen gleichzeitig auf die Idee, dass man es durch Benutzung sehr grosser Dispersion zu jeder Zeit sichtbar machen könne. Durch dieselbe wird nämlich das allgemeine Sonnenspectrum geschwächt, während das im Wesentlichen nur aus den Wasserstofflinien bestehende Protuberanzenspectrum nicht geändert wird, da das homogene Licht immer nur Bilder des Spaltes liefert, also nicht dispergirt wird. Durch Verschieben des Protuberanzbildes über den Spalt kann man so nach und nach die Gestalt der Protuberanz erhalten, bequemer noch, wenn man nach HUGGINS den Spalt so breit macht, dass das ganze Bild der Protuberanz hineinfällt; dann dient dies gewissermaassen als Spalt, und man sieht an der Stelle jeder Wasserstofflinie, die hauptsächlich das Licht der Protuberanzen bilden, und in ihrer Farbe die Protuberanz.

Auf diese Weise hat man Zusammensetzung und Gestalt der Chromosphäre, des Grundes, von welchem sich die Protuberanzen erheben, der Protuberanzen und Flecken studirt. Die Chromosphäre und Protuberanzen geben nicht umgekehrte, sondern helle Linien, welche hauptsächlich dem Wasserstoff angehören. Daneben zeigt sich stets eine Linie D_3 in der Nähe der D-Linien, welche man Heliumlinie genannt hat; ihren Ursprung kennen wir nicht; häufig, aber seltener sind Linien sichtbar, die zu Fe, Ba, Mg, Na, Mn, Ni, Ti, Ca gehören, daneben eine grosse Anzahl unbekannter Linien. Es ist auffallend, dass die Zahl der unbekannten Linien hier, ebenso wie bei den Sonnenflecken, einen viel grösseren Bruchtheil aller ausmacht als beim gewöhnlichen Sonnenspectrum. Die Linien reichen von der Photosphäre verschieden weit in die Höhe; am längsten sind die Wasserstofflinien, dann folgen meist die Magnesium- und Helium-Linien, dann Natrium u. s. w; gleichzeitig werden die Linien nach oben immer feiner, sie sind zugespitzt. Dies beweist, dass die Dämpfe der ver-

---

[1]) CORNU, Ann. de Chim. et de Phys. (6) 7. 1886.

[2]) LOCKYER, Proc. Roy. Soc. 1868; JANSSEN, Compt. rend. 68. 1868.

schiedenen Elemente auf verschiedene Schichten begrenzt sind, wohl durch ihr specifisches Gewicht, dass sie unten am dichtesten sind, nach oben dünner werden. In den letzten Jahren benutzt HALE[1]) die Ca-Linien, H und K, statt der Wasserstofflinien, um die Protuberanzen nicht nur mit dem Auge zu sehen, sondern ihre Gestalt zu photographiren. Er giebt an, diese Linien reichten noch weiter in die Höhe der Sonnenatmosphäre, als die Wassertsofflinien.

Die Sonnenflecken zeigen ein Absorptionsspectrum, und zwar ein solches mit bedeutend vermehrter Absorption; es ist sowohl der ganze Grund dunkler, als auch die einzelnen FRAUNHOFER'schen Linien, welche häufig bedeutend verbreitert sind, dadurch grössere Dichte des Dampfes in den Flecken anzeigend. In den Flecken treten auch Banden auf.

In den Spectren sowohl der Flecken als der Protuberanzen zeigt sich sehr häufig die zuerst von LOCKYER beobachtete Thatsache, dass Linien nicht an ihrer richtigen Stelle erscheinen, sondern mit grösserer oder kleinerer Wellenlänge, dass sie ferner nicht wie Spaltbilder als gerade Linie gesehen werden, sondern auf die verschiedenste Art verzerrt und gespalten. Die Erklärung gab das DOPPLER'sche Princip: bewegt sich die Lichtquelle relativ zum Beobachter, so wird aus der Wellenlänge λ die $\lambda_1 = \lambda\left(1 \pm \frac{n}{v}\right)$, je nachdem die Quelle sich nähert oder entfernt, wenn n die Geschwindigkeit der Lichtquelle, v die des Lichtes bedeutet. Da in den Flecken und Protuberanzen stürmische Bewegungen der Sonnenatmosphäre vor sich gehen, tritt oft der Fall ein, dass die Gase sich uns nähern oder entfernen, und dann müssen Verschiebungen der Linien sichtbar werden, aus deren Grösse sich auch die Geschwindigkeit der Gaseruptionen hat bestimmen lassen; man hat Geschwindigkeiten von mehr als 500 *km* beobachtet, was einer Verschiebung z. B. der Wasserstoftlinie F um 8 ANGSTRÖM'sche Einheiten entspricht. Die Verzerrungen und Spaltungen der Linien erklärten sich dadurch, dass Licht von verschieden bewegten Gasmassen auf den Spalt fällt.

Sehr auffallend und noch unerklärt ist dagegen der Umstand, dass in den Flecken und Protuberanzen von den bekannten Linien eines Elementes sehr oft nur einzelne verbreitert sind, andere ganz fehlen, oder dass einzelne verschoben, andere an ihrer Stelle sichtbar sind. LOCKYER[2]) sieht darin einen Beweis seiner Hypothese für die Zerlegbarkeit der chemischen Elemente, und er sowohl, wie andere haben grosse Mengen von Beobachtungsmaterial angehäuft. Mir scheinen indess die meisten der Schlüsse LOCKYER's verfrüht, wir kennen die Spectren der irdischen Elemente viel zu wenig und namentlich das verschiedene Verhalten ihrer einzelnen Linien noch so gut wie gar nicht. Die Abwesenheit einzelner Linien eines Elementes, während andere vorhanden sind, lässt sich z. B. leicht dadurch erklären, dass bei diesen Emission und Absorption gerade im Gleichgewicht sind, bei den andern nicht, was von LIVEING und DEWAR mehrfach beobachtet worden ist.

Bei totalen Sonnenfinsternissen sieht man die Sonne noch umgeben von einem weit in den Weltraum reichenden Strahlenkranz, welchen man Corona genannt hat. Ihr Spectrum zeigt schwache FRAUNHOFER'sche Linien, schwach helle Wasserstofflinien, vor allem aber eine helle grüne Linie, die sich auch unter den FRAUNHOFER'schen Linien befindet, und die Corona-Linie, oder nach der KIRCHHOFF'schen Scala 1474 K genannt wird. Ihre Wellenlänge ist nach

[1]) HALE, Astronomy and Astrophysics. 1892.

[2]) Siehe hierzu z. B. LOCKYER, Nature 24. 1881; The Chemistry of the Sun, London.

ROWLAND 5316·877; sie gehört keinem bekannten Elemente an. Dasselbe müsste noch leichter sein, als Wasserstoff, da es über demselben bis zur äussersten Grenze der Sonnenatmosphäre schwebt. KAYSER.

Photometrie.

Man nimmt an, dass unter gewissen Umständen die kleinsten Theilchen eines Körpers oscillatorische Bewegungen ausführen, die sich dem umgebenden Aether nach allen Seiten mittheilen. Wir sagen dann, der Körper strahlt, und können die Strahlungsmenge durch objektive Methoden (Bolometer, Thermosäule) messen. Ist die Strahlung stark genug, so empfinden wir sie als Wärme. Sind unter den ausgesandten Strahlen solche, deren Schwingungszahl zwischen zwei bestimmten Grenzen liegt, so bewirken sie auf der Netzhaut unseres Auges eine Lichtempfindung, In diesem Falle leuchtet der Körper; er bildet einen Selbstleuchter, eine Lichtquelle.

Wir bezeichnen als Gesammtlichtstärke diejenige Lichtmenge, welche eine Lichtquelle auf eine geschlossene sie umgebende Fläche sendet, als Lichtstärke (Leuchtkraft) in einer bestimmten Richtung diejenige Lichtmenge, welche die Lichtquelle in dieser Richtung auf die in ihr senkrechte Flächeneinheit sendet, wenn letztere sich in der Einheit der Entfernung befindet. In der Praxis bestimmt man gewöhnlich die Lichtstärken in bestimmter Richtung und berechnet daraus die Gesammtlichtstärke oder, was meist geschieht, die mittlere räumliche Lichtstärke $\left(=\frac{\text{Gesammtlichtstärke}}{4\pi}\right)$. Lässt sich die Lichtquelle als leuchtende Fläche auffassen und bedeutet J die Lichtstärke eines Flächenelements df in wieder zu df senkrechter Richtung, so ist die Helligkeit E in df gegeben durch $Edf = J$. Unter Beleuchtungsstärke in einem seiner Lage nach gegebenen Flächenelement df versteht mau diejenige Lichtmenge, welche die in df gedachte Flächeneinheit von den ihr zugewendten Lichtquellen erhält. Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist in einem Flächentheilchen vorhanden, wenn in ihm die Einheit der Fläche aus der Einheit der Entfernung in senkrechter Richtung mit der Einheit der Lichtstärke erleuchtet wird.

Ausser durch ihre Quantität können sich Lichtempfindungen durch ihre Qualität, durch Farbe und Sättigung, unterscheiden. Enthält Licht nur Strahlen einer Wellenlänge, so nennen wir es einfach oder homogen, enthält es Strahlen verchiedener Wellenlänge, so heisst es zusammengesetzt. Das homogene Licht ist am meisten gesättigt, zusammengesetztes Licht erkennt das Auge an seiner geringen Sättigung. Das Licht der Sonne ist am wenigsten gesättigt; wir bezeichnen es als farblos; das Licht der in der Praxis gebräuchlichen Lichtquellen ist sehr wenig gesättigt, fast farblos. Die einzelnen homogenen Bestandtheile des zusammengesetzten Lichtes erregen unsere Netzhaut keineswegs der Strahlung proportional, es giebt auch bis jetzt keine Vorrichtung, auf welche sie in derselben Weise wie auf das Auge wirken. Hieraus folgt, dass man die Stärke zusammengesetzten Lichtes im Allgemeinen nur mit Hilfe des Auges vergleichen kann.

Die Aufgabe der Photometrie ist die messende Vergleichung der Lichtstärken

und Helligkeiten, und zwar beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Messung des zusammengesetzten Lichtes. Wir nehmen vorläufig an, dass die zu vergleichenden Lichtquellen, einerlei welches die objektive Beschaffenheit ihrer Strahlen ist, entweder dieselbe Farbe haben, oder dass ihre Farben sich so wenig von einander unterscheiden, dass diese Unterschiede keine erhebliche Störung bei der Messung hervorbringen.

Mit den Selbstleuchtern theilen alle Körper, welche wir sehen, die Eigenschaft, Licht nach allen Seiten auszusenden. Aber dies Licht ist kein selbst erzeugtes, sondern von aussen auffallendes. Wir nennen diese Körper diffus reflektirende. Sie heissen weiss, wenn sie Licht aller Wellenlängen in gleicher Weise zerstreuen. Alle Körper reflektiren nur einen Theil des auf sie fallenden Lichtes diffus, das übrige wird absorbirt, gebrochen oder spiegelnd reflektirt. Da die Lichtausbreitung gut diffus zerstreuender Substanzen naturgemäss denselben Gesetzen folgen muss, wie diejenige der Selbstleuchter, so lassen sich jene genau nach denselben Methoden wie diese photometriren[1]).

Gesetze der Lichtausbreitung und Lichtschwächung.

Das Entfernungsgesetz. Ein leuchtender Punkt befinde sich im Centrum einer Kugelfläche. Dann muss alles Licht, welches er aussendet, auf diese Kugel fallen. Auf die Gesammtfläche fällt also, wenn auf dem Wege, wie wir annehmen wollen, kein Lichtverlust entsteht, dasselbe Quantum Licht, welchen Durchmesser auch die Kugel haben möge. Auf ein Flächenelement df einer Kugel mit dem Radius 1 falle die Lichtmenge Jdf, dann wird auf ein gleichgrosses Flächenelement einer Kugel mit dem Radius r die Lichtmenge $\frac{Jdf}{r^2}$ fallen, da eine Fläche, welche dasselbe Lichtquantum erhält, wie im ersten Falle, r^2mal so gross ist. Denken wir uns also auf einer durch die punktförmige Lichtquelle gezogenen Geraden ein zu ihr senkrecht stehendes diffus reflektirendes Flächenelement verschoben, so ist die Beleuchtungsstärke auf diesem, wenn r der Abstand zwischen Lichtquelle und Flächenelement ist, $\frac{J}{r^2}$. Die Beleuchtungsstärke nimmt also umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle ab.

Die Lichtquelle bestehe nun aus vielen leuchtenden Punkten mit den Lichtstärken in beliebiger Richtung $J_1, J_2, J_3, J_4 \ldots\ldots$ Wir bestimmen die Beleuchtung eines Punktes A, dessen Abstände von $J_1, J_2 \ldots$ bezw. $r_1, r_2 \ldots$ seien. Ausserhalb der Lichtquelle soll sich kein lichtschwächendes Medium befinden; innerhalb derselben aber kann ein leuchtender Punkt die Lichtausbreitung des anderen stören. Es möge dadurch das von J_1 nach A gelangende Licht im Verhältniss α_1, das von J_2 nach A gelangende Licht im Verhältniss α_2 geschwächt werden und so fort. Dann ist die Beleuchtung im Punkt A:

$$\frac{\alpha_1 J_1}{r_1^2} + \frac{\alpha_2 J_2}{r_2^2} + \ldots\ldots$$

Nun sei A soweit von der Lichtquelle entfernt, dass die Unterschiede zwischen $r_1, r_2 \ldots$ und dem Abstand r eines Punktes mitten in der Lichtquelle von A zu vernachlässigen sind, dann wird die Beleuchtungsstärke in A:

[1]) Eine recht umfangreiche Literaturübersicht bis zum Jahre 1886, die namentlich die technische Photometrie berücksichtigt, findet sich in H. Krüss, die elektro-technische Photometrie. Wien 1886. — Eine ausführliche Behandlung der Photometrie giebt A. Palaz in Traité de Photométrie industrielle. Paris 1892.

$$\frac{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \ldots -}{r^2}$$

sein. Man kann also das Entfernungsgesetz auch auf ausgedehnte Lichtquellen anwenden, wenn die Entfernung nur gross genug ist. Die Grössen α werden je nach der Richtung, in welcher die Lichtquelle strahlt, verschieden sein können. Wenn man also eine Lichtquelle, die nicht völlig gleichmässig um einen Punkt angeordnet ist, photometrisch untersucht, so muss man ihre Lichtstärke für jede Richtung besonders bestimmen. Die Grösse $\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \ldots$ ist die Lichtstärke der Lichtquelle in der untersuchten Richtung.

Das Cosinusgesetz. Die Sonne können wir in roher Vorstellung als eine Kugel auffassen, deren Oberfläche nach allen Richtungen nahezu gleich viel Licht aussendet, unserem Auge erscheint sie als eine gleichmässig leuchtende Fläche. Projiciren wir also die uns zugewandte Hälfte der Sonnenoberfläche auf eine Ebene, die zur Verbindungslinie zwischen unserem Auge A und dem Sonnenmittelpunkt M senkrecht steht, so gelangen durch gleiche Flächenstücke dieser Projection gleiche Lichtmengen in unser Auge. Diejenige Lichtmenge, welche ein Flächenstückchen df der Sonnenoberfläche in der Richtung MA ausstrahlt, ist also proportional der Projection von df auf jene Ebene. Bildet das Loth in df mit AM den Winkel α, so ist $df \cos\alpha$ diese Projection, mithin wenn Edf die von df in senkrechter Richtung gestrahlte Lichtmenge bedeutet, die von df in der Richtung AM entsendete Lichtmenge $Edf\cos\alpha$. Der Winkel α, d. h. der Winkel, welchen das in einem leuchtenden Flächentheilchen errichtete Loth mit Ausstrahlungsrichtung bildet, heisst der Ausstrahlungs- oder Emanationswinkel. Es ist also die von einem leuchtenden Flächenelement ausgestrahlte Lichtmenge dem Cosinus des Emanationswinkels proportional.

Das Cosinusgesetz ist von LAMBERT in seiner Photometria (Wien 1760) auf Grund der Thatsache, dass die Sonne als gleichmässig leuchtende Scheibe erscheint, aufgestellt worden, auch BEER (Grundriss des photometrischen Calcüls, Braunschweig 1854) weiss es nicht anders[1]) zu beweisen als aus der »Thatsache«, dass eine glühende Kugel in jeder Lage als gleichmässig leuchtende Scheibe erscheint. Mit wissenschaftlichen Hilfsmitteln experimentell geprüft ist das Gesetz von MÖLLER[2]), der zwei gleiche, durch denselben elektrischen Strom geglühte Platinstreifen, von denen er den einen senkrecht, den anderen unter verschiedenen Winkeln ausstrahlen liess, photometrisch verglich. Er benutzte ein von ihm etwas modificirtes WILD'sches Photometer und untersuchte die Ausstrahlung zwischen 0 und 80° von 10 zu 10°. Die gefundenen Abweichungen (bis 3%) sind so gering, dass sie auf Beobachtungsfehler geschoben werden können. Freilich hätte man wegen der spiegelnden Oberfläche der Platinstreifen Abweichungen vom Cosinussatz erwarten dürfen.

Für strahlende Wärme, die ja ihrem Wesen nach mit dem Licht identisch ist, haben LESLIE[3]), MELLONI[4]), ANGSTRÖM[5]), GODARD[6]) das Cosinusgesetz geprüft. MELLONI scheint nur flüchtige Versuche angestellt zu haben, LESLIE findet für

[1]) Die theoretischen Herleitungen des Cosinussatzes von LAMBERT und BEER haben keinen Werth.

[2]) Photometrische Untersuchungen, Inaug.-Diss. Berlin 1884; Elektrol. Ztschr. 5, pag. 370. 1884; WIED. Ann.

[3]) Experimental inquiry into the nature and propagation of heat. London 1804.

[4]) POGG. Ann. 65.

[5]) WIED. Ann. 26, pag 253. 1885.

[6]) Ann. de chim. et phys. (6) 10, pag. 354. 1887.

grosse Ausstrahlungswinkel Fehler von 5 bis 10%, die er allerdings der Versuchsanordnung zuschreibt. Die beiden letzteren Beobachter fanden das Gesetz nur annähernd richtig.

Theoretisch hat zuerst FOURIER[1]) das Cosinusgesetz für Wärmestrahlung hergeleitet, indem er berücksichtigte, dass auch die tieferen Schichten eines Körpers strahlen. Diese Herleitung ist dann von ZÖLLNER[2]) auf die Lichtstrahlung übertragen worden. Eine strenge Begründung des Cosinussatzes giebt aber erst LOMMEL[3]), indem er von ähnlichen Betrachtungen wie FOURIER ausgeht. Er nimmt an, dass jedes Volumenelement nach allen Seiten gleichmässig Licht ausstrahlt, welches aber durch die umgebenden Volumenelemente nach dem Absorptionsgesetz geschwächt wird.

Für die Lichtstrahlung durch ein Flächenelement df unter dem Ausstrahlungswinkel ε werden alle in Betracht kommenden Strahlen in einem Cylinder verlaufen, welcher gebildet wird, indem man durch alle Punkte des Umfangs von df Parallelen zur Ausstrahlungsrichtung zieht. Theilt man diesen Cylinder durch zu df parallele Flächenstücke in Volumenelemente, so wird dasjenige, welches in der Tiefe r unter der Oberfläche liegt, ausgedrückt sein durch $df \cdot dr \cos \varepsilon$. Nehmen wir nun an, dass ein Volumenelement dv nach allen Richtungen die Lichtmenge Edv ausstrahlt, so ist diejenige, welche aus dem betrachteten Volumenelement durch df aus dem Körper herausstrahlt:

$$E df dr \cos \varepsilon e^{-kr},$$

wenn k den Extinctionscoëfficienten bedeutet. Hat man es nun mit einem undurchsichtigen Körper zu thun, d. h. mit einem solchen, bei dem ein sich in ihm fortpflanzender Lichtstrahl schon nach Durchlaufung einer sehr kurzen Strecke ρ ausgelöscht wird, so ist die gesammte in der betrachteten Richtung durch df ausgestrahlte Lichtmenge:

$$E df \cos \varepsilon \int_0^\rho e^{-kr} dr = \frac{E}{k} df \cos \varepsilon (1 - e^{-k\rho}),$$

oder, da $Ee^{-k\rho}$ nach unserer Annahme verschwindend klein ist,

$$df \frac{E}{k} \cos \varepsilon.$$

Da $df \frac{E}{k}$ die von df in senkrechter Richtung ausgestrahte Lichtmenge bedeutet, so ist damit das Cosinusgesetz für undurchsichtige Körper bewiesen.

Für nicht undurchsichtige, aber absorbirende Körper hat man über die ganze Dicke, also etwa von 0 bis R zu integriren und erhält dann, da e^{-kR} nicht 0 wird, an Stelle von $\cos \varepsilon$.

$$\cos \varepsilon \frac{1 - e^{-k \frac{k}{\cos \varepsilon}}}{1 - e^{-kR}}.$$

Bei dieser Ableitung ist auf die Oberflächenbeschaffenheit keine Rücksicht genommen. Sie wird deshalb zunächst nur für nicht spiegelnde Oberflächen als gültig anzusehen sein.

Auch für diffus zerstreuende Objekte nimmt man im Allgemeinen das Cosinusgesetz an. Dass es in roher Annäherung gelten wird, kann man daran sehen, dass eine Gypsplatte oder ein mattes Papierblatt aus verschiedenen

---

[1]) Ann. de chim. et de phys. 6, pag. 259. 1817; 27, pag. 236. 1824; POGG. Ann. 20, pag. 375. 1824.

[2]) Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865.

[3]) WIED. Ann. 10, pag. 449. 1880.

Richtungen angesehen, nicht verschieden hell erscheint. Bei genauerer Betrachtung zeigen sich aber erhebliche Abweichungen. So finden denn auch alle Beobachter, welche mit einiger Genauigkeit das Gesetz für mannigfache diffus reflectirende Körper geprüft haben, (BOUGUER[1]), KANONOWITSCH[2]), SEELIGER[3]), MESSERSCHMIDT), mehr oder weniger erhebliche Abweichungen, so dass man annehmen muss, dass es keine derartige Substanz giebt, welche genau nach dem Cosinusgesetz reflectirt. SEELIGER setzt deshalb für diffus zerstreuende Substanzen anstatt des Cosinusgesetzes die Formel

$$\frac{\cos \varepsilon}{\mu \cos i + \cos \varepsilon},$$

wo i den Einfallswinkel und μ den Absorptionscoëfficienten der Substanz bedeutet. Nach der von MESSERSCHMIDT[4]) vorgenommenen Prüfung stimmt aber auch diese Formel nicht mit den Beobachtungen.

Recht eingehend hat LOMMEL[5]) die diffuse Reflection theoretisch untersucht, indem er ähnlich wie bei selbstleuchtenden Objekten vorgeht, aber ausser dem Extinctionscoëfficienten k noch das Diffusionsvermögen l einführt, womit er den Bruchtheil der auffallenden Lichtmenge bezeichnet, welche ein Volumenelement nach allen Seiten gleichmässig zerstreut. Die Rechnungen werden dadurch viel complicirter als die früheren, dass auch dasjenige Licht in Betracht gezogen werden muss, welches ein Volumenelement von den umliegenden durch Diffusion erhält. Das Gesetz, welches LOMMEL an Stelle des Cosinusgesetzes aufstellt, ist denn auch recht complicirt. Wir können die Formel umsomehr hier fortlassen, als auch sie, wie LOMMEL selbst und später MESSERSCHMIDT gezeigt haben, die Thatsachen nicht genau wiedergiebt. Volle Gültigkeit des einfachen Cosinusgesetzes findet nach LOMMEL nur in dem idealen Falle statt, dass ein absolut weisser Körper von allen Seiten gleichmässig beleuchtet wird.

Zu erwähnen ist an dieser Stelle noch der von LAMBERT eingeführte Begriff des Albedo, womit diejenige Lichtmenge bezeichnet wird, welche eine diffus reflektirende Fläche bei senkrechter Bestrahlung nach allen Seiten aussendet. Für unsere sogen. weissen Körper ist die Albedo nach Versuchen von LAMBERT etwa 0·4. SEELIGER bezeichnet unter Albedo, um diesen Begriff vom Einfallswinkel, der bei den in der Praxis vorkommenden diffusen Körpern von erheblichem Einfluss ist, unabhängig zu machen, diejenige Lichtmenge, welche eine Fläche diffus zerstreut, wenn sie von allen Seiten beleuchtet wird.

Das durchgehende Licht diffus zerstreuender Substanzen ist von CROVA[6]) und CHWOLSON[7]) experimentell untersucht worden.

Unter Annahme des Cosinusgesetzes erhält man die Beleuchtung eines Flächenelementes df' durch ein anderes df, welches sich in einer Entfernung r von jenem befindet, wenn e der Ausstrahlungswinkel und i der Einfallswinkel ist, d. h. der Winkel, unter dem die Strahlen auf das Element df fallen, durch:

$$q = \frac{E \cdot df\, df' \cos e \cos i}{r^2},$$

[1]) Traité d'optique. Paris 1729.

[2]) Schriften d. math. Abth. d. neuruss. naturf. Ges. 2, 1879; Fortschr. d. Phys. 35, pag. 430. 1879.

[3]) Vierteljahrsschr. der astron. Ges. 20, pag. 111 u. 267. 1885; 21, pag. 216. 1886.

[4]) WIED. Ann. 34, pag. 867. 1888.

[5]) WIED. Ann. 36, pag. 473.

[6]) Ann. de chim. et phys. (6) 6, pag. 342.

[7]) Bull. de l'Ac. Imp. des Sc. de St. Petersb. 31, pag. 213; Mélanges phys. et chim. 12, pag. 475. 1886.

wo E die von df in senkrechter Richtung ausgesandte Lichtmenge bedeutet. Diese Formel bildet die gewöhnliche Grundlage der sogen. theoretischen Photometrie; aus ihr bestimmt man durch Integration die Beleuchtung eines beliebig gestalteten Körpers durch einen anderen. Die sich bietenden, grösstentheils nur für den Astronomen wichtigen Probleme, sind von BEER, GÜNTHER[1]), BURMESTER u. a. behandelt worden.

Erwähnt sei hier noch der von v. BEZOLD[2]) und in neuester Zeit von EBERT[3]) gemachte Vorschlag, in die theoretische Photometrie die Behandlungsweise der Potentialtheorie einzuführen. Die Lichtmenge, welche ein Flächenelement df am Orte x, y, z erhält, wenn es resp. zu der x-, y-, z-Axe senkrecht steht, lässt sich nämlich ausdrücken durch:

$$df\frac{\partial\sum\frac{i}{r}}{\partial x}, \quad df\frac{\partial\sum\frac{i}{r}}{\partial y}, \quad df\frac{\partial\sum\frac{i}{r}}{\partial z},$$

wo i die Lichtstärke eines leuchtenden Punktes, r seinen Abstand von df bedeutet und die Summation sich nur über die Lichtpunkte erstrecken darf, welche zur Beleuchtung beitragen können. Für die Function $\sum\frac{i}{r}$ schlägt EBERT die Bezeichnung Luminal vor.

Von den Gesetzen der Schwächung des Lichtes, die bei den üblichen photometrischen Arbeiten Verwendung finden, ist hier nur eins physiologischer Natur, das sogen. TALBOT'sche Gesetz anzuführen; die übrigen, welche die Lichtschwächung durch absorbirende Substanzen, durch Reflection an spiegelnden Flächen, durch Linsen und durch NICOL'sche Prismen angeben, werden an anderen Stellen zu besprechen sein.

Das TALBOT'che Gesetz[4]) spricht VON HELMHOLTZ[5]) folgendermaassen aus: Wenn eine Stelle der Netzhaut von periodisch veränderlichem und regelmässig in derselben Weise wiederkehrendem Lichte getroffen wird, und die Dauer der Periode hinreichend kurz ist, so entsteht ein continuirlicher Eindruck, der dem gleich ist, welcher entstehen würde, wenn das während einer jeden Periode eintreffende Licht gleichmässig über die ganze Dauer der Periode vertheilt würde.

Experimentelle Prüfungen haben in den meisten Fällen [v. HELMHOLTZ, PLATEAU, E. WIEDEMANN und MESSERSCHMIDT[6]), O. LUMMER und E. BRODHUN[7])] die Giltigkeit der Gesetze ergeben. Nur BRÜCKE[8]) und FICK[9]) haben Abweichungen gefunden.

In der Photometrie wendet man das Gesetz gewöhnlich an, indem man in den Gang der Lichtstrahlen eine rotirende, undurchsichtige Kreisscheibe mit ausgeschnittenen Sectoren bringt. Die Stärke des hindurchgelassenen Lichtes ist dann der Grösse der Sectoren proportional. Hat die Scheibe nur einen Aus-

---

1) Studien zur theoretischen Photometrie. Erlangen 1872.

2) POGG. Ann. 141, pag. 91. 1870.

3) Tageblatt der 62. Versamml. Deutscher Naturforscher u. Aerzte, pag. 200. 1890.

4) Phil. Mag. (3) 5, pag. 321. 1834.

5) Handb. d. physiol. Optik, 1. Aufl., pag. 339. 1867.

6) WIED. Ann. 34, pag. 463. 1888.

7) Verhandl. d. Phys. Ges. in Beriln. 1890. No. 13.

8) MOLESCHOT's Untersuchungen 9, pag. 367. 1834.

9) DU BOIS, Archiv, pag. 739. 1863.

schnitt, so muss sie bei heller Beleuchtung etwa 30 Umdrehungen in einer Secunde machen, damit das Licht dem Auge nicht intermittirend erscheint.

Die Photometer.

Für die Messung des Lichtstärkenverhältnisses zweier Lichtquellen bestimmte Apparate heissen Photometer. Man kann an jedem Photometer naturgemäss eine Einrichtung zur Helligkeitsvergleichung und eine solche zur messbaren Schwächung des Lichtes unterscheiden. Die letztere beruht auf einem der angeführten Gesetze der Lichtausbreitung und -schwächung. Sie fehlt bisweilen, wo das Entfernungsgesetz zu Grunde gelegt wird, da hier jeder Maassstab ihre Stelle vertreten kann. Die erstere besteht gewöhnlich aus zwei diffus leuchtenden Flächenstücken, deren jedes von einer der beiden Lichtquellen beleuchtet wird und welche so angebracht sind, dass das Auge die Helligkeitsgleichheit beider möglichst genau beurtheilen kann. Für die gemeinsame Helligkeit der Felder kann man dann eine Gleichung aufstellen, aus der sich das gesuchte Lichtstärkenverhältniss bestimmen lässt.

Dass das Auge im Stande ist, zu beurtheilen, wann zwei beleuchtete diffuse Flächenstücke gleich hell sind, ist bekannt. Diese Fähigkeit ist am grössten, wenn die beiden Flächenstücke unmittelbar in einer scharfen Grenze aneinander stossen, derart dass in dem Moment, wo beide wirklich gleich hell sind, diese Grenze nicht zu sehen ist, man eine gleichmässig beleuchtete Fläche vor sich hat. Die Empfindlichkeit des Auges gegen Helligkeitsunterschiede unter diesen günstigsten Bedingungen, d. h. der Bruch, um welchen die Helligkeit des einen Feldes vermehrt oder vermindert werden muss, damit das Auge einen Unterschied eben wahrnimmt, wird sehr verschieden hoch angegeben (BOUGUER $\frac{1}{64}$, FECHNER $\frac{1}{100}$, ARAGO $\frac{1}{131}$, MUSSON bis $\frac{1}{120}$, HELMHOLTZ bis $\frac{1}{150}$ [1]), KÖNIG und BRODHUN [2]) bis 0·016). Nach dem WEBER-FECHNER'schen Gesetz soll er constant, d. h. von der absoluten Grösse der Helligkeit unabhängig sein. In der That gilt dies Gesetz aber nur für einen verhältnissmässig kleinen Bereich und zwar bei einer mittleren Helligkeit. Bei sehr grosser und bei geringer Helligkeit wird die Empfindung kleiner.

Mit einer grösseren (etwa 2 mal so grossen) Empfindlichkeit, als bei der Beurtheilung der Helligkeitsgleichheit auftritt, vermag das Auge anzugeben, wann zwei symmetrisch liegende beleuchtete Felder aus ihrer ebenfalls beleuchteten Umgebung gleich hell oder dunkel hervortreten. Bei dieser Einstellung auf gleiche Helligkeitskontraste gelten für die günstigste Lage der Felder zu ihrer Umgebung dieselben Bestimmungen wie oben. Auch hier gilt das WEBER-FECHNER-sche Gesetz mit der angegebenen Einschränkung. Ausserdem aber zeigt sich hier eine Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Stärke des Kontrastes; und zwar ist die Empfindlichkeit im Allgemeinen um so grösser, je kleiner der Contrast ist. Indessen wird bei zu kleinem Kontrast (unter 3 % bei einigermaassen grosser Helligkeit) das Auge zu sehr angestrengt und dadurch die Einstellung unsicher.

Wir gehen zur Beschreibung der bekanntesten Photometer über.

Das BOUGUER'sche [3]) Photometer (Fig. 426). Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen L_1 und L_2 deren Lichtstärke bezw. J_1 und J_2 seien, beleuchten

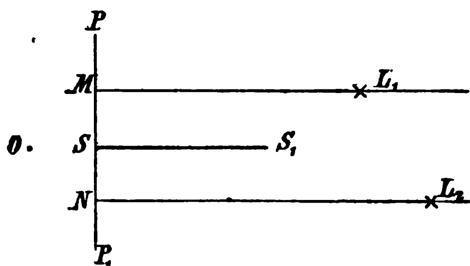
---

[1]) Handb. d. physiol. Optik, pag. 311. 1867.

[2]) Sitzungsber. der Berl. Akademie 32, pag. 641. 1889.

[3]) Traité d'Optique sur la gradation de la lumière. Paris 1760.

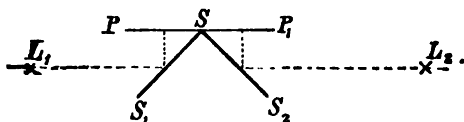
eine vertikale, durch PP_1 angedeutete Platte. Durch die Scheidewand SS_1 wird bewirkt, dass das Stück PS nur von L_1, das Stück P_1S nur von L_2 beleuchtet wird. Wenn dem Beobachter PS und P_1S gleich hell erscheinen, so findet sich das gesuchte Lichtstärkenverhältniss aus der Gleichung:



(Ph. 426.)

$$\frac{J_1}{L_1M^2} = \frac{J_2}{L_2N^2},$$

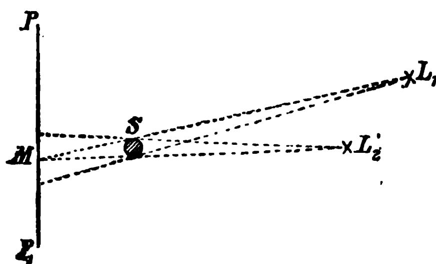
wo L_1M und L_2N die Lothe auf PP_1 sind. Hierbei muss freilich Sorge getragen werden, dass der Helligkeitsunterschied zwischen M bezw. N und S so klein ist, dass er nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht. Zur Ermöglichung der Einstellung muss L_1 oder L_2 in der Richtung ML_1 oder NL_2 verschiebbar sein. Ist die Platte PP_1 durchscheinend, so geschieht die Beobachtung von O aus. Wenn man SS_1 ein wenig von PP_1 abrückt, kann man bewirken, dass die beiden beleuchteten Felder aneinander grenzen. (FOUCAULT'sches Photometer.) Befinden sich an Stelle von SS_1 zwei gleichartige unter 45° gegen PP_1 geneigte Spiegel SS_1 und SS_2, so kann man die Lichtquellen in einer Geraden L_1L_2 verschieben. (RITSCHIE'sches Photometer, Fig. 427). In der Regel benutzt man besonders hierzu eingerichtete Bänke, auf denen mittelst Schlitten oder Wagen die Lichtquellen und das Photometer beweglich aufgestellt werden können. Solche gerade Photometerbänke tragen dann eine Theilung, während jeder Wagen oder Schlitten mit einem Index versehen ist.



(Ph. 427.)

Ersetzt man SS_1 und SS_2 durch matte undurchsichtige Flächen, so fällt die Platte PP_1 ganz fort. In jedem Falle thut man gut, das Auge derartig zu schützen, dass es nur die zur Beobachtung dienenden Felder sieht.

Das sogen. RUMFORD'sche[1]) Photometer (Fig. 428) wurde schon von LAMBERT angegeben. Die diffuse vertikale Platte PP_1 wird von L_1 und L_2 derartig beleuchtet, dass die durch den undurchsichtigen vertikalen Stab entstehenden Schatten in M unmittelbar aneinander grenzen. Die Schatten bilden hier die beiden Felder, auf deren gleiche Helligkeit eingestellt wird. Wenn man zur Berechnung das Entfernungsgesetz von M aus anwenden will, muss man Sorge tragen, dass das Licht von beiden Lichtquellen unter demselben Winkel auffällt.



(Ph. 428.)

Das BUNSEN'sche Fettfleckphotometer ist in Deutschland, England und Amerika am meisten in Gebrauch. Es besteht in seiner einfachsten Form aus einem Papierblatt mit einem in seiner Mitte durch Paraffin, Wallrath, Oel oder dergl. erzeugten Fettfleck, welches auf einer geraden Photometerbank senkrecht zur Axe der Bank angebracht ist. Der Fleck (das eine Vergleichsfeld) unterscheidet sich dadurch vom nicht gefetteten Papier (dem anderen Vergleichsfeld),

[1]) Philos. Trans. 84, pag. 67.

dass das diffuse Licht, welches jener aussendet, hauptsächlich durchgelassenes ist, während das Papier zum grössten Theil reflektirtes Licht ausstrahlt. Man sucht diejenige Stellung des Papierschirmes zwischen den Lichtquellen, wo der aus einer schrägen Richtung (etwa von links her) betrachtete Fettfleck verschwunden ist; d. h. wo von Fleck und Papier gleichviel Licht ins Auge gelangt. Will man die Berechnung am einfachsten gestalten, so misst man nach der Substitionsmethode; d. h. man nimmt eine dritte, längere Zeit constante Lichtquelle zu Hilfe, die man in constanter Entfernung vom Photometerschirm lässt. Auf die andere Seite der Bank setzt man dann nach einander die beiden Lichtquellen und verschiebt sie, bis der Fleck verschwunden ist. Das gesuchte Lichtstärkenverhältniss ergiebt sich dann nach dem Entfernungsgesetz.

Will man ohne Zwischenlicht arbeiten, so kann man das Verhältniss von L_1 und L_2 durch 2 Beobachtungen erhalten, indem man einmal von rechts her und dann von links her unter dem gleichen Winkel auf den Schirm blickend auf Verschwinden des Flecks einstellt.

Von dem auf die Einheit der linken Schirmseite auffallenden Licht gelange durch Reflexion vom Papier der Bruchtheil M, vom Fettfleck der Bruchtheil M' ins Auge, von dem auf die Einheit der Schirmseite auffallenden Lichte treffe das Auge nach Durchdringung des Schirmes vom Papier her der Bruchtheil T, vom Fleck der Bruchtheil T'. Sind dann J_1 und J_2 die Lichtstärken von L_1 (der linken) und L_2 (der rechten Lichtquelle) und bedeutet r_1 die Entfernung zwischen Schirm und L_1, r_2 diejenige zwischen Schirm und L_2 bei der ersten Beobachtung, so ist die gemeinsame Helligkeit von Papier und Fettfleck[1]):

$$\frac{J_1}{r_1^2} M + \frac{J_2}{r_2^2} T = \frac{J_1}{r_1^2} M' + \frac{J_2}{r_2^2} T';$$

also ist

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T' - T}{M - M'} \, \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Beziehen sich r_1' und r_2' auf die zweite Beobachtung (von rechts her) und verhält sich die rechte Schirmseite wie die linke, so ist:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{M - M'}{T' - T} \, \frac{r'^2_1}{r'^2_2}$$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1 r_1^1}{r_2 r_2^1}.$$

Gewöhnlich beobachtet man den Fettfleck nach Angabe von Rüdorf oder Elster mit Hilfe der Spiegel *a* und *b*, welche zu beiden Seiten des Schirmes unter gleichen Winkeln angebracht sind. In diesem Falle sieht das beobachtende Auge zugleich beide Seiten des Flecks in den Spiegeln. Diese Anordnung ist durch Anwendung von brechenden (v. Hefner-Alteneck) oder totalreflektirenden Prismen (Krüss) oder von totalreflektirenden Prismen in Verbindung mit Linsen (Schmidt und Hänsch) modificirt worden.

Bei gleichzeitiger Beobachtung beider Schirmseiten wird das Bunsen'sche Photometer nicht für Einstellung auf Verschwinden des Flecks (als Gleichheitsphotometer), sondern als Kontrastphotometer benutzt, indem auf gleich helles oder gleich dunkles Hervortreten der beiden Fettfleckbilder aus ihrer Umgebung eingestellt wird. In diesem Falle geschieht also eine Messung durch eine Beobachtung, und das gesuchte Lichtstärkenverhältniss ist gleich dem der Quadrate der Entfernungen zwischen den Lichtquellen und dem Schirm.

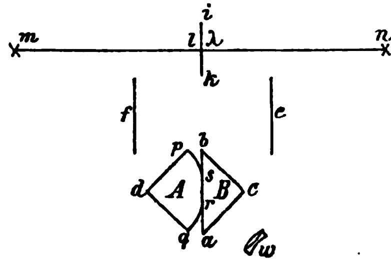
---

[1]) s. A. König, Verhandl. der physik. Ges. zu Berlin, pag. 9. 1886; L. Weber, Wied. Ann. 31, pag. 676. 1887.

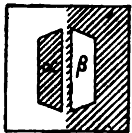
Ist der Fettfleck sorgfältig hergestellt, so dass er keine verschwommenen Ränder hat, so sind bei dem BUNSEN'schen Photometer, was bei keinem vorher beschriebenen der Fall war, die eingangs erwähnten Bedingungen für möglichste Ausnutzung der Empfindlichkeit der Augen erfüllt. Leider stellt sich aber hier ein anderer Mangel ein, welcher darin besteht, dass der Fleck nicht nur Licht hindurchlässt, sondern auch welches reflektirt, und das Papier nicht nur Licht reflektirt, sondern auch Licht hindurchlässt. LEONH. WEBER[1]) hat gefunden, dass dadurch die Empfindlichkeit bei gebräuchlichen BUNSEN-Schirmen auf den dritten bis vierten Theil der möglichen vermindert wird.

Die von LUMMER und BRODHUN in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt construirten Photometer (Gleichheits- und Kontrastphotometer) sind von dem letzt erwähnten Fehler des BUNSEN'schen Photometers frei.

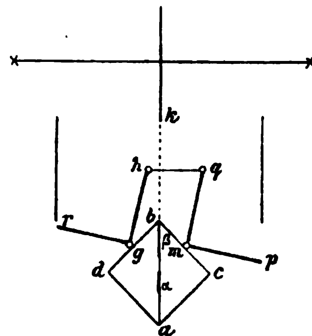
Der wesentlichste Theil der Gleichheitsphotometer[2]) ist ein Glaswürfel, der aus zwei mit ihren Hypotenusenflächen gut eben aufeinander abgeschliffenen rechtwinkligen Prismen besteht. Nachdem an der Hypotenusenfläche des einen Prismas *A* (Fig. 429) durch Anschleifen einer Kugelfläche die obere Glasschicht bis auf eine scharf begrenzte Kreisfläche entfernt ist, wird dieses Prisma so fest gegen das andere gepresst, dass an der Berührungsstelle keine Luftschicht zwischen den Prismen bleibt. Ein Auge *o*, welches mit Hülfe einer Lupe *w* senkrecht zur Kathetenfläche *ac* des letzteren Prismas auf die Hypotenusenfläche blickt, erhält durchgehendes und totalreflektirtes Licht unmittelbar nebeneinander. Fällt auf die durch *bc* und *dp* angedeuteten Prismenflächen Licht von zwei gleichmässig beleuchteten diffusen Flächen, so sind diese gleich hell, wenn das Gesichtsfeld gleichmässig hell erleuchtet ist, also die Figur, welche durchgehendes und reflektirtes Licht trennt, verschwindet. Für die Benutzung auf einer geraden Photometerbank dient die in Fig. 429 skizzirte Anordnung. Senkrecht zur Bank *mn* steht der undurchsichtige Schirm *ik*, das von ihm ausgehende Licht wird mit Hilfe der Spiegel *e* und *f* auf die Kathetenflächen *dp* und *bc* der Prismenkombination geworfen. Der Schirm besteht gewöhnlich aus 2 Papierblättern, zwischen welchen sich Staniol befindet, oder aus einer Gypsplatte.



(Ph. 429.)



(Ph. 430.)



(Ph. 431.)

Bei dem Kontrastphotometer[3]) wird die Hypotenusenfläche des vom Beobachter aus hinteren Prismas durch eine Vertikale in zwei Hälften getheilt, dann auf der einen in einem beliebig gestalteten, scharf begrenzten Felde α (Fig. 430) durch Sandblasen die obere Glas-

---

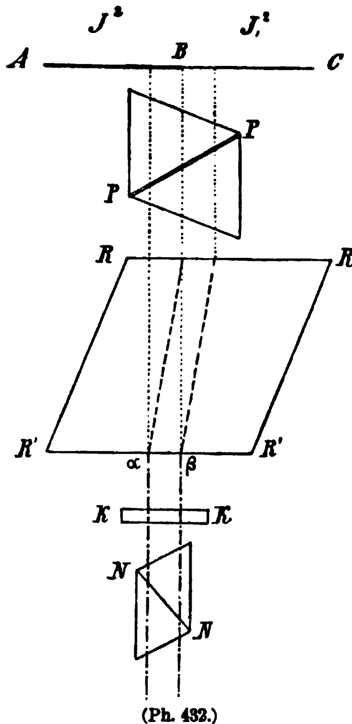
[1]) WIED. Ann. 31, pag. 676. 1887.

[2]) Zeitschr. f. Instr. 9, pag. 23. 1889; 9, pag. 41. 1889.

[3]) Zeitschr. f. Instrk. 9, pag. 461. 1889.

schicht fortgenommen, während in der anderen Hälfte die obere Glasschicht in einem symmetrisch gelegenen Felde β erhalten bleibt und an allen anderen Stellen fortgenommen wird. Damit im Moment der Einstellung die Felder *a* und *b* nicht verschwinden, sondern gleich hell oder dunkel hervortreten, muss das Licht, welches durch diese Felder bezw. ihre Umgebung kommt, gleich stark geschwächt werden. Das geschieht (vergl. Fig. 431) durch zwei Paare rechtwinklig zu einander stehender Glasplatten *rg*, *gh* und *mq*, *mp*, welche um *m* und *g* derartig gedreht werden können, dass stets $gr \parallel mp$ und $gh \parallel mq$ ist. Die Grösse und Art des Kontrastes richtet sich nach den Winkeln, welche die Glasplatten mit dem Würfel bilden. Legt man die Drehungsaxen nicht in die Mitten von *db* und *bc*, sondern ein wenig weiter nach *b* bezw. *c* hin, so lassen sich die bei *g* und *m* zusammen stossenden Kanten verdecken. Will man mit einem konstanten Kontrast von etwa 10§ arbeiten, so kann man unter Fortlassung der 4 Glasplatten *rg*, *gh*, *mq*, *mp*, vor die durch *gb* und *mc* oder auch vor die durch *gd* und *mb* angedeuteten Flächenhälften diesen parallele Glasplatten setzen.

Das Diffusionsphotometer von J. Joly[1]) besteht aus zwei gleichen rechtwinkligen Parallelepipeden von einer diffus zerstreuenden Substanz (Paraffin, Wallrath, diffuse Glasmasse, mattgeschliffenes Glas) von etwa 5 *cm* Höhe, 3 *cm* Breite, 1 *cm* Dicke, welche mit zweien ihrer grössten Seitenflächen nur durch ein dünnes Silberblättchen getrennt aneinander liegen. Der Block wird auf einer geraden Photometerbank so aufgestellt, dass das Silberblatt zur Bankaxe senkrecht steht. Wenn ein in Richtung des Metallblättchens auf die Vorderfläche des Blocks blickendes Auge beide Hälften der Vorderfläche gleich hell sieht, sind beide Hälften des Blattes gleich stark beleuchtet.



(Ph. 432.)

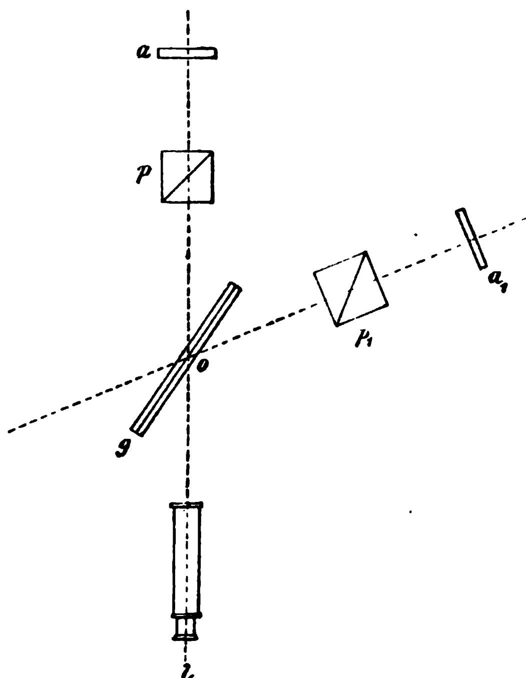
Das Wild'sche Photometer unterscheidet sich dadurch von allen früheren wesentlich, dass auf das Verschwinden von Interferenzstreifen eingestellt wird, welche mit Hülfe der Savart'schen Doppelplatte erzeugt werden. Die erste Form[2]) ist in Fig. 432 skizzirt. Die diffusen, gleichmässig beleuchteten Flächen *AB* und *BC* senden in senkrechter Richtung Licht aus, welches durch den Polarisator (Foucault-sches Prisma) *PP*, das Kalkspathrhomboëder *RRR'R'*, die Savart'sche Doppelplatte *KK* und den Analysator (das Nicol'sche Prisma) *NN* in das Auge des Beobachters gelangt. Infolge der Doppelbrechung ist dieses Licht gemischt aus solchem, welches von *BA* und solchem von *BC* herrührt, und zwar sind beide Bestandtheile senkrecht zu einander polarisirt. Man stellt ein, indem man den mit einem Theilkreis verbundenen Polarisator *PP* so lange dreht, bis die im Allgemeinen im Gesichtsfeld auftretenden Interferenzstreifen ver-

1) Phil. Mag. (5) 26, pag. 26. 1888.

2) Mittheilungen der technischen naturforschenden Gesellschaft, pag. 25. 1859; Pogg. Ann. 99, pag. 235. 1856.

schwinden. In diesem Falle sind die aus dem Kalkspath austretenden senkrecht zu einander polarisirten Lichtbestandtheile einander gleich. Ist δ der Winkel, welchen bei dieser Stellung die Polarisationsebene von PP mit dem Hauptschnitt von $RRR'R'$ bildet, so folgt aus dem MALUS'schen Gesetz, dass das Verhältniss der Lichtstärken in AB und BC gleich $tg^2 \delta$ ist.

Die zweite Form seines Photometers beschreibt WILD als Polarisationsphotometer für technische Zwecke[1]). Die von den zu vergleichenden Lichtquellen gleichmässig beleuchteten diffusen Flächen a und a_1 (Fig. 433) senden ihr Licht durch die Polarisatoren p und p_1 unter dem Polarisationswinkel auf den aus etwa 10 Platten bestehenden Glassatz g. Das von p aus durchdringende und das von p_1 aus an ihm reflektirte Licht geht durch das Polariskop l ins Auge. p und p_1 sind um ihre Axe drehbar und mit einem Theilkreis verbunden. Das eine Prisma (etwa p) wird unter 45° zu dem Loth in der Ebene der Prismenaxen gestellt, und das andere (p_1) so lange gedreht, bis die Interferenzstreifen verschwunden sind. Jetzt ist das Verhältniss der Lichtstärken, wenn γ der eingestellte Winkel ist, $C cos^2 \gamma$, wo C eine nahe an 2 liegende Constante des Instruments ist, welche man findet, indem man die Functionen von p und p_1 vertauscht. Es sollen bei den Messungen nur NICOL-Stellungen zwischen 25° und 65° benutzt werden.



(Ph. 433.)

Schliesslich hat WILD[2]) dieses Photometer für eine gerade Photometerbank eingerichtet durch eine Anordnung, welche der in Fig 429 skizzirten ähnelt. Man denke sich nur die Prismencombination durch den Glassatz, die Lupe durch das Polariskop ersetzt und die einzelnen Theile so justirt, dass das Licht unter dem Polarisationswinkel auf den Glassatz fällt. Es wird dann diejenige Stellung des Photometers zwischen den Lichtquellen eingestellt, wo die Streifen verschwunden sind. Dann ist das gesuchte Verhältniss der Lichtstärken gleich dem der Quadrate der Abstände zwischen den Lichtquellen und dem Schirm multiplicirt mit einer Constanten, die man findet, indem man das Photometer um 180° dreht und eine neue Einstellung ausführt.

Man hat es bei diesen Photometern mit Vergleichsfeldern zu thun, die zwar durch keinen Zwischenraum von einander getrennt sind, die aber durch allmähliche Helligkeitsänderung in einander übergehen. WILD giebt an, dass er durch eine besondere Anordnung, bei welcher die Streifen nicht zum völligen Verschwinden kommen, die Empfindlichkeit seines Photometers sehr weit gebracht habe. In

---

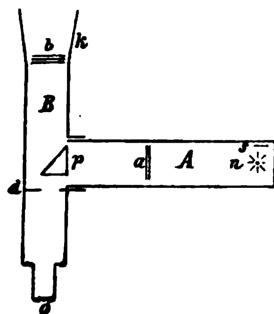
[1]) Mélanges physiques et chimiques 12, pag. 755. 1887.
[2]) Mélanges physiques et chimiques 13. 4. Octobre 1888.

diesem Falle wirkt das WILD'sche Photometer also annähernd als Contrast-Photometer.

Es liegt auf der Hand, dass diese Photometer zunächst nur für Licht brauchbar sind, welches sicher nicht polarisirt ist. Ist letzteres der Fall, so muss man entweder die polarisirten Bestandtheile besonders bestimmen oder das Licht depolarisiren, was z. B. durch eine mattgeschliffene Milchglasplatte in vollkommener Weise geschehen soll.

Ein grosser Mangel der Polarisationsphotometer besteht in der verhältnissmässig geringen Helligkeit des Geschichtsfeldes, durch welche die Empfindlichkeit meist sehr beeinträchtigt wird.

Das Photometer von LEONH. WEBER[1]) (Fig. 434) will dem Bedürfniss nach einem handlichen Photometer abhelfen, mit welchem man alle sich in der Photometrie bietenden Aufgaben, ohne eine dunkle Kammer nöthig zu haben, lösen kann. Eine sehr grosse Genauigkeit ist bei einem derartigen Apparat natürlich nicht zu erwarten. In einem horizontalen, innen geschwärzten Tubus *A* befindet sich die Vergleichslichtquelle *n*, welche die vertikale senkrecht zu ihrer Ebene verschiebbare Milchglasplatte *a* beleuchtet. Mit Hilfe eines aussen befindlichen Maassstabes kann man die Entfernung zwischen der letzteren und dem Vergleichslicht bestimmen. Ein zweiter um die Axe von *A* drehbarer Tubus *B* trägt das totalreflektirende Prisma *p* und ein Diaphragma *d*. Bei *k* ist zur Abblendung von Seitenlicht ein sich erweiternder Tubus angesteckt, bei *b* können Milchplatten eingeschoben werden. Das bei *o* beobachtende Auge sieht das Gesichtsfeld durch die Kante von *p* in 2 gleiche Hälften getheilt. Das Vergleichslicht besteht in einer Benzinkerze, deren Flammenhöhe durch Beobachtung von *s* aus gemessen werden kann. Die Lichtstärke der Kerze lässt sich für jede Höhe *e* zwischen 1 und 4 *cm* durch die einfache Gleichung



(Ph. 434.)

$$i = a + be$$

ausdrücken, wo *a* und *b* zwei besonders zu bestimmende Constanten sind. Bei der Vergleichung zweier als punktförmig zu betrachtender Lichtquellen beleuchtet man eine bei *b* eingeschobene Milchglasplatte mit beiden nach einander und stellt durch Verschieben der Platte *a* auf gleiche Helligkeit beider Hälften des Gesichtsfeldes ein. Wenn nöthig, kann man bei *b* weitere Milchglasplatten einsetzen, deren Schwächungs-Gonstanten besonders bestimmt werden müssen.

In neuerer Zeit wird das WEBER'sche Photometer vielfach mit dem LUMMER-BRODHUN'schen Würfel versehen.

Ausser den beschriebenen existiren noch eine grosse Menge Photometerconstructionen. Eine Modification des BUNSEN'schen und des RUMFORD'schen Photometers hat WESSELY[2]) angegeben. Der erste welcher NICOL'sche Prismen für Lichtmessung vorschlug, war wohl ARAGO[3]). BERNARD[4]) hat dann ein Polarisationsphotometer mit kreisförmigen, nebeneinander liegenden Vergleichsfeldern

[1]) WIED. Ann. 20, pag. 326. 1883; Elektrot. Zeitschr. 1884, pag. 166; 1885, pag. 55; ferner s. G. FRISCH, Zeitschr. für Elektrotechnik 1880, Heft 7, 8 u. 9.

[2]) Zeitschr. für Math. u. Phys., pag. 324. 1871.

[3]) Sämmtliche Werke. Bd. 10, pag. 160. Leipzig 1859.

[4]) Ann. de Chim. et Phys. 35, pag. 385; Compt. rend. 36, pag. 728.

construirt. BEER[1]) liess die beiden Felder in einer geraden Linie aneinander grenzen, indem er ein rechtwinkliges Stahlprisma ähnlich wie das Prisma am RITCHIE'schen Photometer benutzte, und ZÖLLNER[2]), indem er die scharfe Kante eines schwarzen polarisirenden Spiegels durch die Mitte des Gesichtsfeldes legte. Als Vorgänger von WILD ist BABINET[3]) anzusehen, der den Glassatz in Verbindung mit der SOLEIL'schen Doppelplatte anwandte. Zur letzteren hat auch in neuester Zeit GROSSE[4]) bei der Construction seines Mischungsphotometers gegriffen. FUCHS[5]) benutzt ähnlich wie WILD das Verschwinden von Interferenzstreifen, wie sie an der Grenze der totalen Reflexion im durchgehenden und im reflektirten Lichte entstehen, wenn man durch einen aus 2 rechtwinkligen Prismen gebildeten Glaswürfel hindurchblickt. Einen absorbirenden Keil wenden PRITCHARD und PICKERING[6]) (Rauchglas beim Sternphotometer), SABINE[7]) (Milchglas), HÄHNLEIN[8]) (absorbirende Flüssigkeit) an, was natürlich nur dann erlaubt ist, wenn alle Strahlen gleichmässig absorbirt werden. MASCART[9]) hat ein Photometer construirt, welches in Bezug auf die Anordnung dem LEONH. WEBER'schen ähnlich ist, jedoch schwächt er das Vergleichslicht, indem er die wirksame Oeffnung einer Convexlinse durch ein Diaphragma von variabler Grösse verändert. Dieselbe schon von BOUGUER vorgeschlagene Lichtschwächungsmethode haben STEINHEIL (beim Sternphotometer) sowie FIZEAU und FOUCAULT gleichfalls angewendet. Auf das TALBOT'sche Gesetz (rotirende Scheiben) stützen sich die Photometer von GUTHRIE[10]) und NAGELI[11]). AYRTON und PERRY[12]) haben ein speciell für sehr starke Lichtquellen (Bogenlampen) bestimmtes Photometer construirt, bei welcher die Lichtschwächung durch eine auf gerader Bank verschiebbare Concavlinse geschieht.

Auf ganz abweichenden Principien beruhen die Photometer von MASSON[13]), WHEATSTONE und PAGLIANI[14]). Das erste ist für Lichtstärkenmessungen von elektrischen Funken und dergl. construirt und besteht in einer rotirenden Scheibe mit schwarzen und weissen Sectoren. Bei einer kurz dauernden Beleuchtung von hinreichender Stärke sieht man die Sectoren getrennt schwarz und weiss. Bei der Einstellung schwächt man die Beleuchtung der Scheibe so lange, bis diese Erscheinung eben nicht mehr auftritt. Bei dem Photometer von WHEATSTONE wird eine glänzende Stahlkugel durch Zahnräder derartig in schnelle Bewegung gesetzt, dass sie Epicycloiden beschreibt. Wird die Kugel von zwei Lichtquellen beleuchtet, so erblickt das Auge zwei derartige leuchtende Curven, welche durch Veränderung der Entfernung der einen Lichtquelle gleich hell gemacht werden.

---

1) POGG. Ann. 86, pag. 78.

2) Photom. Unters. Inaug.-Diss. Basel 1859.

3) Compt. rend. 37, pag. 774; nach VERDET's »Wellentheorie des Lichtes« rührt das Photometer von DUBOC her; s. Bd. 2, pag. 391.

4) Zeitschr. f. Instrumk. 8, pag. 95 u. 129. 1888; s. auch H. KRÜSS, ebendas., pag. 347.

5) WIED. Ann. 11, pag. 465. 1880.

6) Amer. Acad. of Arts and Sciences, 10. Mai 1882.

7) Phil. Mag. Jan. 1883, Nature 18. Dez. 1882.

8) DINGL. Journ. 244, pag. 54; Journ. f. Gasbel. 1883, pag. 659.

9) Bull. de la Soc. internat. de électriciens 5, pag. 103. März 1888.

10) Chem. News 49, pag. 262.

11) Séances de la Soc. de Phys. franc. 1880, pag. 53.

12) Phil. Mag. (5) 8, pag. 117; 9, pag. 45; Chem. News 1882, 3. März.

13) Annales de chimie et de physique, 5. série, vol. XIX.

14) WIED. Beibl. 11, pag. 820; aus Ingegneria livile 1887, pag. 13.

Das PAGLIANI'sche Photometer besteht aus einer runden Metallscheibe mit eingedrehten concentrischen Ringen. Bei geeigneter Beleuchtung durch die zu vergleichenden Lichtquellen erscheinen helle Sectoren; bei der Messung verfährt man wie beim vorigen Photometer.

Man hat häufig die Lichtemission einer Lichtquelle in nicht horizontaler Richtung zu photometriren. Ein Theil der beschriebenen Photometer ist hierfür eingerichtet (z. B. das von L. WEBER). Wenn dies nicht der Fall ist, muss man das Licht durch einen Spiegel, dessen Absorptionsvermögen aus dem betreffenden Auffallswinkel besonders zu bestimmen ist, horizontal lenken, oder man richtet den Photometerschirm so, dass die von beiden Lichtquellen auf ihn fallenden Strahlen mit ihm denselben Winkel bilden (Radialphotometer). Zu diesem Zweck wird dann der Schirm drehbar eingerichtet und mit einem Theilkreis versehen.

Lichtmaasse.

Nach den beschriebenen Methoden, das Lichtstärken-Verhältniss zweier Lichtquellen zu bestimmen, führt man eine Lichtmessung im eigentlichen Sinne aus, wenn eine der beiden verglichenen Lichtquellen ein eingeführtes Lichtmaass ist, oder zu einem solchen in bekanntem Verhältniss steht. Zu einem Lichtmaass, bezw. einer Lichteinheit, eignet sich eine Lichtquelle, welche sich jederzeit in der gleichen Lichtstärke herstellen lässt.

Carcel-Lampe. Die älteste, in Frankreich noch jetzt gebräuchliche Lichteinheit ist das Licht der Carcel-Lampe. Sie ist eine mit Calzaöl gespeiste Oellampe mit cylindrischem Docht und einem Glascylinder, welcher eine Einschnürung in Höhe der Flamme trägt. Der letzteren wird von innen und aussen Luft zugeführt; sie hat die richtige Lichtstärke, wenn sie in der Stunde 42 *g* Oel verbraucht. Beträgt der Konsum zwischen 40 und 44 *g*, so wird die Lichtstärke diesem proportional angenommen; liegt er aber jenseits dieser Grenzen, so soll eine Messung nicht vorgenommen werden.

Das Oel wird aus seinem Behälter im Fusse der Lampe durch ein einfaches Uhrwerk dem Dochte zugeführt. Genaue Angaben für die Construction einer Carcel-Lampe geben DUMAS und REGNAULT [1]) an.

Kerzen. In Deutschland, England und Amerika benutzte man und benutzt vielfach noch jetzt als Lichteinheit Normalkerzen. Die verbreitetste derselben ist die englische Wallrathkerze, welche in der Stunde 120 Grain = 7·77 *g* verbrauchen soll. Zwischen einem Verbrauch von 114—126 Grains in der Stunde wird die Lichtstärke wieder diesem proportional gerechnet. Der Konsum wird ähnlich wie beim Carcel durch besonders construirte Kerzenwagen bestimmt. Da die Kerze oben dünner ist als unten, wird sie in der Mitte durchgeschnitten, und dann werden beide Hälften nebeneinander gestellt und von der Mitte aus gebrannt. Geschnäuzt dürfen die Kerzen während des Gebrauchs nicht werden. Diese Messungsart ist in England durch das Parlament vorgeschrieben. Wegen der auf der Hand liegenden Mangelhaftigkeit dieser Methode wird namentlich in Deutschland die englische Kerze bei einer bestimmten Flammenhöhe (von 45 *mm*) benutzt. Irgendwelche Garantie für die Gleichmässigkeit des Materials besteht bei dieser Kerze nicht. Deshalb hat der deutsche Verein von Gas- und Wasserfachmännern in Deutschland die unter seiner Aufsicht und nach festen

---

[1]) s. KRÜSS, Elektrotechnische Photometrie, pag. 97; PALAZ, Photometrie industrielle, pag. 101.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule.)

HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PORF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, DR. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, DR. PULFRICH-JENA, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, DR. STRAUBEL-JENA, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

SIEBZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1893.

Handbuch der Physik. — Siebzehnte Lieferung.

Inhalt: II. Band. Optik. Artikel: »Photometrie« von DR. BRODHUN (Seite 465—469). — »Fluorescenz« von PROF. DR. STENGER (Seite 469—486). — »Phosphorescenz« von PROF. DR. A. WINKELMANN (Seite 486—495). — »Chemische Wirkungen des Lichts« von PROF. DR. A. WINKELMANN (Seite 496—505). — »Interferenz des Lichts« von PROF. DR. W. FEUSSNER (Seite 506—590). — »Beugung des Lichts« von PROF. DR. W. FEUSSNER (Seite 590 bis 592).

Normen hergestellte (Vereins-) Paraffinkerze eingeführt, welche bei einer Flammenhöhe von 50 *mm* benutzt werden soll. Minder gebräuchlich als die angegebenen ist die Münchener Stearinkerze.

Hefner-Lampe (Amylacetatlampe)[1]. Einen erheblichen Fortschritt den Kerzen gegenüber bezeichnet die durch v. Hefner-Alteneck construirte Amylacetatlampe. Sie besteht aus einem cylindrischen, etwa ¼ Liter fassenden, innen verzinnten Messinggefäss, aus dem sich ein cylindrisches Dochtrohr von 25 *mm* freistehender Länge, 8 *mm* innerem, 8·3 *mm* äusserem Durchmesser erhebt. Der Docht besteht aus einer Anzahl weicher Baumwollfäden, welche das Rohr lose aber vollständig ausfüllen; er kann durch einen Zahntrieb auf und nieder bewegt werden. Die Lampe wird mit Amylacetat gebrannt, sie strahlt in horizontaler Richtung die Lichteinheit (Hefnerlicht) aus, wenn sie in ruhig stehender, reiner atmosphärischer Luft mit einer Flammenhöhe von 40 *mm* brennt. Diese Flammenhöhe wird gewöhnlich mit einer beigegebenen Visirvorrichtung oder dem von Krüss angegebenen optischen Flammenmesser gemessen, bei welchem auf einer matten Glasscheibe einBild der Flamme in natürlicher Grösse erzeugt wird. Bei dem Bezug einer Hefner-Lampe hat man sich insbesondere zu überzeugen, ob die Wandstärke des Dochtrohres und die Messvorrichtung für die Flammenhöhe richtig ist. Nach den Versuchen von Liebenthal[2]) ändert sich die Leuchtkraft, wenn die Flammenhöhe um 1 *mm* zu oder abnimmt, um 2·7 %. Ferner muss man sich versichern, dass man gutes Amylacetat benutzt (Siedetemperatur um 140° C.). Sehr bedeutende Fehler entstehen, wenn man die Lampe nicht in reiner Luft brennt. Die Hefner-Lampe wird neuerdings von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt beglaubigt. Das Hefnerlicht wird sich voraussichtlich in Kurzem als allein benutztes technisches Lichtmaass zunächst innerhalb Deutschlands Geltung verschaffen und die Kerze ganz verdrängen.

Giroud[3]) schlägt als Lichtmaass die Flamme des gewöhnlichen Leuchtgases aus einem Einlochbrenner mit 1 *mm* weiter Oeffnung bei einer Flammenhöhe von 67·5 *mm* vor. Die Lichtstärke soll dann 0·1 Carcel betragen und von der Beschaffenheit des Gases unabhängig sein. Giroud's Lampe enthält in ihrem Fusse einen Druckregulator.

Hartcourt[4]) empfiehlt als der englischen Kerze gleiches Lichtmaass das Licht, welches eine Mischung von 7 Theilen Pentangas (Destillat des amerikanischen Petroleums bei 50° C.) mit 20 Theilen Luft aussendet, wenn sie aus einer runden, ¼ englischen Zoll weiten Oeffnung mit einer Höhe von 2½ Zoll brennt. Da die Herstellung dieser Einheit nicht sehr einfach ist, ist eine Lampe construirt worden, welche das Gas in geeigneter Weise durch einen aus flüssigem Pentan von der Flamme selbst erhitzten Metallmantel erzeugt. Die Flamme soll auch mit bestimmter Flammenhöhe brennen. Sie leuchtet aber nur mit einem Ausschnitt, welcher mit Hilfe einer Lehre eingestellt wird. Das Arbeiten mit der Lampe ist nicht bequem, da sie sich in labilem Gleichgewicht befindet. Wird nämlich die Flamme ein wenig zu hoch, so wird der Mantel zu heiss, die Gasentwicklung stärker und dadurch die Flamme immer höher. Wird sie aber

[1]) Elektrot. Zeitschr. 5, pag. 20; Journ. f. Gasbel. 1884, No. 3, pag. 23 u. 24; 1886, No. 1, pag. 35.

[2]) Journ. f. Gasbel. 1887; Elektrot. Zeitschr. 8, pag. 504. 1887; 9, pag. 96. 1888; 9, Heft 20. 1888.

[3]) Journ. d'usines à gaz. Mai 1882.

[4]) Rep. of Brit. Ass. f. the Adv. of Sc. 1885, pag. 426.

ein wenig zu klein, so kühlt sich der Mantel zu sehr ab und die Flamme geht allmählich ganz aus.

Die vorbeschriebenen Lichtmaasse strahlen die Einheit der Lichtstärke in horizontaler Richtung aus.

Die VIOLLE'sche Platineinheit[1]) wurde auf der Pariser internationalen Konferenz im Frühjahr 1884 als Einheit weissen Lichtes angenommen.

Sie besteht aus derjenigen Lichtmenge, welche von einem Quadratcentimeter der Oberfläche von erstarrendem Platin in normaler Richtung ausgestrahlt wird. Diese Einheit ist natürlich nicht leicht zu reproduciren. VIOLLE schmolz das Platin mit der Gebläseflamme in einem Tiegel von ungelöschtem Kalk. Ueber der Platinfläche befand sich ein Diaphragma, welches durch Wasserspülung kühl gehalten wurde. Durch einen unter 45° geneigten Spiegel wurden die Lichtstrahlen horizontal auf das Photometer geworfen. Ein grosser Uebelstand ist, dass man nicht vor Verunreinigungen des Platins durch das Gas und den Kalk sicher sein kann.

WERNER V. SIEMENS[2]) schlug als wesentliche Vereinfachung der VIOLLE'schen Einheit vor, für den allgemeineren Gebrauch nicht das Licht des erstarrenden, sondern des schmelzenden Platins zu benutzen. Er construirte eine kleine Lampe, bei welcher sich in einem Metallgehäuse hinter einer Oeffnung von 0·1 □*cm* ein dünner Platinstreifen (etwa 0·02 *mm* dick und 5—6 *mm* breit) befindet, welchen man elektrisch durch einen allmählich stärker werdenden Strom glühen kann. Das Licht, welches im Moment vor dem Durchschmelzen, also vor dem Erlöschen ausgestrahlt wird, dient zur Messung. Das benutzte Platinstück kann man leicht mit Hilfe eines Zangenmechanismus durch ein neues ersetzen. Nach Versuchen von VIOLLE soll diese Lampe in der That 0·1 der VIOLLE'schen Einheit geben. Für die Praxis ist die Lampe in der gegenwärtigen Gestalt nicht brauchbar, weil sie nicht einfach und dauerhaft genug construirt ist und beim Gebrauch zu leicht versagt. Versuche, welche über das SIEMENS'sche Princip in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt angestellt wurden, haben sehr ungünstige Resultate ergeben.

Es sei noch erwähnt, dass von O. LUMMER u. F. KURLBAUM zur Zeit in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt erfolgreiche Versuche zur Herstellung eines Lichtmaasses ausgeführt werden. Es wird dabei Platinblech hinter einem Ausschnitt von bestimmter Grösse elektrisch geglüht und die Temperatur bolometrisch festgehalten.

Neben diesen Lichteinheiten bedarf man constanter Zwischenlichtquellen, welche man während der eigentlichen Messung benutzt und besonders mit einer Lichteinheit vergleicht. Hierzu werden Petroleumlampen (KRÜSS), Benzinflammen von constanter Höhe (UPPENBORN, L. WEBER), Ausschnitte aus Argandgasflammen (RÜDORFF, METHWEN) empfohlen. In der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt[3]) haben sich Glühlampen, welche mit constanter Stromstärke gebrannt wurden, für diesen Zweck ausserordentlich bewährt.

Es kommt häufig vor, dass man nicht Lichtstärken, sondern Beleuchtungsstärken messen muss. Von den beschriebenen Photometern ist besonders das-

[1]) Compt. rend. 88, pag. 171; Compt. rend. 92, pag. 866; Ann. de Chim et Phys (5) 3, pag. 373.

[2]) Elektrot. Zeitschr. Juni 1884.

[3]) O. LUMMER u. E. BRODHUN, Zeitschr. f. Instrk. 10, pag. 119. 1890.

jenige von L. WEBER für derartige Messungen eingerichtet. Man nimmt die Milchglasplatten bei *b* aus dem Apparat heraus, richtet den Tubus *B* so gegen eine an den betreffenden Ort gebrachte diffus leuchtende Fläche, dass das entsprechende Vergleichsfeld ausgefüllt ist und verfährt dann wie bei Lichtstärkenmessungen. Die Einheit der Beleuchtungsstärke wird abgeleitet aus dem benutzten Lichtmaass; man bezeichnet sie nach diesem unter Anfügung der benutzten Längeneinheit (etwa Meter-Hefnerlicht, Meter-Kerze).

Vergleichung verschieden gefärbten Lichtes.

Wenn man versucht, das Licht verschieden gefärbter Lichtquellen nach den angegebenen Methoden zu vergleichen, so stösst man bald auf Schwierigkeiten. Bei Schätzung der Helligkeitsgleichheit verschieden gefärbter Photometerfelder hat man das Gefühl grosser Unsicherheit, bei erheblicher Farbenungleichheit behaupten viele sogar, überhaupt nicht einstellen, oder doch nicht nach einiger Zeit dieselbe Einstellung wieder ausführen zu können. Zudem ist es bekannt, dass die Einstellung von der absoluten Helligkeit des Schirmes abhängig sein kann (PURKINJE'sches Phänomen), wodurch eine solche Messung jeden Werth verliert. Was zunächst den letzten erheblichsten Einwand betrifft, so ist zu bemerken, dass bei den in der Praxis vorkommenden Farbenunterschieden das PURKINJE'sche Phänomen kaum auftreten wird, wenn man für eine gute Helligkeit auf dem Photometerschirm sorgt. Diejenigen, welche behaupten, überhaupt nicht bei verschiedener Färbung einstellen zu können, werden bei einiger Uebung zugeben müssen, dass sie immer eine Stellung angeben können, wo die beiden Photometerfelder am wenigsten verschieden sind, und werden finden, dass sie bald abgesehen vom Beobachtungsfehler immer dieselbe Einstellung erhalten. Es wird behauptet, dass verschiedene Beobachter (mit normalen Farbensystemen) verschieden einstellen. Indessen ist das bisher nicht mit Sicherheit festgestellt. Freilich müsste diese Frage noch genauer untersucht werden.

Es sind verschiedene Vorschläge gemacht worden, den in der Praxis auffälligsten Uebelstand der grossen Einstellungsunsicherheit zu beseitigen. WILD empfiehlt seine Interferenzstreifen; GROSSE die Benutzung der SOLEIL'schen Doppelplatte. Wenn man aber auch vielleicht auf solche Art eine recht sichere Einstellung erhält, so ist es doch fraglich, ob diese Beobachtungsweise ein richtiges Resultat ergiebt.

Einwurfsfreier ist die Anwendung der sogen. Compensationsphotometer, die namentlich bei der Vergleichung einer sehr starken mit einer schwachen Lichtquelle benutzt werden. Bei ihnen wird ein berechenbarer Bruchtheil der Strahlen der einen Lichtquelle auf die abgewandte Seite des Photometerschirms geworfen, welche ausserdem von der anderen Lichtquelle beleuchtet wird. Es ist klar, dass auf diese Weise der Farbenunterschied geringer wird, aber zu gleicher Zeit wird auch die Genauigkeit der Einstellung vermindert. Solche Photometer sind von WYBAUW[1]) (aus dem FOUCAULT'schen mit Hilfe von Spiegeln), von KRÜSS[2]) (aus dem BUNSEN'schen auch unter Benutzung von Spiegeln) und von GROSSE[3]) (Mischungsphotometer mit Hilfe einer besonderen Prismencombination) construirt worden. Das BUNSEN'sche Photometer ist, wie wir sahen, eigentlich an sich schon ein Compensationsphotometer.

---

1) Bull. de la Soc. Belge d'Electr. 2, pag. 5. 1885.

2) Journ. f. Gasbel. 1885, pag. 665; Centralzeit. f. Opt. u. Mech. 6, pag. 219.

3) a. a. O.

CROVA[1]) will die Vergleichung verschieden farbigen Lichtes dadurch erleichtern, dass er die Messung mit denjenigen monochromatischen Strahlen der Lichtquellen aufstellt, welche in demselben Helligkeitsverhältniss stehen wie die gesammten Lichtmengen. Er bestimmte die Wellenlänge dieser Strahlengattung für eine Bogenlampe und die Carcellampe zu 582 $\mu\mu$. Setzt man also ein Glas vor das Auge, welches nur Strahlen etwa von der Wellenlänge 582 $\mu\mu$ hindurchlässt, so kann man durch solches Glas blickend bei Farbengleichheit photometriren, ohne falsche Resultate zu erhalten.

Etwas anders verfährt MACÉ DE LÉPINAY[2]). Er photometrirt erstens durch ein rothes, zweitens durch ein grünes Glas blickend. Erhält er so die Lichtstärkenverhältnisse R und G, so ist das gesuchte Lichtstärkenverhältniss

$$J = \frac{R}{1 + 0{\cdot}208\left(1 - \frac{G}{R}\right)}.$$

Die Art der Messung beruht auf der Annahme, dass die in den verschiedenen Lichtquellen glühenden Substanzen bei derselben Temperatur Licht von der gleichen Zusammensetzung ausstrahlen.

Benutzt man ein Gleichheitsphotometer, bei welchem die Grenze zwischen den Vergleichsfeldern bei gleicher Farbe verschwindet, so kann man mit einem solchen auch bei verschieden farbigen Lichtquellen recht genaue Einstellungen erzielen, wenn man auf den Punkt einstellt, wo die Grenze zwischen beiden Feldern am wenigsten scharf und deutlich, am meisten verwaschen ist. Sehr bemerkenswerth ist der Vorschlag von BRÜCKE[3]), welcher Figuren in der Farbe des einen zu vergleichenden Lichtes auf einem Grunde herstellt, der die Farbe des anderen besitzt, und nun auf dasjenige Helligkeitsverhältniss einstellt, wo die Figuren bei dem grössten Sehwinkel verschwinden. BRÜCKE hat auch auf dieses Princip ein Photometer construirt, welches freilich wohl noch einer eingehenderen Durcharbeitung bedarf.

W. v. SIEMENS erhebt gegen diese Art der Lichtmessung den principiellen Einwand, dass zwei Lichtquellen für die Praxis nicht gleichwerthig seien, wenn sie gleiche scheinbare Helligkeit in gleichen Entfernungen ergeben, sondern wenn man in gleicher Entfernung von ihnen die gleichen Details erkennen könne, wenn sie denselben Beleuchtungswerth haben. Aber abgesehen davon, dass sich auch bei dieser Methode der Einstellung auf gleiche Sehschärfe eine dem PURKINJE-schen Phänomen entsprechende Erscheinung zeigt, hat sie die Uebelstände, dass man bei geringer Helligkeit messen muss, weil bei grosser Helligkeit die Sehschärfe constant wird und dass zweitens die Unsicherheit der Einstellung eine sehr bedeutende ist.

Photometer, mit welchen solche Sehschärfe-Beobachtungen angestellt werden sollen, sind mehrfach angegeben worden. L. WEBER, der sich mit derartigen Messungen sehr eingehend beschäftigt hat, giebt für die Benutzung seines Photometers ein Verfahren an, welches sich aus einer Helligkeitsschätzung bei gleicher Farbe, indem man durch ein an das Auge gehaltenes rothes Glas blickt, und aus einer Sehschärfeeinstellung zusammensetzt. Ganz einwurfsfrei ist seine Methode freilich nicht. Um die unsichere Sehschärfeeinstellung zu umgehen, empfiehlt

---

[1]) Ann. de Chim. et Phys. (6) 6, pag. 528.

[2]) Comptes renans Bd. 97, pag. 1428.

[3]) Wiener Academie-Berichte, Abth. 3, 84, pag. 425. 1887; Zeitschr. f. Instrk. 10, pag. 11. 1890.

L. WEBER für die Praxis das folgende Verfahren, welches sich an das von MACÉ DE LÉPINAY vorgeschlagene anlehnt: Man macht mit Hilfe der im Photometer befindlichen Benzinvergleichslampe zwei Einstellungen auf gleiche Helligkeit, die eine indem man durch ein rothes, die andere, indem man durch ein grünes Glas blickt. Das gefundene Lichtstärkenverhältniss sei im ersten Falle R, im zweiten Gr, dann erhält man die gesuchte Grösse, indem man R mit einem Faktor K multiplicirt, welcher in bestimmter Weise von dem Bruch $\frac{Gr}{R}$ abhängig ist. Dieser Faktor ist kleiner als 1, wenn die zu messende Lichtquelle röthlicher ist als das Vergleichslicht, grösser, wenn sie weisslicher ist. Die Grösse desselben muss empirisch bestimmt werden: L. WEBER giebt eine Tabelle dafür, welche aus einer mit verschiedener Stromstärke brennenden Glühlampe gewonnen ist.

BRODHUN.

Fluorescenz.

1) Die eigenthümliche Art der Lichtemission, welche man als Fluorescenz bezeichnet, hat ihren Namen der Thatsache zu verdanken, dass sie zuerst an bestimmten Varietäten des Flussspaths (Fluorcalcium) beobachtet wurde. Da jedoch die ersten genaueren Untersuchungen an Lösungen von schwefelsaurem Chinin ausgeführt sind, und weil gerade an diesem Material das Verständniss der Vorgänge sich anbahnte, empfiehlt es sich, diese grundlegenden Versuche auch hier als Basis zu wählen.

Betrachtet man nach J. HERSCHEL[1]) eine verdünnte Lösung von schwefelsaurem Chinin in diffusem Tageslichte, so erblickt man an der Oberfläche der vollkommen farblos durchsichtigen Flüssigkeit einen lebhaften himmelblauen Schein, der nur einer dünnen, oberflächlichen Schicht eigen ist. HERSCHEL belegte daher die Erscheinung mit dem Namen »epipolische Dispersion«. Das Lichtbündel, welches bei seinem Durchgange durch die Lösung die epipolische Dispersion hervorgerufen hatte, nennt er epipolisirt. Epipolisches Licht ist nicht mehr fähig, epipolische Dispersion im Chininsulfat zu erzeugen, während das Produkt der epipolischen Dispersion, das blaue Licht, die Lösung ungehindert, ohne merkliche Schwächung zu durchdringen vermag. Das blaue Licht erweist sich ferner als unpolarisirt und besitzt ein von Orange bis Violett reichendes continuirliches Spectrum ohne eine Spur FRAUNHOFER'scher Linien. Nach allen Seiten breitet es sich gleichmässig aus. Bei DAVID BREWSTER's[2]) Versuchen wurde Sonnenlicht mit Hilfe einer Linse stark convergirend in eine Lösung von schwefelsaurem Chinin geworfen. Im Gegensatz zu HERSCHEL's Beobachtungen zeigte sich dann das blaue dispergirte Licht durchaus nicht an eine oberflächliche Schicht gebunden, sondern liess sich leicht eine erhebliche Strecke weit in das Innere der Flüssigkeit verfolgen. Unsere Erscheinung wurde daher von ihm als »innere Dispersion« bezeichnet.

---

[1]) JOHN HERSCHEL, Phil. Trans. 1845, pag. 143, 147; Ann. de chim. (3) Bd. 38, pag. 378. 1853.

[2]) DAVID BREWSTER, Edinb. Trans. 1846, part. II, pag. 3; POGG. Ann. 73, pag. 531. 1848; Ann. de chim. (3), Bd. 38, pag. 376. 1853.

Namen hatte man somit allerdings für den Vorgang, die fundamentale Frage aber, warum ist Sonnenlicht, das in einer Lösung von schwefelsaurem Chinin eine grössere Strecke durchlaufen hat, nicht mehr im Stande, die »epipolische Dispersion« HERSCHEL's, die »innere Dispersion« BREWSTER's zu erzeugen, wodurch unterscheidet sich das epipolische Licht von dem ursprünglichen, war damit um keinen Schritt ihrer Lösung näher gebracht. Das Verdienst, systematisch diesen Fundamentalpunkt aufgeklärt zu haben, gebührt STOKES[1]. Nach seinem Vorgange wollen wir in Zukunft statt der Bezeichnungen von HERSCHEL oder BREWSTER den Namen »Fluorescenz« anwenden.

2) Erklärung der Fluorescenz durch STOKES.

Wie wir sahen, genügt der Durchgang des Sonnenlichts durch eine Schicht, deren Dicke nur Bruchtheile eines Zolls beträgt, um es von den Strahlen zu säubern, welche Fluorescenz zu erregen vermögen. Die dispergirten blauen Strahlen dagegen durchdringen ungehindert mehrere Zoll dicke Schichten. Die Fluorescenz erregenden Strahlen müssen also in irgend einer Beziehung andersartig sein, als das dispergirte Fluorescenzlicht. In Folge der Undulationstheorie ist aber die Natur des Lichts durch zwei Dinge definirt, Schwingungsdauer und Polarisationszustand. Eine Erklärung der Fluorescenz muss man daher suchen in einer Abänderung entweder der Brechbarkeit oder des Polarisationszustandes. Nach kurzer Ueberlegung musste STOKES die Möglichkeit verwerfen, dass die Erklärung der Fluorescenz in einer Aenderung des Polarisationszustandes zu finden sei; es konnte sich also nur noch um die Möglichkeit handeln, dass das Fluorescenzlicht sich vom Fluorescenz erregenden Lichte durch seine Brechbarkeit unterscheidet. Sobald man diese Voraussetzung zulässt, wird die Erklärung ungemein einfach; man braucht sich nur vorzustellen, dass die jenseits des äussersten Violetts liegenden ultravioletten Strahlen (vergl. den Artikel »Chemische Wirkungen des Lichtes«) Anlass zu anderen geben, welche dem sichtbaren Gebiet angehören. Dass bei einer Lösung von schwefelsaurem Chinin der blaue Schein im diffusen Tageslichte nur in der Nähe der Oberfläche sichtbar ist, wäre darauf zurückzuführen, dass die Flüssigkeit für die sichtbare Strahlung in hohem Maasse durchlässig ist, dagegen für die ultraviolette nahezu undurchlässig.

Dass die Fluorescenz nothwendigerweise von einer Aenderung in der Brechbarkeit begleitet sein muss, folgt unmittelbar aus der Beobachtung von HERSCHEL, dass das Spectrum des Fluorescenzlichtes keine FRAUNHOFER'schen Linien zeigt, dass also im Fluorescenzlichte des schwefelsauren Chinins z. B. Licht von der Wellenlänge der Linien D und F vorhanden ist, im erregenden Sonnenlicht aber fehlt. Ich habe in den STOKES'schen Arbeiten keinen Hinweis auf diesen ebenso einfachen als schlagenden Beweis zu Gunsten seiner Anschauung finden können.

3) STOKES Beweise für die Brechbarkeitsänderung.

a) Ein Reagenzglas wurde zur Hälfte mit einer verdünnten Lösung von saurem schwefelsaurem Chinin in Wasser gefüllt. Bis auf eine kleine Oeffnung war das Glas mit schwarzem Papier aussen umkleidet. Blickte man von oben in das Glas, während die Oeffnung dem diffusen Tageslichte ausgesetzt war, so sah man, wie früher HERSCHEL, einen blauen Bogen, der nur wenig in die Flüssigkeit sich erstreckte. Unter einer Reihe von farbigen Gläsern fand nun STOKES ein blass rauchfarbenes Glas, das dicht vor die Oeffnung gehalten, den

---

[1]) STOKES, Phil. Trans. 1852, part. II, pag. 463; POGG. Ann. 87, pag. 480. 1852; POGG. Ergänz.-Bd. 4, pag. 177. 1854.

blauen Bogen verhinderte, dagegen vor das Auge gehalten, ihn zu Stande kommen liess, allerdings mit mehr weisslicher Farbe. Umgekehrt liess ein Glas von Flohfarbe vor das Loch gebracht, den Bogen entstehen; vor das Auge gehalten, brachte es ihn jedoch zum Verschwinden.

Bezeichnet man nun mit J die Intensität des erregenden Lichtes von einer bestimmten aber beliebig ausgewählten Wellenlänge, so wissen wir, dass davon durch einen beliebigen absorbirenden Körper ein Betrag hindurchgeht, welcher proportional mit J ist. Schliessen wir also bei der Fluorescenz eine Brechbarkeitsveränderung aus, so würde offenbar durch die fluorescirende Flüssigkeit und das benutzte farbige Glas der Betrag $K_1 K_2 J$ passiren, wo K_1 sich auf die Flüssigkeit, K_2 auf das Glas bezieht. Die Produktform $K_1 K_2$ der Constanten K_1 und K_2 zeigt, dass die Reihenfolge, in der das Licht Flüssigkeit und Glas durchsetzt, ohne Einfluss ist. Die Erweiterung des Schlusses auf das zusammengesetzte erregende Licht, wie es bei den obigen Versuchen in Anwendung kommt, versteht sich von selbst. Um den Widerspruch zu beseitigen, bleibt nichts anderes übrig, als eine Aenderung der Brechbarkeit anzunehmen.

b) Da indessen der vorstehende Beweis auf dem oben citirten Satze beruht, der wenigstens zu jener Zeit nicht streng bewiesen war, hat STOKES den folgenden direkten Nachweis hinzugefügt. Sonnenlicht fiel durch einen Spalt auf drei hinter einander aufgestellte Prismen und erzeugte in einer Distanz von einigen Fuss vom Spalt ein mässig reines Spectrum. Ein mit der Chininlösung gefülltes Reagenzglas wurde sodann durch die verschiedenen Farben des Spectrums hindurchgeführt. Fast das ganze sichtbare Spectrum entlang ging das Licht durch die Flüssigkeit, wie es durch ebenso viel Wasser gegangen sein würde; als aber die Röhre fast das äusserste Violett erreichte, schoss ein geisterhafter Schein von blauem Licht quer durch dieselbe. Bei weiterer Bewegung der Röhre nahm das blaue Licht erst an Intensität zu und verschwand dann allmählich ganz. Es verschwand indess nicht eher, als bis die Röhre weit jenseits des violetten Endes bei dem auf einem Schirme sichtbaren Spectrum war. Ehe es verschwand, war das blaue Licht beschränkt auf eine äusserst dünne Schicht der Flüssigkeit an der Oberfläche, durch welche das Licht einfiel, wogegen es, als es zuerst erschien, sich ganz durch die Röhre erstreckte, besonders wenn diese ein wenig vor dem äussersten Violett befindlich war.

Für das schwefelsaure Chinin war somit die Thatsache einer Brechbarkeitsänderung klargelegt, und damit gleichzeitig die Erklärung der auffallenden Erscheinung gegeben, die wir als Fluorescenz bezeichnen. Das epipolisirte Licht HERSCHEL's ist nichts als Sonnenlicht, das von den äussersten violetten und den ultravioletten Strahlen befreit ist.

4) Der Uebersichtlichkeit halber hatten wir unsere Betrachtung bisher auf die Lösung des sauren schwefelsauren Chinins in Wasser beschränkt. Wie jedoch bereits DAVID BREWSTER gezeigt hat, finden analoge Vorgänge an einer Reihe anderer Substanzen statt. Jede der späteren Untersuchungen hat uns mit neuen fluorescirenden Körpern bekannt gemacht und heute beziffert sich ihre Zahl bereits nach Hunderten. In Bezug auf Einzelnheiten mag auf ein Werk von K. NOACK (Verzeichniss fluorescirender Substanzen nach der Farbe des Fluorescenzlichtes geordnet mit Literaturnachweisen, Marburg 1887) verwiesen werden, in dem mit dankenswerthem Fleiss die bis zum Jahre 1887 zu unserer Kenntniss gelangten fluorescirenden Körper zusammengestellt sind. Aus diesem reichhaltigen Material werden wir für unsere Zwecke diejenigen Körper herausgreifen, welche seit STOKES' Zeit dazu gedient haben, die Gesetze der Fluorescenz-

erscheinungen aufzusuchen, oder welche an sich durch ein vom normalen abweichendes Verhalten ein besonderes Interesse beanspruchen können.

Wie erkennt man, ob ein vorgelegter Körper fluorescirt?

5) Um die Bedingungen klarzulegen, welche sich für die Untersuchung am günstigsten erweisen, ob ein Körper Fluorescenz zeigt, wollen wir uns abermals der Lösung von schwefelsaurem Chinin bedienen. Bei dieser erleiden nur die äussersten violetten Strahlen des sichtbaren Spectrums eine merkliche Absorption, in erhöhtem Maasse dagegen die ultravioletten. Statt dieser innerhalb der Flüssigkeit zurückgehaltenen Strahlung sendet sie uns in dem Fluorescenzlichte das sichtbare schön blaue Licht zu. In diesem speciellen Falle also ist es hauptsächlich das unsichtbare Licht, das die Wirkung hervorruft, und dieser Umstand war hauptsächlich Schuld daran, dass die Erklärung der Fluorescenz erst nach mehreren vergeblichen Versuchen gelang.

Von vornherein ist aber offenbar kein Grund einzusehen, warum in Bezug auf die Erregung der Fluorescenz die ultravioletten Strahlen einen Vorzug vor den sichtbaren haben sollten, und in der That werden die am stärksten fluorescirenden Körper vorzugsweise durch sichtbares Licht erregt. Man wird vielmehr bei der Prüfung einer Substanz darauf, ob sie fluorescirt oder nicht, die verschiedenartigsten Strahlen als Erreger probiren. Verschiedene Lichtquellen enthalten nun auch Strahlen verschiedener Brechbarkeit; man wird daher als Erreger theils Lichtquellen auswählen, welche die sichtbaren Strahlen vorzugsweise enthalten, als auch solche, deren Strahlung möglichst mit in das Ultraviolett hineinreicht.

Zweitens wird man unter analog zusammengesetzten Lichtquellen diejenigen auswählen, welche die grösste Intensität besitzen.

Drittens endlich muss man das erregende Licht in möglichster Concentration auf den zu untersuchenden Körper wirken lassen, besonders wenn man nach den Vorversuchen vermuthet, dass das Versuchsobjekt nur Spuren von Fluorescenz aufweisen wird.

6) Zweckmässige Lichtquellen.

Für Untersuchungen im sichtbaren Gebiet empfiehlt sich die Anwendung des Sonnenlichtes oder des elektrischen Bogenlichtes; bei Erregung durch ultraviolette Strahlen dagegen ist der Gebrauch des Voltabogens dem Sonnenlicht vorzuziehen, weil es Strahlen von weit grösserer Brechbarkeit enthält[1]). Es mag bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, dass zur Herstellung des Spectrums hoch brechbarer ultravioletter Strahlen die Anwendung von Prismen und Linsen aus Glas unstatthaft ist, da alle Glasarten, wenn auch in verschiedenen Maasse, diese Strahlen absorbiren. Am besten benutzt man Präparate aus Quarz oder farblosen Varietäten des Flussspaths; weniger zweckmässig, aber immerhin für viele Fälle ausreichend hat sich auch Kalkspath erwiesen[2]). Nach DES LANDRES[3]) sind Quarz und Flussspath durchlässig bis $\lambda = 0{\cdot}000185$ *mm*, Kalkspath bis $\lambda = 0{\cdot}000220$. Sichtbar macht man den ultravioletten Theil des Spectrums entweder mit Hilfe fluorescirender Körper (weiter unten wird davon ausführlicher die Rede sein) oder auf photographischem Wege (vergl. den Artikel »Chemische Wirkungen des Lichtes).

Weitere Lichtquellen, die sich durch ihren Reichthum an ultravioletten Strahlen auszeichnen, sind die Magnesiumlampe (nach einer Angabe von

1) STOKES, POGG. Ann. 123, pag. 30. 1864.

2) STOKES, POGG. Ann. 123, pag. 472. 1864.

3) DES LANDRES, Ann. de chim. (6), Bd. 14, pag. 33. 1888.

SCHRÖTTER in ERDMANN's Journal Bd. 95, pag. 190. 1865, ist der ultraviolette Theil des Spectrums etwa 6 mal so lang, als der sichtbare), die Flamme verbrennenden Schwefelkohlenstoffs, eine mit Stickstoff gefüllte GEISSLER'sche Röhre, und endlich vor allem die Funken, welche zwischen metallischen Elektroden übergehen, die mit den Enden der secundären Spirale eines kräftigen Inductoriums verbunden sind. Besonders günstige Resultate erzielt man, wenn man neben die Funkenstrecke eine Leydener Batterie von grosser Capacität schaltet; die Zahl der übergehenden Funken wird dadurch vermindert, ihre Leuchtstärke aber wesentlich gesteigert. Nach STOKES ist das auf diese Weise mit Quarzapparaten erzielte ultraviolette Spectrum 6—8 mal so lang als der sichtbare Theil. Sehr reich an Ultraviolett sind die Funken zwischen Cadmiumelektroden. Die kürzesten Wellen liefern Funken aus Aluminiumelektroden; hier sind die äussersten Strahlen indess nur sichtbar in der Nähe der Prismenkante, erleiden also selbst in Quarz eine merkliche Absorption [1]).

Die Beobachtungsmethoden zur Constatirung der Fluorescenz.

Die Versuche werden am besten im völlig dunklen Zimmer angestellt, das erregende Licht tritt durch eine kleine, mit einer Linse kurzer Brennweite versehene Oeffnung ins Dunkelzimmer. Den aus der Linse austretenden Lichtkegel lässt man senkrecht auf den zu untersuchenden Körper oder die in einem mit parallelen Wänden aus Glas oder besser Quarz versehenen Kasten befindliche Flüssigkeit fallen. Im Falle sich die Bahn der Lichtstrahlen innerhalb des Körpers durch allseitige Aussendung farbigen Lichtes von der übrigen Masse des Körpers abhebt, wird man diesen als fluorescirend anzusehen haben.

Auf eines ist indessen aufmerksam zu machen. Innerhalb eines völlig homogenen Mediums findet niemals Reflexion statt. Wenn also ein Lichtbündel durch einen solchen Körper, gleichgültig, ob er fest oder flüssig ist, hindurchgeht, so kann die Bahn der Lichtstrahlen nicht sichtbar sein. Trifft aber der Strahl auf seinem Wege in kurzen Intervallen Theilchen, die er zum Fluoresciren erregt, so wird offenbar die Bahn des Strahls durch das Fluorescenzlicht sichtbar und zwar von allen Seiten, weil ein fluorescirender Körper völlig das Aussehen eines selbstleuchtenden besitzt. Enthält statt dessen der feste Körper in seinem Innern zahlreiche Bläschen oder Kanäle, die Flüssigkeit suspendirte feste Theilchen oder Gasbläschen in grosser Zahl, so wird in Folge der zahlreichen, im Innern erfolgenden Reflexionen ebenfalls die Substanz soweit allseitig Licht aussenden, als sie von den einfallenden Strahlen durchsetzt wird.

Solche Fälle muss man offenbar streng trennen von denen, wo wirklich nur Fluorescenz eintritt; im ersten Falle tritt niemals eine Aenderung der Brechbarkeit ein, wie sie der Fluorescenz eigenthümlich ist. STOKES bezeichnet die allseitige Lichtaussendung eines durchstrahlten Körpers als falsche innere Dispersion, falls sie ihren Ursprung Reflexionen im Innern verdankt. Im Gegensatz dazu bezeichnet er die Fluorescenz als wahre innere Dispersion.

Die falsche innere Dispersion ist nun durchaus nichts seltenes; so weiss man, dass auch der homogenste Kalkspath [2]), dass Beryllkrystalle [3]) von unzähligen, ausserordentlich feinen Kanälen durchzogen sind. Flüssigkeiten, die nicht völlig frei von Luftbläschen oder suspendirten Theilchen sind — und diese äusserste Reinheit ist schwer zu erreichen — lassen fast immer falsche Dispersion zu

[1]) STOKES, POGG. Ann. 123, pag. 41. 1864.

[2]) vergl. K. SCHMIDT, WIED. Ann. 33, pag. 534. 1888.

[3]) W. VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 485. 1887.

Stande kommen. Es war daher begreiflich, wenn sogar eine derartige falsche Dispersion von LALLEMAND[1]) jedem Körper zugeschrieben wurde. Ja LALLEMAND ging so weit, diesen Vorgang in vollkommene Parallele mit der Fluorescenz zu stellen, indem er diese von ihm als »isochromatische Fluorescenz« bezeichnete Erscheinung als eine Art »molekularer Reflexion« deutet.

Vorläufig liegt aber nicht der mindeste Grund zu einer so geschraubten Erklärung vor. Wo eine falsche innere Dispersion auftritt, wird sie ohne Ausnahme ihre Ursache in Reflexionen heterogener Theilchen haben, welche im Vergleich zur Molekel erhebliche Dimensionen besitzen. Zuzugeben ist allerdings, dass es sehr schwer ist, jede Spur fremder, eine Reflexion bedingender Theilchen auszuschliessen.

Daraus ergiebt sich mit Nothwendigkeit, dass man bei Fluorescenzbeobachtungen wahre und falsche innere Dispersion zu trennen suchen muss und das bietet keine erheblichen Schwierigkeiten[2]).

Erstens sieht wirkliches Fluorescenzlicht völlig continuirlich aus; falsch dispergirtes Licht dagegen erscheint mehr oder weniger funkelnd. (In einzelnen Fällen enthält jedoch eine Flüssigkeit starre Theilchen von solcher Feinheit und in solcher Menge in mechanischer Schwebe, dass dieses Kriterium versagt.)

Zweitens ist Fluorescenzlicht unpolarisirt und zwar gleichgültig, ob und wie das erregende Licht polarisirt ist. Ein Bündel horizontaler Lichtstrahlen erzeugt dagegen in einem falsch dispergirenden Körper Licht, das fast völlig in der Reflexionsebene polarisirt ist. Am besten beobachtet man es senkrecht von oben herab mit einem NICOL'schen Prisma. Die Polarisation ist um so vollkommener, je feiner und in Folge dessen regelmässiger geformt die suspendirten Theilchen sind. Absolut zuverlässig ist auch dieses zweite Kriterium nicht (vergl. die Fluorescenz des Magnesiumplatincyanins in 20). Als letztes, aber auch sicheres Kennzeichen des Vorhandenseins von Fluorescenz muss daher der Nachweis der Brechbarkeitsänderung herangezogen werden.

An dieser Stelle will ich nur auf die STOKES'sche[3]) Methode der absorbirenden Medien eingehen. Den gleichen Zweck können auch die später erwähnten Untersuchungsmethoden (10) erfüllen, welche dazu bestimmt sind, die Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes in ihrer Beziehung zum erregenden Lichte gesetzmässig festzustellen; ihre Anwendbarkeit auch für den vorliegenden Zweck wird aus ihrer dort gegebenen Beschreibung ohne weiteres verständlich sein.

8) Methode der absorbirenden Mittel.

Sonnenlicht dringt durch eine Oeffnung in das Beobachtungszimmer. Die Oeffnung ist bedeckt mit einem absorbirenden Medium, dem Hauptabsorbens, das so gewählt ist, dass es die schwach leuchtenden violetten, sowie die ultravioletten Strahlen möglichst vollständig durchlässt, dagegen den grössten Theil des sichtbaren Spectrums absorbirt. Ein zweites Medium, das complementäre Absorbens, soll umgekehrt die hoch brechbaren Strahlen absorbiren, die schwächer brechbaren dagegen durchlassen. Beide Medien zusammen sollen wenigstens nahezu Dunkelheit erzeugen. Erscheint das zwischen Hauptabsorbens und complementärem Absorbens befindliche Versuchsobjekt leuchtend, so ist auf Fluorescenz zu schliessen. Um den Beweis streng zu machen, lässt man das Licht zunächst beide Medien passiren und dann erst auf den Körper treffen. Das

1) LALLEMAND, Journ. de phys. Bd. 5, pag. 329. 1876.

2) STOKES, POGG. Ergänz.-Bd. 4, pag. 203 u. 289. 1854.

3) STOKES, POGG. Ann. 91, pag. 158. 1854.

Leuchten muss alsdann fast ganz verschwinden. Ist dagegen nur falsche innere Dispersion vorhanden, so muss in beiden Stellungen des complementaren Absorbens die Stärke des dispergirten Lichts die gleiche sein.

STOKES[1]) empfiehlt als besonders wirksam die folgenden Combinationen.

a) Hauptabsorbens: Ein durch Mangan und etwas Kobalt tief violett gefärbtes Glas combinirt mit einem blassblauen Kobaltglase.

Complementärabsorbens: Schwach gelbes Glas.

b) Hauptabsorbens: Eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak von passender Concentration. Complementärabsorbens: Ein durch Silber gefärbtes, schwach gebranntes gelbes Glas.

Die erste Combination ist am besten, wenn das Fluorescenzlicht eine blaue Farbe hat; die zweite passt vornehmlich in den Fällen, wo das Fluorescenzlicht roth, orange oder gelb ist.

9) Nach dieser Methode gelang es STOKES, Fluorescenz auch in Fällen sicher nachzuweisen, wo die Intensität des erzeugten Lichtes nur sehr gering ist. Die Erscheinung erweist sich dann als viel weiter verbreitet, als man von vornherein vermuthen konnte. Es sei nur auf einige Substanzen hier hingewiesen: Weisses Papier, Baumwolle, Knochen, Elfenbein, weisses Leder, Kork, Horn, Holz der verschiedensten Art, weisse Muscheln, die Haut der Hand, fast alle farblosen Glassorten. Als unempfindlich hebt dagegen STOKES hervor: Quarz, Calcedon, Kalkspath und carrarischen Marmor. In Bezug auf Kalkspath hat jedoch STOKES sich geirrt; sowohl LOMMEL[2]) als der Referent selbst haben für alle ihnen zur Verfügung stehenden Kalkspathpräparate in concentrirtem, durch blaues Glas gegangenen Sonnen- oder elektrischen Lichte eine schön ziegelrothe Fluorescenz beobachtet. Ich möchte noch besonders darauf hinweisen, dass die Doppelbrechung auf diese Weise auch innerhalb des Krystalls deutlich sichtbar ist, so dass der ordinäre und der extraordinäre Strahl in Bezug auf Fluorescenzerregung sich nicht unterscheiden.

Ferner zeigen Glasarten, welche im Sonnenlichte nicht merklich fluoresciren, sich oft prachtvoll leuchtend, wenn man als Erreger das Licht benutzt, wie es Inductionsfunken zwischen Cadmium- oder Aluminiumelektroden geben, jedenfalls in Folge der darin enthaltenen Strahlen höchster Brechbarkeit. In ähnlicher Weise fluoresciren nach SORET[3]) die Lösungen des Sulfats und Chlorürs von Cer in schön violettem Lichte allein unter dem Einfluss der äussersten im Inductionsfunken enthaltenen ultravioletten Strahlen, nicht im Sonnenlichte.

Während die Zahl von festen und flüssigen Körpern sehr gross ist, an denen Fluorescenz bekannt ist, ist bisher für gasförmige Substanzen nur ein einschlägiger Fall bekannt geworden (Joddampf).

Ueber die Gesetze der Fluorescenzerscheinungen.

10) Zur Veranschaulichung wollen wir uns wie früher an einen speciellen Fall halten und zwar eine Lösung von Thiomelansäure in Schwefelsäure. Diese schmutzig grün aussehende Flüssigkeit erhält man durch Einwirkung von Schwefelsäure auf Aethylalkohol unter gleichzeitigem Erwärmen.

Bisher hatten wir als erregende Strahlen stets einen Complex angewandt, der Licht von verschiedener Brechbarkeit in sich begriff. Wir wollen nunmehr

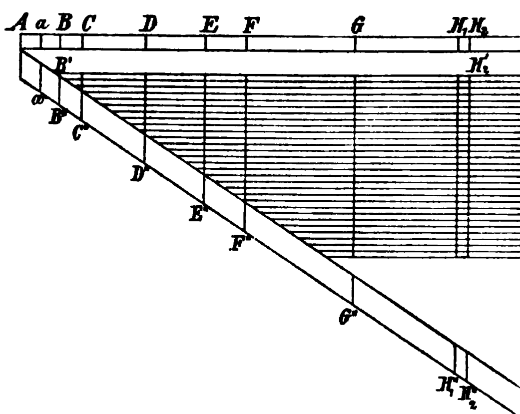
[1]) STOKES, POGG. Ann. 96, pag. 522. 1855.
[2]) LOMMEL, WIED. Ann. 21, pag. 422. 1884.
[3]) SORET, Compt. rend. Bd. 88, pag. 1077. 1879.

homogenes Licht benutzen. Es soll beobachtet werden: a) welche Strahlen erregungsfähig sind und b) welcher Art die Zusammensetzung des von ihnen gelieferten Fluorescenzlichtes ist. Um die Uebersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen, soll von den verschiedenen Beobachtungsmethoden, welche die einzelnen Forscher angewandt haben, stets nur eine herausgegriffen werden[1]).

a) Unsere Lösung von Thiomelansäure befindet sich in einer flachen Schale, deren Boden zur Beseitigung reflectirten Lichtes mit schwarzem Sammet bedeckt ist, in einem Kasten. Der Deckel ist mit einem Spalt versehen. Mit Hilfe von Prisma und Linse wird ein reines Spectrum auf dem Deckel entworfen. Durch Drehung des Prismas um seine horizontale Axe kann man die verschiedensten homogenen Strahlen in das Innere des Kastens eintreten lassen und schliesslich mit Hilfe einer Linse kurzer Brennweite als scharfes Bild des Spaltes auf der Flüssigkeitsoberfläche vereinigen[2]). Es zeigt sich dann[3]), dass die Fluorescenzerregung bereits zwischen *B* und *C* beginnt, kräftig wird bei *E*, kräftig andauert bis *H*, dann erheblich abnimmt, aber doch ziemlich weit ins Ultraviolette sich erstreckt.

b) Betrachtet man das bei der unter a) beschriebenen Anordnung durch ein homogenes Lichtbündel erzeugte Fluorescenzlicht mit Hilfe eines Prismas, so zeigt sich, dass es nicht homogen ist, sondern eine continuirliche Folge von Spectralfarben enthält. Man wird also nothwendiger Weise darauf geführt, für verschiedenfärbige homogene Erregerstrahlen die spectrale Zusammensetzung des von ihnen hervorgerufenen Fluorescenzlichtes zu ermitteln. Genauere messende Versuche derart macht man nacheinander mit den einzelnen Spectralfarben. Will man aber schnell einen Ueberblick über die Erscheinung gewinnen in ihrem Verlaufe durch das ganze Spectrum, so kann man sich am besten der von STOKES angegebenen Methode des derivirten Spectrums[4]) bedienen (Methode der gekreuzten Prismen.)

Man entwirft zu dem Zweck ein möglichst schmales Sonnenspectrum AH_2 auf der Oberfläche des Körpers (Fig. 435) und betrachtet dasselbe durch ein Prisma, dessen brechende Kante mit der Längsrichtung des Spectrums zusammenfällt. Man erblickt alsdann zunächst ein abgeleitetes, schräges Spectrum $a''H_2''$ und bei Anwendung von Thiomelansäure einen breiten Spectralstreifen von der in der Figur schraffirt gezeichneten Form, der oben von B' bis H_2' roth (entsprechend dem Licht der FRAUNHOFER'schen Linie *B*) ist und dann nach unten die weiteren dem Roth folgenden Spectralfarben zeigt. Die FRAUNHOFER'schen Linien verlaufen darin senkrecht zur Längsrichtung des ursprünglichen Linearspectrums. Jedem homogenen Streifen des Linearspectrums entspricht selbst ein mehr



(Ph. 435.)

[1]) LOMMEL, WIED. Ann. 19, pag. 356. 1883.
[2]) HOGENBACH, POGG. Ann. 141, pag. 245. 1870.
[3]) HOGENBACH, POGG. Ann. 146, pag. 85. 1872.
[4]) STOKES, POGG. Ergänz. 42, pag. 51. 1854.

oder minder vollständiges Spectrum, welches sich von oben nach unten ausbreitet. Für erregende Strahlen jenseits *G* enthält das Fluorescenzlicht alle sichtbaren Strahlen, das äusserste Roth und das äusserste Violett ausgenommen; das unzerlegte Fluorescenzlicht jenseits *G* macht daher fast den Eindruck von Weiss. In dem Lichte, das in der Mitte zwischen *F* und *G* ausstrahlt, fehlt das Violett; da das Blau verhältnissmässig stark ist, so erscheint uns die Gesammtfarbe blau. Je weiter wir uns dem weniger brechbaren Ende zuwenden, um so geringer wird die Zahl der verschiedenen Farben, die das Fluorescenzlicht zusammensetzen, und zwar sind es die brechbareren Strahlen, welche Schritt für Schritt verschwinden. Das Fluorescenzlicht ist grün bei *F*, gelb bei *E*, orange bei *D*, roth bei *C*.

Ein Blick auf die Figur zeigt aber mehr; in dem erzeugten Fluorescenzlichte existiren nie Strahlen, die an Brechbarkeit das erregende Licht übertreffen.

11) Ueber die Beziehung der Absorption zur Fluorescenz.

Als Beispiel wollen wir das Uranglas wählen, jenes gelbe in brillantem Gelbgrün fluorescirende Glas, wie wir es häufig zu Haushaltungsgegenständen verwendet finden. Projicirt man ein reines Spectrum senkrecht auf die polirte Oberfläche des Glases, so erblickt man drei deutlich hervortretende Maxima des Fluorescirens, die beiden ersten schärfer begrenzt und intensiver als das dritte. Das Absorptionsspectrum des Uranglases zeigt nun gerade an den Stellen der beiden ersten Maxima des Fluorescirens entsprechende Maxima der Absorption; das dritte Maximum des Fluorescirens liegt nahe dem violetten Ende des sichtbaren Spectrums und entsprechend weist das Absorptionsspectrum eine kräftige Absorption des violetten Endes auf.

12) Die beiden in No. 10, 11 zunächst an je einem Specialfall demonstrirten Gesetze, wonach 1) das Fluorescenzlicht an Brechbarkeit das erregende Licht nicht übertrifft, sondern höchstens erreicht, wonach 2) jeder Fluorescenz erregende Strahl der Absorption unterliegt, sind nun von Stokes in seiner grossen Arbeit[1]) einer eingehenden Prüfung unterzogen worden. In allen Fällen — und ihre Zahl war eine grosse — fand er beide Gesetze in vollstem Umfange bestätigt. Später hat man dem ersten nach seinem Entdecker den Namen der Stokes'schen Regel gegeben.

In der Folgezeit wuchs die Zahl der fluorescirenden Körper zu einer ausserordentlich grossen an. Insbesondere lernte man aus der Legion der organischen Farbstoffe eine ganze Reihe höchst intensiv im sichtbaren Spectrum fluorescirender kennen, und diese Eigenschaft machte sie zu einer nochmaligen Prüfung der erwähnten Gesetze besonders geeignet. Als die am meisten dabei angewandten Körper seien Magdalaroth, Eosin und Fluoresceïn erwähnt.

13) Das zweite Gesetz hat sich ohne Ausnahme bewährt. In der That erscheint es nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie als selbstverständlich. Denn das erzeugte Fluorescenzlicht repräsentirt offenbar einen Energievorrath von bestimmtem Betrage; es muss also von dem Energieinhalt des erregenden Lichtes ein äquivalenter Antheil verbraucht werden, d. h. der Vorgang eintreten, den wir Absorption nennen.

Zur Demonstration der Beziehung zwischen Fluorescenz und Absorption eignet sich vortrefflich eine Lösung von Fluorindin in Alkohol. Dieser Farbstoff von bisher unbekannter Zusammensetzung zeigt in seinem Absorptionsspectrum

---

[1]) Stokes, Pogg. Ergänz. 4, pag. 177. 1854.

mehrere Absorptionsstreifen von sehr verschiedener Intensität. Man entwirft am besten auf der vertikalen Wand eines mit der Lösung gefüllten Glasgefässes ein Spectrum und kann dann auf der Vorderwand die Maxima des Fluorescirens, auf der Oberfläche die Maxima der Absorption deutlich verfolgen und ihre Coincidenz mit einem Blick übersehen.

14) Die STOKES'sche Regel dagegen hat Jahre lang eine Anzahl geschickter Beobachter trotz der Benutzung der verschiedensten Beobachtungsmethoden zu den widersprechendsten Resultaten geführt. Auf der einen Seite trat HAGENBACH für die unbedingte ausnahmslose Gültigkeit der STOKES'schen Regel ein; auf der anderen Seite stellten LOMMEL, LUBARSCH, BRAUNER ihre Richtigkeit für eine Anzahl von Körpern in Abrede. Ja LOMMEL glaubte auf Grund seiner Versuche sogar für eine Anzahl Substanzen (er nennt sie Körper 1. Klasse) annehmen zu dürfen, dass bei ihnen jeder der Erregung fähige Strahl das Fluorescenzspectrum in seiner vollen Ausdehnung erzeugt, wie wir es in weissem Lichte erhalten.

Referent war durch Versuche, die er an Magdalaroth, Eosin und Fluoresceïn mit allen Vorsichtsmaassregeln anstellte, zu der Ueberzeugung gelangt, dass hier allerdings das STOKES'sche Gesetz seine Gültigkeit verliert und konnte auch Herrn Prof. HAGENBACH durch einige gemeinsam mit ihm ausgeführte Versuche zur gleichen Ansicht bringen.

Mit HAGENBACH muss ich aber andererseits daran festhalten, dass für die Behauptung LOMMEL's, dass für seine Körper 1. Klasse jeder erregungsfähige Strahl das ganze Fluorescenzspectrum erzeugt, die von ihm gegebenen experimentellen Beweise unzulänglich sind. Sowohl nach den Versuchen von HAGENBACH wie nach meinen eigenen muss man viel mehr dagegen Einspruch erheben. Bezüglich weiterer Details muss auf die einschlägigen Publicationen verwiesen werden[1]).

Alle Körper, welche die STOKES'sche Regel verletzen, haben eins gemeinsam. Sie sind lebhaft gefärbt und besitzen stets mindestens einen kräftigen Absorptionsstreifen, der auch in dünnen Schichten resp. in verdünnten Lösungen sichtbar bleibt. In der Nähe dieses Streifens ist bei genügender Concentration die Dispersion anomal und nur solche Erregerstrahlen verstossen gegen das STOKES'sche Gesetz, welche dem Absorptionsstreifen oder seiner nächsten Umgebung angehören. Ausser den drei oben erwähnten Farbstoffen gehören dahin untern andern nach den Beobachtungen LOMMEL's Chlorophyll, Purpurin, Uranglas, Orseille, Lackmus, Resorcinblau, Resorcinroth.

Alle Körper aber — und ihre Zahl ist bei weitem die grössere — welche keine intensiv ausgeprägte selective Absorption zeigen, befolgen ohne Ausnahme die STOKES'sche Regel.

15) Neben den beiden Gesetzen, welche in den vorhergehenden Nummern eingehender besprochen sind, verdient eine Reihe von Sätzen Erwähnung, welche nur ein qualitatives Resultat enthalten oder nur eine eng begrenzte Gültigkeit beanspruchen können. Nach allem, was wir bisher beobachtet haben, sind die Fluorescenzerscheinungen von einer grossen Zahl von Factoren abhängig. Wir

---

[1]) LOMMEL, POGG. Ann. 143, pag. 26. 1871; POGG. Ann. 159, pag. 514. 1876. WIED. Ann. 3, pag. 113. 1878; WIED. Ann. 8, pag. 244. 1879; WIED. Ann. 10, pag. 640. 1880. — LUBARSCH, POGG. Ann. 153, pag. 420. 1874; WIED. Ann. 6, pag. 248. 1879; WIED. Ann. 9, pag. 665. 1880; WIED. Ann. 11, pag. 46. 1880. — BRAUNER, Wiener Anzeiger 1877, pag. 178. — HAGENBACH, POGG. Ann. 146, pag. 65. 1872; WIED. Ann. 8, pag. 369. 1879. WIED. Ann. 18, pag. 45. 1883. — STENGER, WIED. Ann. 28, pag. 202. 1886. — WESENDONK, WIED. Ann. 26, pag. 521. 1885.

sind aber bisher nicht im Stande, diese Abhängigkeit näher zu kennzeichnen und müssen uns deshalb vorläufig mit oft höchst unbefriedigenden und unbestimmt klingenden Regeln begnügen.

16) Zunächst haben wir in Bezug auf die Beziehung von Fluorescenz und Absorption zu einander gesehen, dass unmittelbar aus dem Princip der Erhaltung der Energie folgt, dass jeder Fluorescenzerregung nothwendig eine Absorption vorangehen muss. Fast ausnahmslos hat sich auch das Umgekehrte als richtig erwiesen, dass bei fluorescirenden Körpern im Allgemeinen jeder Absorption auch Fluorescenz entspricht. Unterliegen, wie bei Thiomelansäure, fast alle Strahlen der Absorption, so zeigen sie sich ausnahmslos der Fluorescenzerregung fähig. Fast immer entspricht einem intensiven Absorptionsstreifen auch ein Maximum des Fluorescirens. Weil alle fluorescirenden Körper die ultravioletten Strahlen in einer gewissen Ausdehnung absorbiren, fluoresciren sie alle im Ultraviolett.

Aber eine Nothwendigkeit liegt offenbar nicht vor, dass jeder Absorption auch Fluorescenz entsprechen sollte und in der That sind eine Anzahl von derartigen Ausnahmefällen uns bekannt. Entweder hat man es dann mit einem Gemisch fluorescirender und nicht fluorescirender Körper zu thun [wässrige Lackmuslösung, Lösung von Purpurin in Soda[1])], oder die Energie des absorbirten Lichtes wird anderweitig z. B. zur Temperaturerhöhung verwendet (salpetersaures Uranoxyd[1]) fest oder in wässriger Lösung).

Wenn man ferner einen Körper, welcher in seinem Absorptionsspectrum scharf begrenzte Absorptionsstreifen besitzt, in verschiedenen Lösungsmitteln auflöst, so zeigt sich in vielen Fällen eine bemerkenswerthe Gesetzmässigkeit. Wie bekannt, rührt ihre Formulirung von KUNDT[2]) her. »Hat ein farbloses Lösungsmittel ein beträchtlich grösseres Brechungs- und Dispersionsvermögen als ein anderes, so liegen die Absorptionsstreifen einer in den Medien gelösten Substanz bei Anwendung des ersten Mittels dem rothen Ende des Spectrums näher als bei Benutzung des zweiten.«

Danach muss man erwarten, dass auch die Maxima des Fluorescirens entsprechende Verschiebungen erleiden werden, wenn man denselben fluorescirenden Körper in verschiedenen Flüssigkeiten löst. Wie zu erwarten, findet in allen Fällen, wo eine Verschiebung eines Absorptionsstreifens eintritt, gleichzeitig eine entsprechende Verschiebung des Maximums des Fluorescirens statt.

Aber nicht in allen Fällen findet man die KUNDT'sche Regel bestätigt; es finden sich einzelne Ausnahmen vor. Referent[3]) hat auf eine Erklärung derartiger Anomalieen aufmerksam gemacht, welche in beschränktem Umfange schon in der Spectralanalyse benutzt wurde und durch eine Reihe von Beobachtungen sich stützen lässt. Danach ist das Spectrum eines Körpers durch seine chemische Zusammensetzung allein nicht bestimmt, sondern hängt wesentlich auch davon ab, ob die physikalisch in Betracht kommende Molekel mit den chemischen sich deckt oder ein Multiplum davon ist. Gerade in Lösungen ist nun wahrscheinlich fast immer der kleinste physikalische Theil noch ein Aggregat mehrerer Molekeln in chemischem Sinne genommen. Um die KUNDT'sche Regel als allgemein gültiges Gesetz aufzustellen, wird es vermuthlich genügen, ihre Anwendbarkeit stets auf solche Lösungsmittel zu beschränken, in welchen die physikalische Molekel des gelösten Körpers die gleiche ist.

---

1) HAGENBACH, POGG. Ann. 146, pag. 252, 379 u. 396. 1872.

2) KUNDT, POGG. Jahresb., pag. 615. 1874; WIED. Ann. 4, pag. 34. 1878.

3) STENGER, WIED. Ann. 33, pag. 577. 1888.

17) Die Spectra des Fluorescenzlichtes bei Erregung mit weissem Lichte zeigen in ihrer Zusammensetzung eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit. Die geringste Ausdehnung hat wohl das Spectrum des Chlorophylls, welches sich fast ausschliesslich aus rothem Lichte aufbaut. Fast alle Farben umfasst dagegen das Spectrum der Thiomelansäure. Manche Spectren sind continuirlich, andere zeigen Maxima und Minima der Helligkeit. Eine gesetzmässige Beziehung zu den eventuell im Absorptionsspectrum vorhandenen Maximis und Minimis hat sich aber im letzteren Falle nicht ergeben.

18) Einfluss des Lösungsmittels auf das Fluorescenzspectrum.

Viel Positives lässt sich darüber zur Zeit nicht aussagen; mitunter ist ein Einfluss vorhanden, mitunter nicht. Salpetersaures Chrysanilin in Aether und Schwefelsäure, ätherischer und alkoholischer Kienrussauszug, alkoholische und wässrige Lösung von Fraxin und Aesculin verhalten sich gleich. Häufiger tritt hingegen ein Einfluss des Lösungsmittels auf die Maxima im Spectrum des Fluorescenzlichtes hervor. Besonders in Fällen, wo chemisch gut definirte Körper in verschiedenen Lösungsmitteln unter Bedingungen zur Untersuchung kommen, wo chemische Einflüsse nicht in Wirksamkeit treten, zeigt sich meist den Regeln von KUNDT und STOKES entsprechend, dass das Helligkeitsmaximum im Fluorescenzlichte um so weiter nach Roth sich verschiebt, je grösser Brechungs- und Dispersionsvermögen des Lösungsmittels ist. Die Ausnahmen, welche man findet, werden wie die in No. 16 besprochenen zu erklären sein.

19) Einfluss des Aggregatzustandes[1].

Auch hier waltet eine grosse Mannigfaltigkeit. Es giebt Körper, die in festem Zustande stark fluoresciren, gelöst dagegen gar nicht (Baryumplatincyanür). Andere fluoresciren kräftig in festem Zustande, gelöst nur in geringem Grade (salpetersaures Uranoxyd); wieder andere fluoresciren fest und in Lösung stark (Malzzucker, Anthracen, Curcumafarbstoff). Umgekehrt fluorescirt stark in Lösung, schwach in festem Zustande Aesculin, schwefelsaures Chinin. Endlich gar nicht fluoresciren in Pulverform Magdalaroth (Naphtalinroth), Eosin, Fluorescein, Resorcinroth, Resorcinblau, dagegen sehr intensiv in Lösung.

20) Eine interessante Gruppe unter den fluorescirenden Körpern bilden die Platinocyanmetalle[2]). Ihre Fluorescenzerscheinungen sind sehr mannigfaltig, weil jedes Salz mehrere Hydrate bildet, die sich in Bezug auf Absorption und Fluorescenz von einander unterscheiden. Fast alle haben sie ausserdem, wie auch die am Schluss der vorigen Nummer erwähnten organischen Farbstoffe, sehr schöne Oberflächenfarben. Besonders auffällig ist nach LOMMEL[3]) das Verhalten des Magnesiumplatincyanürs.

Die Krystalle bilden quadratische Säulen, auf den Seitenflächen zeigen sie lebhaften, grünen, senkrecht zur Säulenaxe polarisirten Metallglanz, auf den Endflächen dagegen senkrecht zur Reflexionsebene polarisirten violettblauen Schiller. Sie sind ferner dichroitisch, der ordinäre Strahl ist hell carminroth, der extraordinäre dunkel blutroth. In dünnen, senkrecht zur Prismenaxe geschnittenen Platten zeigen sie im Gelbgrün einen scharfen Absorptionsstreifen. Die Fluorescenz des Magnesiumplatincyanürs wird am besten beobachtet, indem man mit Sonnenlicht erregt, welches durch blaues Glas gegangen ist; der Krystall leuchtet dann prächtig gelbroth.

---

[1]) HAGENBACH, POGG. Ann. 146, pag. 535. 1872.

[2]) HAGENBACH, POGG. Jubelbd., pag. 303. 1874.

[3]) LOMMEL, WIED. Ann. 8, pag. 634. 1879.

Bei Betrachtung des von einer Seitenfläche ausgestrahlten Fluorescenzlichtes durch ein Nicol erscheint es orangegelb, wenn die Polarisationsebene des Nicols senkrecht zur Säulenaxe ist, dagegen scharlachroth, wenn sie parallel zur Säulenaxe ist, ein Beweis, dass im Gegensatz zu allen bis dahin untersuchten fluorescirenden Körpern das Fluorescenzlicht des Magnesiumplatincyanürs polarisirt ist.

Erregt man mit Licht, dessen Polarisationsebene senkrecht zur Krystallaxe ist, so strahlen die Seitenflächen orangegelbes Fluorescenzlicht aus, dagegen scharlachrothes, wenn das einfallende Licht parallel zur Säulenaxe polarisirt ist. Dreht man den Nicol aus der ersten in die zweite Stellung, so sieht man die gelbe Fluorescenz in die rothe sich umwandeln. Die Untersuchung des Fluorescenzlichtes in den beiden Hauptstellungen des Nicols mit einem zweiten polarisirenden Prisma zeigt, dass das orangegelbe Licht senkrecht, das scharlachrothe parallel der Säulenaxe polarisirt ist.

Fällt dagegen ein horizontales Lichtbündel auf eine Basisfläche und zwar zunächst senkrecht, so ist das Fluorescenzlicht scharlachroth und unpolarisirt. Ist ferner das einfallende Licht horizontal polarisirt und dreht man den Krystall aus der Anfangslage um eine verticale Axe, so dass das erregende Licht unter mehr und mehr wachsender Incidenz die Basisfläche trifft, so ist die Fluorescenzfarbe unverändert das gleiche Scharlachroth. Führt man dagegen die gleiche Manipulation aus, wenn das einfallende Licht vertical polarisirt ist, so zieht sich die Farbe des Fluorescenzlichtes mehr ins Gelbe.

Wenn man alle diese Beobachtungen zusammenfasst, so ergiebt sich das Resultat: Die Aendeiung der Fluorescenzfarbe ist bedingt durch die Aenderung des Winkels, welchen die Normale der Polarisationsebene mit der Krystallaxe einschliesst.

Vermuthlich werden ähnliche Erscheinungen auch an andern Platincyanmetallen vorhanden sein, wenn auch in geringerem Grade.

21) Einige quantitative Versuche über die Helligkeit des Fluorescenzlichtes rühren von E. Wiedemann[1]) her. Danach leuchtet im mittleren Grün eine Lösung von 0·01 *grm* Fluoresceïn in 625 *ccm* Wasser etwa 36 Mal so stark, als hellrothleuchtendes Platinblech. Ferner verhält sich die Helligkeit des nach allen Seiten ausgestrahlten grünen Fluorescenzlichtes für dieselbe Lösung von Fluoresceïn zu dem grünen Theil des erregenden Lichtes zwischen denselben Wellenlängen wie 1 : 300.

22) Nach demselben Beobachter ergaben Versuche mit Lösungen von Eosin und Magdalaroth in Alkohol auch oberhalb der kritischen Temperatur sehr deutliche Fluorescenz.

23) Die meisten Substanzen, welche in Lösung fluoresciren, behalten diese Eigenschaft bei und zwar in unverminderter Stärke, wenn man damit Lösungen von Gelatine[2]), Gummi arabicum, Stärke, Kleister[3]) versetzt und dann erstarren lässt. Beispielsweise seien erwähnt: Magdalaroth, Fluoresceïn, Eosin, Aesculin, Chininsulfat. Das Absorptionsspectrum, welches solche Lamellen zeigen, stimmt seinem Charakter nach völlig mit dem der Lösungen[4]) überein. Erzeugt man dagegen dünne Schichten derselben organischen Farbstoffe, indem man eine alkoholische Lösung auf warmen Glasplatten zum Verdampfen bringt, so erhält

1) E. Wiedemann, Verhandlungen der physik. medic. Societät. Erlangen 1887.

2) E. Wiedemann, Verhandlungen der physik. medic. Societät. Erlangen 1887.

3) Stenger, Wied. Ann. 33, pag. 583. 1888.

4) Stenger, Wied. Ann. 33, pag. 583. 1888.

man meist ein ganz anderes Absorptionsspectrum[1]). Auch hier liefern die am Schlusse von No. 16 gegebenen Andeutungen eine Erklärung dieser Differenz in einfachster Weise. In der Gelatinelamelle ist die Molekularaggregation die gleiche wie in der Lösung und daher auch der Charakter des Absorptionsspectrums. Der Farbstoff in seiner gewöhnlichen festen Form dagegen ist aus complicirteren Aggregaten aufgebaut und zeigt daher ein anderes Absorptionsspectrum. Als an ein uns längst geläufiges Beispiel ähnlicher Art sei an das Spectrum des Jods in Gasform und in festem Zustande erinnert. Joddampf zeigt eine grosse Zahl seiner Linien von Roth bis Violett, festes Jod dagegen nichts als eine theilweise Auslöschung aller Strahlen des Spectrums.

Theoretisches über die Fluorescenzerscheinungen.

24) Eine Reihe von Sätzen, welche uns die Beobachtung der Fluorescenzerscheinungen an Flüssigkeiten ergeben hat, lässt sich, wie LOMMEL[2]) gezeigt hat, aus theoretischen Ueberlegungen herleiten, ohne dass man über die letzten Ursachen und den eigentlichen Mechanismus der Fluorescenz sich eine bestimmte Anschauung bildet. Das Fluorescenzlicht kommt nicht nur von der Oberfläche des Körpers, sondern auch aus seinem Innern. LOMMEL's Ausgangspunkt ist daher ein Volumenelement im Innern der fluorescirenden Substanz. Von dem erregenden Lichte, das zu diesem Volumenelement gelangt, wird ein bestimmter Bruchtheil absorbirt. Ein Theil der so dem Element zugeführten Energie wird zur Erzeugung von Fluorescenzlicht, der Rest zur Leistung innerer Arbeit oder zur Erwärmung verbraucht. LOMMEL macht nun die Hypothese, dass die Menge des Fluorescenzlichtes, welches ein Volumenelement ausstrahlt, dem Betrag des absorbirten Lichtes proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor α soll ferner mit wachsender Concentration stetig abnehmen. Aus diesen Prämissen lassen sich dann unter Berücksichtigung der Absorption, welche die Lösung auf ihr eigenes Fluorescenzlicht ausübt, die folgenden Resultate entwickeln, welche aber, das ist besonders zu beachten, nichts mit der Frage zu thun haben, wie die Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes von der Wellenlänge des Erregers abhängt, mit einem Worte nichts mit der STOKES'schen Regel. Es sind ferner alle Fälle ausgeschlossen, wo wie bei Flussspath oder salpetersaurem Uranoxyd Absorption eintreten kann, ohne dass eine entsprechende Fluorescenz existirt. Um uns kurz fassen zu können, wollen wir ein Spectrum, das behufs Erzeugung von Fluorescenz auf die Grenzfläche der Flüssigkeit geworfen wird, das fluorescirende Spectrum, dagegen das Spectrum des erzeugten Fluorescenzlichtes Fluorescenzspectrum nennen.

a) Im fluorescirenden Spectrum entspricht jedem Maximum der Absorption ein an derselben Stelle gelegenes Maximum der Fluorescenz. Die Intensitätsunterschiede der Fluorescenzmaxima sind weniger schroff als die der Absorptionsmaxima, d. h. die schwächeren Maxima treten neben den stärkeren deutlicher im fluorescirenden Spectrum hervor, als im Absorptionsspectrum.

b) Mit wachsender Concentration nimmt die Intensität des Fluorescenzlichtes anfangs bis zu einem Maximum zu, dann wieder ab. Sehr deutlich kann man die Erscheinung z. B. bei Lösungen von Fluoresceïn und Magdalaroth in Alkohol beobachten.

c) Das Verhältniss des von einer oberflächlichen Schicht ausgesandten Fluo-

---

1) H. W. VOGEL, Berliner Monatsber. 1878, pag. 409.

2) LOMMEL, POGG. Ann. 160, pag. 75. 1877.

rescenzlichtes zu dem aus dem Innern kommenden wird mit wachsender Absorption grösser.

d) Die Farbenmischung des Fluorescenzlichtes ändert sich mit wachsender Concentration so, dass seine stärker absorbirbaren Bestandtheile gegen die minder absorbirbaren zurücktreten. So zeigt z. B. eine sehr verdünnte Lösung von Magdalaroth in Alkohol einen mehr gelben, eine stark concentrirte einen mehr rothen Farbenton im Fluorescenzlichte.

25) Ausserordentlich grossen Schwierigkeiten begegnet man aber, wenn man den eigentlichen Mechanismus der Fluorescenzerscheinungen im Einzelnen aufzuklären versucht. In groben Umrissen dürften heute die folgenden Anschauungen allgemein acceptirt sein. Licht wird in letzter Instanz stets durch schwingende Bewegungen veranlasst, welche die Molekeln des leuchtenden Körpers ausführen und in unbekannter Weise auf den Aether übertragen. Jeder fluorescirende Körper verhält sich, so lange er dem Einfluss des thätigen Lichtes unterworfen ist, wie ein selbstleuchtender. Man wird daher den Vorgang sich so vorzustellen haben, dass das einfallende Licht einen Theil seiner Energie dazu abgiebt, die Molekeln in Schwingungen zu versetzen, und dass diese ihrerseits rückwärts neue Vibrationen im Aether veranlassen, die uns als Fluorescenzlicht zur Erscheinung kommen.

Dieselbe Fluorescenz finden wir oft bei den Lösungen desselben Körpers in den verschiedensten Flüssigkeiten. Chlorophyll zeigt seine blutrothe Fluorescenz in Lösungen in Alkohol und Aether, Benzol und Schwefelkohlenstoff. Magdalaroth entwickelt seine prächtige orangegelbe Fluorescenz in Alkohol und Aceton, in Essigsäure und Chloroform. Ja manche Substanzen fluoresciren fest und in Lösung gleich, wie Curcumafarbstoff, Anthracen, Malzzucker. Endlich fluoresciren sogar die Krystalle von salpetersaurem Uranoxyd, wie ihre Lösung, wenn auch mit anderer Intensität. Für alle diese Fälle wird also die Fluorescenz im Gegensatz zur Doppelbrechung, zu den Polarisationserscheinungen im Wesentlichen ein Vorgang sein, der sich innerhalb der Molekel abspielt und nicht vom Aufbau des Körpers aus Molekeln bedingt sein wird. Nicht für alle Fälle kommt man aber mit dieser Anschauung zum Ziel. So fluoresciren die verschiedensten Platincyanmetalle[1]) zum Theil sehr intensiv, aber niemals in Lösung, sondern nur in Krystallform. Spricht schon dieses Factum dafür, dass hier wesentlich der Aufban der Krystalle aus ihren Molekeln die Veranlassung der Fluorescenz bildet, so wird man fast mit Gewissheit zu diesem Schlusse gedrängt durch den Umstand, dass bei dieser Körperklasse das Fluorescenzlicht polarisirt ist (vergl. No. 20), und dass unter Umständen das erregte Fluorescenzlicht seine Farbe ändert, wenn sich der Polarisationszustand des erregenden Lichtes ändert.

Umgekehrt fluoresciren aber viele Farbstoffe (als Beispiele seien nur die schon oft erwähnten angeführt, Magdalaroth, Eosin, Fluoresceïn) als feste Pulver keine Spur, sehr kräftig aber in Lösung. Im Anschluss an die Erörterung in No. 20 dürfte das Fehlen der Fluorescenz bei den festen Pulvern darauf zurückzuführen sein, dass hier die physikalische Molekel ein Complex mehrerer chemischen Molekeln ist. Ein Körper von gegebener chemischer Zusammensetzung wird um so leichter fluoresciren, je einfacher seine physikalische Molekel[2]) ist.

[1]) HAGENBACH, POGG. Jubelbd., pag. 303. 1874. — LOMMEL, WIED. Ann. 8, pag. 634. 1879. — STOKES, POGG. Ann. 96, pag. 542. 1855.

[2]) STENGER, WIED. Ann. 33, pag. 577. 1888.

Man wird also das Resultat dieser Betrachtungen dahin zusammenfassen können, dass die Fluorescenz in den einfachsten Fällen abhängt allein von der chemischen Molekel, dass aber häufig deren Vereinigung zu physikalischen Molekelcomplexen und in den. exceptionellen Fällen, wie sie die Platincyanmetalle aufweisen, sogar die krystallinische Struktur von Einfluss ist.

Da wir nun heute nicht einmal eine genaue Kenntniss des Mechanismus der Lichtabsorption besitzen, erscheint um so mehr der Versuch einer Theorie der Fluorescenz vorläufig aussichtslos. Denn zu den Schwierigkeiten, welche das Verständniss der Absorption uns bisher unmöglich machen, kommen hier noch neue hinzu. Warum nicht alle absorbirenden Körper fluoresciren, warum ein Fluorescenzspectrum eine continuirliche Folge verschiedener Farben enthält, warum insbesondere die Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes variirt, wenn man die Substanz verschieden brechbares Erregerlicht absorbiren lässt und was der Sinn der für die meisten fluorescirenden Körper streng gültigen Stokes'schen Regel ist, lässt sich zur Zeit nicht sagen.

Der einzige Versuch, mit mathematischem Apparat die Fluorescenzerscheinungen theoretisch zu begründen, ist von Lommel[1]) gemacht worden. Die Beweiskräftigkeit seiner Deductionen ist indess keine unbestrittene, dazu kommt, dass auch die Resultate der Theorie theilweise mit der Erfahrung nicht in Einklang stehen. In Bezug auf Details muss auf die Controverse zwischen Wüllner und Lommel[2]), bezüglich der experimentellen Differenzen auf Arbeiten von Hagenbach[3]) und den Referenten[4]) verwiesen werden (vergl. auch No. 14, 17).

Anwendungen der Fluorescenzerscheinungen.

26) Zunächst wird die Analyse eines vorgelegten Körpers mit Hilfe seines Absorbtionsspectrums in allen denjenigen Fällen, wo gleichzeitig Fluorescenz vorhanden ist, eine wirksame Unterstützung durch die Beobachtung der Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes erfahren. Zweitens kann man stark verdünnte Lösungen fluorescirender Körper, wie z. B. von schwefelsaurem Chinin, Fluoresceïn oder Aesculin mit Erfolg dazu benutzen, den Gang der Lichtstrahlen bei Brechung und Reflexion zu veranschaulichen[5]). Die Lösung muss zu dem Zwecke in einem mit ebenen Wänden versehenen Glasgefässe enthalten sein und in starker Verdünnung, damit auch tief im Innern die Fluorescenz noch kräftig erregt wird. Am besten beseitigt man die stark leuchtenden Strahlen der erregenden Lichtquelle mit Hilfe eines möglich ebenen dunkelblauen Glases. Das durch eine nicht zu kleine Base gebildete gebrochene Bündel lässt sich mit seiner Brennfläche auf diese Weise ausserordentlich einfach und doch höchst instructiv darstellen, weil das Fluorescenzlicht continuirlich den Strahlengang darstellt und weil die Helligkeitsabstufungen der verschiedenen Theile des Lichtbündels durch die verschiedene Intensität des Fluorescenzlichtes getreu wiedergegeben werden.

27) Von Wichtigkeit ist endlich die Fluorescenz für die Untersuchung des ultravioletten Theils von Emissions- oder Absorptionsspectren.

---

[1]) Lommel, Wied. Ann. 3, pag. 251. 1878.

[2]) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Aufl. § 54; Lommel, Wied. Ann. 25, pag. 643. 1885.

[3]) Hagenbach, Wied. Ann. 8, pag. 393. 1879.

[4]) Stenger, Wied. Ann. 28, pag. 215. 1886.

[5]) Stokes, Pogg. Ergänz.-Bd. 4, pag. 302. 1854.

Nach den Beobachtungen von STOKES'[1]) und v. HELMHOLTZ's[2]) gelingt es, direct mit dem Auge die ultraviolette Strahlung zu beobachten. Sie zeigt dann eine Farbe, welcher das Leuchtende des Blaus und die Röthe des Violetts fehlt; am nächsten kommt sie nach STOKES der Farbe der Coralle des Lavendels, während v. HELMHOLTZ sie als tief indigblau bei geringer, als weisslich blau bei grösserer Intensität bezeichnet.

Es mag in der That für verschiedene Augen sowohl der Umfang der ultravioletten Strahlen variiren, den sie percipiren, als auch die Farbe, in der sie erscheinen.

Viel grössere Sicherheit in der Beobachtung gewähren daher fluorescirende Körper, welche man zum Auffangen des Spectrums benutzt (wie bereits oben bemerkt, wird jeder fluorescirende Körper, allerdings in verschiedenem Grade, durch die ultravioletten Strahlen erregt). In hohem Grade ist es dabei zweckmässig, den dem sichtbaren Spectraltheil eigenen Glanz möglichst abzuschwächen. Man wird daher das Spectrum vorzugsweise auf einem durchsichtigen sei es festen oder flüssigen Körper auffangen, nicht auf einem undurchsichtigen mit fluorescirenden Flüssigkeiten getränkten oder mit pulverförmigen fluorescirenden Substanzen bedeckten Schirm. Begreiflicherweise treten obendrein die hellen oder dunklen Spectrallinien auf der nicht völlig ebenen Oberfläche eines Papiers weniger scharf hervor, als auf der ebenen Fläche eines Uranglases oder der Wand eines mit einer fluorescirenden Flüssigkeit gefüllten planparallelen Gefässes.

In dieser Weise angewandt, vermag die Fluorescenz uns offenbar Aufschluss über den Charakter eines zur Prüfung vorliegenden ultravioletten Spectrums zu geben, aber nicht eine wirkliche Ausmessung. Diese umfassendere Aufgabe soll das von SORET[3]) angegebene fluorescirende Ocular lösen. Es befindet sich zu dem Zwecke im Focus der Objektivlinse des Beobachtungsfernrohres am Spectrometer eine fluorescirende Lamelle. Das auf dieser entstehende reine Spectrum wird mit einem Ocular beobachtet, dessen Axe gegen die des Fernrohres geneigt ist, um diffuses Licht unschädlich zu machen. Die stark leuchtenden blauen Strahlen werden mittelst eines blauen Kobaltglases beseitigt. Für die Strahlen von H bis N empfiehlt SORET eine dünne Schicht von Aesculinlösung, für die Strahlen von N bis zu den äussersten erkennbaren Uranglas.

SORET hat mit einem solchen Ocular eine Reihe von Beobachtungen angestellt. Im Uebrigen aber hat man von seiner Anwendung wenig gehört. In Folge dessen lässt sich ein sicheres Urtheil über seine Zweckmässigkeit nicht abgeben, doch scheint dem Referenten eine Bemerkung, welche v. HELMHOLTZ[4]) über die Einschaltung einer fluorescirenden Lamelle in das Fernrohr des Spectralapparats macht, auf das geneigte SORET'sche Ocular in derselben Weise zu passen.

Das ultraviolette Spectrum lässt sich danach in seiner ganzen Ausdehnung direct mit dem Auge beobachten. Wider Erwarten trat keine Zunahme in der Helligkeit der ultravioletten Linien, sondern eher eine geringe Abschwächung ein, als eine dünne Schicht von schwefelsaurem Chinin an den Ort im Fernrohr gebracht wurde, wo die Objektivlinse das reelle Bild des Spectrums entwirft. Wie

---

[1]) STOKES, POGG. Ergänz.-Bd. 4, pag. 339. 1854.

[2]) v. HELMHOLTZ, POGG. Ann. 94, pag. 205. 1855.

[3]) SORET, Archives des sciences physiques et naturelles, Bd. 49, pag. 338. 1874; Bd. 57, pag. 319. 1876.

[4]) HELMHOLTZ, Optique physiologique, pag. 352.

lässt sich diese Beobachtung mit der Thatsache in Einklang bringen, dass das Fluorescenzlicht zweifellos eine viel grössere Wirkung auf das Auge ausübt als die ultravioletten Strahlen direkt?

Das Objektiv des Fernrohrs lässt nur einen schmalen Lichtkegel passiren; dieser aber dringt auch fast vollständig durch die Pupille ins Auge ein und wirkt auf die Retina, so lange keine fluorescirende Lamelle eingeschaltet ist. Fällt aber das Spectrum auf die Schicht schwefelsauren Chinins, so ruft es allerdings dort hell leuchtende Fluorescenz hervor. Aber weil ein fluorescirender Körper, wie ein selbstleuchtender, Licht allseitig verbreitet, gelangt nur ein kleiner Theil dieser lebhaften Strahlung ins Auge des Beobachters und dadurch wird der erlangte Vortheil zu einem problematischen.

Wie ferner SCHÖNN[1]) angiebt, ist er zu besseren Resultaten bei nicht geneigtem Ocular gekommen, wenn er das reelle Spectrum des Objektivs auf einer runden Scheibe aus sehr feinem, mit schwefelsaurem Chinin getränkten Pauspapier fallen liess.

Da obendrein die photographische Methode der Untersuchung ultravioletter Spectren (vergl. den Artikel »chemische Wirkung des Lichts«) sich mehr und mehr vervollkommnet hat in den Händen einer ganzen Reihe geschickter Experimentatoren, dürfte ihre Ueberlegenheit über die Methode des fluorescirenden Oculars kaum mehr zweifelhaft sein. Beide Methoden reichen übrigens so weit ins Ultraviolett hinein, als die Durchsichtigkeit der Quarzprismen und Linsen es zulässt.

STENGER[2]).

Phosphorescenz.

Das Leuchten des Phosphors im Dunkeln, durch eine langsame Verbrennung bewirkt, ist die Veranlassung gewesen, einer ganzen Reihe von Leuchterscheinungen, deren Ursache sehr verschieden ist, den Namen Phosphorescenz zu geben. E. WIEDEMANN[3]) hat eine neue Bezeichnung vorgeschlagen, die auf der Entstehung des Leuchtens gegründet ist. WIEDEMANN geht davon aus, dass die Lichtentwicklung eines Körpers normal sei, wenn durch Wärmezufuhr die Wärmebewegungen so hoch gesteigert werden, dass sie zu Lichtschwingungen Veranlassung geben. Für diese normale Lichtentwickelung gilt der KIRCHHOFF'sche Satz über das Verhältniss von Emission und Absorption. Ausser dieser normalen giebt es aber noch eine andere Lichtentwickelung, bei der ohne entsprechende Temperatursteigerung durch äussere Ursachen ein Leuchten erzeugt wird. Diese Lichterregung, die im Gegensatz zur normalen steht, nennt WIEDEMANN Luminescenz, und Körper, die in dieser Weise leuchten, luminescirende. Die weiteren Bezeichnungen schliessen sich an diesen Namen an je nach der näheren Ursache des Leuchtens und zwar in folgender Weise:

---

[1]) SCHÖNN, WIED. Ann. 9, pag. 485. 1880.

[2]) Die Correctur des vorstehenden Artikels ist nach dem Tode des Verfassers durch den Unterzeichneten ausgeführt. A. WINKELMANN.

[3]) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 34, pag. 446. 1888.

Ursache der Erregung.	Bezeichnung.
Bestrahlung	Photoluminescenz. Diese zerfällt in zwei Abtheilungen: Fluorescenz und Phosphorescenz, je nachdem das Licht nur so lange dauert, wie die Bestrahlung, oder länger.
Elektrische Entladungen .	Elektroluminescenz.
Chemische Processe . .	Chemiluminescenz.
Schwache Erwärmung . .	Thermoluminescenz.
Reibung	Triboluminescenz.
Krystallisation	Krystalloluminescenz.

Ed. Becquerel[1]) unterscheidet fünf Arten von Phosphorescenz, die nach Wiedemann, wie eben angegeben, besonders zu bezeichnen sind, und zwar:

I. Phosphorescenz durch Erhöhung der Temperatur (Thermoluminescenz nach Wiedemann). — Gewisse Körper — dazu gehören Diamant und Flussspath — strahlen im Dunkeln Licht aus, sobald sie erwärmt werden; die Temperatur, bei der die Ausstrahlung beginnt, liegt weit unterhalb der Rothglühhitze. Es ist indess durch O. Fiebig[2]) nachgewiesen, dass die Wärme allein ohne vorherige Bestrahlung keine Phosphorescenz bewirkt, sondern dass die Wärme nur das Ausstrahlen des Lichtes nach der Insolation steigert. Wurden Leuchtsteine, die aufgehört hatten zu leuchten, erwärmt, so zeigten sie auf's Neue eine Lichterscheinung; dies ist in Uebereinstimmung mit den früheren Versuchen; nach dem Aufhören dieses Lichtes, im Dunkeln wieder erwärmt, war keine neue Lichterscheinung wahrzunehmen. Sobald aber der Leuchtstein nur kurze Zeit dem Tageslicht ausgesetzt war, trat das Licht wieder auf.

II. Phosphorescenz durch mechanische Einwirkung und durch Krystallisation (Triboluminescenz und Krystalloluminescenz nach Wiedemann). Zucker, im Dunkeln gestossen, leuchtet; Krystalle von salpetersaurem Uranoxyd leuchten im Dunkeln, wenn sie zerbrochen werden. Nach Rose[3]) tritt beim Krystallisiren der arsenigen Säure Leuchten ein. Kalium und Natrium phosphoresciren nach Phipson[4]) im Dunkeln auf einer frischen Schnittfläche; nach demselben Beobachter leuchtet flüssiges Silber im Moment des Erstarrens.

III. Phosphorescenz durch Elektricität (Elektroluminescenz nach Wiedemann). Gewisse Gase haben die Eigenschaft, nach Unterbrechung der elektrischen Entladung, die durch die Gase ging, für eine kurze Zeit leuchtend zu bleiben. Die Entdeckung dieser Erscheinung rührt von Geissler[5]) in Bonn her, der zur Hervorbringung derselben in die nach ihm benannten Röhren wasserfreie Schwefelsäure brachte. Die Röhren füllen sich während der Entladung des Stromes mit einem neblig weissen Licht, welches auch nach der Entladung noch einige Zeit fortleuchtet. Beleuchtet man die Röhren mit elektrischem Licht, ohne dass der Strom die Röhre durchsetzt, so tritt das Leuchten nicht ein. Die Erklärung dieser Erscheinung ist besonders von Morren[6]) und später von Sarasin[7]) ver-

---

1) Ed. Becquerel, Ann. de chim. et de phys. III, sér. 55, pag. 1. 1859.

2) Fiebig, Pogg. Ann. 114, pag. 292. 1861.

3) Rose, Pogg. Ann. 52, pag. 443.

4) Phipson, Rep. of Brit. Assoc. XXVIII meeting, pag. 76. 1858.

5) Vergl. P. Riess, Pogg. Ann. 110, pag. 523. 1860.

6) Morren, Ann. de Chim. et de Phys. 4 sér. 4. pag. 293, 1864. Pogg. Ann. 127. pag. 643. 1866.

7) Sarasin, Pogg. Ann. 140, pag. 425. 1870.

sucht worden. Nach MORREN zeigt reiner Sauerstoff und reiner Stickstoff das Nachleuchten nicht; ein Gemisch von Sauerstoff und Stickstoff zeigt das Nachleuchten, wenn nicht zu wenig Stickstoff beigemengt ist; ein Zusatz von wenig Salpetersäure oder Kohlensäure oder Schwefelsäure lässt das Nachleuchten lebhafter hervortreten. Im letzteren Falle schrieb MORREN die Phosphorescenz einer Verbindung von der Zusammensetzung N_2O_3, $2SO_3$ zu. SARASIN bewies dagegen, dass reiner Sauerstoff das Nachleuchten zeigt, dass ferner auch sauerstoffhaltige Gase die Erscheinung entstehen lassen, dass dagegen ohne Gegenwart von Sauerstoff das Nachleuchten nicht auftritt. Die Erklärung der Phosphorescenz gründet SARASIN auf der Verbindung des durch den Strom erzeugten Ozons mit anderen Elementen. Der in der Röhre vorhandene Sauerstoff wird also durch den Strom zersetzt, es bildet sich Ozon; sobald der Strom aufhört, verbindet sich das Ozon wieder mit den anwesenden Elementen. Diese Rückverbindung geschieht mit grosser Energie und ist deshalb mit einer beträchtlichen Wärmeentwickelung verknüpft, die nun ihrerseits das Leuchten hervorbringt[1]). Es verdient bei dieser Gelegenheit erwähnt zu werden, dass nach CHAPPUIS[2]) das Leuchten des Phosphors auch durch die Gegenwart von Ozon bedingt ist. Phosphor leuchtet nämlich in reinem Sauerstoff nicht, wohl aber, wenn man etwas Ozon zuführt.

IV. Freiwillige Phosphorescenz (Chemiluminescenz nach WIEDEMANN); hierher gehört das Leuchten lebender Thiere und das Leuchten animalischer und vegetabilischer Substanzen vor der Fäulniss. Das Leuchten dieser Art beruht wahrscheinlich auf einem langsamen Oxydationsprocess. RADZISZEWSKI[3]) hat gezeigt, dass Sauerstoff für die Erscheinung wesentlich ist, indem in einer Wasserstoffatmosphäre sich kein Leuchten zeigte. Nach demselben Autor leuchtet Formaldehyd und Traubenzucker bei Einwirkung alkoholischer Kalilauge, wenn bei Sauerstoffzutritt erwärmt wird. Es ist möglich, dass einzelne leuchtende Thiere Formaldehyd abscheiden, das sich zu Ameisensäure oxydirt und hierdurch das Leuchten hervorruft.

Dass auch bei dem phosphorischen Leuchten des Fleisches vor der Fäulniss Sauerstoff nöthig ist, zeigte HANKEL[4]), indem er das Fleisch unter dem Recipienten einer Luftpumpe beobachtete. Wurde die Luft bis auf den Druck von 2 bis 3 *mm* verdünnt, so war das Leuchten sehr abgeschwächt; war der Recipient mehrere Male mit Kohlensäure ausgespült, so verschwand das Licht beim Evacuiren vollständig; sobald man aber Luft wieder eintreten liess, zeigte sich auch der frühere Lichtglanz. Bei der Untersuchung von leuchtendem Schweinefleisch, mit welchem unter anderem auch HANKEL experimentirt hatte, zeigte sich nach LASSAR[5]), dass das Licht von Micrococcen herrührt.

V. Phosphorescenz durch Bestrahlung (Photoluminescenz nach WIEDEMANN). Diese Art der Phosphorescenz ist am genauesten untersucht. Lässt man die weisslichen Pulver, welche man durch Glühen der alkalischen Erden (Kalk, Strontium und Baryt) mit Schwefel erhält, nur kurze Zeit vom Tageslicht oder noch besser vom direkten Sonnenlicht bescheinen, so leuchten dieselben im Dunkeln mit einem sanften, farbigen Licht Stunden- und zuweilen Tagelang fort. Ausser diesen künstlichen Phosphoren (auch Leuchtsteine genannt) giebt

---

1) Vergl. SCHULLER (Beibl. 5, pag. 666. 1881), welcher das Leuchten durch die Zersetzung erklärt.

2) CHAPPUIS, Bull. Soc. chim. 35, pag. 419. 1881.

3) RADZISZEWSKI, Compt. rend. 84, pag. 305. 1877. Ber. der chem. Ges. 10, pag. 321.

4) HANKEL, POGG. Ann. 116, pag. 62. 1862.

5) LASSAR, PFLÜG. Arch. 21, pag. 104. 1880.

es auch natürliche, von denen schon unter I. die Rede war; zu diesen natürlichen Phosphoren gehören der Diamant, der Kalkspath und bestimmte Varietäten von Flussspath, unter den letzteren ist besonders der unter dem Namen Chlorophon bekannte Flussspath von Nertschinsk zu nennen.

---

1) Die Farbe, mit welcher die künstlichen Phosphore leuchten, hängt wesentlich ab von der Art der Darstellung; bei gleicher chemischer Zusammensetzung ist die Farbe und die Intensität der künstlichen Phosphore je nach der physikalischen Beschaffenheit verschieden[1]). Als Beispiel führen wir nach BECQUEREL die Unterschiede an, welche die Farbe des Phosphorescenzlichtes beim Schwefelcalcium je nach der Form zeigt, in welcher der Kalk mit Schwefel zusammen erhitzt war.

Wurde mit Schwefel erhitzt,	so zeigte sich nach der Bestrahlung folgende Farbe:
Isländischer Doppelspath (sehr rein) . .	Orangegelb
Kalk aus Doppelspath	„ weniger lebhaft
Weisser Marmor von Carrara	Gelb, sehr schwach
Kalk aus weissem Marmor	„ „ „
Kalk aus Austernschalen	Gelb
Arragonit von Vertaison	Grün, mittlere Intensität
Kalk aus Arragonit	„ schwach
Faseriger Arragonit	Violett
Kalk aus faserigem Arragonit	Grün, sehr lebhaft.

Neben der Darstellungsart übt die Temperatur, bei welcher der Körper der Wirkung der Lichtstrahlen ausgesetzt wird, einen Einfluss auf die Farbe des Phosphorescenzlichtes aus. Für Schwefelstrontium wurde von BECQUEREL gefunden

Temperatur	— 20°	+ 20°	+ 40°	+ 70°	
Farbe des Phosphorescenzlichtes	Violett, sehr hell	Violettblau	Hellblau	Grün	
Temperatur	+ 100°	+ 200° ungefähr			
Farbe des Phosphorescenzlichtes	Gelb	Orange, das Licht ist sehr schwach.			

Bei anderen Substanzen ist die Aenderung der Farbe mit der Temperatur viel geringer; auch die Farbenfolge kann umgekehrt sein, sodass die Farbenfolge mit steigender Temperatur sich mehr dem brechbaren Ende des Spectrums nähert.

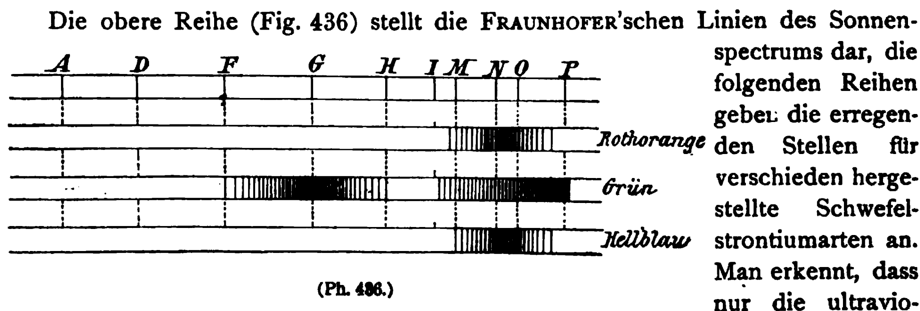
2) Die Phosphorescenz wird durch die absorbirten Strahlen erregt; Strahlen, welche von dem phosphorescirenden Körper nicht absorbirt werden, können auch keine Phosphorescenz erregen. Nach den Versuchen werden nur die brechbareren Strahlen des Lichtes — blau, violett, ultraviolett — von den Phosphoren, welche aus den alkalischen Erden gebildet werden, kräftig absorbirt, und daher sind auch nur diese Strahlen im Stande, Phosphorescenz zu erregen. Das von den Phosphoren ausgestrahlte Licht hat aber eine andere Farbe als das erregende, und zwar ist ersteres weniger brechbar als letzteres. Um zu untersuchen, welche Strahlen phosphorescenzerregend wirken,

---

[1]) BECQUEREL, Ann. de chym. et de phys. 3, sér. 55, pag. 5. — Eine ausführliche Darstellung der Phosphorescenz findet man in dem Werke von ED. BECQUEREL: »La Lumière, ses causes et ses effets«. Paris 1867. Ueher die Darstellung der Phosphore vergl. weiter: FORSTER, POGG. Ann. 133, pag. 97. 1868; T. P. DE SAGAN, W. F. MAC CORTY und E. PFEIFFER, DINGL. J. 234, pag. 303. 1879; A. VERNEUIL, Compt. rend., pag. 600. 1886.

kann man in verschiedener Weise verfahren. Man entwirft auf einem Schirm, dessen Oberfläche mit einem phosphorescirenden Pulver überzogen ist und der längere Zeit in einem dunklen Zimmer sich befunden hat, ein intensives Sonnenspectrum mit den FRAUNHOFER'schen Linien. Nach Abblendung des Sonnenlichtes zeigen jene Stellen des Schirmes das Phosphorescenzlicht, welche von den erregenden Strahlen getroffen wurden; hat man daher auf dem Schirme während der Beleuchtung die FRAUNHOFER'schen Linien mit einem Bleistift fixirt, so sieht man später unmittelbar, welche Farben erregend wirkten. Um die Wirkung der ultravioletten Strahlen genügend zur Geltung kommen zu lassen, ist es zweckmässig, Prismen und Linsen aus Quarz anzuwenden, weil Glas einen beträchtlichen Theil des ultravioletten Lichtes absorbirt. Das angegebene Verfahren kann zu einem Irrthum führen, wenn man nicht lange genug das Sonnenspectrum wirken lässt. Wie schon früher (s. pag. 487) erwähnt wurde, werden die Phosphore, die dem Licht ausgesetzt waren und dann im Dunkeln keine Phosporescenz zeigten, wieder leuchtend, wenn sie erwärmt werden. Da nun die wenig brechbaren Sonnenstrahlen (roth und ultraroth) eine starke erwärmende Wirkung besitzen, so können die Phosphore durch die im Sonnenspectrum vorhandene Wärme an bestimmten Stellen leuchtend werden, ohne dass sie an diesen Stellen durch erregende Strahlen getroffen werden. Das auf diese Weise zum Vorschein kommende Licht nimmt aber mit wachsender Zeit sehr schnell an Intensität ab, so dass sich leicht ein Irrthum vermeiden lässt. — Lässt man auf einen phosphorescirenden Körper, nachdem er durch Bestrahlung leuchtend gemacht ist, die Wärme einwirken, so wird das Phosphorescenzlicht stärker, und gleichzeitig von kürzerer Dauer, als ohne Erwärmung; durch die Erwärmung giebt der Körper den absorbirten Energievorrath in kürzerer Zeit und daher pro Zeitelement in grösserer Menge wieder ab. Diese Eigenschaft lässt sich ebenfalls, wie BECQUEREL gezeigt hat, dazu verwerthen, um zu untersuchen, welche Strahlen des Sonnenspectrums phosphorescirend wirken. Entwirft man auf einen vorher dem Tageslicht ausgesetzten und daher im Dunklen leuchtenden phosphorescirenden Schirm ein Sonnenspectrum, so löschen diejenigen Strahlen, welche selbst nicht erregend wirken, die Phosphorescenz allmählich aus. Es entsteht also auf hellem Grunde ein dunkles Bild des vorher anwesenden Sonnenspectrums, in welchem nur diejenigen Stellen hell sind, welche von erregenden Strahlen getroffen werden. BECQUEREL hat eine grosse Anzahl dieser Spectren beschrieben, von denen einige folgen mögen[1]).

Die obere Reihe (Fig. 436) stellt die FRAUNHOFER'schen Linien des Sonnenspectrums dar, die folgenden Reihen geben die erregenden Stellen für verschieden hergestellte Schwefelstrontiumarten an. Man erkennt, dass nur die ultravioletten Strahlen zwischen M und P bei dem ersten Präparat wirksam waren; dieses Präparat zeigt die Farbe rothorange. Das folgende Präparat zeigt eine grüne Färbung; die erregenden Stellen sind blauviolett und ultraviolett, ent-



(Ph. 436.)

[1]) BECQUEREL, l. c. pag. 59.

sprechend den Linien *F* bis *H* und *I* bis über *P* hinaus; die Strahlengruppe zwischen *H* und *I* ist unwirksam. Das letzte Präparat zeigt hellblau als Phosphorescenzfarbe, dasselbe wird erregt durch die Strahlen *M* bis *P*.

LOMMEL hat zur Beobachtung des Phosphorescenzlichtes ein Spectroskop mit phosphorescirendem Ocular angewandt[1]). Das Ocularrohr eines BUNSEN'schen Spectroskopes wurde an beiden Seiten in der Ebene, in welcher sich sonst das Fadenkreuz befindet, aufgeschlitzt; durch den so entstandenen Schlitz wurde ein rechteckiges Mikroskopdeckgläschen, nachdem die untere Hälfte desselben mit BALMAIN'scher Leuchtfarbe (Schwefelcalcium) bestrichen war, wie ein Schieber eingeschoben. Auch konnten fein gepulverte Substanzen, zwischen zwei Deckgläschen gehalten, benutzt werden. Die untere Hälfte des Spaltes am Spectroskop wurde durch ein Staniolblatt verschlossen und von der oberen Hälfte nur 4 *mm* freigelassen; hierdurch wird erreicht, dass in der unteren Hälfte des Gesichtsfelds ein Spectrum auf die dort befindliche Leuchtfarbe entworfen wird. Zwar trifft dies Licht die phosphorescirenden Scheiben auf der vom Auge abgewandten Seite, trotzdem sieht man, wenn das erregende Licht abgehalten wird, durch die dünne Schicht hindurch die bewirkte Erregung sehr gut. Da das Phosphorescenzlicht, nachdem es durch die brechbareren Strahlen erregt worden ist, durch die weniger brechbaren zunächst zu hellerem Aufleuchten gebracht und dann ausgelöscht wird, so entsteht auf dem schwach phosphorescirenden Grunde des auffangenden Oculars zuerst ein helles (positives) und später ein dunkles (negatives) Bild jener Theile des Spectrums, welche diese antachende und zugleich auslöschende Wirkung hervorbringen. Die Dauer des hellen (positiven) Bildes ist meist nur kurz und hängt von der phosphorescirenden Substanz ab. Bei der BALMAIN'schen Lichtfarbe dauert es mehrere Secunden; das dunkle (negative) Bild auf hellem Grund dauert dagegen stundenlang und kann desshalb mit aller Musse betrachtet werden. Dasselbe zeigt eine Eigenthümlichkeit, welche schon von BECQUEREL beobachtet wurde, und welche darin besteht, dass im ultrarothen Gebiet zwei dunkle Streifen auftreten entsprechend den Theilstrichen 51—57 und 63—72 in der Fig. 437.


(Ph. 437.)

Die Theilstriche der Scala sind dadurch charakterisirt, dass die *D*-Linie des Sonnenspectrums auf 100 fiel, die *A*-Linie auf 67, die *H*-Linie auf 212. Man könnte glauben, dass die erwähnten beiden dunklen Bänder einer Erhöhung der Wärmestrahlung entsprechen; es ist dies aber nicht der Fall, wie unmittelbar daraus hervorgeht, dass die Lage derselben sich mit der phosphorescirenden Substanz ändert. Die dunklen Bänder entsprechen vielmehr einer erhöhten Absorptionsfähigkeit der phosphorescirenden Substanz für die betreffenden Strahlengruppen, sie stellen Absorptionsstreifen dar; in Folge der stärkeren Absorption wird die Erwärmung an der betreffenden Stelle grösser und daher auch die Auslöschung des vorhandenen Phosphorescenzlichtes vollkommener.

3) Spectrum des Phosphorescenzlichtes. Es ist schon erwähnt (vergl. pag. 489) dass die Verschiedenheit der Farben, welche das Phorsphorescenzlicht darbietet, nicht allein durch die chemische Zusammensetzung des Präparates, sondern durch andere Umstände bedingt wird. Es giebt Schwefelcalcium-Ver-

---

[1]) LOMMEL, WIED. Ann. 20, pag. 847. 1883.

bindungen, welche je nach der Natur und physikalischen Beschaffenheit der Calciumverbindung, von welcher man bei der Darstellung des Präparates ausging, ferner je nach der Temperatur, welcher das Präparat ausgesetzt war, ganz verschiedene Farben von Roth bis Violett aufweisen. Trotz dieser Verschiedenheit in den Farbentönen zeigt doch das ausgestrahlte Phosphorescenzlicht, wie LOMMEL nachgewiesen hat[1]), bestimmte Merkmale, welche allen Präparaten gleicher chemischer Zusammensetzung gemeinsam sind. Als erregendes Licht benutzte LOMMEL Sonnen- oder elektrisches Licht, welches durch mehrere blaue und violette Substanzen ging und nur noch die schwach leuchtenden Strahlen von $F\frac{1}{2}G$ an nebst den ultravioletten Strahlen enthielt. Das zu untersuchende phosphorescirende Pulver war in einem kleinen Gefässe von Glimmer untergebracht, auf dessen Wandung das einfallende Licht durch eine Linse concentrirt wurde; der so entstehende phosphorescirende Lichtfleck wurde durch das Spectroskop spectralanalytisch untersucht. Es ergab sich hierbei, dass alle Schwefelcalciumverbindungen, so verschieden auch die Farbentöne des Phosphorescenzlichtes sind, doch das gemeinsame Merkmal besitzen, dass das ausgesandte Licht drei Maxima der Lichtstärke zeigt, welche bei allen Präparaten derselben Wellenlänge entsprechen. Der Unterschied der verschiedenen Präparate besteht darin, dass die genannten Maxima nicht bei allen gleich stark entwickelt sind, und zwar kann der Unterschied so weit gehen, dass eins oder zwei der Maxima ganz fehlen. Hat man daher für ein Präparat, welches die drei Maxima der Lichtstärke zeigt, den spectralen Ort dieser Maxima bestimmt, so wird ein Präparat, welches die gleiche chemische Zusammensetzung hat, seine Lichtmaxima nur an den vorher bestimmten Stellen haben; zeigt sich dagegen bei einem Präparat ein Lichtmaximum an einer andern Stelle, so folgt daraus, dass die chemische Zusammensetzung mit derjenigen des zuerst untersuchten Präparates nicht übereinstimmt. Nach der oben angegebenen Methode konnte LOMMEL das Spectrum des Phosphorescenzlichtes schon während der Bestrahlung beobachten, was deshalb von Bedeutung ist, weil das Phosphorescenzlicht während der Bestrahlung oft anders zusammengesetzt ist, als nachher, indem nach der Bestrahlung gewisse Theile desselben rascher abklingen, als andere. Das Spectrum des Phosphorescenzlichtes eines Schwefelcalciums, welches »himmelblau« leuchtet, erstreckt sich während der Bestrahlung von $\lambda = 0{\cdot}650$ bis $\lambda = 0{\cdot}428$ (etwa von C bis G); dasselbe zeigt die drei erwähnten Maxima; das erste liegt im Gelb bei $\lambda = 0{\cdot}584$, das zweite im Grün bei $\lambda = 0{\cdot}517$, das dritte im Blau bei $\lambda = 0{\cdot}462$.

Durch die Untersuchungen von KLATT und LENARD[2]) sind diese Beobachtungen von LOMMEL wesentlich erweitert. Sie zeigten, dass die Kalkphosphore in ganz reinem Zustande höchst wahrscheinlich gar nicht leuchten, dass vielmehr diese Körper des Zusatzes eines Metalles bedürfen, um die Eigenschaft des Leuchtens zu erhalten. Die drei von LOMMEL hervorgehobenen Lichtmaxima entsprechen drei verschiedenen Metallen, nämlich Mangan, Kupfer und Wismuth. Fehlt eines dieser Metalle in dem Körper, so fehlt auch die entsprechende Bande in dem Spectrum des Phosphorescenzlichtes. Dem Mangan entspricht ein Intensitätsmaximum dessen Wellenlänge bei 0·611 liegt, nach LOMMEL bei 0·584;

---

[1]) LOMMEL, WIED. Ann. 30, pag. 473. 1887.

[2]) KLATT und LENARD, WIED. Ann. 38, pag. 90. 1889. Auch LECOQ DE BOISBAUDRAN hat schon früher (Compt. rend. 103, pag. 468 u. 629 1886; 104 und 105. 1887; 106. 1888. eine Reihe nicht oder nur schwach phosphorescirender, sehr reiner Carbonate und Sulfate durch Zusatz kleiner Mengen von Mangan oder Wismuth zu heller Phosphorescenz gebracht.

dem Kupfer gehört als Maximum die Wellenlänge 0·511, nach LOMMEL 0·517; dem Wismuth 0·455 resp. 0·462. Die Mengen der Metalle, die zur Hervorbringung einer sehr hellen Phosphorescenz genügen, sind sehr gering. Ein Zusatz von 0·00008 CuO auf 1 Thl. CaO giebt eine sehr helle Phosphorescenz; wird die Metallmenge grösser, so nimmt die Intensität der Phosphorescenz wieder ab. Beim Wismuth tritt die Maximalwirkung erst bei grösserer Menge ein, es war hierzu 0·0013 Bi_2O_3 nothwendig, beim Mangan die noch grössere Menge 0·03 MnO.

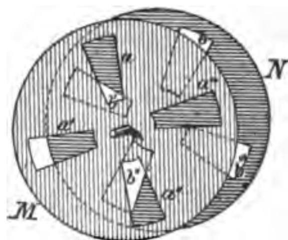
Es zeigte sich aber ferner, dass das Vorhandensein gewisser Zusätze, die für sich allein unwirksam sind, vortheilhaft ist, um die Phosphorescenz der Metalle hell hervortreten zu lassen. Als ein Beispiel eines passenden Zusatzes zum Kupfer im Schwefelcalcium sei schwefelsaures Natron erwähnt, das in 0·1 Thln. auf 1 Thl. CaO zugesetzt wurde.

Die Wellenlänge, für welche das Maximum des Phosphorescenzlichtes eintritt, hängt aber nicht allein von dem Metall, sondern auch von der übrigen chemischen Zusammensetzung ab, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Die Maximalintensität lag

für Kupfer in Schwefelcalcium	bei $\lambda = 511 \cdot 10^{-6}$ *mm*
„ „ „ Schwefelstrontium	„ $\lambda = 537 \cdot 10^{-6}$ „
„ „ „ Schwefelbarium	„ $\lambda = 645 \cdot 10^{-6}$ „

4) Phosphoroskop. Es giebt eine grosse Reihe von Stoffen, welche nur sehr kurze Zeit nach der Bestrahlung die Phosphorescenz zeigen; bei diesen lässt sich die Phosphorescenz nur wahrnehmen, wenn man die Zeit zwischen der Bestrahlung und Beobachtung bis auf einen kleinen Bruchtheil einer Secunde abkürzt. Es gelang BECQUEREL mit Hilfe des von ihm construirten Phosphoroskops, die genannte Forderung zu erfüllen und so für eine grössere Anzahl von Körpern, bei denen man früher keine Wirkung beobachtet hatte, die Phosphorescenz nachzuweisen. Das Phosphoroscop beruht auf folgendem Princip. Zwei kreisförmige Platten *M* und *N* (Fig. 438) sind an derselben horizontalen Axe befestigt in einem Abstande von etwa 1 *cm*, und können zusammen in Rotation versetzt werden.



(Fh. 438.)

Die Platte *M* besitzt in gleichem Abstande 4 Oeffnungen *a*, *a'*, *a''*, *a'''*, deren Winkelmaass 22° 30' ist, so dass die vollen Zwischenräume das Winkelmaass von 67° 30' besitzen. Die Platte *N* trägt ganz gleiche Oeffnungen *b*, *b'* . ., aber diese correspondiren nicht den Oeffnungen *a*, sondern liegen seitlich davon. Wenn daher ein horizontaler Lichtstrahl parallel der Axe auf die Platte *M* fällt. so wird bei Drehung derselben der Lichtstrahl nach einander die Oeffnungen *a*, *a'* . . . passiren, da aber die Oeffnungen *b* gegen die Oeffnungen *a* verschoben sind, so kann der Lichtstrahl nicht durch *N* hinaustreten; es müsste dann die Rotation so schnell erfolgen, dass in der Zeit, in welcher das Licht den Abstand von *M* bis *N* (1 *cm*) durchläuft, eine Oeffnung *b* an die Stelle von *a* getreten ist. Eine so schnelle Rotation ist, wie eine einfache Rechnung ergiebt, nicht erreichbar. Wenn daher auf *M* senkrecht zur Platte ein Lichtstrahl fällt, so dringt dieser auch bei der Rotation der beiden Platten nicht durch die zweite Platte, ein Beobachter hinter *N* wird daher von dem Lichtstrahl nichts wahrnehmen. Befindet sich aber zwischen den beiden Platten ein phosphorescirender Körper, welcher an der Rotation der Platten nicht Theil nimmt, so wird derselbe jedes

Mal dann durch den Lichtstrahl beleuchtet, wenn eine der Oeffnungen *a* gerade vor dem Körper sich befindet. Dauert jetzt das Nachleuchten des phosphorescirenden Körpers nur so lange, bis eine der Oeffnungen *b* bei der forschreitenden Rotation hinter dem Körper steht, so wird der Beobachter hinter *N* das Phosphorescenzlicht wahrnehmen. Je schneller die Rotation ist, um so kürzer ist die Zeit, welche das Phosphorescenzlicht dauern muss, um noch wahrgenommen zu werden. BECQUEREL zeigt, dass ein Nachleuchten, welches nur 0·0002 Secunden dauert, noch mit seinem Phosphoroskop constatirt werden kann. Die beiden Scheiben *MN* werden in einen cylindrischen Kasten (Fig. 439) gebracht, der bis auf eine Oeffnung, die ebenso gross ist wie eine der genannten Oeffnungen *a*, von allen Seiten geschlossen ist; der Kasten hat den Zweck, alles fremde Licht von dem der Untersuchung unterworfenen Körper, welcher wie die Figur zeigt, in den Kasten gehängt wird, abzuhalten. Während der Kasten mit dem Körper in Ruhe bleibt, werden die beiden Platten *M* und *N* durch ein Räderwerk gedreht.



(Ph. 439.)

Die Intensität des von dem phosphorescirenden Körper, der in dem Phosphoroskop hängt, ausgestrahlten Lichts, ist durch die Rotationsgeschwindigkeit bedingt. BECQUEREL nimmt an, dass der Verlust, den das ausgestrahlte Licht nach Abschluss der äusseren Bestrahlung erfährt, in jedem Moment proportional der augenblicklichen Lichtintensität ist. Ist daher i die Intensität zur Zeit t, so ist die Lichtabnahme di während der Zeit dt

$$di = -i \cdot a \cdot dt.$$

Daraus folgt

$$\frac{di}{i} = -a\,dt$$

oder

$$log\,\frac{i}{i_0} = -at, \quad \text{daher} \quad i = i_0 \cdot e^{-at}, \tag{1}$$

wenn i_0 die Intensität im Momente ist, in welchem die Bestrahlung aufhört und von diesem Momente an die Zeit t gemessen wird. Um dieses Resultat zu prüfen, bestimmte BECQUEREL die Intensität des Phosphorescenzlichtes bei verschiedener Rotationsgeschwindigkeit der Scheiben des Phosphoroskops, also zu verschiedenen Zeiten nach der Bestrahlung. Diese Zeit nach der Bestrahlung erhält man unmittelbar aus der Rotationsgeschwindigkeit, wenn man die Grösse eines dunklen Zwischenraumes im Verhältniss zum ganzen Kreisumfang kennt; in den oben angeführten Werthen ist dies Verhältniss $\frac{3}{16}$. Ist daher die Umlaufszeit der Scheiben T, so ist die Zeit nach der Bestrahlung, bei welcher der Körper erscheint gleich $\frac{3}{16}\,T$. Das obige Gesetz ergiebt nun, wenn die Intensität nach der Zeit $t_1 = i_1$, nach der Zeit $t_2 = i_2$,

$$a = \frac{log\,i_1 - log\,i_2}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Führt man mehrere Intensitätsmessungen $i_1, i_2, i_3 \ldots$ entstprechend den Zeiten $t_1, t_2, t_3 \ldots$ aus, so müssen je zwei dieser Werthe combinirt denselben Werth von a liefern. Für ein Uran-Glas fand BECQUEREL aus sehr zahlreichen Versuchen Werthe von a welche liegen zwischen 0·4924 und 0·5878, wenn t in 0·001 Secunden gemessen wird[1]) und für die Logarithmen anstatt der natürlichen

[1]) ED. BECQUEREL, La Lumière T. I. pag. 278.

Logarithmen, welche die Gleichung verlangt, die gewöhnlichen Logarithmen mit der Basis 10 genommen werden. Andere Substanzen geben andere Werthe; BECQUEREL giebt Werthe an, welche grösser als 1, und andere, welche kleiner als 0·1 sind.

E. WIEDEMANN[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Betrachtung von E. BECQUEREL nicht exact ist. Wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheiben des Phosphoroskops geändert wird, so ändert sich nicht allein der Zeitraum, welcher verfliesst nach der Bestrahlung bis zur Beobachtung, sondern es ändert sich auch die Zeit der Bestrahlung selbst. In Folge dessen ist in der Gleichung

$$\log \frac{i}{i_0} = -a \cdot t$$

die Intensität i_0, welche im Momente vorhanden ist, wo die Bestrahlung aufhört, ebenfalls von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig. Es ist desshalb nicht zulässig aus zwei Gleichungen, welche den Zeiten t_1 und t_2 entsprechen, einfach i_0 zu eliminiren, um die Gleichung (2) zu erhalten, wie dies BECQUEREL gethan hat, sondern es ist eine genauere Betrachtung des ganzen Vorganges nöthig. Indem E. WIEDEMANN berücksichtigt, dass auch während der Belichtung eine Abgabe der Helligkeit stattfindet, dass die Maximalintensität nicht momentan erreicht wird, und dass endlich noch ein physiologischer Faktor in die Gleichung eingeht, findet er folgendes Resultat:

$$\frac{i_2}{i_1} = \left(\frac{1 - e^{-\frac{at_2}{3}}}{1 - e^{-\frac{at_1}{3}}}\right)^2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{4at_1}{3}}}{1 - e^{-\frac{4at_2}{3}}} \cdot e^{a(t_1 - t_2)},$$

während nach BECQUEREL sich ergiebt

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{e^{-at_2}}{e^{-at_1}} = e^{a(t_1 - t_2)}.$$

Die WIEDEMANN'sche Formel geht also in jene von BECQUEREL über, wenn man die beiden ersten Faktoren bei WIEDEMANN gleich 1 setzt. Das Produkt dieser Faktoren kann aber wesentlich verschieden von 1 sein und Werthe bis zu 2·3 annehmen, so dass eine Vernachlässigung zu beträchtlich andern Resultaten führt, als die erste Formel.

5) Umwandlung von Fluorescenz in Phosphorescenz. Leuchtet ein Körper nur während der Bestrahlung, so nennt man die Erscheinung Fluorescenz, dauert das Leuchten auch nach der Bestrahlung, wenn auch nur für eine kurze Zeit fort, so spricht man von Phosphoresenz. Bei Flüssigkeiten war bisher nur Fluorescenz, bei festen Körpern nur Phosphorescenz beobachtet. E. WIEDEMANN versuchte, von dem Gedanken ausgehend, dass das schnelle Abklingen der Fluorescenz auf den Zusammenstössen gleichartiger Moleküle beruhe, die Fluorescenz von Lösungen durch einen allmählichen Zusatz colloider Körper in Phosphorescenz zu verwandeln WIEDEMANN versetzte die wässerigen Lösungen verschiedener Substanzen — so z. B. von Eosin, Aesculin, Chininsulfat — welche nur fluoresciren, mit Gelatine und liess dieselben eintrocknen; es zeigte sich, dass letztere dann phosphoresciren[2]). Es ist hierdurch bewiesen, dass man einen fluorescirenden Körper (Flüssigkeit) in einen phosphorescirenden (festen Körper) dadurch umwandeln kann, dass man die freie Beweglichkeit der Moleküle mehr und mehr beschränkt.

A. WINKELMANN.

---

[1]) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 34, pag. 446. 1888. In der schliesslichen Formel ist entsprechend den Angaben von BERCQEREL $\tau' = 3\tau$, $\mu = \tau$, $t = \tau'$ gesetzt.

[2]) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 34, pag. 448. 1888.

Chemische Wirkungen des Lichtes.

Die durch das Licht veranlassten chemischen Veränderungen bezeichnet man als photochemische Processe; damit das Licht eine chemische Wirkung ausübe, muss es absorbirt werden. Weil in vielen Fällen die am stärksten brechbaren Strahlen sich durch eine starke chemische Wirkung auszeichnen, werden diese häufig speciell als die »chemisch wirksamen Strahlen« bezeichnet im Gegensatz zu den übrigen Strahlen, denen diese Eigenschaft abgehen soll. Diese Unterscheidung ist aber unzulässig, weil alle Strahlen im Stande sind, photochemische Processe zu veranlassen. Da die Wirkung durch die Absorption bedingt ist, so hängt eben diese Wirkung nicht allein von der Natur der Strahlen sondern ebenso von der Natur des Körpers ab, auf den die Strahlen wirken sollen. — Durch die neuern Untersuchungen von H. W. VOGEL[1]) und J. M. EDER[2]) ist festgestellt, dass ausser der Absorption des lichtempfindlichen Körpers selbst auch die Absorption von beigemengten Stoffen für den photochemischen Process von grosser Wichtigkeit werden kann. Die Silberverbindungen von Chlor, Brom und Jod, die als solche für die gelben und rothen Strahlen fast unempfindlich sind, können durch beigemengte Stoffe, die die genannten Strahlen absorbiren, viel lichtempfindlicher gemacht werden; man nennt solche Körper, welche die Lichtempfindlichkeit zu steigern vermögen, Sensibilisatoren; durch Zusatz von Eosin, Erythrosin, Naphtolblau, Cyanin, Coeruleïn kann man photographische Platten für Grün, Gelb, Roth und sogar Ultraroth empfindlich machen.

Die Wirkung des Lichtes auf die Körper kann sich in verschiedener Weise äussern; das Licht kann hervorbringen 1) Verbindung, 2) Zersetzung, 3) Molekularveränderungen.

1) Verbindung. Chlor und Wasserstoff vereinigen sich im Licht zu Chlorwasserstoffsäure, während sie im Dunkeln getrennt bleiben. Bei Einwirkung von direktem Sonnenlicht erfolgt die Verbindung so heftig, dass Explosion eintritt; je schwächer das wirksame Licht ist, um so langsamer vereinigen sich die beiden Gase[3]). Sobald Chlor vom Licht bestrahlt wird, tritt das Bestreben, sich mit Wasserstoff zu verbinden, so stark auf, dass es oft Wasserstoff aus andern Verbindungen ausscheidet, um sich selbst damit zu verbinden. Chlorwasser wird deshalb unter Einwirkung von Licht in Salzsäure und Sauerstoff zersetzt. Auch Bromwasser wird zersetzt, aber viel langsamer als Chlorwasser[4]); Jodwasser wird dagegen durch das Licht nicht chemisch verändert.

2) Zersetzung. Zu den chemischen Zersetzungen, welche das Licht bewirkt, sind die schon genannten (Chlorwasser und Bromwasser) zu rechnen. Aus wässerigen Lösungen von Jodkalium, Jodcadmium und Jodlithium wird bei Gegenwart von Säuren — Salzsäure und Schwefelsäure sind wirksamer als organische Säuren — durch die Einwirkung des Lichtes Jod frei. —

---

1) H. W. VOGEL, POGG. Ann. 153, pag. 218. 1874; die Photographie farbiger Gegenstände, Berlin bei Oppenheim 1885.

2) J. M. EDER, Wiener Ber. 90. 1884; 92. 1885; 94. 1886.

3) Es ist übrigens zu bemerken, dass, wenn die beiden Gase trocken sind, bei wenig intensiven Lichtquellen überhaupt keine Vereinigung derselben eintritt. Vergl. die später angegebenen Beobachtungen von PRINGSHEIM.

4) J. M. EDER. Wiener Ber. 92. 1885.

Besonders hervorragend ist die zersetzende Kraft des Lichtes für die Vegetation; die von den Pflanzen aus der Atmosphäre absorbirte Kohlensäure wird durch die Einwirkung des Lichtes in Kohlenstoff und Sauerstoff zerlegt; ersterer verbleibt der Pflanze und dient zum Aufbau neuer pflanzlicher Theile, letzterer wird von den Pflanzen wieder an die Atmosphäre abgegeben. Diese Kohlensäurezersetzung wird, wie schon JNGENHOUS und SENNEBIER gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts beobachtet haben, nur durch grüne Pflanzentheile bewirkt; die grüngefärbte Substanz der Blätter, das Chlorophyll, ist die Masse, in der die photochemische Wirkung stattfindet[1]).

Viele Metallverbindungen werden durch das Licht zersetzt; besonders wichtig sind in dieser Beziehung speciell für die Photographie die Silberverbindungen (Ag J, Ag Br, Ag Cl), welche durch das Licht geschwärzt werden[2]).

3) Molekularveränderungen. Unter den Molekularveränderungen, welche das Licht hervorzubringen im Stande ist, spielen in neuerer Zeit speciell diejenigen eine besondere Rolle, welche sich bei dem Selen zeigen. Die Sonnenstrahlen verwandeln fein vertheiltes amorphes Selen in krystallinisches. Das krystallinische Selen verändert unter Einwirkung von Lichtstrahlen sein Vermögen die Elektricität zu leiten[3]), und zwar leitet es bei Beleuchtung besser als im Dunkeln[4]). Auf dieser Eigenschaft beruht das von BELL construirte Photophon, welches geeignet ist, mit Hilfe von Lichtstrahlen die menschliche Sprache in grössere Entfernungen zu übertragen. Eine dünne Platte aus krystallinischem Selen wird nebst einem Telephon in den Schliessungskreis einer galvanischen Batterie eingeschaltet. An der entfernten Station ist ein ebener biegsamer Spiegel aufgestellt, der die auf ihn fallenden Lichtstrahlen durch Reflexion auf die Selenplatte wirft. Spricht man von der Rückseite gegen den Spiegel, so tritt eine wechselnde Biegung des Spiegels ein, er wird bald convex, concav oder eben; hierdurch wird die Intensität des auf die Selenplatte fallenden Lichtes in gleicher Periode geändert und in Folge der dadurch eintretenden Widerstandsänderung der Selenplatte wird die Stromstärke der Batterie den gleichen periodischen Schwankungen unterliegen; die letzteren bedingen endlich periodische Bewegungen der Telephonplatte, welche gehört werden.

Ausser den Molekularveränderungen des Selens mögen noch folgende Erwähnung finden: weisser Phosphor wird im Sonnenlichte roth, Zinnober wird im Lichte schwarz.

Messungen der chemischen Lichtwirkung.

1) Apparate. Um die Gesetze der photochemischen Wirkung zu ermitteln, sind verschiedene Apparate benutzt worden, die man Actinometer nennt. Die Einwirkung des Lichtes aut ein Gemenge von Chlor und Wasserstoff wurde zuerst von DRAPER[5]) zur Construction eines Apparates verwendet, der aber, wie

---

[1]) Genauere Darstellungen des Vorganges finden sich in den botanischen Lehrbüchern.

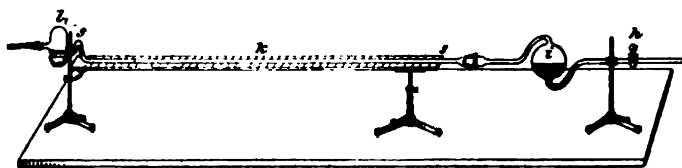
[2]) Eine ausführliche Zusammenstellung nebst Literaturangaben findet man in EDER, Die chemischen Wirkungen des Lichtes. 2. Aufl. Halle 1891.

[3]) SALE, POGG. Ann. 150, pag. 333. W. SIEMENS, Berl. Ber. 1876, 1877. Gesammelte Abhandl. I, pag. 270, 290.

[4]) Indessen ist durch HESEUS (EXNER Rep. 20, pag. 490. 1884) und KALISCHER (WIED. Ann. 32, pag. 108. 1887) nachgewiesen, dass unter bestimmten Bedingungen das Minimum der Leitungsfähigkeit des Selens nicht im Dunkeln liegt.

[5]) DRAPER, Phil. Mag. 23, pag. 401. 1843.

BUNSEN und ROSCOE nachwiesen, verschiedene Mängel besitzt, die eine genaue Bestimmung der photometrischen Wirkung nicht zuliessen. Die beiden zuletzt genannten Forscher construirten dann einen neuen Apparat, welcher gleichfalls auf der Lichtempfindlichkeit eines Gemenges von Chlor und Wasserstoff beruht, aber nicht die beim DRAPER'schen Apparat erkannten Fehler besitzt. Um ein Gemenge von gleichen Volumtheilen Chlor und Wasserstoff zu erhalten, — die genaue Zusammensetzung nach gleichen Volumtheilen ist wegen der hierdurch bedingten Lichtempfindlichkeit von grosser Wichtigkeit — wurde von BUNSEN und ROSCOE reine Salzsäure zwischen Kohlenelektroden der Elektrolyse unterworfen und das so entwickelte Gasgemenge wurde längere Zeit (6—8 Tage) durch den Apparat geführt, der in Fig. 440 abgebildet ist[1].



(Ph. 440.)

Das Gefäss *i* dient als Insolationsgefäss; es hat nur wenige Millimeter Dicke. Rechts von *i* befindet sich der Hahn *h*, links das Schliffstück *s*, welches ein Scalenrohr *k* aufnimmt; letzteres mündet in ein weiteres Gefäss *l*. Das Gefäss *l* ebenso wie ein Theil des Gefässes *i* sind mit Wasser gefüllt. Beim Durchleiten des Chlorknallgases sättigt sich das Wasser allmählich mit demselben, dann wird der Hahn *h* geschlossen. Fällt Licht auf *i*, so wird Salzsäure gebildet, die von dem Wasser in *i* absorbirt wird; in Folge der Volumverminderung des Chlorknallgases bewegt sich der Wasserfaden in dem Scalenrohr von *l* nach *i* und aus der Grösse der Verschiebung lässt sich die Menge des verschwundenen Chlorknallgases und daraus die wirksame Lichtmenge bestimmen.

Ausser dem eben beschriebenen Actinometer haben BUNSEN und ROSCOE für bestimmte Zwecke noch ein anderes benutzt, welches auf der photographischen Wirkung des Lichtes beruht[2]). Sie verwendeten Chlorsilberpapier, welches durch das Licht geschwärzt wird und zwar um so intensiver, je grösser die Lichtstärke und je länger die Dauer der Beleuchtung ist. Um eine genau bestimmte Abstufung der Schwärzung zu haben, benutzten die beiden Forscher ein Pendel, das an seinem Ende ein dünnes, geschwärztes Glimmerblatt besass; dieses konnte durch die Schwingung des Pendels über einen in einer Metallfläche befindlichen schmalen Schlitz hin und her geschoben werden. Unterhalb des Schlitzes befand sich das lichtempfindliche Papier, dessen einzelne Punkte durch jede Pendelschwingung eine bestimmte aus der Schwingungsdauer und der Amplitude des Pendels zu berechnende Zeit der Lichtwirkung ausgesetzt waren. Man erhielt auf diese Weise einen Streifen, dessen Schwärzung von einem Ende zum andern stetig abnahm. Ferner zeigten BUNSEN und ROSCOE, wie sich ein photographisches Normalpapier von stets gleicher Empfindlichkeit und eine Normalschwärzung von stets gleichbleibender Beschaffenheit herstellen liess; mit diesen Hilfsmitteln war es möglich, die chemische Wirkung bestimmter Lichteffecte, die zu verschiedenen Zeiten nur kurze Zeit wirksam gewesen waren, mit

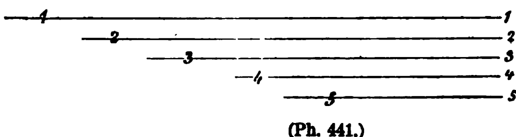
---

1) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 100, pag. 43. 1857.

2) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 117, pag. 531. 1862.

einander zu vergleichen. Speciell für die Untersuchung der chemischen Wirkungen des Himmels- und Sonnenlichtes wurde die eben beschriebene Vorrichtung benutzt.

Ein sehr einfaches Actinometer ist von H. VOGEL[1]) angegeben. Dasselbe besteht 1) aus einer halbdurchsichtigen Papierscala, deren Durchsichtigkeit von einem Ende zum andern gradweise (nicht stetig) abnimmt, 2) aus einem lichtempfindlichen Chromatpapier, welches unter dieser Scala dem Licht exponirt wird. Um die Scale zu erhalten, schichtet man eine Anzahl völlig gleicher transparenter Blätter terrassenförmig übereinander, wie die Fig. 441 zeigt.



(Ph. 441.)

Unter dieser Scala wird das lichtempfindliche Chromatpapier gelegt, welches sich durch die Einwirkung des Lichtes braun färbt. Ist das Produkt aus Belichtungsdauer und Lichtstärke nur klein, so wird das Licht nur an der Stelle auf dem Chromatpapier eine Wirkung ausüben, welche unter einem Blatt liegt, diejenigen Stellen dagegen, welche unter zwei oder mehr als zwei Blättern liegen, werden keine Veränderungen zeigen. Je grösser also das Produkt aus Lichtstärke und Belichtungsdauer ist, um so weiter nach dem dickeren Ende der Scala hin wird das Chromatpapier die Wirkung des Lichtes anzeigen. Um die Grenze der Lichtwirkung leichter zu erkennen, sind auf der Scala schwarze Zahlen und Zeichen aufgedruckt; diese lassen das Licht nicht durch und werden daher, wenn das Chromatpapier ringsum afficirt ist, weiss auf braunem Grunde sichtbar[2]).

2) Gesetze. a) BUNSEN und ROSCOE bewiesen durch eine grosse Reihe von Beobachtungen[3]) mit Hilfe des Pendelapparates, dass das Produkt aus Lichtintensität und Beleuchtungsdauer gleiche Schwärzung auf dem Chlorsilberpapier hervorbringt, dass also der photochemische Effect gleich dem Produkt aus Intensität und Zeitdauer ist.

b) Ebenso wie für die optische Wirkung gilt auch für die photochemische Wirkung des Lichtes der Satz, dass die durch eine absorbirende Substanz durchgehende Lichtmenge J der auffallenden J_0 proportional ist, gleichgültig, welche Grösse die Intensität selbst hat. Es wirkte das Licht einer Lampenflamme aus verschiedenen Entfernungen auf das Insolationsgefäss und, nachdem die Intensität J_0 gemessen war, wurde ein mit Chlor gefüllter Cylinder, der durch parallele Spiegelglaswände geschlossen war, in den Gang der Lichtstrahlen eingeschaltet und dann die Intensität J gemessen. Das Resultat war folgendes[4]):

---

[1]) H. VOGEL, POGG. Ann. 34, pag. 146. 1868.

[2]) ROSCOE hat später (POGG. Ann. 151, pag. 268. 1874) ein selbstregistrirendes Instrument beschrieben. Eine ausführliche Darstellung der zahlreichen Instrumente findet man in EDER, Die chemischen Wirkungen des Lichtes. Halle a. S. 1891.

[3]) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 117, pag. 536. 1862.

[4]) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 101, pag. 237. 1857.

No. der Versuche	1	2	3	4	5	6	7	8	
J_0	13·52	13·20	12·85	13·51	7·21	8·34	12·39	12·84	
J	3·63	3·63	3·79	3·79	2·11	2·44	3·69	3·69	
Verhältniss $\frac{J}{J_0}$.	0·267	0·275	0·295	0·281	0·293	0·293	0·298	0·287	Mittel 0·286
Abweichung vom Mittel .	—0·019	—0·011	+0·009	—0·005	+0·007	+0·007	+0·012	+0·001	

Wie man sieht, sind die Verhältnisse $\frac{J}{J_0}$ sehr nahe einander gleich. Es lässt sich aus dieser Thatsache leicht die Absorption als Function der durchstrahlten Schichtdicke ableiten.

Die Intensität des auffallenden Lichtes sei J_0,
die Intensität des durchgehenden Lichtes, wenn die Schichtdicke 1 passirt ist, sei J_1,
" " " " " " " " 2 " " " J_2
" " " " " " " " 3 " " " J_3
.
.
.
" " " " " " " " d " " " J_d,
so ist

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{J_2}{J_3} = \ldots\ldots\ldots \frac{J_{d-1}}{J_d} = x,$$

daher

$$J_0 = x \cdot J_1 = x^2 \cdot J_2 = \ldots\ldots = x^d \cdot J_d.$$

Ist die Schichtdicke, durch welche die Intensität auf $\frac{1}{10}$ der auffallenden abgeschwächt wird, gleich $\frac{1}{\alpha}$, so ist

$$J_0 = x^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{J_0}{10} \quad \text{oder} \quad \log x = \alpha.$$

Hiermit folgt aus $J_0 = x^d \cdot J_d$

$$\alpha = \frac{1}{d} \cdot \log \frac{J_0}{J_d}.$$

Die Grösse α nennen BUNSEN und ROSCOE den Extinctionscoëfficienten; derselbe wird mittelst der letzten Gleichung aus den Grössen J_0, J_d und d bestimmt.

c) Optische und chemische Extinction. Lässt man Licht durch Chlorgas fallen, so wird ein nicht unbeträchtlicher Theil desselben absorbirt. Um den Extinctioncoëfficienten zu erhalten, ist auf den Verlust des Lichtes Rücksicht zu nehmen, welcher durch die Reflexion der das Gas abschliessenden Wände veranlasst wird. BUNSEN und ROSCOE[1]) fanden so als Mittel aus mehreren Versuchen 0·00582 für α oder 171·7 für $\frac{1}{\alpha}$, wenn eine Lampenflamme als Lichtquelle benutzt wurde, d. h. geht das Licht der genannten Lichtquelle durch eine Chlorschicht (Druck 760 *mm*, Temperatur 0°) von 171·7 *mm*, so wird die Intensität auf 1/10 abgeschwächt. Ebenso untersuchten die beiden Forscher die Extinction, wenn dem Chlorgase verschiedene Mengen Luft, die für sich allein keine bemerkbare Extinction bei kurzer Schichtlänge ausübt, beigemischt waren; hier er-

---

[1]) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 101, pag. 250. 1857.

gab sich bei Reduction auf 760 *mm* und 0° nahe der gleiche Werth wie früher, nämlich 174·3 für $\frac{1}{\alpha}$.. Das Mittel ist $\frac{1}{\alpha} = 173{\cdot}3$; $\alpha = 0{\cdot}00577$.

Das Licht, welches das Chlor für sich allein absorbirt, dient nicht zur chemischen Wirkung, sondern zur Erwärmung des Gases; Bunsen und Roscoe nennen den soeben angegebenen Extinctionscoëfficienten den optischen. »Wird kein Licht bei der photochemischen Action verbraucht, so muss der optische Extinctionscoëfficient auch im durchstrahlten Chlorknallgase unverändert bleiben; geht dagegen ausser der optisch ausgelöschten auch noch eine der chemischen Action äquivalente Lichtmenge verloren«, so muss der Extinctionscoëfficient im Chlorknallgase grösser sein. Im ersten Falle würde das Licht die chemischen Kräfte bloss auslösen, im letzteren eine Umsetzung in die bei der Verbindung des Wasserstoffs mit dem Chlor geleistete Arbeit erleiden.

Um den chemischen Extinctionscoëfficienten α_1 im Chlorwasserstoffgemisch zu bestimmen, kann man nicht unmittelbar die Versuche so ausführen wie bei der Untersuchung des Chlor, weil eine photochemische Induction auftritt, eine Erscheinung, die wir unter d) besprechen werden. Bunsen und Roscoe haben deshalb den chemischen Extinctionscoëfficienten aus den chemischen Wirkungen abgeleitet, welche von gleichen Lichtmengen in verschieden langen Schichten des Gasgemisches hervorgebracht werden. Die chemische Wirkung w ist direkt proportional der Intensität des Lichtes. Ist deshalb die Intensität an einer bestimmten Stelle, die um z vom Anfange entfernt liegt, gleich J, so ist die chemische Wirkung auf der kleinen Strecke dz gleich

$$N \cdot J \cdot dz,$$

wo N eine Constante bezeichnet.

Ist die Intensität des Lichtes bei seinem Eintritt J_0, so ist die Intensität J, nachdem die Strecke z durchlaufen ist

$$J = J_0 \cdot x^{-z},$$

wo $\log x = \alpha$, den chemischen Extinctionscoëfficienten, um dessen Bestimmung es sich handelt, darstellt.

Die chemische Wirkung W_1 auf der ganzen Strecke z_1 ist deshalb

$$W_1 = \int_0^{z_1} N \cdot J_0 \cdot x^{-z} \cdot dz = \frac{N \cdot J_0}{\log_{nat} x} (1 - x^{-z_1}).$$

Ebenso findet man den entsprechenden Ausdruck W_2 für eine Strecke z_2 und daher

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{1 - x^{-z_1}}{1 - x^{-z_2}} = \frac{1 - 10^{-\alpha_1 \cdot z_1}}{1 - 10^{-\alpha_1 \cdot z_2}}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich α_1 berechnen. Es wurde gefunden $\frac{1}{\alpha_1} = 234$ *mm*; d. h. in einer Chlorwasserstoffmischung, die aus gleichen Theilen Chlor und Wasserstoff besteht, den Druck 760 *mm* und die Temperatur 0° hat, muss das benutzte Licht die Strecke von 234 *mm* durchlauten, damit es auf $\frac{1}{10}$ seiner Intensität herabgedrückt werde. Wäre der Wasserstoff durch ein Gas ersetzt, welches keine chemische Wirkung zulässt und keine optische Extinction bewirkt, so würde die entsprechende Strecke $2 \cdot 173{\cdot}3 = 346{\cdot}6$ *mm* gewesen sein. Während also der Extinctionscoëfficient in dem Chlorwasserstoffgemisch $\alpha = \frac{1}{234} = 0{\cdot}00427$ ist, hat dasselbe in reinem Chlor gleicher Verdünnung nur den Werth $\frac{1}{346{\cdot}6} = 0{\cdot}00289$.

Die Differenz dieser Werthe giebt den Extinctionscoëfficienten für diejenigen Strahlen allein, welche bei der chemischen Wirkung verbraucht werden, gleich 0·000138; d. h. von der gesammten Strahlenmenge einer Gasflamme, die durch das Chlorknallgas absorbirt wird, wird etwa $\frac{1}{3}$ $\left(\text{genau } \frac{138}{427}\right)$ zu einer chemischen Arbeit verwandt.

Es sind von BUNSEN und ROSCOE ganz ähnliche Versuche mit dem Himmelslicht ausgeführt; das Resultat derselben war, dass die chemische Wirkung ebenso wie die optische zu verschiedenen Tageszeiten beträchtliche Unterschiede zeigt.

d) Photochemische Induction. Die Wirkung des Lichtes auf ein Gemisch von Chlor und Wasserstoff tritt, wie schon DRAPER gefunden hat, nicht momentan ein, sondern es ist dazu eine bestimmte Dauer der Bestrahlung nöthig. DRAPER glaubte, dass das Chlor durch Insolation in einen bleibenden, erst nach Wochen wieder verschwindenden allotropischen Zustand übergehe, in welchem es sich von dem gewöhnlichen Chlor durch eine grössere Verbindungsfähigkeit unterscheide. BUNSEN und ROSCOE haben aber gezeigt, dass diese Auffassung DRAPER's unhaltbar ist, dass vielmehr zwischen Chlor und Wasserstoff ein Verbindungswiderstand besteht, der erst aufgehoben werden muss, ehe die Verbindung erfolgt; diese Aufhebung erfolgt durch die Wirkung des Lichtes. Den Act, durch den der Verbindungswiderstand verringert und deshalb der Zustand einer grösseren Verbindungsfähigkeit durch das Licht herbeigeführt wird, nennen BUNSEN und ROSCOE photochemische Induction. Bestimmt man bei constant gehaltener Bestrahlung die Salzsäuremengen, welche während einer Minute in den einzelnen Perioden der Bestrahlung sich bilden, so findet man mit der Zeit wachsende Zahlen, die erst nach längerer Dauer einen constanten Werth annehmen.

Beispiele: Bei Bestrahlung mit diffusem Sonnenlicht war in den ersten 2 Minuten keine Salzsäurebildung wahrzunehmen, dann begann die Bildung, die wachsende Zahlen lieferte bis zur 11. Minute; erst dann wurden die Zahlen constant, d. h. in jeder folgenden Minute wurde die gleiche Menge Salzsäure gebildet. Bei Bestrahlung mit Lampenlicht zeigte ein Versuch in den ersten 5 Minuten keine Wirkung, von der 10. Minute an wurde die Wirkung constant. Durch vielfach abgeänderte Versuche zeigten BUNSEN und ROSCOE[1]):

1) dass die photochemische Induction um so mehr verzögert wird (d. h. die Zeit bis zum Eintritt der Maximalwirkung um so grösser wird), je länger unter sonst gleichen Umständen die durchstrahlte Gassäule ist;

2) dass die Zeit der Bestrahlung, welche nöthig ist, um die erste Wirkung hervorzubringen, mit wachsender Lichtstärke abnimmt, und zwar schneller abnimmt, als der Zunahme der Lichtstärke entspricht.

3) dass die Zeit, welche vom Beginn der Induction (d. h. der Salzsäurebildung) bis zur Maximalwirkung verfliesst, mit wachsender Lichtstärke abnimmt, und zwar langsamer abnimmt, als der Zunahme der Lichstärke entspricht;

4) dass der unter dem Einflusse der Lichtbestrahlung aufgehobene Verbindungswiderstand sich sehr bald von selbst im Dunkeln wiederherstellt.

Wird dem empfindlichen Gemische von Chlor und Wasserstoff eine kleine Menge eines Gases beigemischt, so wird die photochemische Wirkung in vielen Fällen ganz bedeutend geändert. Die Versuche von BUNSEN und ROSCOE be-

---

1) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 100, pag. 488. 1857.

ziehen sich zunächst auf den Zusatz von geringen Mengen Wasserstoff resp. Sauerstoff, die gleichzeitig mit dem Chlorknallgase durch eine Stromabzweigung elektrolytisch entwickelt wurden. War dem normalen Gemisch, in welchem Wasserstoff und Chlor in gleichen Volumen enthalten sind, 0·003 Wasserstoff zugefügt, so dass die Volume von Wasserstoff zu Chlor sich verhielten, wie 1003 : 1000, so wurde die pro Minute durch das Licht ausgeübte Maximalwirkung von 43·47 auf 16·40, d. h. im Verhältniss von 100 zu 37·8 vermindert. Ein Sauerstoffzusatz wirkt noch stärker: die Maximalwirkung des Lichtes wurde durch einen Zusatz von 0·005 Sauerstoff von 100 auf 9·7 und durch einen Zusatz von 0·013 Sauerstoff von 100 auf 2·7 herabgedrückt. Dabei zeigte sich, dass die durch den Zusatz von Sauerstoff verminderte Maximalwirkung in kürzerer Zeit erreicht wird, als das allerdings beträchtlich grössere Maximum der normalen Mischung. Chlor wirkt dagegen viel schwächer; ein Zusatz von 0·01 Chlor bedingt eine Abnahme von 100 auf 60·2, ein Zusatz von 0·18 Chlor eine Abnahme von 100 auf 41·2· Endlich hat ein kleiner Zusatz von Chlorwasserstoffsäure keinen bemerkbaren Einfluss auf die photochemische Induction, wenigstens zeigte ein Zusatz von 0·13 einen solchen nicht.

Lässt man zu dem belichteten normalen Gase, in welchem das Maximum der Wirkung bereits eingetreten ist, normales Gas hinzutreten, welches noch nicht belichtet war, so nimmt die photochemische Wirkung sofort ab und es dauert einige Zeit, bis das Maximum sich wieder herstellt. Es verhält sich also nichtinducirtes Gas gegen inducirtes wie ein substantiell verschiedener Körper[1]). Mit dieser Beobachtung steht die früher erwähnte Thatsache, dass die photochemische Wirkung um so mehr verzögert wird, je länger unter sonst gleichen Umständen die durchstrahlte Gassäule ist, in unmittelbarem Zusammenhang. Denn da zuerst nur die vordersten Schichten inducirt werden, und da in Folge der Diffusion die tiefer liegenden, noch nicht inducirten Schichten sich mit den ersten mischen, so hat man hier denselben Vorgang, der eben besprochen ist und der sich nach aussen dadurch zeigt, dass eine Verzögerung der Wirkung eintritt.

Die Erklärung der Einwirkung von Beimischungen auf den photochemischen Effekt geben BUNSEN und ROSCOE, indem sie das Wesen der Katalyse näher betrachten[2]). Die Phänomene der chemischen Verwandtschaft beruhen auf specifischen Anziehungen, die zwischen den Theilchen verschiedener Körper stattfinden. Diese Anziehungen bleiben auch dann noch bestehen, wenn die Theilchen verhindert werden, der Anziehung Folge zu leisten, also sich chemisch zu verbinden. Wenn zu den beiden Theilchen *a* und *b*, welche sich zu verbinden streben, ein drittes Theilchen *c* tritt, so wird der Zug, mit dem *a* und *b* sich zu verbinden streben, ein anderer geworden sein, wie früher, als *c* noch nicht da war; der jetzt vorhandene Zug wird die Resultirende aller Kräfte sein, die von *a*, *b* und *c* ausgehen. Der Contakt eines dritten Körpers kann deshalb den Zug vermehren oder vermindern, welcher zwischen den beiden zuerst betrachteten Körpern vorhanden war.

E. PRINGSHEIM[3]) hat darauf hingewiesen, dass die Bestimmung des chemischen Extinctionscoëfficienten durch BUNSEN und ROSCOE nicht einwandfrei ist. Der Gedankengang ist folgender: Trotz der grossen chemischen Verwandtschaft,

---

[1]) l. c., Bd. 100, pag. 499.

[2]) l. c. Bd. 100, pag. 497.

[3]) E. PRINGSHEIM, WIED. Ann 32, pag. 384. 1887.

welche die Chlor- und Wasserstoffmoleküle besitzen, werden sie durch eine unbekannte Ursache verhindert, derselben zu folgen. Wird das Hinderniss durch das Licht beseitigt, so bewirkt die Verwandtschaft die chemische Verbindung; zu dieser Verbindung ist aber keine äussere Arbeit nöthig, sondern es wird dabei eine grosse Wärmemenge frei, also Arbeit gewonnen. Von diesem Gesichtspunkte aus besteht die Lichtwirkung in einer Auslösung der zwischen dem Chlor- und Wasserstoff wirkenden Verwandtschaftskräfte; es fragt sich aber, ob zu dieser Auslösung nur eine verschwindend kleine Kraft genügt, oder ob zur Auslösung der Affinität zwischen je einem Chlor- und Wasserstoffmolekül eine bestimmte Arbeit erforderlich ist, für welche eine äquivalente Lichtmenge verschwindet. Aus der Differenz der beiden Extinctionscoëfficienten α_1 und α haben BUNSEN und ROSCOE das letztere geschlossen und in der Differenz dieser beiden Grössen ein relatives Maass für die Grösse der chemischen Arbeit erblickt. Sie setzen dabei voraus, dass die optische Extinction in dem Chlorwasserstoffgemisch in ganz der gleichen Weise stattfindet, wie in dem Chlor selbst, wenn es allein der Bestrahlung ausgesetzt ist. Da in dem letzteren Falle die absorbirte Lichtmenge nur zur Erwärmung verbraucht wird, so wird also vorausgesetzt, dass auch in dem Chlorwasserstoffgemisch ein gleicher Antheil der absorbirten Lichtmenge zur Erwärmung verwandt werde, also chemisch unwirksam sei. Diese Voraussetzung ist aber nicht bewiesen, und es ist, wie PRINGSHEIM hervorhebt, gar nicht nöthig, »dass die von den Chlormolekülen optisch absorbirte Lichtmenge in dem Chlorwasserstoffgemisch lediglich als Wärme zur Geltung kommt, sondern es ist sehr wohl denkbar, ja sogar wahrscheinlich, dass sie ganz oder theilweise zu chemischer Arbeit verwendet wird.« Wenn hiernach aus der Differenz der von BUNSEN und ROSCOE bestimmten Extinctionscoëfficienten kein sicherer Schluss auf die Grösse der chemischen Arbeit bei der Absorption der Lichtstrahlen gezogen werden kann, so geht andererseits aus zahlreichen Versuchen der genannten Autoren hervor, dass in der That bei dem Akte der photochemischen Wirkung eine Arbeit geleistet wird, für welche eine äquivalente Lichtmenge verschwindet. Es folgt dies aus der Thatsache, dass die chemische Wirkung der Lichtintensität proportional ist; denn da die gebildete Salzsäuremenge der Lichtintensität proportional ist, so folgt, dass die Zahl der chemisch sich verbindenden Theilchen der Menge des absorbirten Lichtes ebenfalls proportional ist.

PRINGSHEIM hat den Vorgang der photochemischen Induction näher untersucht. Es stellte sich hierbei heraus, dass die Feuchtigkeit des Chlorwasserstoffgemisches für die Lichtempfindlichkeit eine grosse Rolle spielt. Ersetzt man das Wasser in dem Absorptionsgefäss durch concentrirte Salzsäure, so wird die photochemische Wirkung auf das Chlorknallgas auf etwa $\frac{1}{50}$ abgeschwächt bei Benutzung einer Petroleumlampe als Lichtquelle. Wurde das Chlorwasserstoffsäuregemisch mit Hilfe von Phosphorsäureanhydrid getrocknet, so brachte diffuses Tageslicht gar keine oder nur eine sehr langsame Umsetzung zu Salzsäure hervor. Es folgt also, dass trocknes Chlorknallgas gegen mässig intensive Lichtquellen vollständig unempfindlich ist und dass die allmähliche chemische Umsetzung des Chlorknallgases unter Wirkung schwacher Lichtquellen und ebenso alle Erscheinungen, welche BUNSEN und ROSCOE bei der photochemischen Induction beobachtet haben, nur unter Mitwirkung von Wasserdampf zu Stande kommen. Bei dieser langsamen Salzsäurebildung tritt nach PRINGSHEIM eine Zwischensubstanz vor der Bildung der Salzsäure auf; diese Zwischensubstanz ruft die photochemische Induction hervor. Ueber die Natur der Zwischensubstanz hat PRINGSHEIM eine volle Sicherheit nicht gewinnen können, aber doch

so viel ermittelt, dass sie höchst wahrscheinlich durch Zersetzung des Wasserdampfes entsteht.

e) Die photochemische Wirkung des Sonnenlichtes. Die photochemische Wirkung der Strahlen verschiedener Wellenlänge ist verschieden, wie schon aus der früheren Bemerkung hervorgeht, dass die rothen und gelben Strahlen in den meisten Fällen nur eine geringe chemische Wirkung auszuüben im Stande sind. Untersucht man das Sonnenspectrum, so hängt das gewonnene Resultat wesentlich von drei Umständen ab.

1) Es macht einen wesentlichen Unterschied, ob man ein prismatisches Spectrum oder ein Diffractionsspectrum verwendet. Im prismatischen Spectrum ist das Licht im Roth dicht zusammengedrängt, im Blau und Violett weit auseinander gezogen; nimmt man deshalb gleich breite Streifen, so haben die Randstrahlen dieses Streifens im Roth eine beträchtlich grössere Differenz der Wellenlänge, als im Violett. Dagegen ist im Diffractionsspectrum, welches durch ein Gitter erzeugt wird, die Beziehung zwischen Streifenbeite und Wellenlängendifferenz von der Farbe unabhängig; man bezeichnet ein solches Spectrum als ein normales.

2) Das Sonnenlicht wird von der Erdatmosphäre zum Theil absorbirt; diese Absorption ist sehr wechselnd und zwar nicht bloss in Bezug auf die Summe der Wirkungen, sondern auch für das Intensitätsverhältniss der einzelnen Strahlen. Es wird deshalb eine Intensitätscurve der photochemischen Wirkung des Sonnenspectrums ein sehr verschiedenes Aussehen gewinnen können je nach den Absorptionsverhältnissen der Atmosphäre. Wir wollen deshalb auf eine Wiedergabe einer solchen Curve, wie sie von verschiedenen Forschern ermittelt wurde, verzichten und nur die Bemerkung machen, dass nach den Beobachtungen von BUNSEN und ROSCOE[1]) die photochemische Wirkung im Sonnenspectrum sich etwa folgendermaassen darstellte. Von der FRAUNHOFER'schen Linie *A* bis *C* (im Roth) war eine Wirkung nicht wahrzunehmen; zwischen *C* und *D* begann die Wirkung, die sehr schwach blieb, bis hinter *E*; dann wächst dieselbe sehr schnell bis etwa in der Mitte von *G* und *H*; hierauf nimmt sie ab bis nahe *H*, wächst nochmals bis *J*, um dann wieder abzunehmen, sodass sie hinter *T* unmerklich wird. Durch LANGLEY[2]) ist festgestellt, dass die Atmosphäre die brechbarsten Strahlen am meisten absorbirt; in Procenten ausgedrückt werden folgende Mengen der einzelnen Strahlengattungen durch die Atmosphäre hindurchgelassen:

	Ultraviolett	Violett	Blau	Grünlichblau	Gelb	Roth	Ultraroth
Proc.	39	42	48	54	63	70	76

3) Es hängt die photochemische Wirkung der Sonnenstrahlen von der Natur des absorbirenden Körpers ab, so dass das Intensitätsverhältniss der verschiedenen Strahlen auch hierdurch bedingt wird. Hieraus geht hervor, dass die Beobachtungen über die Vertheilung der photochemischen Wirkung im Sonnenspectrum nicht verallgemeinert werden dürfen, sondern nur für die speciellen Verhältnisse, unter denen sie angestellt wurden, Gültigkeit haben.

A. WINKELMANN.

---

1) BUNSEN und ROSCOE, POGG. Ann. 108, pag. 270. 1859.

2) LANGLEY, Researches on solar heat etc. Washington 1884.

Interferenz des Lichts.

Die Bezeichnung »Interferenzerscheinung« wird in einem weiteren und einem engeren Sinne gebraucht. Im weiteren Sinne versteht man darunter alle die Erscheinungen, bei welchen durch das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Lichtstrahlen eine gesetzmässige Aenderung der Lichtstärke bewirkt wird, mögen nun diese Strahlen solche im gewöhnlichen Sinne sein, wo sie einander entsprechende Punkte der Wellenflächen verbinden, oder mögen sie sogenannte Elementarstrahlen sein, wie wir sie uns dem HUYGHENS'schen Principe gemäss von jedem Punkt einer Wellenfläche nach allen Richtungen ausgehend zu denken haben. Diejenigen Erscheinungen, welche durch Strahlen der letzteren Art — gebeugtes Licht — gebildet werden, pflegt man auch unter dem Namen »Beugungserscheinungen« zusammengefasst von den übrigen zu trennen und unter »Interferenzerscheinungen« dann im engeren Sinne nur die zu verstehen, welche durch gerade, ungebeugt fortgepflanztes Licht erzeugt werden. Diese Unterscheidung wollen wir auch hier machen und zugleich von unserer jetzigen Betrachtung auch die Vorgänge ausschliessen, welche durch die Doppelbrechung der Krystalle veranlasst werden; diese sollen einer besondern Behandlung vorbehalten bleiben. Das so begrenzte Feld umfasst also die Erscheinungen des Zusammenwirkens ungebeugter Lichtstrahlen, die auf ihrer Bahn nur regelmässige Reflexionen und einfache Brechungen erlitten haben. Die Strahlen müssen nahe zusammenfallen, ihre Bewegung kann aber entweder nach derselben Seite gerichtet sein oder nach entgegengesetzten. Die Erscheinungen der letzteren Art sind erst kürzlich entdeckt und bilden die besondere Gruppe der stehenden Lichtschwingungen.

Die Interferenzerscheinungen der ersten Art, die viel häufiger und leichter zu beobachten sind als die letzteren, kann man zweckmässig in zwei Abtheilungen bringen, je nachdem die zusammentreffenden Strahlenbündel von vornherein getrennt von der Lichtquelle ausgehen oder durch Zerlegung eines und desselben Bündels gewonnen werden. Wenn auch diese Eintheilung nicht in einer wesentlichen, sondern nur in einer gradweisen Verschiedenheit im Gang der interferirenden Strahlen begründet ist (auch bei der zweiten Abtheilung gehen in der Regel die einzelnen schliesslich zusammenwirkenden Strahlen von vorn herein in verschiedenen Richtungen von der Lichtquelle aus, nur liegen sich diese viel näher als bei der ersten), so zeigen die Erscheinungen der beiden Gruppen doch sehr charakteristische Unterschiede. Während bei der ersten eine punktförmige oder geradlinige Lichtquelle oder wenigstens ein Durchgehen sämmtlicher Strahlen durch ein und dieselbe feine Oeffnung oder Spalt erforderlich ist, können bei der zweiten ausgedehnte Lichtquellen ohne weitere Vorkehrung angewandt werden, ja die Streifen niedrigster Ordnung entstehen schon im allseitig einfallenden zerstreuten Tageslicht. Bei der ersten Gruppe werden die interferirenden Bündel durch nebeneinanderliegende meist scharfkantig aneinander stossende Apparatentheile abgelenkt und zum Zusammenfallen gebracht, liegen desshalb auch schon von vornherein räumlich nebeneinander, während sie bei der zweiten Gruppe aus einem und demselben einfallenden Strahlenbündel durch eine Trennungsfläche zweier Mittel als das zurückgeworfene und das gebrochene Bündel entstehen, welche durch weitere Reflexionen oder Brechungen wieder zusammengebracht werden. Die geringe Ausdehnung der Lichtquelle und die durch die nebeneinanderliegenden Apparattheile bewirkte Sonderung der Strahlen in ver-

schiedene getrennte Bündel bewirken, dass die Erscheinungen der ersten Gruppe mit Beugungserscheinungen verbunden sind, und man nur in bestimmten räumlichen Grenzen von der Beugung ungestörte Interferenzen der direkten Strahlen allein erhalten kann, wozu man noch die Versuchsanordnung mit Sorgfalt treffen muss. Dagegen fehlen wegen der breiten Lichtquelle und dem Zusammenfallen der wirksamen Strahlenbündel bei der zweiten Gruppe die Beugungserscheinungen entweder ganz oder tragen einen von den Interferenzstreifen der direkten Strahlen so verschiedenen Charakter, dass eine Verwechslung und Störung ausgeschlossen ist.

Zur ersten Gruppe gehören die Erscheinungen der FRESNEL'schen Spiegel, des FRESNEL'schen Doppelprismas, der geneigten Platten, der BILLET'schen Halblinsen, MICHELSON's Interferenzversuch, FRESNEL's Drei-Spiegel-Versuch, LLOYD's Versuch, die Erscheinungen »gemischter Platten« endlich die die kaustischen Linien begleitendenInterferenzstreifen. Die zweite Gruppe wird gebildet von den Interferenzerscheinungen dünner Blättchen — mit den speciellen Fällen der NEWTON'schen Ringe, der HERSCHEL'schen und der HAIDINGERschen (MASCART-LUMMERschen) Streifen, des MICHELSON'schen Versuchs — und den Erscheinungen mehrfacher Platten, wohin der BREWSTER'sche und der JAMIN'sche Versuch mit ihren verschiedenen Abänderungen sowie die LUMMER'sche Anordnung gehören und welchen die in verschiedenen Fällen z. B. bei den NEWTON'schen Ringen auftretenden Nebenerscheinungen zuzuzählen sind.

Eine Uebersicht der geschichtlichen Entwickelung dieses Theiles der Optik mag hier folgen; näher werden wir auf dieselbe und die Literatur bei der Behandlung der einzelnen Erscheinungen einzugehen haben. — Die Farben dünner Blättchen haben zuerst unter diesen Interferenzerscheinungen die Aufmerksamkeit der Beobachter erregt. ROBERT BOYLE beschrieb dieselben in seinem 1663 erschienenen Werk Experiments and observations upon colours . . ., er hatte sie an Blasen von verschiedenen Flüssigkeiten, sowie an dünnen Glasplättchen beobachtet und bemerkte, dass sie wesentlich von der Dicke des betreffenden Körpers und nicht von seiner chemischen Beschaffenheit abhängig seien. Zwei Jahre später behandelte R. HOOKE in seiner Micrographia denselben Gegenstand; er zeigte, dass die Farbe von Glimmerblättchen von ihrer Dicke abhängig sei, und wandte zuerst zur Erzeugung dieser Erscheinungen zwei aufeinander gelegte Objective an. Er schrieb die Entstehung der Farben der Zusammenwirkung des an der Vorderfläche und des an der Hinterfläche reflektirten Lichtes zu, doch war seine Vorstellung von der Natur des Vorgangs noch sehr unklar; Messungen hat er nicht angestellt.

Um diese Zeit begann NEWTON sich mit optischen Untersuchungen zu beschäftigen; seine ersten Veröffentlichungen hat er 1672 der Londoner Royal Society mitgetheilt, systematisch zusammengefasst und bereichert giebt dieselben seine 1704 zuerst erschienene Optik. Das zweite Buch dieses berühmten Werkes enthält in seinem ersten bis dritten Theil die hierher gehörigen Beobachtungen NEWTON's nebst seinen Bemerkungen und Erklärungen derselben. In einer musterhaften Experimental-Untersuchung erforscht er die Gesetze der Erscheinung, indem er sich besonders der schon von HOOKE benutzten Anordnung bedient, dass ein Objektivglas von grossem Krümmungshalbmesser auf ein anderes mit ebener Vorderfläche aufgelegt wird. Es entsteht dann um den Berührungspunkt der beiden Gläser eine Aufeinanderfolge verschieden gefärbter kreisförmiger Ringe, das später mit dem Namen der »NEWTON'schen Ringe« belegte, allgemein bekannte Phänomen. Die Anordnung hat den Vor-

theil, dass man aus dem bekannten Radius der Linse mit grosser Schärfe die Dicke der dünnen Zwischenschicht, die die Farben erzeugt, an jedem Punkt bestimmen kann. Dies benutzt NEWTON zur Ableitung der Gesetze über die Abhängigkeit der Ringe von der Dicke der Schicht, von dem Einfallswinkel des Lichts, von der Natur des zwischen den Gläsern enthaltenen Körpers und von der Farbe des einfallenden Lichts. In letzterer Beziehung zeigt er, dass die Ringe bei Beleuchtung des Apparats mit einfarbigem Licht verschiedene Durchmesser haben je nach der Farbe, und dass die Erscheinung im weissen Licht lediglich aus einer Uebereinanderlagerung der Ringsysteme der einzelnen einfachen Farben besteht. Es schliesst sich daran die Beobachtung, dass man im weissen Licht eine sehr viel grössere Anzahl von Ringen bei Betrachtung derselben durch ein Prisma unterscheiden kann als mit freiem Auge. NEWTON's Theorie stützt sich auf die von ihm angenommenen »Anwandlungen« der Lichttheilchen, wonach dieselben in periodisch wechselnden Zuständen sich befinden sollen, sodass sie beim Auftreffen auf eine Grenzschicht zweier Körper im einen Zustand leichter zurückgeworfen, im andern leichter durchgelassen werden. Und es gelingt ihm in der That dadurch, mittelst einiger Hülfsannahmen eine Erklärung der Erscheinung in ihren Hauptzügen zu geben. Wie eine etwas genauere Betrachtung die Unhaltbarkeit dieser Erklärung zeigt, werden wir weiter unten sehen.

Das ganze achtzehnte Jahrhundert hat nichts Wesentliches hinzugefügt. Die Versuche NEWTON's wurden mit geringen Abänderungen von Verschiedenen (MARIOTTE, MAZEAS, DUTOUR) wiederholt, seine Theorie nahm man unverändert an. Nur EULER äusserte eine abweichende Meinung, indem er in einer in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1752 erschienenen Arbeit die Annahme aufstellte, dass das auffallende Licht die oberste Körperschicht in Schwingungen versetze, deren Häufigkeit dann von ihrer Dicke abhinge, ebenso wie die Dauer von Luftschwingungen in einer Röhre von der Länge derselben abhängt. Dadurch sollten nun wieder Schwingungen des Aethers von gleicher Periode erregt werden und diese vermöge ihrer verschiedenen Dauer in unserem Auge die Empfindung der verschiedenen Farben erzeugen.

Einen grossen Fortschritt machte die Theorie unserer Erscheinungen erst im Anfange dieses Jahrhunderts durch die Arbeiten von THOMAS YOUNG, namentlich durch die in den Londoner Philosophical Transactions von 1802 (pag. 12 ff) erschienene Abhandlung »On the theory of light and colours«. Der grosse Schritt, den YOUNG that, und durch welchen der wahre Grund für die Erklärung dieser Erscheinungen gelegt wurde, ist die Aufstellung und Anwendung eines Princips der Interferenz von Schwingungsbewegungen. Schon zwei Jahre früher hatte er dieses Princip auf akustische Untersuchungen angewandt; in der angezogenen Abhandlung spricht er dasselbe (pag. 34) in folgender Form aus: »Wenn zwei Schwingungen von verschiedenem Ursprung mit einander vollständig oder nahezu in der Richtung zusammenfallen, ist ihre gemeinsame Wirkung eine Zusammensetzung *(combination)* der Bewegungen, welche jeder einzelnen zukommen.« Die zweite Anwendung, die er hier davon giebt, ist die Erklärung der Farben dünner Blättchen; er schreibt die in reflectirtem Licht gesehenen Farben der Interferenz der an der Vorderfläche und der an der Hinterfläche zurückgeworfenen Strahlen zu und zeigt, wie aus dieser das Verhältniss der Dicken, welche bei verschiedenen Einfallswinkeln dieselbe Farbe erzeugen, gerade so folgt, wie es die Beobachtungen NEWTON's ergaben. Auch macht er hier auf die Verschiedenheit der Reflexionen an dünneren und an dichteren Mitteln aufmerksam und folgert, dass die durch-

gelassenen und zurückgeworfenen Farben mit einander vertauscht werden müssen, wenn das Blättchen, statt zwischen zwei dichteren oder dünneren Mitteln zu liegen, auf der einen Seite von einem dünneren, auf der andern von einem dichteren begrenzt wird. In einer noch in demselben Band der Philos. Trans. von 1802 veröffentlichten Abhandlung »An account of some cases of the production of colours not hitherto described« konnte er schon den experimentellen Beweis der Richtigkeit dieser Folgerung führen. In derselben Abhandlung definirt er (pag. 393) die Wirkung der Reflexion in einem dünneren Medium genauer dahin, dass ein solcher Strahl als um eine halbe Wellenlänge verzögert vorausgesetzt werden müsse und spricht (pag. 387) das Interferenzprincip in einer gegen die erste Fassung bemerkenswerth geänderten Weise so aus: »Wenn zwei Theile desselben Lichts auf verschiedenen Wegen genau oder sehr nahe in derselben Richtung in das Auge gelangen, so wird die Helligkeit am grössten, wenn der Wegunterschied irgend ein Vielfaches einer bestimmten Länge ist, und am geringsten in dem zwischenliegenden Verhältniss der interferirenden Theile; und diese Länge ist verschieden für Licht von verschiedenen Farben.«

Auch eine neue hierher gehörige Interferenzerscheinung beschreibt und erklärt Young in derselben Abhandlung. Es sind das die sogen. Farben gemischter Blättchen (colours of mixed plates), welche erscheinen, wenn man durch zwei Glasplatten, zwischen welchen sich nicht mischbare Flüssigkeiten in feiner Vertheilung oder eine Flüssigkeit mit Luft gemischt befinden, nach einer Flamme blickt, und welche durch die Interferenz der durch die nebeneinanderliegenden verschiedenen Körper hindurchgegangenen Strahlen entstehen.

Young's Arbeiten fanden nicht sofort die Anerkennung, welche sie verdienten, und blieben zunächst ohne wesentlichen Einfluss auf die gleichzeitigen Physiker. So haben wir bis zum Auftreten Fresnel's auch nur drei weniger hervorragende Abhandlungen zu erwähnen. Herschel wiederholte mit einigen Abänderungen die früheren Versuche und machte dabei die Entdeckung der nach ihm benannten Streifen. Dieselben entstehen, wenn man ein totalreflektirendes Prisma mit der reflektirenden Seite auf eine andere ebene Fläche legt. Die Grenze der Totalreflexion wird dann auf der concaven Seite von einer Reihe von Interferenzbanden begleitet, das sind die Herschel'schen Streifen.

Eine andere Interferenzerscheinung wurde in den Phil. Tr. von 1815 von J. Knox beschrieben, nämlich die Streifen, welche bei schräger Betrachtung der Newton-schen Gläsercombination sich zeigen und senkrecht zur Einfallsebene verlaufen. Später hat van der Willigen dieselben genauer untersucht und gezeigt, dass die dabei interferirenden Strahlen eine Reflexion an der vorderen Fläche der Linse erlitten haben (Pogg. Ann. 123, pag. 558. 1864; s. auch die Arbeiten von Stefan, Wien. Sitzb. 50 (2), pag. 135 u. 394; Pogg. Ann. 123, pag. 650. 1864, u. Mach., Wien. Sitzb. 67 (2), pag. 371; Pogg. Ann. 150, pag. 625. 1873).

Die Entdeckung der Polarisation des Lichts durch Reflexion von Malus im Jahre 1808 regte zu Versuchen in dieser Richtung an und so beschäftigte sich auch Arago in einer im Jahre 1811 der franz. Akademie vorgelegten Abhandlung (gedruckt erst 1817 in den Mém. d'Arcueil) mit dem Einfluss der Polarisation auf die Erscheinung der Newton'schen Ringe, sowohl wenn dieselben durch die Luftschicht zwischen zwei Glasflächen als auch zwischen einer Glas- und einer Metallfläche erzeugt wurden. Es mag gleich hier bemerkt werden, dass dieser Einfluss später (1832) von Airy genauer untersucht und theoretisch erklärt wurde.

Ohne anfangs die Arbeiten Thomas Young's zu kennen, war Fresnel im

Jahre 1815 zu der gleichen Erklärung der NEWTON'schen Ringe gelangt (s. Oeuv. compl. I, pag. 32, 51 ff.). Zwar blieb ihm auf diesem Gebiet kein so fundamentaler Schritt zu thun übrig wie in der Theorie der Beugung, allein es waren seine Arbeiten doch nicht nur durch ihre sorgfältigere Behandlung und ihr genaueres Eingehen auf die Einzelheiten der Erscheinung von grosser Bedeutung für die allmähliche Anerkennung der Richtigkeit von YOUNG's Erklärung, sie fügten auch manches Neue hinzu und legten namentlich durch die (gemeinschaftlich mit ARAGO ausgeführte) Untersuchung des Einflusses polarisirter Strahlen aufeinander und die Aufstellung der Reflexionsformeln für polarisirtes Licht den Grund zu einer wesentlichen Vervollständigung der Theorie.

Einen Punkt in der Erklärung der Interferenzen dünner Blättchen hob POISSON (1823) hervor, indem er bemerkte, dass zur Erklärung der tiefen Schwärze der dunkeln Streifen die Berücksichtigung der mehrmals im Innern der Platte reflektirten Strahlen erforderlich sei, und FRESNEL zeigte bald darauf, dass die Entwicklung POISSON's einfacher und allgemeiner geführt werden könne (Oeuv. compl. II, pag. 247).

Das Bestreben, Versuchsanordnungen aufzufinden, welche noch unwidersprechlicher als die Beugungserscheinungen und die Farben dünner Blättchen die gegenseitige Einwirkung der Lichtstrahlen, wie sie in dem Interferenzprincip ausgesprochen ist, beweisen, führte FRESNEL zu seinem berühmten Spiegelversuch. Angekündigt wurde derselbe zuerst von ARAGO 1816 im Märzheft der Annales de chimie et de physique und von FRESNEL genauer beschrieben in einer im Juli desselben Jahres der Akademie eingereichten Abhandlung (Oeuv. compl. I, pag. 150). Später kommt FRESNEL noch einmal in seiner Preisschrift über die Diffraction vom Jahre 1819 darauf zurück, fügt den ähnlichen Versuch mit dem Doppelprisma hinzu und benutzt die Messungen an beiden Apparaten zur Bestätigung der durch Beugungsversuche erhaltenen Wellenlängenbestimmungen. (Mém. de l'Acad. des sc. T. V. pag. 416, Oeuv. compl. I. pag. 327 ff.). Ein Interferenzversuch mit drei Spiegeln ist endlich hier noch zu erwähnen, durch welchen der Verlust einer halben Wellenlänge bei der Reflexion an Glas in Luft für beliebige Einfallswinkel nachgewiesen wird (Ann. de chim. et de phys. 15, pag. 382. 1820; Mém. de l'Acad. des sc. T. XX, pag. 209; Oeuv. compl. I, pag. 687 u. 702).

Nachdem wir die Arbeiten aus der Zeit der Begründung der Lehre von der Interferenz des Lichtes eingehender besprochen haben, können wir uns weiterhin kürzer fassen, zumal wir Vieles bei der Behandlung der einzelnen Erscheinungen genauer zu erörtern haben.

Neue Interferenzerscheinungen sind in der Folge nur in verhältnissmässig kleiner Zahl beschrieben worden. In die erste FRESNEL'sche Zeit gehört noch die von BREWSTER 1817 entdeckte, welche durch zwei gleiche ein wenig gegen einander geneigte planparallele Platten erzeugt wird. JAMIN hat sich später damit beschäftigt und seinen Interferentialrefractor darauf gegründet; er hat auch mehrere Modifikationen des Versuchs angegeben, bei welchen unter Zurückführung der Strahlen dieselbe Platte zweimal benutzt wird, und MASCART und LUMMER haben diese Fälle eingehender behandelt. — Im Jahre 1837 hat LLOYD seinen Versuch ausgeführt, bei welchem direkt von der Lichtquelle kommende Strahlen mit solchen interferiren, welche einmal an einem Spiegel unter fast streifendem Einfall reflektirt sind. — HAIDINGER hat 1849 den interessanten Specialfall der Interferenzen dünner Blättchen, wobei die dünne Schicht durch parallele Flächen begrenzt wird und auf unendliche Entfernung accommodirt werden muss, um die Streifen deutlich zu sehen, bei Glimmerblättchen entdeckt

und beschrieben, ohne die Erklärung desselben geben zu können. — Im Jahre 1858 hat BILLET die Anwendung der Halblinsen und JAMIN in seinem Cours de physique die häufig nach FIZEAU benannten gleichen gegen einander geneigten Glasplatten zur Erzeugung von Interferenzerscheinungen angegeben, welche denen der FRESNEL'schen Spiegel ähnlich sind. — Von A. A. MICHELSON rührt die Angabe mehrerer neuer Erscheinungen her. Er hat 1881 einen Versuch beschrieben, bei welchem die durch Reflexion und Durchgang in einer Glasplatte getrennten Strahlenbündel von senkrecht gegen sie gestellten Spiegeln zurückgeworfen und zum Zusammenwirken gebracht werden. Bei einem andern 1886 in Gemeinschaft mit MORLEY angewandten Verfahren werden die Spiegel nicht senkrecht gegen die auffallenden Strahlenbündel, sondern so gestellt, dass diese nach der Reflexion parallel zu einander verlaufen; ein Reflexionsprisma lenkt dann jedes auf die Bahn des andern hinüber, sodass die beiden Bündel von der Trennung bis zur Wiedervereinigung denselben Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Auch eine Modifikation des FRESNEL'schen Spiegelversuchs hat MICHELSON 1890 angegeben, bei welcher die Spiegel nahe senkrecht zu einander aufgestellt werden. — Eine der BREWSTER'schen Interferenzerscheinung nahe verwandte, bei welcher die beiden Platten einen beliebigen Winkel bilden können, aber die Halbirungsebene desselben durch die von der einen zur andern Platte gehenden Strahlen nahe senkrecht getroffen werden muss, hat O. LUMMER 1885 behandelt. — In der letzten Zeit endlich (1890) ist durch O. WIENER eine ganz neue, von den bisher bekannten wesentlich verschiedene Klasse von Interferenzerscheinungen aufgefunden worden, die nicht wie die bisherigen von nahe in der gleichen Richtung sich bewegenden Strahlen, sondern von gerade entgegengesetzten erzeugt werden, und die man als stehende Lichtschwingungen bezeichnen kann.

Von Bearbeitungen früher entdeckter Erscheinungen sind ausser den bereits angeführten noch die folgenden zu nennen. TALBOT hat 1836 die HERSCHEL'schen Streifen, BREWSTER 1838 die Interferenzen gemischter Blättchen untersucht; DE LA PROVOSTAYE und DESAINS haben 1849 die Verbreiterung der NEWTON'schen Ringe mit Vergrösserung des Einfallswinkels gemessen, QUINCKE hat 1867 den JAMIN'schen Interferentialrefractor und 1871 FRESNEL's Drei-Spiegel-Versuch und den LLOYD'schen Versuch bearbeitet, MASCART hat 1871 eine zusammenfassende Abhandlung veröffentlicht, darin u. A. auch die HAIDINGER'schen Ringe behandelt, die LUMMER 1884 nochmals eingehender bearbeitet hat. L. SOHNCKE hat 1881 eine sorgfältige Experimentaluntersuchung über die NEWTON'schen Ringe, 1883 eine solche über die Streifen keilförmiger Blättchen erscheinen lassen.

In der theoretischen Erklärung unserer Erscheinungen hat man sich lange mit dem Grad der Annäherung an die Wirklichkeit begnügt, welchen die ersten Begründer der Interferenztheorie, YOUNG und FRESNEL, inne gehalten hatten. Da es aber dann nicht möglich ist, manche selbst bei einer oberflächlichen Beobachtung in die Augen fallenden Eigenthümlichkeiten der Erscheinungen abzuleiten, so hatte man gewisse vermeintliche »experimentelle Thatsachen« aus den Beobachtungen als weitere Grundlagen für die Erklärungen entnommen oder auch wohl plausibel erscheinende Annahmen über den Verlauf der zusammenwirkenden Strahlen ohne nähere Begründung gemacht. Dabei hatte man aber fehlgegriffen, indem man Wahrnehmungen, die nur in besonderen Fällen richtig waren, verallgemeinerte, und so ein unrichtiges in sich widerspruchsvolles Bild geschaffen, das einen genaueren Vergleich mit der Natur nicht ertragen konnte. Manche so erhaltene Vorstellung, z. B. die, dass der Ort der Streifen dünner

Blättchen die vordere Fläche dieser selbst sei, hatte sich so festgesetzt und schien sich zur Vereinfachung der Betrachtungen so sehr zu empfehlen, dass dadurch der erste Versuch (WANGERIN 1867), in der Erklärung der NEWTON'schen Ringe einen weiteren Schritt zu thun, vereitelt wurde. — Die theoretische Ableitung unserer Erscheinungen ist ausser auf die Sätze über das Zusammenwirken der Strahlen nur zu gründen auf die Sätze der geradlinigen Fortpflanzung, der Brechung und der Reflexion des Lichts nebst den Sätzen über die Phasenänderung hierbei und auf den Grundsatz der Interferenzlehre, dass nur Strahlen interferiren können, die von einem und demselben Punkt der Lichtquelle ausgegangen sind. Dazu kommen in jedem einzelnen Fall die physikalischen und geometrischen Bestimmungsstücke der Apparate und ihrer gegenseitigen Lage. In dieser Weise habe ich 1880 zuerst (mit mehreren Fortsetzungen in 1881, 82 u. 88) die Interferenzerscheinungen dünner Blättchen behandelt, indem ich den Gangunterschied zweier interferirender Strahlen genauer berechnete, als es bisher geschehen war, und daraus die Hauptgesetze über den Ort, die Richtung und Breite der Streifen ableitete. Daran schlossen sich 1881 und 83 Arbeiten von SOHNCKE und WANGERIN, 1882 von MICHELSON, 1889 u. 90 von MACÉ DE LÉPINAY und FABRY an. — Einen besonderen Punkt der Theorie, die Farblosigkeit der Streifen, haben CORNU (1881, 82), HURION (1882), MASCART (1889), Lord RAYLEIGH (1889) und MACÉ DE LÉPINAY und PEROT (1890) bearbeitet.

Die experimentellen Hilfsmittel zum Studium der Interferenzerscheinungen sind im Laufe der Zeit allmählich vervollkommnet worden. Die Erwähnung von besonderen Apparaten gehört nicht hierher, aber über die Methoden zur Herstellung einfarbigen Lichts, das bei sehr vielen Interferenzversuchen erforderlich ist, mögen einige Angaben gemacht werden. Das am allgemeinsten benutzte Mittel, die gelbe Natriumflamme, ist von BREWSTER 1824 angegeben worden (Edinb. phil. Journ. I, pag. 20); um dieselbe für hohe Interferenzen möglichst rein zu erhalten, empfahl FIZEAU 1862 (Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 436), die Flamme einer Mischung von 4 Thln. Holzgeist (Methylalkohol) mit einem Theil absoluten Alkohols, MASCART 1872 (Ann. de l'éc. norm. (2), I, pag. 193) phosphorsaures Natron; ein sehr helles Licht liefert nach E. FLEISCHL v. MARXOW (WIED. Ann. 38, pag. 675. 1889) Bromnatrium. Andersfarbige Flammen werden hauptsächlich durch Lithium- und Thalliumsalze erzeugt, doch stehen sie der Natriumflamme erheblich nach. CORNU gab 1869 an (Compt. rend. 69, pag. 335), dass zum Photographiren der Interferenzcurven der Funke zwischen Magnesiumelektroden eingut monochromatisches Licht liefere ($\lambda = 0{\cdot}000383$ *mm*). E. WIEDEMANN empfahl 1878 (WIED. Ann. 5, pag. 517) die Entladungen in einer Quecksilberdämpfe enthaltenden GEISSLERschen Röhre als eine sehr geeignete Quelle für einfarbiges grünes Licht. GOUY beschrieb 1879 (Ann. de chim. et de phys. (5) 18, pag. 23) ein Verfahren, einfarbige Flammen durch Zufuhr zerstäubter Salzlösungen herzustellen. In neuerer Zeit benutzt man auch zu genauen Messungen das spectral zerlegte Licht GEISSLER'scher Röhren; so hat eine derartige Beleuchtungseinrichtung bei dem ABBE'schen Dilatometer Anwendung gefunden (Katalog über optische Messinstrumente von CARL ZEISS in Jena, pag. 29 ff. 1893).

Zur richtigen Beurtheilung des Aussehens einer Interferenzerscheinung und zur Vergleichung der Rechnungsresultate mit der Beobachtung ist es häufig erforderlich, zu wissen, welche Helligkeitsunterschiede unser Auge an den verschiedenen Stellen des Spectrums wahrzunehmen vermag. Eine hierauf bezügliche Untersuchung hat DOBROWOLSKI 1872 (GRÄFE's Archiv für Ophtalmologie 18, I, pag. 74) ausgeführt.

Um die Interferenzerscheinungen erklären zu können, müssen wir zunächst die Gleichungen aufstellen, welche die Bewegung der Aethertheilchen in einem Lichtstrahl analytisch ausdrücken. Die Undulationstheorie nimmt an, dass die Bewegungen in dem Lichtäther nach einer Störung des Gleichgewichtszustandes in derselben Weise erfolgen, wie in einem elastischen festen Körper[1]), und leitet daraus ab, dass jedes Aethertheilchen periodische Bewegungen ausführt, die als zusammengesetzt aus einer mehr oder weniger grossen Zahl einfacher Schwingungen angesehen werden können. Unter »einfacher Schwingung« wird dabei ein Bewegungszustand verstanden, für welchen die Entfernung (ξ) des Aethertheilchens von seiner Ruhelage immer in derselben Geraden liegt und proportional dem Cosinus oder Sinus einer linearen Function der Zeit ist, also etwa

$$\xi = A \cos(at + b). \tag{1}$$

Die physikalische Bedeutung der in dieser Gleichung enthaltenen Constanten ist leicht anzugeben. Da der Werth des Cosinus zwischen -1 und $+1$ schwankt, so ist der grösste Ausschlag unseres Theilchens nach der einen oder anderen Seite gleich A, und dieses heisst die Amplitude der Schwingung. Da ferner die Werthe des Cosinus immer wieder dieselben werden, wenn sich das Argument desselben durch das Wachsen von t um 2π geändert hat, so können wir die ganze Bewegung in aufeinanderfolgende, genau gleiche Theile zerlegen. Einen solchen Theil nennen wir eine Schwingung des Aethertheilchens; die Dauer T derselben bestimmt sich daraus, dass das Argument des Cosinus um 2π wachsen muss, wenn t um T wächst, also muss sein $T = \frac{2\pi}{a}$ oder $a = \frac{2\pi}{T}$.

Um die Bedeutung von b zu zeigen, müssen wir die Verbreitung der Lichtbewegung im Raum betrachten. Den Ausgangspunkt derselben bilden immer schwingende Körpertheilchen, sie setzen die sie unmittelbar umgebenden Aethertheilchen in Schwingung und von diesen verbreitet sich die Bewegung nach allen Seiten in dem Aether des betreffenden Mittels, indem die folgenden Theilchen immer von den vorhergehenden zu genau ähnlichen und im allgemeinen gleichgerichteten Schwingungen angeregt werden. Ist das Mittel homogen, so geschieht die Fortpflanzung geradlinig; und die gesammte in der von dem leuchtenden Punkt nach einer beliebigen Stelle gezogenen Geraden fortschreitende Bewegung bildet den dahin gehenden Lichtstrahl. Ist das Mittel auch nach allen Seiten hin gleichbeschaffen, isotrop, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen nach allen Richtungen dieselbe; verschieden jedoch im Allgemeinen nach verschiedenen Richtungen, wenn das Mittel anisotrop ist, wie bei Krystallen. Aber auch im letzteren Fall ist in einer bestimmten Richtung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit immer dieselbe, so lange das Mittel homogen bleibt. Nennen wir in einer beliebig gewählten Richtung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V und betrachten einen in ihr um x von dem Ursprung der Bewegung entfernten Punkt, so wird derselbe eine ähnliche

[1]) Damit ist indessen keineswegs gesagt, dass der Aether sich auch im Uebrigen wie ein fester Körper verhalte. Man kann sehr wohl annehmen, dass seine Theilchen eine äusserst leichte Beweglichkeit gegen einander besitzen nach Art der Flüssigkeiten, ja dass sie sich fortwährend so bewegen. Das Wesentliche ist nur, dass in der Wirkungssphäre eines Theilchens sehr viele andere sich befinden und dass während der äusserst kurzen Zeit des Durchgangs einer Lichtbewegung durch die Wirkungssphäre sich die Gleichgewichtslagen der darin enthaltenen Theilchen nicht merklich ändern.

Schwingung ausführen, wie der leuchtende Punkt selbst und sich an den entsprechenden Punkten der Bahn um die Zeit $\frac{x}{V}$ später befinden, welche die Bewegung braucht, um die Strecke x zurückzulegen. Nennen wir also Ausschlag und Amplitude für den leuchtenden Punkt ξ_0 und A_0, für den betrachteten im Abstand x dagegen ξ und A und schreiben die Gleichung für die Schwingungen des leuchtenden Punkts

$$\xi_0 = A_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

was wir durch eine passende Wahl des Zeitanfangs, so dass b verschwindet, immer thun können, so erhalten wir für die Gleichung der Bewegung des Punktes x

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT}\right). \tag{2}$$

Lassen wir x wachsen oder abnehmen bei gleichbleibendem t, so ändert sich auch der Cosinus und wir erhalten immer wieder dieselben Werthe, wenn das Argument des Cosinus um 2π sich geändert hat. Wie wir also die Bewegung desselben Punktes in zeitlich aufeinander folgende gleiche Stücke von der Zeitdauer T zerlegen konnten, so können wir auch jetzt für einen und denselben Zeitpunkt den in einem Lichtstrahl vorhandenen Bewegungszustand in gleichlange, räumlich aufeinanderfolgende Stücke theilen, in welchen, wenn wir von der möglichen Veränderlichkeit der Amplitude absehen, die Ausschläge in genau derselben Art und Grösse sich wiederholen. Diese Stücke des Strahls nennen wir Wellen und bezeichnen ihre Länge durch λ. Nach dem Gesagten ergiebt sich alsdann, da ξ immer denselben Werth erhalten muss, wenn x in $x +$ oder allgemein in $x + n\lambda$, worin n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, übergeht, aus Gleichung (2)

$$\lambda = VT, \tag{3}$$

d. h. λ ist die Strecke, um welche sich die Lichtbewegung in der Zeit einer Schwingung fortpflanzt, was auch leicht direkt einzusehen ist. Damit wird Gleichung (2)

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Die Amplitude A nimmt im Allgemeinen ab mit Zunahme der Entfernung vom leuchtenden Punkt; wenn man indessen nur Wegunterschiede betrachtet, die gegen den Abstand von der Lichtquelle verschwinden, so darf man diese Aenderung vernachlässigen. Bei den Interferenzerscheinungen ist das immer der Fall, wir werden sie daher im Folgenden nicht berücksichtigen. Aus (4) ergiebt sich für die Geschwindigkeit $u = \frac{d\xi}{dt}$ eines Aethertheilchens in seiner Bahn

$$u = -\frac{2\pi A}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Wenn ein Lichtstrahl auf seinem Wege von dem leuchtenden zu dem betrachteten Punkt verschiedene Mittel durchläuft und seine Wellenlänge und Geschwindigkeit im ersten x_1 und V_1, im zweiten x_2 und V_2 u. s. w. sind, so ist die Zeit, um welche der betrachtete Punkt in seinen Schwingungen gegen den Ausgangspunkt zurück ist, $\frac{x_1}{V_1} + \frac{x_2}{V_2} \ldots$, daher tritt an die Stelle der Gleichung (2) die folgende

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{V_1 T} - \frac{x_2}{V_2 T} - \ldots\right). \tag{2a}$$

und wenn wir die Wellenlängen in den aufeinander folgenden Mitteln durch λ_1, λ_2 . . . bezeichnen

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2} - \ldots \right). \tag{4a}$$

Die Gleichungen (4) und (4 a) zeigen die Bedeutung der Constante b in Gleichung (1).

Die Beobachtungen lehren, dass die Ausschläge der Aethertheilchen senkrecht auf dem Strahl stehen, die Schwingungen transversale sind. In krystallinischen Mitteln ergeben sich im allgemeinen für jeden Strahl nur zwei auf einander senkrechte transversale Schwingungsrichtungen als möglich, deren Lage von der Struktur des Mittels abhängt und welche sich durch die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit der in ihnen schwingenden Strahlen unterscheiden. In einem solchen Mittel geschehen also die Ausschläge der Theilchen eines Strahles in einer bestimmten durch denselben gehenden Ebene, sie haben eine feste Richtung im Raum. Derartige Strahlen nennt man polarisirt, und zwar, da die Schwingungen geradlinig sind, geradlinig polarisirt. Bei isotropen Mitteln ist eine jede auf dem Strahl senkrechte Richtung als Schwingungsrichtung möglich, und die natürlichen Lichtstrahlen, wie sie von den leuchtenden Körpern ausgehen, enthalten auch alle diese Richtungen in sich, doch kann ihnen durch bestimmte Behandlungsweisen dieselbe Seitlichkeit gegeben werden, wie sie die Strahlen in anisotropen Mitteln haben; sie können polarisirt werden. Ueber die Beschaffenheit des natürlichen Lichtes und die Art des Vorkommens der verschiedenen Schwingungsrichtungen in demselben macht man sich die Vorstellung, dass nicht etwa in benachbarten Punkten eines Strahles die Ausschläge ganz verschieden gerichtet seien, sondern dass eine Zeitlang von jedem leuchtenden Punkt merklich gleichgerichtete, polarisirte Schwingungen ausgegeben werden und in diesen dann plötzlich oder allmählich eine Richtungsänderung eintrete. Gewisse Beobachtungen über Interferenzen bei hohen Gangunterschieden scheinen zu beweisen, dass viele tausend Schwingungen regelmässig und gleichgerichtet einander folgen können, ehe eine Aenderung eintritt. Ueber die Natur der Aenderungen im Schwingungszustand der leuchtenden Punkte wissen wir noch nichts Näheres. Dieser Vorstellung gemäss haben wir uns das Zusammenwirken zweier von demselben Punkt ausgegangener Strahlen natürlichen Lichts, wenn dieselben keine zu grossen Wegunterschiede besitzen, nicht anders als das zweier gleichgerichteter polarisirter Strahlen zu denken, keineswegs aber gilt dies für von verschiedenen Punkten ausgegangene Strahlen. Denn zwei in merklicher Entfernung von einander gelegene Punkte einer Lichtquelle denken wir uns als gänzlich von einander unabhängige Schwingungsmittelpunkte, sodass die Schwingungsrichtungen zweier von denselben ausgegangener Strahlen in dem einen Augenblick einen anderen Winkel mit einander bilden als im folgenden und dass dies in ganz regelloser Weise wechselt. Da keine Richtung vor der anderen bevorzugt ist, so ist die Wirkung dieselbe, als ob die Strahlen in kurzen Zeitabschnitten alle möglichen Stellungen gegen einander und gegen eine feste Richtung gleichmässig durchliefen.

Ausser den im Vorstehenden besprochenen geradlinig polarisirten Strahlen unterscheidet man noch elliptisch und kreisförmig polarisirte, bei welchen die aufeinander folgenden Aethertheilchen gleiche und gleichgelegene elliptische resp. kreisförmige Bahnen beschreiben, und sich in solcher Lage aneinanderreihen, dass ihre Projection auf eine dem Strahl parallele Ebene einen linear polarisirten Strahl darstellen würde. Wir werden gleich sehen, dass diese Strahlen sich aus zwei geradlinig polarisirten zusammensetzen lassen.

Die Intensität des Lichts kann man definiren als die mittlere lebendige Kraft der in der Raumeinheit enthaltenen Aethermasse. Ist m die Masse eines Aethertheilchens, so ist $\frac{1}{2}mu^2$, worin u die Geschwindigkeit bedeutet, seine lebendige Kraft. Sie ist veränderlich mit dem in u enthaltenen Sinus; für die Wirkungen des Lichts in einer Zeit $\mathfrak{T}$, die wir als sehr gross gegen die Schwingungsdauer T annehmen, kommt es aber auf den Mittelwerth der lebendigen Kraft in dieser Zeit an. Wenn wir $\mathfrak{T} = nT + \tau$ setzen, worin n eine sehr grosse ganze Zahl und τ einen Bruchtheil von T bedeutet, so ist dieser Mittelwerth gleich

$$\frac{\frac{1}{2}m}{nT+\tau} \cdot \int_0^{nT+\tau} u^2 dt.$$

Wir wollen ihn zunächst für geradlinig polarisirte Strahlen bestimmen. Wie aus der durch Gleichung (5) gegebenen Bedeutung von u leicht folgt, ist

$$\int_0^{nT+\tau} u^2 dt = n\int_0^T u^2 dt + \int_0^\tau u^2 dt.$$

Hierin ist das zweite Glied auf der rechten Seite sehr klein gegen das erste; vernachlässigen wir es und ebenso τ gegen nT, so erhalten wir für den Mittelwerth der lebendigen Kraft eines Aethertheilchens im geradlinig polarisirten durch die Gleichung (4) dargestellten Strahl

$$\frac{1}{2}\frac{m}{T}\int_0^T u^2 dt = \frac{2m}{T}\left(\frac{\pi A}{T}\right)^2 \int_0^T sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) dt = m\left(\frac{\pi A}{T}\right)^2.$$

Der Ausdruck für die Intensität wird daher nach der gegebenen Definition, wenn M die Masse des Aethers in der Raumeinheit bedeutet $M\left(\frac{\pi A}{T}\right)^2$.

Für elliptisch polarisirte Strahlen sind, wie wir sehen werden, die einfachsten Gleichungen, wenn ξ und η die Ausschläge der Aethertheilchen nach zwei auf einander und der Richtung des Strahls senkrechten Axen bedeuten,

$$\xi = A\, cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right), \qquad \eta = B\, sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right);$$

darin sind A und B die Halbachsen der elliptischen Bahnen, welche die Theilchen beschreiben. Da das Quadrat der Geschwindigkeit gleich $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$ ist, so hat man

$$u^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left[A^2 sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) + B^2 cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

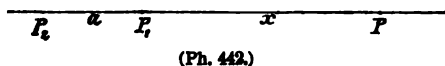
Führt man die Rechnung ganz wie oben und beachtet, dass

$$\int_0^T sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) dt = \int_0^T cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) dt = \frac{T}{2},$$

so erhält man als Ausdruck für die Intensität $M\frac{\pi^2(A^2+B^2)}{T^2}$. Dieselbe ist also für geradlinig polarisirtes Licht dem Quadrat der Amplitude, für elliptisch polarisirtes der Summe der Quadrate der Halbachsen proportional.

Mittelst der im Vorigen aufgestellten Formeln können wir nun auch das Zusammenwirken von zwei und mehr Strahlen untersuchen. Die Grundlage dafür ist das Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen, welches ausspricht, dass, wenn ein Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen auszuführen hat, die

resultirende Verrückung immer erhalten wird, wenn man die für den betreffenden Augenblick den einzelnen Bewegungen zukommenden Ausschläge nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Verschiebungen zusammensetzt oder mit anderen Worten, dass die nach beliebiger Richtung genommenen Componenten der Bewegungen sich einfach addiren. Wir wollen zuerst den einfachsten Fall behandeln, zwei zusammenfallende geradlinig polarisirte Strahlen, deren Schwingungen dieselbe Richtung und Dauer besitzen. Es seien (Fig. 442) P_1 und P_2 zwei um a von einander abstehende leuchtende Punkte und es soll die Bewegung des um x von P_1 entfernten Punktes P untersucht werden. Die Zeit werde gerechnet von einem Augenblick an, wo P_1 seinen grössten positiven Ausschlag besitzt, dann ist nach Gleichung (4) der Ausschlag ξ_1, welchen P_1 im Punkte P hervorruft



(Ph. 442.)

$$\xi_1 = A_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{6a}$$

Ein von P_2 ausgehender Impuls braucht die Zeit $\frac{a+x}{V}$ um nach P zu gelangen; ist nun, wie wir annehmen wollen, die Schwingungsbewegung von P_2 um τ gegen die von P_1 zurück, so ist die von P_2 in P erregte Bewegung um $\tau + \frac{a+x}{V}$ gegen P_1 zurück, d. h. die Phase, welche in Folge dieser Bewegung P zur Zeit t hat, hat P_1 zur Zeit $t - \frac{x+a+V\tau}{V}$ gehabt. Nennen wir also ξ_2 den Ausschlag von P durch diese Bewegung und setzen $a + V\tau = \delta$, so besteht die Gleichung

$$\xi_2 = A_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right). \tag{6b}$$

Schwingen die Punkte mit gleicher Phase, ist also $\tau = 0$, so ist δ gleich der Wegdifferenz (a) der beiden Strahlen.

Die Ausschläge ξ_1 und ξ_2 sind gleichgerichtet, daher ist der resultirende Ausschlag ξ ihre Summe

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right).$$

Dies kann folgendermaassen vereinfacht werden. Es ist

$$\xi = \left(A_1 + A_2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A_2 \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

führen wir nun zwei neue Constante ein mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} &= A \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \\ A_2 \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} &= A \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}, \end{aligned} \tag{7}$$

so wird

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right). \tag{8}$$

Daraus ergiebt sich, dass das Resultat des Zusammenwirkens der beiden linear polarisirten Strahlen (6a) und (6b) wieder ein linear polarisirter Strahl mit derselben Schwingungsdauer ist, der von einem um D von P_1 aus rückwärts gelegenen Punkt ausgehend betrachtet werden kann und eine Amplitude A besitzt, für welche sich aus (7) die Gleichung

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \tag{9}$$

ableiten lässt. In dem besonderen Fall, dass die beiden Amplituden A_1 und A_2 einander gleich sind, ergiebt sich:

$$A^2 = 4 A_1^2 \cos^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}. \tag{9a}$$

Ist die Phasendifferenz $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ der ursprünglichen Strahlen ein gerades Vielfaches von π, also δ ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, so erhält nach der letzten Gleichung die Amplitude A ihren grössten Werth, nämlich $A_1 + A_2$, ist δ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, so wird die Amplitude des resultirenden Strahls ein Minimum $A^2 = (A_1 - A_2)^2$; ist δ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$, so wird die trigonometrische Function in Gleichung (6b) $\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ und da dann $A^2 = A_1^2 + A_2^2$ ist, die Gesammtintensität gleich der Summe der Einzelintensitäten. Waren die Amplituden A_1 und A_2 der beiden Strahlen einander gleich, so erhält für $\delta = 2m \cdot \frac{\lambda}{2}$ die Amplitude des resultirenden Strahls den doppelten, die Intensität also nach dem oben Gesagten den vierfachen Werth wie bei den ursprünglichen Strahlen, für $\delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$ aber wird Amplitude und Intensität Null. Die Strahlen heben sich vollständig auf.

Leuchtende Punkte von den Eigenschaften, wie wir sie für P_1 und P_2 vorausgesetzt haben, können freilich in Wirklichkeit nicht existiren; wenn auch einmal die Schwingungen zweier Punkte nach derselben Richtung vor sich gehen, so müssen doch die fortwährend eintretenden Aenderungen im Schwingungszustand, welche bei von einander unabhängigen Punkten verschieden sein werden, bewirken, dass das im nächsten Augenblick nicht mehr der Fall ist. Aber wir können dadurch, dass wir von einem und demselben leuchtenden Punkt zwei reelle oder virtuelle Bilder entwerfen, künstlich Punkte von den verlangten Eigenschaften erzeugen. In der That wird jede Aenderung in den Bildern gleichzeitig und in gleicher Weise eintreten, und so werden unsere Voraussetzungen immer erfüllt sein. Wir werden in der Folge eine Reihe von Beispielen hierfür kennen lernen.

Dass die beiden Strahlen, wie wir angenommen hatten, zusammenfallen, ist nicht nothwendig; nur dürfen sie keinen zu erheblichen Winkel mit einander bilden. Schneiden sich nämlich zwei interferirende Strahlen unter grossem Winkel, so werden sie im allgemeinen auch in beträchtlich verschiedener Richtung vom leuchtenden Punkt ausgegangen sein, solche Strahlen aber scheinen nicht mehr den gleichen Schwingungszustand zu besitzen. Doch liegen zu einem sicheren Urtheil hierüber noch nicht genügende Beobachtungen vor. Ferner aber werden wir sehen, dass in diesem Fall die abwechselnden Stellen von Helligkeit und Dunkelheit so nahe zusammenrücken, dass sie nicht mehr einzeln unterschieden werden können, womit die Möglichkeit aufhört, die abgeleiteten Gesetze zu prüfen.

Ebenso wie wir die Wirkung zweier Strahlen von gleicher Schwingungsrichtung und Schwingungsdauer bestimmt haben, können wir die von beliebig vielen solcher Strahlen finden. Es seien $P_0, P_1, P_2, P_3 \ldots.$ Punkte, von denen Schwingungen der gedachten Art ausgehen, deren Wirkung auf einen von allen in nahe derselben Richtung gelegenen Punkt P untersucht werden soll.

Die Ausschläge, welche die leuchtenden Punkte einzeln erzeugen, seien entsprechend $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$, dann haben wir, wenn die Entfernung $P_0\,P$ gleich x ist, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise den Gleichungen (6) entsprechend

$$\begin{aligned}\xi_0 &= A_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ \xi_1 &= A_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+\delta_1}{\lambda}\right)\\ \xi_2 &= A_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+\delta_2}{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

und daraus folgt der Gesammtausschlag in P

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0+\xi_1+\xi_2+\ldots &= \left(A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots\right) \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\ &+ \left(A_1 \sin 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots\right) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Wenn wir

$$\begin{aligned}A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots &= A \cos 2\pi \frac{D}{\lambda}\\ A_1 \sin 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots &= A \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}\end{aligned} \tag{11}$$

setzen, erhalten wir wieder

$$\xi = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+D}{\lambda}\right), \tag{12}$$

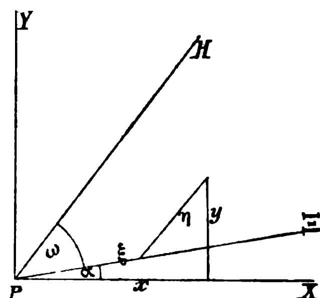
eine Schwingung, deren Phase und Amplitude sich aus den Gleichungen (11) ergiebt. Letztere wird

$$\begin{aligned}A^2 &= \left(A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots\right)^2\\ &+ \left(A_1 \sin 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{\delta_2}{\lambda} + \ldots\right)^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Wir wollen nun zwei zusammenfallende linear polarisirte Strahlen von gleicher Schwingungsdauer betrachten, deren Schwingungsrichtungen einen beliebigen Winkel ω mit einander bilden. Die Ausschläge des einen nennen wir ξ, die des andern η; die Gleichungen derselben können wir schreiben

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}}{\lambda}\right)\\ \eta &= b \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}+\delta}{\lambda}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

wenn wir die Entfernung auf der Strahlrichtung von einem festen Punkt aus hiermit $\mathfrak{x}$ bezeichnen.



(Ph. 443.)

Durch Elimination von t aus denselben bekommen wir die Bahn, welche die Aethertheilchen beschreiben, bezogen auf das schiefwinklige Coordinatensystem der ξ und η mit dem Axenwinkel ω:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{2\xi\eta}{ab}\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{\delta}{\lambda}. \tag{15}$$

Es ist das die Gleichung einer Ellipse; wir wollen sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem transformiren. Zu dem Ende denken wir uns eine Eben e senkrecht zum Strahl durch den Punkt P, welcher der Abscisse $\mathfrak{x}$ entspricht, hindurchgelegt, es sei das die Ebene der Fig. 443. $P\Xi$ sei die Richtung der Vibrationen des einen Strahls, PH des andern. Wir führen nun ein vorläufig

beliebig gerichtetes rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt P ein; der Winkel, welchen die Richtung $P\Xi$ mit der X-Axe bildet, werde α genannt, dann gelten die Transformationsgleichungen

$$\xi \sin \omega = x \sin(\omega + \alpha) - y \cos(\omega + \alpha)$$
$$\eta \sin \omega = - x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Setzen wir diese Werthe von ξ und η in (15) ein, so bekommen wir die Gleichung der Ellipse auf das rechtwinklige Coordinatensystem bezogen. Wir wollen nun α so bestimmen, dass die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen. Dazu haben wir den Coëfficienten von xy gleich Null zu setzen, was die Gleichung

$$\frac{\sin(\omega+\alpha)\cos(\omega+\alpha)}{a^2} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{b^2} + \frac{\sin(\omega+2\alpha)}{ab}\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 0$$

oder

$$A \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha = 0 \tag{16}$$

giebt, worin

$$A = 2\frac{\sin\omega}{a}\left(\frac{\cos\omega}{a} + \frac{\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{b}\right)$$
$$B = 2\frac{\cos\omega}{a}\left(\frac{\cos\omega}{a} + \frac{\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{b}\right) + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \tag{17}$$

gesetzt ist, und welche, wenn man noch bestimmt, dass die X-Axe mit der grossen Axe der Ellipse zusammenfallen soll, sich genauer durch die zwei Gleichungen

$$\sin 2\alpha = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \cos 2\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{16a}$$

ersetzen lässt. Mittelst dieser Werthe geht nach einigen leichten Umformungen, wenn man noch zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2\cos\omega\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{ab} \tag{18}$$

setzt, die Gleichung (15) in die folgende über

$$(C - \sqrt{A^2+B^2})x^2 + (C + \sqrt{A^2+B^2})y^2 = 2\sin^2\omega\sin^2 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

und da

$$C^2 - (A^2+B^2) = \frac{4\sin^2\omega\sin^2 2\pi\frac{\delta}{\lambda}}{a^2b^2}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{x^2}{C+\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{y^2}{C-\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{a^2b^2}{2}. \tag{19}$$

Die Quadrate der grossen und der kleinen Axe sind demnach

$$\frac{a^2b^2}{2}(C+\sqrt{A^2+B^2}) \quad \text{und} \quad \frac{a^2b^2}{2}(C-\sqrt{A^2+B^2}). \tag{20}$$

Durch diese Gleichungen und (16a) sind Gestalt und Lage der Bahnellipse der Aethertheilchen gegen die ursprünglich gegebenen Strahlen vollständig und eindeutig bestimmt.

Die Bewegungsrichtung der Aethertheilchen ergiebt sich am einfachsten aus Gleichung (14). Dieselben werden sich von der positiven Ξ-Axe nach der positiven H-Axe hin oder umgekehrt bewegen je nachdem η wächst oder abnimmt, wenn $\xi = a$ ist. Nun ist nach Gleichung (14)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\pi b}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x} + \delta}{\lambda}\right)$$

und für $\xi = a$ wird dies

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{2\pi b}{T} \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Es wächst also η oder nimmt ab, und damit ist eine Bewegung gegen die Uhrzeiger oder mit denselben (von einem in der Fortpflanzungsrichtung des Strahls gelegenen Punkt aus gesehen) vorhanden, je nachdem

$$2m \cdot \frac{\lambda}{2} < \delta < (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{oder} \quad (2m-1)\frac{\lambda}{2} < \delta < 2m \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Soll der resultirende Strahl wieder geradlinig polarisirt sein, so muss die kleine Axe der Ellipse verschwinden. Dies tritt dem zweiten der Ausdrücke (20) gemäss, abgesehen von dem selbstverständlichen Fall $\sin \omega = 0$, nur dann ein, wenn $\sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ Null, d. h. die Phasendifferenz der beiden Strahlen ein Vielfaches von π oder $\delta = m\frac{\lambda}{2}$ ist. Die Gleichung (15) zeigt, dass der entstehende geradlinig polarisirte Strahl in dem Winkel ω oder ausserhalb desselben liegt, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, denn im ersten Fall geht dieselbe über in

$$\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} = 0,$$

im letzteren in

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} = 0.$$

Die Bahnellipse geht in einen Kreis über, der Strahl wird kreisförmig polarisirt, wenn die beiden Halbaxen einander gleich werden, dazu muss nach den Ausdrücken (20) $A = 0$ und $B = 0$ sein; das erfordert aber nach den Gleichungen (17):

$$a = b \quad \text{und} \quad \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = -\cos \omega \quad \text{oder} \quad \delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\omega}{2\pi}\lambda,$$

die ursprünglichen Strahlen müssen also gleiche Amplitude und den angegebenen Gangunterschied besitzen. Sind die Strahlen senkrecht aufeinander, so muss letzterer $(4m \pm 1)\frac{\lambda}{4}$ sein. Die Rotationsrichtung bestimmt sich aus der oben gemachten allgemeinen Bemerkung und ist danach der Bewegung der Uhrzeiger entgegen oder gleich gerichtet, je nachdem das obere oder untere Vorzeichen gilt.

Wird $a = b$ genommen, während die Phasendifferenz willkürlich bleibt, so ergiebt sich aus den Gleichungen (17) und (16a), dass die grosse Axe der entstehenden Ellipse in der Halbirungslinie des Winkels ω liegt oder senkrecht dazu, je nachdem $\cos\omega + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ positiv oder negativ ist. —

Wenn man jeden der Strahlen (14) in zwei Componenten nach der X- und Y-Axe zerlegt und die gleichgerichteten zusammensetzt, so erhält man zwei Strahlen, für welche nach (9) die Quadrate der Amplituden sind

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{a^2 b^2}{2}\left(C + \sqrt{A^2 + B^2}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}^2 = \frac{a^2 b^2}{2}\left(C - \sqrt{A^2 + B^2}\right).$$

Für ihre Phasendifferenzen gegen den ersten Strahl (14) ergeben sich nach (7) die Gleichungen

$$tang\, 2\pi \frac{\mathfrak{D}}{\lambda} = \frac{b \cos(\omega + \alpha) \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}}{a \cos \alpha + b \cos(\omega + \alpha) \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}}$$

und

$$tang\, 2\pi \frac{\mathfrak{D}'}{\lambda} = \frac{b \sin(\omega + \alpha) \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}}{a \sin \alpha + b \sin(\omega + \alpha) \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}};$$

da nach (16) das Produkt dieser beiden Ausdrücke gleich -1 ist, so folgt

$$2\pi \frac{\mathfrak{D}}{\lambda} - 2\pi \frac{\mathfrak{D}'}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{D}' = \frac{\lambda}{4}$$

und man erkennt, dass die Gleichungen für die nach den Axenrichtungen schwingenden Strahlencomponenten auf die einfache Form

$$x = \mathfrak{A} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{D}}{\lambda}\right),\ y = \mathfrak{B} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{D}}{\lambda}\right)$$

gebracht werden können, von welcher wir oben (pag. 519) Gebrauch gemacht haben.

Nach dem ebenda gegebenen Ausdruck ist die Intensität elliptisch polarisirter Strahlen gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen multiplicirt mit $\pi_2 \frac{M}{T^2}$, wobei M die in der Raumeinheit enthaltene Aethermasse und T die Schwingungsdauer bedeutet. Unter Anwendung der Ausdrücke (20) finden wir also die Intensität eines elliptisch polarisirten Strahls, der aus zwei linearpolarisirten mit den Amplituden a und b, der Phasendifferenz $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ und dem Winkel ω zwischen der Polarisationsebene entstanden ist, gleich

$$\pi^2 \frac{MC^2 a^2 b^2}{T^2} = \pi^2 \frac{M}{T^2} \left(a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right). \tag{21}$$

Wir haben oben (pag. 515) bemerkt, dass die Wirkung zweier zusammenfallender, von verschiedenen leuchtenden Punkten ausgegangener Strahlen natürlichen Lichtes auf einander dieselbe sei, als ob zwei linear polarisirte Strahlen von gleicher Amplitude alle möglichen Stellungen ihrer Schwingungsebenen gegen einander in kurzen Zeiten gleichmässig durchliefen. Die Intensität, welche zwei solche Strahlen natürlichen Lichts mit den Amplituden a und b erzeugen, wird daher auch erhalten, wenn wir zwei linear polarisirte Strahlen von gleichen Amplituden sich gleichmässig mit verschiedenen Geschwindigkeiten drehen lassen und die mittlere von ihnen hervorgerufene Intensität berechnen. Nennen wir die Winkelgeschwindigkeit des einen Strahls v_1, die (grössere) des andern v_2 und rechnen die Zeit von einem Zusammenfallen der Schwingungsebenen an, so ist der Winkel ω, welchen sie zur Zeit t miteinander bilden, gleich $(v_2 - v_1)t$. Bezeichnen wir die Zeit, in welcher sie zur Anfangsstellung gegen einander zurückkehren, mit $\mathfrak{T}$, so ist dies gleich $\frac{2\pi}{v_2 - v_1}$, und die mittlere Intensität für jede grössere Zeit ist sehr nahe gleich der für $\mathfrak{T}$. Diese ist aber nach der Formel (21) proportional dem Ausdruck

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left[a^2 + b^2 + 2ab \cos(v_2 - v_1) t \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right] dt = a^2 + b^2 +$$

$$\frac{2ab}{\mathfrak{T}} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \int_0^{\mathfrak{T}} \cos(v_2 - v_1) t\, dt.$$

Das rechts noch vorkommende Integral hat aber den Werth Null, sodass die mittere Intensität wird

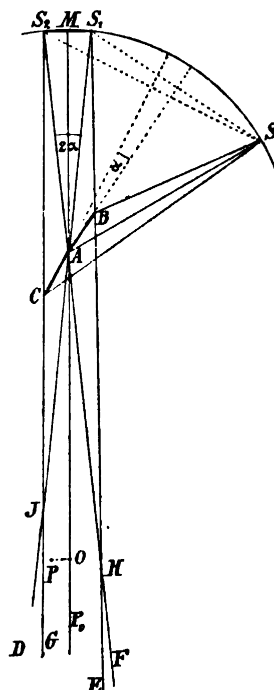
$$M \frac{\pi^2 (a^2 + b^2)}{T^2},$$

worin wie früher M die in der Raumeinheit enthaltene Aethermasse, T die Schwingungsdauer der Strahlen bedeutet. Es ist demnach die Intensität zweier zusammenfallender Strahlen natürlichen Lichts gleich der Summe der Intensitäten der Einzelstrahlen.

Wir gehen jetzt zur Besprechung der einzelnen Interferenzerscheinungen über und behandeln in der oben angegebenen Reihenfolge zunächst die experimentelle Erzeugung und die Theorie derselben.

1. FRESNEL'sche Spiegel.

Den Spiegelversuch hat FRESNEL im Jahre 1816 erdacht, um zu beweisen, dass Lichtstrahlen je nach den Umständen ihres Zusammentreffens sich bald verstärken, bald schwächen, und dass diese Wirkung nicht die Folge irgend einer besondern Modifikation ist, die sie bei der Beugung oder dem Durchgang durch dünne Blättchen, wo man Aehnliches schon früher beobachtet hatte, etwa erlangen könnten. In der That sind hier möglichst einfache Verhältnisse für das Zusammenwirken der Strahlen hergestellt und alles Fremdartige, dem man etwa einen Einfluss auf den Erfolg zuschreiben könnte, möglichst vermieden. FRESNEL ist desshalb mehrmals darauf als auf einen Grundversuch zurückgekommen[1]), und mit Recht hat man ihn als solchen in der Lichtlehre allgemein angenommen. Die Versuchsanordnung ist nun die folgende. Zwei ebene Metall- oder Glasspiegel (letztere auf der Rückseite geschwärzt) werden mit einer geraden Kante genau aneinandergefügt, sodass sie einen Winkel von nahe 180° bilden. Man fängt dann die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen mit denselben auf und untersucht die Erscheinung in dem Theil des Raumes, wo die beiden reflektirten Bündel übereinanderfallen. In Fig. 444, welche die durch den leuchtenden Punkt senkrecht auf den Durchschnitt beider Spiegel gelegte Ebene darstellt, bedeuten AB und AC die Spiegel, welche in B und C ebenfalls durch zwei auf der Ebene der Zeichnung senkrechte Gerade begrenzt gedacht werden mögen, S den leuchtenden Punkt, S_1 das Bild desselben in dem Spiegel AB, S_2 das im Spiegel AC. Das vom Spiegel AB zurückgeworfene Strahlenbündel wird begrenzt von zwei Ebenen, welche bestimmt sind durch je eine der Kanten des



(Fig. 444.)

[1]) Die Stellen, an denen FRESNEL den Versuch behandelt, sind die folgenden: Supplém. au mém. sur la diffraction de la lumière, prés à l'Ac. des sc. 15. juill. 1816. Oeuv. compl. I, 150. — Note sur les franges prod. par deux miroirs. Oeuvr. compl. I, pag. 186. — Mém. sur la diffraction de la lumière. Mém. de l'Ac. des sc. T. V, pag. 414 ff. 1826. Oeuvr. compl. I, pag. 325 ff. (POGG. Ann. 30, pag. 183 ff.) — Système de chimie par TH. THOMSON trad. p. RIFFAULT, Supplém. 1822; Oeuvr. compl. II, pag. 17 ff., 52 ff. — (POGG. Ann. 3, pag. 104; 5, pag. 224.)

Spiegels in A und B und den Punkt S_1, ihre Spur in unserer Zeichnung bilden die Linien AD und BE; ebenso wird das von AC zurückgeworfene Bündel begrenzt von den zwei jedesmal durch die Kanten dieses Spiegels in A und C und den Punkt S_2 gehenden Ebenen, deren Spuren AF und CG sind. Die beiden Bündel durchdringen sich gegenseitig innerhalb des Raums, der von den in AD und AF auf der Figur senkrechten Ebenen begrenzt wird. Durch einen jeden Punkt dieses Raumes gehen zwei Strahlen, von welchen der eine von S_1, der andere von S_2 herkommt; daher kann hier und nur hier Interferenz stattfinden. Da die Spiegel jedoch auch in B und C begrenzt sind, so würden bei einigermaassen grösserer Entfernung des leuchtenden Punktes von den Spiegeln nicht nach jedem Punkt des genannten Raums zwei Strahlen gelangen können. Die auf BE und CG senkrechten Ebenen werden in ihn einschneiden, in der Figur sind die betreffenden Stellen durch H und J bezeichnet, und der Durchschnitt des Raums, in welchem Interferenz stattfinden kann, wir wollen ihn kurz den »Interferenzraum« nennen, wird sein $GJAHE$. Gewöhnlich werden die Ebenen BE und CG in der Richtung der fortschreitenden Strahlen divergiren, doch kann bei schmalen, verhältnissmässig stark gegen einander geneigten Spiegeln und sehr schrägem Einfall des Lichts der Fall eintreten, dass sie convergiren, dann läuft der Interferenzraum nach dem Durchschnitt derselben hin keilförmig zu, ist also allseitig begrenzt, und darüber hinaus treten keine Interferenzen regelmässig reflectirten Lichts sondern nur Beugungserscheinungen noch auf.

Die Bildpunkte S_1 und S_2 liegen mit dem leuchtenden Punkt auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt sich in A befindet, der Winkel S_1AS_2 ist gleich 2α, wenn der Winkel der Spiegel selbst α ist. Da nun jeder von S auf einen Punkt des Spiegels AB treffende Strahl ebensolang ist, wie die von S_1 nach seinem Auffallspunkt gezogenen Geraden und dasselbe bezüglich des Spiegels AC und des Punktes S_2 gilt, so können alle reflectirte Strahlen auch bezüglich der von der Lichtquelle an zurückgelegten Weglänge angesehen werden als von den Punkten S_1 beziehungsweise S_2 ausgehend, wobei diese immer als unter einander (und mit S) in gleichem Schwingungszustand befindlich zu denken sind. Man kann daher bei der Bestimmung der Phasendifferenz der zusammentreffenden Strahlen diese von den Punkten S_1 und S_2 ausgehend betrachten, und die Phasenänderungen, welche bei der Reflexion an den Spiegeln eingetreten sein können, üben keinen Einfluss, da sie bei der geringen Neigung der Spiegel gegen einander bei allen Strahlen merklich die gleichen sind, in der Differenz sich also aufheben. — Man erkennt nun sofort, dass immer die zwei in einem Punkte der in M, der Mitte von S_1S_2, auf dieser Linie senkrecht gezogenen Geraden MAP_0 zusammentreffenden Strahlen gleiche Weglängen zurückgelegt haben, also die Phasendifferenz Null besitzen, und zwar gilt dies für Strahlen jeder Farbe. Betrachten wir weiter im Interferenzraum einen beliebigen, in der Ebene $S_1S_2P_0$ gelegenen Punkt P und bezeichnen seine Entfernung PO von der Geraden MP_0 durch x, die Länge OM durch b, $MS_1 = MS_2$ durch a, so erhalten wir die Länge $S_1P = \sqrt{b^2 + (a+x)^2}$ und die Länge $S_2P = \sqrt{b^2 + (a-x)^2}$, also den Wegunterschied der beiden Strahlen

$$\delta = \sqrt{b^2 + (a+x)^2} - \sqrt{b^2 + (a-x)^2}.$$

Beachten wir nun, dass a und x gegen b sehr klein sind — bei den Versuchen FRESNEL's betrug a etwa 6 bis 7, x höchstens 2 *mm*, während b ungefähr 7 *m* lang war — und entwickeln die beiden Wurzeln nach dem binomischen Lehrsatz, indem wir $b^2 + a^2 + x^2$ als den einen Summand des

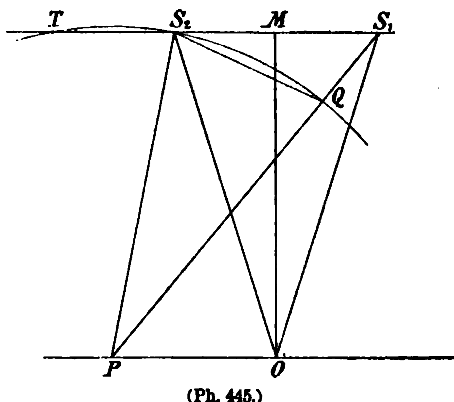
Binoms und $\pm 2ax$ als den anderen ansehen, so erhalten wir, wenn wir bei den beiden ersten Gliedern stehen bleiben, zunächst

$$\delta = \frac{2ax}{\sqrt{b^2 + a^2 + x^2}},$$

also sehr nahe

$$\delta = \frac{2ax}{b}. \tag{22}$$

Man hat diese Beziehung auch aus verschiedenen geometrischen Betrachtungen abgeleitet[1]), aber theils sind dieselben ungenau, theils lassen sie den Grad der Annäherung schwer übersehen. Wir geben deshalb den folgenden einfachen Beweis, welcher zugleich zeigt, in welchem Verhältniss der wirkliche Werth von δ zu dem durch die Formel ausgedrückten steht. In Fig. 445 haben die Buchstaben S_1, S_2, M, O, P dieselbe Bedeutung wie bisher, es ist also $MS_1 = MS_2 = a$, $MO = b$, $OP = x$.



(Ph. 445.)

Wir schlagen nun aus dem Punkt P mit dem Halbmesser PS_2 einen Kreis, derselbe schneide die Linie PS_1 in Q und die Linie S_1S_2 in T, dann ist nach einem bekannten Satz der Kreislehre

$$S_1Q\cdot(S_1P + S_2P) = S_1S_2 . S_1T.$$

Da aber $S_1Q = \delta$ und, wie man leicht findet, $S_1T = 2OP = 2x$ ist, so hat man die vollkommen strenge Gleichung

$$\delta = \frac{4ax}{S_1P + PS_2}.$$

Für kleine a und x sind aber sowohl S_1P als S_2P nur wenig von b verschieden, daher erhält man näherungsweise

$$\delta = \frac{2ax}{b}.$$

wie oben in Gleichung (22); der so bestimmte Werth verhält sich zu dem wirklichen wie das arithmetische Mittel der Strahlen zu b.

Die Phasendifferenz der beiden Strahlen in P ist $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ und da ihre Amplitude die gleiche (A) ist, so ist nach Gleichung (9) die Intensität proportional dem Ausdruck

$$2A^2\left(1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right) = 4A^2\cos^2\pi\frac{\delta}{\lambda}. \tag{23}$$

An den Orten grösster Helligkeit, wo δ ein gerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist, wird die Intensität die vierfache wie bei einfacher Bestrahlung durch einen der Punke S_1 oder S_2, an den zwischenliegenden Stellen, wo $\delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ ist, heben sich die Strahlen vollständig auf.

[1]) FRESNEL, Oeuvres compl. II, pag. 55; BILLET, traité d'optique physique I, pag. 39; MÜLLER-PFAUNDLER, Lehrbuch der Physik II, 1 (8. Aufl.), pag. 410; vergl. auch BRANLY, Journ. de phys. (2) 7, pag. 69. 1888.

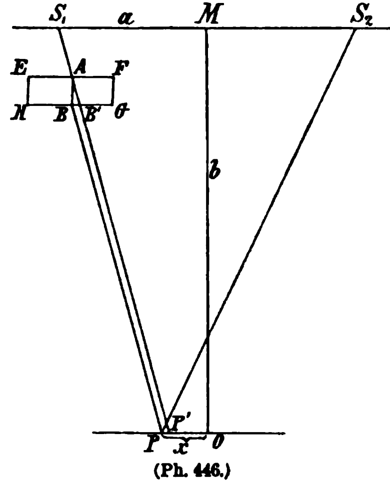
Die Vertheilung der Stellen vollkommener Dunkelheit im Raume können wir ohne jede Rechnung leicht angeben. Bekanntlich besitzt die Hyperbel die Eigenschaft, dass der Unterschied der von ihren beiden Brennpunkten nach den einzelnen Curvenpunkten gezogenen Radienvectoren einen constanten Werth gleich ihrer reellen Hauptaxe hat. Legen wir also durch einen Punkt in Fig. 444 oder 445, in welchem Dunkelheit herrscht, eine Hyperbel mit den Brennpunkten in S_1 und S_2, so haben die Strahlen, welche sich in den übrigen Curvenpunkten treffen, denselben Gangunterschied und heben sich gleichfalls auf, so dass die ganze Hyperbel eine dunkle Linie wird. Wir erkennen leicht, dass dies in gleicher Weise für jede der confocalen Hyperbeln gilt, deren Hauptaxe durch den Ausdruck $(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ gegeben ist; die dazwischenliegenden mit den Hauptaxenlängen $2m\frac{\lambda}{2}$ verbinden die Punkte grösster Helligkeit. Wenn wir weiter das System confocaler Hyperbeln um eine durch die Brennpunkte S_1 und S_2 gehende Axe rotiren lassen, so entstehen zweischalige confocale Rotationshyperboloide, von denen offenbar dasselbe gilt, wie von der sie erzeugenden Curvenschaar. So wird der ganze Interferenzraum von diesen abwechselnd hellen und dunkeln Flächen durchzogen, die aber für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen, da, wie wir gesehen haben, die Längen der Hauptaxen den Wellenlängen proportional sind; nur die Mittelflächen, bei denen Gangunterschied und Hauptaxenlänge Null werden, in denen also das Hyperboloid in eine Ebene, die durch MAO gehende, übergeht, sind für alle Farben dieselben. Bringen wir einen Schirm in den Interferenzraum, so wird sein Durchschneiden der beschriebenen Flächen eine Reihe paralleler farbiger Streifen erzeugen, die einen weissen Mittelstreifen einschliessen. Wir wollen annehmen, der Schirm stehe auf der Mittelebene senkrecht, dann ist nach der oben in Gleichung (22) gegebenen Formel die Streifenbreite leicht zu bestimmen. Denn da der Gangunterschied (δ) der Strahlen für dunkle Streifen $(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ beträgt, so ist die Entfernung (x) eines solchen von der Mitte $(2m + 1)\frac{b}{2a}\cdot\frac{\lambda}{2}$, die Entfernung eines hellen Streifens $2m\frac{b}{2a}\cdot\frac{\lambda}{2}$; also der Abstand zweier benachbarter Streifen gleicher Art von einander, die Streifenbreite, gleich

$$\frac{b\lambda}{2a}. \tag{24}$$

Die entwickelte Theorie ist nicht blos für die FRESNEL'schen Spiegel gültig, sondern kann allgemein auf alle die Fälle angewandt werden, wo die interferirenden Strahlen als von zwei reellen oder virtuellen Bildpunkten eines und desselben leuchtenden Punktes ausgehend angesehen werden können. Wir betrachten weiter unten noch mehrere derartige Fälle.

Es mag gleich hier eine ebenfalls auf alle ähnlichen Fälle anwendbare kurze Betrachtung des Einflusses ausgeführt werden, welche eine allen Strahlen des einen Bündels ertheilte Verzögerung auf die Erscheinung ausübt. Diese Verzögerung werde durch die Einschiebung einer planparallelen Platte in das eine Bündel erzeugt; da die Wirkung, welche eine solche Platte auf einen Strahl ausübt, durch eine parallele Verschiebung nicht geändert wird, so ist es gleichgültig, an welcher Stelle des Bündels sie eingeschoben wird. Am leichtesten ausführbar ist der Versuch bei solchen Anordnungen, wo reelle Bildpunkte ent-

stehen, in der Nähe dieser Punkte. Es seien (Fig. 446) S_1 und S_2 zwei solche Bildpunkte; die von einem derselben (S_1) ausgehenden Strahlen sollen das senkrecht zur Linie MO eingeschobene Blättchen $EFGH$ durchlaufen, dessen Dicke d und dessen Brechungsexponent n genannt werde. Ein nach dem um x von O entfernten Punkt P gelangender Strahl, der vor Einschiebung des Blättchens P' getroffen haben würde, hat dann den Weg S_1ABP zurückgelegt, und wenn wir seinen Einfallswinkel auf das Blättchen α, seinen Brechungswinkel β nennen, so ist seine auf Luft bezogene Weglänge



(Ph. 446.)

$$S_1P' - AB' + nAB = \frac{b}{\cos\alpha} - \frac{d}{\cos\alpha} + n\frac{d}{\cos\beta}.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass α und β sehr kleine Winkel, und d, x und a klein gegen b sind, so erhalten wir dafür

$$b + (n-1)d + \frac{\sin^2\alpha}{2}b = b + (n-1)d + \frac{(a-x)^2}{2b}.$$

Die Länge des Strahls S_2P ist

$$\sqrt{b^2 + (a+x)^2} = b + \frac{(a+x)^2}{2b},$$

also der Wegunterschied (δ) beider Strahlen

$$\delta = \frac{2ax}{b} - (n-1)d. \tag{25}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Erscheinung der ohne eingeschobenes Blättchen im Allgemeinen ähnlich ist, namentlich ist die Streifenbreite dieselbe, aber es ist eine Verschiebung des ganzen Interferenzbildes nach der Seite, auf welcher das Blättchen sich befindet, eingetreten, denn es ist jetzt die Entfernung x_0 für den Wegunterschied Null von O nicht Null, sondern

$$x_0 = (n-1)\frac{bd}{2a}. \tag{26}$$

Wir können nun auch die Bedingungen verstehen, welche zum Gelingen des Spiegelversuchs erforderlich sind. Das ist zunächst eine sehr geringe Neigung der Spiegel gegen einander, indem sonst die Streifen so schmal werden, dass sie nicht mehr wahrnehmbar sind. Es geht das aus dem für die Streifenbreite gegebenen Ausdruck (24) hervor. In demselben ist $a = s\sin\alpha$, wenn AS (Fig. 444) durch s bezeichnet wird; verlangen wir nun z. B., dass die Streifen nicht schmäler als 0·2 *mm* werden sollen, so erhalten wir für α die Bedingung

$$\sin\alpha \leqq \frac{b\lambda}{0{\cdot}4\cdot s},$$

woraus sich, wenn λ etwa gleich 0·0006 Millim. und $\frac{b}{s}$ wie in den FRESNEL'schen Versuchen zu 3 angenommen wird, ergiebt, dass α höchstens etwa $\frac{1}{4}$ Grad gross werden darf.

Eine weitere Bedingung ist, dass sich die Spiegel in A (Fig. 444) mit ihren Kanten genau aneinander anschliessen müssen, keiner vor dem andern vorstehen darf. Die Wirkung eines solchen Ueberstehens wird durch Fig. 447 dargestellt.

In derselben ist die Lage des leuchtenden Punktes (S), des Durchschnitts der Spiegel (A) und der Spiegelebenen gerade so wie in Fig. 444 angenommen, es sind dann auch die Bildpunkte S_1 und S_2 dieselben und die Gangunterschiede der in einem beliebigen Punkte P zusammentreffenden Strahlen gerade so gross wie dort, besonders ist auch hier MAP_0 die Linie, in welcher die interferirenden Strahlen den Gangunterschied Null haben, wo also der weisse Mittelstreifen der Erscheinung liegt. Geändert ist die Lage der Spiegel in ihren Ebenen, indem dieselben um gleichviel verschoben sind, der Spiegel AB nach $A'B'$, der CA nach $C'A''$. Bezeichnen wir die Grösse der Verschiebung AA' durch σ, so kommt dadurch ein Vorstehen des Spiegels $A'B'$ vor $C'A''$ um $\alpha\sigma$ zu Stande. Geändert ist dadurch auch die Lage des Interferenzraumes, der in unserer Figur durch $GJaHE$ bezeichnet ist. Der weisse Mittelstreifen kann hier gar nicht zu Stande kommen, da bei den gewählten Verhältnissen die Linie MAP_0 schon ganz ausserhalb des Interferenzraumes fällt. Im weissen Licht sind aber überhaupt nur wenige Streifen sichtbar, die nahe bei dem mittleren liegen, es ist daher begreiflich, wie schon bei einem geringen Vorstehen die Erscheinung ganz verschwinden kann. Näherungsweise ist die Grösse des Vorstehens $\alpha\sigma$ leicht zu berechnen, für welches der Mittelstreifen gerade den Interferenzraum verlässt, unter der Voraussetzung, dass letzterer an dem Beobachtungsort von den Geraden aD und aF begrenzt werde. Bezeichnen wir den Winkel MAA'' durch β, so ist der Winkel AMa gleich $\frac{\sigma \sin\beta}{s}$ und des Abstandes des weissen Streifens von der Mitte des Interferenzraumes $\frac{b\sigma \sin\beta}{s}$ in der Entfernung b von M; die halbe Breite des Interferenzraumes an derselben Stelle ist aber $(b-s)\alpha$. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man unter Beachtung von $\alpha = \frac{a}{s}$ die Gleichung



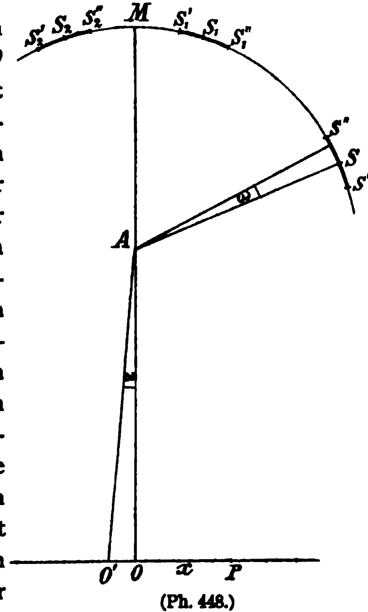
(Ph. 447)

$$\alpha\sigma = \frac{(b-s)a^2}{bs \cdot \sin\beta}.$$

Bei den FRESNEL'schen Beobachtungen war a etwa 6 *mm*, b 7 *m* und s 2·3 *m*, über β ist keine Angabe gemacht, nehmen wir es zu etwa 30° an, so giebt die abgeleitete Formel für $\alpha\sigma$ ungefähr 0·02 *mm*. Springt also der eine Spiegel vor dem andern um diesen geringen Betrag vor, so ist unter den angenommenen Verhältnissen der Mittelstreifen schon an die Grenze des Interferenzraumes gerückt.

Eine dritte Bedingung für das Auftreten unserer Interferenzerscheinung ist, dass die Lichtquelle nur eine sehr geringe Breite besitzt. Wir hatten sie bisher als punktförmig angenommen und wollen nun den Einfluss einer merklichen Ausdehnung derselben untersuchen. Zunächst ist klar, dass wenigstens in dem gewöhnlichen Fall, wo man die Streifen in der Nähe der durch die Lichtquelle und ihre beiden Bilder bestimmten, senkrecht auf dem Durchschnitt der Spiegel

stehenden Ebene beobachtet, eine Ausdehnung der Lichtquelle normal zu dieser Ebene, so dass sie in eine dem Durchschnitt der Spiegel parallele leuchtende Gerade übergeht, der Schärfe der Erscheinung nicht schaden, nur ihre Intensität vermehren wird. Denn die Streifen verschieben sich dann beim Uebergang von einem Punkt der Lichtlinie zu einem andern nur in sich selbst. Anders ist es, wie wir durch eine auf die angenommenen Grundlagen gestützte Rechnung zeigen wollen, wenn die Lichtquelle eine merkliche Ausdehnung in anderer Richtung besitzt. Es sei (Fig. 448) S der bisherige leuchtende Punkt, S_1 und S_2 seine beiden Bilder, MAO die Mittellinie, auf welcher in O der die Streifen auffangende Schirm senkrecht steht; nun werde angenommen, dass die Lichtquelle in der Ebene der Figur zu beiden Seiten von S bis S' und S'' ausgedehnt sei, die Bilder derselben sind dann $S_1'S_1''$ und $S_2'S_2''$. Jeder Punkt der Lichtquelle erzeugt ein Streifensystem auf dem Schirm und die Intensität in einem beliebigen Punkt P wird die Summe der in ihm vermöge der übereinanderfallenden Streifensysteme zusammentreffenden Einzelintensitäten sein. Diese Einzelintensitäten ergeben sich folgendermaassen. Wir nennen $A^2 d\omega$ die Intensität, welche ein Element $d\omega$ der Lichtquelle durch Reflexion an einem der Spiegel auf den Schirm sendet, indem wir die Veränderlichkeit dieser Intensität mit der Entfernung x von dem Punkt O des Schirms vernachlässigen wegen der geringen Ausdehnung des Raumes, auf den sich unsere Betrachtung überhaupt erstreckt. Dann wird durch die Interferenz der Strahlen, welche von dem in S gelegenen Element $d\omega$ ausgehen und an beiden Spiegeln reflektirt werden, in dem um x von O entfernten Punkt P nach unseren Gleichungen (9) und (22) die Intensität



(Ph. 448.)

$$2A^2\left(1 + \cos 4\pi \frac{ax}{b\lambda}\right) d\omega = 4A^2 \cos^2 2\pi \frac{ax}{b\lambda} d\omega$$

erzeugt, wenn wir die früheren Bezeichnungen $MS_1 = a$, $MO = b$ beibehalten. Ein anderes Element $d\omega$, welches die Winkelentfernung ω von dem Strahl AS besitzt, erzeugt ein Streifensystem, dessen Mittellinie, wie man leicht findet, in O' liegt, wenn $OAO' = \omega$ ist, und welches dem von S aus erzeugten ganz gleich ist, wenn man, was gestattet ist, davon absieht, dass der Schirm nicht genau senkrecht auf AO' steht. Die Intensität, welche dieses System im Punkte P hat, ist also gleich der, welche bei dem vorigen in einem Punkt in der Entfernung $O'P = x + (b - s)\omega$ von O vorhanden ist, also gleich

$$4A^2 \cos^2 2\pi \frac{a}{b\lambda} [x + (b - s)\omega] d\omega.$$

Die Gesammtintensität in P bekommen wir, wenn wir diesen Ausdruck von S' bis S'' integriren. Wir wollen den Gesichtswinkel, unter welchem die Lichtquelle von A aus erscheint, ω_1 nennen, dann entspricht S' der Werth $-\frac{\omega_1}{2}$ von ω und S'' der $+\frac{\omega_1}{2}$ und die Integration ergiebt

$$4A^2\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \cos^2 2\pi \frac{a}{b\lambda}[x+(b-s)\omega]\,d\omega$$

$$= 2A^2\omega_1 + \frac{A^2 b\lambda}{\pi a(b-s)} \sin 2\pi \frac{a}{b\lambda}(b-s)\omega_1 \cos 4\pi \frac{a}{b\lambda}x.$$

Wenn wir beachten, dass nach (24) $\frac{b\lambda}{2a}$ die Breite der von leuchtenden Punkten erzeugten Streifen ist, welche wir durch f bezeichnen wollen, und dass $\frac{b\lambda}{2a\cdot(b-s)} = \varphi$ der Winkel ist, unter welchem sie vom Punkt A aus erscheinen, so können wir den eben für die Intensität erhaltenen Ausdruck auch schreiben

$$2A^2\omega_1\left(1+\frac{\sin \pi \frac{\omega_1}{\varphi}}{\pi \frac{\omega_1}{\varphi}} \cos 2\pi \frac{x}{f}\right). \qquad (27)$$

Wir sehen daraus zunächst, dass die Streifenbreite auch hier dieselbe ist wie bei punktförmigen Lichtquellen, denn wenn sich x um f ändert, bekommen wir immer wieder denselben Werth. Unser Ausdruck zeigt ferner, dass, wenn wir die Lichtquelle allmählich verbreitern, der periodische Theil verschwindet, wenn $\omega_1 = \varphi$ geworden ist, d. h. von A aus gesehen die scheinbare Breite der Lichtquelle gleich der der Streifen von demselben Punkte gesehen ist. Dann ist also das Gesichtsfeld gleichmässig erhellt, jede Spur der Streifen verschwunden. Freilich werden sie unserem Auge schon etwas früher unsichtbar wegen seiner Unfähigkeit sehr kleine Helligkeitsunterschiede wahrzunehmen, bezeichnen wir mit ν das Verhältniss, in welchem die Intensitäten zweier nebeneinander liegender Flächen stehen, wenn sie gerade noch als verschieden erkannt werden können, so ergiebt sich die Grösse von ω_1, bei welcher das Verschwinden der Streifen eintritt, nach (27) aus der Gleichung

$$\sin \pi \frac{\omega_1}{\varphi} = \frac{1-\nu}{1+\nu}\pi\frac{\omega_1}{\varphi}.$$

Wächst die Breite der Lichtquelle weiter, so erscheinen die Streifen wieder, aber in geänderter Lage. Während nämlich vorher der Intensitätsausdruck für $x = 0$ ein Maximum wurde, die Mitte also von einer hellen Bande eingenommen war, wird er jetzt, wo ω_1 grösser als φ also $\sin \pi \frac{\omega_1}{\varphi}$ negativ ist, ein Minimum; die Mitte wird durch einen dunkeln Streifen gebildet; und so ist es überall, helle und dunkle Banden haben den Platz gewechselt. Bei weiterem Wachsen der Lichtquelle verschwinden die Streifen immer, wenn ω_1 ein ganzes Vielfaches von φ wird und zugleich findet ein Lagenwechsel derselben statt, so dass immer, wenn ω_1 zuletzt wachsend ein gerades Vielfaches von φ durchschritten hat, ein System mit hellem Mittelstreif, wenn ein ungerades, ein System mit dunklem Mittelstreif gebildet wird. Dabei wird der Unterschied der hellen und dunkeln Banden immer geringer, die ganze Erscheinung muss immer verwaschener werden, bis sie überhaupt aufhört sichtbar zu sein. — Bezüglich des Mittelstreifens ist noch eine Bemerkung von Interesse. Der Intensitätsausdruck wird für denselben

$$2A^2\omega_1\left(\frac{1+\sin \pi \frac{\omega_1}{\varphi}}{\pi \frac{\omega_1}{\varphi}}\right),$$

und hierin ist der Bruch in der Klammer bis zu seinem ersten Minimum (welches bei einem 254° nahe entsprechenden Werth von $\pi\frac{\omega_1}{\varphi}$ stattfindet), um so kleiner je grösser $\pi\frac{\omega_1}{\varphi}$, je kleiner also unter sonst gleichen Umständen λ ist, denn φ ist λ proportional. Benutzt man nun weisses Licht, so werden demnach die stärker brechbaren Strahlen eine verhältnissmässig geringere Intensität besitzen als die weniger stark brechbaren und der Mittelstreifen wird etwas röthlich gefärbt erscheinen. Nach Ueberschreiten des dem Minimum zugehörigen Werth von $\pi\frac{\omega_1}{\varphi}$ gewinnen allmählich die brechbaren Strahlen das Uebergewicht u. s. w.

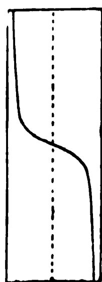
Die besprochenen Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, wenn die Erscheinung zu Stande kommen soll, zeigen, dass der Versuch eine sorgfältige Anordnung der Spiegel und der Lichtquelle zu seinem Gelingen erfordert. FRESNEL befestigte die Spiegel mit weichem Wachs auf einer gemeinsamen Unterlage und überzeugte sich durch Fühlen mit der Fingerspitze und genauer durch das Aussehen der Streifen, ob die Ränder sich richtig berührten; durch mehr oder weniger starken Druck der geeigneten Stellen der Spiegel konnte nachgeholfen und die gewünschte Neigung derselben hervorgebracht werden. Es ist das aber ein ziemlich beschwerliches und unsicheres Verfahren. FRESNEL giebt selbst an, dass die Stellung der Spiegel nicht selten während des Versuchs von selbst sich geändert habe. Er fühlte daher bereits das Bedürfniss einer passenden mechanischen Einrichtung für die genaue Richtung und Bewegung der Spiegel und hat auch eine solche geplant, doch scheint sie niemals ausgeführt worden zu sein (Oeuv. compl. I, pag. 186). In der Folge sind verschiedene Apparate zu diesem Zwecke angegeben und ausgeführt worden, häufig haben sie aber den Fehler, dass die Beweglichkeit der Spiegel nicht vielseitig genug ist. Der eine Spiegel wird meist fest angebracht und der andere mittelst einer Schraube um eine Axe drehbar gemacht, welche durch die Berührungslinie der beiden Spiegel gehen soll. Dies ist indessen genau und auf die Dauer ebenso wenig zu erreichen wie ein richtiges Aneinanderpassen der Spiegel an der Berührungsstelle. Es muss deshalb der eine Spiegel wenigstens eine allseitige Beweglichkeit durch drei Stellschrauben besitzen, sodass Correctionen seiner Lage nach jeder Richtung hin ausführbar sind, und er auch erforderlichen Falls parallel mit sich selbst vorwärts oder rückwärts bewegt werden kann. Stehen keine besonderen Apparate zu Gebote, so ist das folgende von QUINCKE mitgetheilte, von NÖRREMBERG herrührende Verfahren empfehlenswerth[1]). Ein Streifen gutes Spiegelglas von etwa 100 *mm* Länge, 25 *mm* Breite und 3 *mm* Dicke wird mit dem Diamanten in zwei 50 *mm* lange Stücke geschnitten. Diese legt man dicht nebeneinander auf vier möglichst gleichgrosse Kügelchen von weissem Wachs, die auf der horizontalen Oberfläche eines grösseren Holzklötzchens aufliegen. Zwei der Wachskugeln kommen unter die Berührungslinie der beiden Spiegel und zwei in die auf der Mitte dieser Linie Senkrechte an die Enden der Spiegel, sodass jeder derselben in drei ein gleichschenkliges Dreieck bildenden Punkten aufliegt. Auf die beiden Spiegel legt man dann eine grössere Platte Spiegelglas von etwa 200 *mm* Länge, 50 *mm* Breite und 3 *mm* Dicke und drückt diese mit dem horizontal gelegten Zeigefinger längs der Berührungslinie schwach an. Die grössere elastische Spiegelglasplatte biegt sich

---

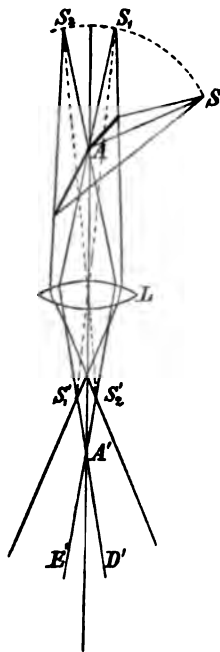
[1]) QUINCKE, POGG. Ann. 132, pag. 41. 1867.

dann in der Mitte durch, die beiden Spiegelflächen sind schwach gegen einander geneigt und die Kanten in möglichst genauer Berührung, wenn man dafür gesorgt hat, dass die aufeinander gelegten Flächen unmittelbar vor dem Auflegen gut gereinigt worden sind, sodass keine Staubtheilchen sich zwischen ihnen befinden. Die Neigung der Flächen gegen einander ist um so grösser, je grösser die Durchbiegung der grösseren Glasplatte war. Sie schwankt gewöhnlich zwischen zwei und sechs Minuten.

Wie schon oben erwähnt, tritt bei diesen Interferenzerscheinungen leicht eine Störung durch Beugung des Lichtes auf. Sämmtliche Begrenzungen der Spiegel können dazu Veranlassung geben, namentlich aber die Kanten, in denen sie sich berühren. FRESNEL hat von vornherein nachdrücklich an verschiedenen der oben angeführten Stellen darauf hingewiesen, dass man, um diesen Einfluss zu vermeiden, eine erhebliche Neigung des einfallenden Lichts gegen die Spiegel (45° zum Beispiel) benutzen und in grösserer Entfernung von denselben beobachten müsse (in den mitgetheilten Beobachtungen beträgt die Entfernung fast 5 *m*, die der Lichtquelle 2·3 *m*), so dass die Bilder der Lichtquelle in den Spiegeln soweit vom Rand entfernt erscheinen, dass kein Einfluss desselben stattfinden könne; auch darf der Interferenzraum nicht zu schmal, also die Neigung der Spiegel gegen einander nicht zu klein genommen werden. Häufig werden bei Anstellung der Versuche diese Vorsichtsmaassregeln nicht genügend beachtet; die dann eintretende Modifikation der Erscheinungen haben H. F. WEBER[1]) und H. STRUVE[2]) näher untersucht und letzterer hat auch durch eine genaue Experimentaluntersuchung gezeigt, dass diese Wirkungen bei Anwendung sehr feiner Messungsmethoden weit verfolgt werden können, selbst unter den Umständen der FRESNEL'schen Experimente sind sie dann noch merklich. Besonders tritt der Einfluss der Beugung auch auf die Gestalt der Streifen hervor, wenn man sich von der die Lichtquelle enthaltenden senkrecht auf der Berührungskante der Spiegel stehenden Ebene beträchtlich entfernt. Es machen dann die Projection der Verbindungslinie der virtuellen Bilder des leuchtenden Punkts und der Durchschnittslinie der Spiegel einen kleinen Winkel mit einander, die Interferenzstreifen scheinen auf letzterer Linie in der Mitte des Gesichtsfeldes fast senkrecht zu stehen, dann krümmen sie sich aber in ihrem weiterem Verlauf S-förmig und nähern sich der Richtung der äusseren Kanten der Spiegel. FRESNEL giebt (Oeuv. compl. I, pag. 153) die nebenstehende Zeichnung der Erscheinung (Fig. 449), dieselbe stellt den Uebergang der durch regelmässig reflektirtes Licht erzeugten Streifen in die des gebeugten Lichtes deutlich dar.


(Ph. 449.)

Eine Modifikation des FRESNEL'schen Spiegelversuchs entsteht[3]), wenn man, wie es Fig. 450 zeigt, das von den Spiegeln zurückgeworfene Strahlenbündel durch eine Linse L hindurchgehen lässt. Diese erzeugt von den virtuellen Bildpunkten S_1 und S_2 der Lichtquelle zwei reelle S_1' und S_2'.



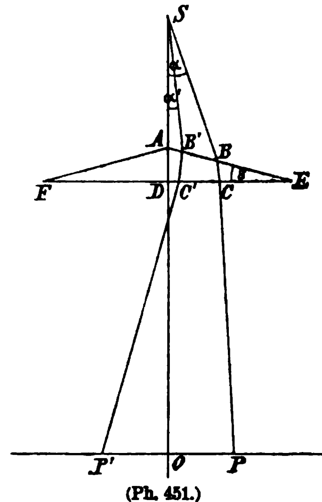
(Ph. 450.)

1) H. F. WEBER, WIED. Ann. 8, pag. 407. 1879.
2) HERM. STRUVE, WIED. Ann. 15, pag. 49. 1882.
3) Vergl. MASCART, Traité d'optique T. I, pag. 180. 1889.

In diesen Punkten und ihrer unmittelbaren Nachbarschaft verlaufen die Bündel getrennt neben einander, aber weiterhin von A' an durchdringen sie einander wieder theilweise und in dem Raume $D'A'E'$, wo dies geschieht, treten wieder Interferenzstreifen auf, welche sich gerade so in Beziehung auf S_1' und S_2' verhalten, wie die früher betrachteten zu S_1 und S_2. Es ist diese Anordnung für manche Zwecke desshalb vortheilhaft, weil jedes der interferirenden Bündel in den reellen Brennpunkten vom andern vollständig getrennt und auf einen sehr kleinen Raum zuzusammengezogen ist, daher auch leichter jedes für sich genau bestimmbaren Aenderungen unterworfen werden kann. Man kann hierbei natürlich auch Spiegel verwenden, die einen erhabenen Winkel mit einander bilden; so lange die von der Berührungslinie derselben aus divergirenden Lichtbündel durch die Linse zum Uebereinanderfallen gebracht werden können, ist die Möglichkeit zum Entstehen der Streifen gegeben.

2. Das FRESNEL'sche Doppelprisma.

Ein zweiter Interferenzapparat ist von FRESNEL noch angegeben worden[1]), welcher im ganzen dasselbe leistet wie die Spiegel; das Interferenzprisma. Dasselbe besteht, wie Fig. 451, ein Schnitt senkrecht zu seinen Kanten, zeigt, aus einem sehr stumpfwinkligen Prisma (AEF); in Wirklichkeit ist der Winkel bei A einem gestreckten noch viel näher, als es hier der Deutlichkeit wegen gezeichnet ist. Die beiden Winkel bei E und F sind gleich, so dass das Prisma ein gleichschenkliges ist und durch die Halbirungsebene des Winkels A in zwei congruente spitzwinklige Prismen AED und AFD zerlegt wird; man pflegt es daher auch als ein aus den letzteren zusammengesetztes Doppelprisma zu bezeichnen. Die eine Hälfte AED lenkt die von einem leuchtenden Punkt (S) in der Symmetrieebene auf sie fallenden Strahlen nach der Linken, die andere AFD nach der Rechten ab, daher entsteht in der Mitte ein Raum, wo Strahlen von beiden Seiten zusammentreffen und mit einander interferiren.



(Ph. 451.)

Wir denken uns einen Schirm durch einen Punkt O der Linie SAD und senkrecht zu dieser gelegt. Zur Erklärung der auf ihm entstehenden Erscheinung haben wir den Gangunterschied der in einem beliebigen Punkt desselben, der in der Ebene unserer Zeichnung gelegen sein mag, zusammentreffenden Strahlen zu bestimmen. Es sei α der kleine Winkel, den ein von S ausgehender Strahl mit SA bildet, derselbe treffe AE in B, DE in C, den Schirm in P, der Winkel AED werde ε genannt und SA mit a, AD mit e, DO mit b bezeichnet, dann ist unter Vernachlässigung der dritten Potenzen der kleinen Winkel α und ε im Punkt B der Einfallswinkel des Strahls $i = \alpha + \varepsilon$, der Brechungswinkel $r = \frac{\alpha + \varepsilon}{n}$, im Punkt C der Einfallswinkel $r' = r - \varepsilon = \frac{1}{n}[\alpha - (n-1)\varepsilon]$, der Brechungswinkel $i' = \alpha - (n-1)\varepsilon$ und ebenso $DC = a\alpha + er'$, OP, welches wir durch x bezeichnen wollen, gleich $DC + bi'$, also, wenn wir $\frac{e}{n}$ gegen b vernachlässigen

[1]) FRESNEL, Mém. de l'Ac. des sc. T. V., pag. 419. 1826; Oeuvr. compl. I, pag. 330.

$$x = (a+b)\alpha - (n-1)b\varepsilon, \qquad \alpha = \frac{x + (n-1)b\varepsilon}{a+b}.$$

Der Ausdruck für x lässt erkennen, dass dieses negativ wird, der Strahl also den Schirm links von O trifft, wenn $\alpha < (n-1)\frac{b}{a+b}\varepsilon$, und dass die Grenze in dieser Richtung für die auf AE auffallenden Strahlen um $(n-1)b\varepsilon$ von O entfernt ist. Da für die auf AF fallenden Strahlen ganz Gleiches gilt, so ist die Breite des Interferenzraumes auf dem Schirm $2(n-1)b\varepsilon$. Derjenige unter den durch AF gehenden Strahlen, welcher nach P gelangt, verläuft nun ganz symmetrisch dem nach $P' = -x$ gelangenden unter den durch AE gehenden. Der gesuchte Wegunterschied ist also auch gleich dem dieser letzteren Strahlen. Bezeichnen wir den Winkel des P' treffenden Strahls mit SA durch α', seine Durchtrittspunkte durch AE und DE mit B' und C', so erhalten wir

$$\alpha' = \frac{-x + (n-1)b\varepsilon}{a+b},$$

ferner vermöge der Gleichungen

$$SB = \frac{a\cos\varepsilon}{\cos(\varepsilon+\alpha)} = a\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \varepsilon\alpha\right); \; BC = e - a\varepsilon\alpha;$$

$$CP = \frac{b}{\cos i'} = b\left(1 + \frac{1}{2}[\alpha - (n-1)\varepsilon]^2\right)$$

und der entsprechenden für SB', $B'C'$, $C'P'$:

$$SB' - SB = a\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2} + \varepsilon\right)(\alpha'-\alpha); \quad B'C' - BC = -a\,\varepsilon(\alpha'-\alpha);$$

$$C'P' - CP = b\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2} - (n-1)2\right)(\alpha'-\alpha)$$

und für den Gangunterschied δ, bei dessen Bildung natürlich die in Glas zurückgelegten Strecken BC und $B'C'$ mit dem Brechungsexponenten zu multipliciren sind,

$$\delta = (a+b)\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2} - (n-1)\varepsilon\right)(\alpha'-\alpha) = 2(n-1)\frac{a}{a+b}\varepsilon x. \tag{28}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit der bei der Erklärung des Spiegelversuchs in (22) erhaltenen zeigt, dass beide gleich werden, wenn an die Stelle der Entfernung der beiden virtuellen Bilder des Lichtpunkts dort hier die Grösse $2(n-1)a\varepsilon$ gesetzt wird; oder mit anderen Worten, die Spiegel werden nahe die gleiche Erscheinung liefern wie das Prisma, wenn ihre Neigung gegen einander gleich $(n-1)\varepsilon$ ist, d. h. ungefähr ein Viertel des spitzen Winkels, den die Prismenflächen bei A mit einander bilden.

Die gewöhnliche Ableitung der Gleichung (28), wobei man die aus dem Prisma tretenden Strahlen von zwei durch die beiden Hälften desselben gebildeten virtuellen Bildpunkten ausgehend betrachtet und dann die Erscheinung gerade so behandelt wie bei den Fresnel'schen Spiegeln, ist ungenau aus zwei Gründen. Einmal nämlich liegen die beiden Bildpunkte, welche den nach P gelangenden Strahlen zugehören, zwar in sehr nahe gleicher Entfernung von SA, aber keineswegs in gleicher Höhe, so dass die Stelle, wo die auf der Mitte ihrer Verbindungslinie errichtete Senkrechte den Schirm trifft, bedeutend von O abweicht; und zweitens befinden sich dieselben nicht in gleicher Phase ihrer Schwingung. Die aus der Vernachlässigung beider Umstände hervorgehenden Fehler heben sich nun zwar gegenseitig auf, das ist aber nicht von vornherein klar.

Aus dem gefundenen Wegunterschied der interferirenden Strahlen lässt sich hier ebenso wie bei den Fresnel'schen Spiegeln die Interferenzerscheinung ab-

leiten, auch können ganz ähnliche Bemerkungen wie dort über den Einfluss der Breite der Lichtquelle und die Beugung sowie die Verbindung einer Linse mit dem Doppelprisma gemacht werden. Wir gehen nicht näher darauf ein.

Gute Interferenzprismen findet man nicht häufig, da es schwer hält, die Flächen in der Nähe der stumpfen Kante genau eben zu schleifen, und durch jede Krümmung an dieser Stelle die Erscheinungen erheblich beeinflusst werden. G. S. OHM hat vorgeschlagen[1]), mittelst Durchschneiden einer schwach keilförmigen Spiegelglasplatte in einer zur Keilkante senkrechten Richtung und Zusammenschieben der dickeren Seiten beider Hälften ein Interferenzprisma herzustellen.

Eine verwandte Interferenzerscheinung, auf welche G. S. OHM a. a. O. zuerst aufmerksam gemacht hat und welche noch eine genauere Untersuchung verdient, als sie bisher gefunden hat, mag hier noch anhangsweise erwähnt werden. Die Ränder von Spiegelplatten werden durch den Schleifprocess etwas abgerundet und geben dadurch zu der betreffenden Erscheinung Anlass. Bringt man die Lichtquelle, leuchtenden Punkt oder Spalt, in die durch die Grenze des ebenen und abgerundeten Theils der Platte auf diese gelegte Vertikalebene, so sieht man im durchfallenden Licht mit der Loupe je nach der Beschaffenheit der Platte ein System von 10—20 und mehr sehr schöner scharfer Interferenzstreifen. Dieselben werden durch einen mehr oder weniger breiten, fast vollkommen dunklen Raum von den viel verwascheneren Beugungsstreifen des Plattenrandes getrennt und beginnen mit der hellsten und breitesten nach dem dunklen Raum hin etwas röthlich gesäumten Linie; die folgenden sind zunächst fast achromatisch und durch ganz dunkle Streifen von einander getrennt, weiterhin sind sie gefärbt und der rothe Rand ist der entferntere. Die Zwischenräume sind hier nicht gleich, sondern in grösserer Entfernung von der Platte sind die Abstände der Streifen von dem ersten nahe proportional den Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen. Die Erscheinung modificirt sich etwas, wenn der Spiegelrand abgeschrägt geschliffen ist, eine Facette besitzt. Die Streifen sind dann in grösserer Zahl vorhanden als sonst und die ersten gefärbt, die rothe Seite nach dem dunklen Raum gekehrt, dann folgt eine Reihe achromatischer Streifen und weiterhin sind sie wieder gefärbt aber in umgekehrter Lage, die rothe Seite abgewandt. Die Entstehung der Erscheinung ist leicht verständlich, es interferiren die durch den ebenen Theil der Platte hindurchgegangenen Strahlen mit den von dem abgerundeten Rand abgelenkten.

3. Die BILLET'schen Halblinsen.

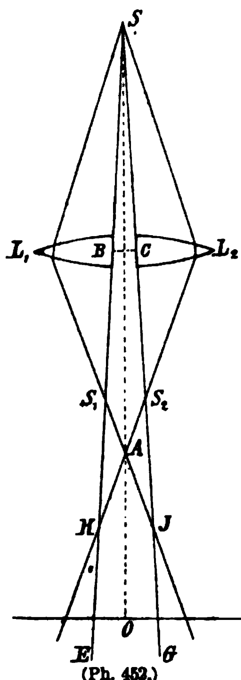
BILLET hat einen Apparat angegeben[2]), welcher die Vortheile, die oben bei der Besprechung der mit einer Linse verbundenen FRESNEL'schen Spiegel hervorgehoben wurden, auf möglichst einfache Weise erreicht. Eine Sammellinse wird mit dem Diamant in der Mitte durchgeschnitten, jede der beiden Hälften in eine besondere Fassung befestigt und so aneinandergefügt, dass sie von ihrer ursprünglichen Lage aus durch eine Mikrometerschraube um kleine Strecken seitlich verschoben und die Schnittflächen genau parallel gestellt werden können. Jede Hälfte erzeugt dann ein besonderes reelles Bild des leuchtenden Punktes, die von diesen Bildern ausgehenden Strahlenkegel fallen weiterhin theilweise

---

[1]) G. S. OHM, POGG. Ann. 49, pag. 105. 1840.

[2]) BILLET, Traité d'optique physique T. I, pag. 67. 1858. — Annales de chim. et de phys. (3) 64, pag. 386. 1862.

übereinander und geben in dem gemeinschaftlichen Raum Veranlassung zu Interferenzstreifen, welche ganz in der Weise, wie die Streifen der FRESNEL'schen Spiegel zu berechnen sind, wobei die reellen Bilder hier an die Stelle der dortigen virtuellen treten. In Fig. 152 sei S der leuchtende Punkt, L_1 und L_2 die beiden Linsenhälften, S_1 und S_2 die von ihnen entworfenen Bilder des Punktes S. Von hier aus divergiren die beiden Strahlenkegel wieder, treffen sich zuerst in A und bilden von da an den Interferenzraum, dessen Durchschnitt in der Figur durch $EHAJG$ bezeichnet ist. BILLET hat (Ann. de chim. et de phys. a. a. O.) die Anzahl der Streifen, die sich an den verschiedenen Stellen dieses Raumes bilden können, berechnet und gezeigt, dass dieselbe am grössten ist in der Linie HJ, indem weiterhin die Breite der Streifen in stärkerem Verhältniss wächst als die des Interferenzraumes. — Die Streifenbreite ergiebt sich folgendermaassen. Die Entfernung von S bis zur ersten Hauptebene der Linse sei s, die von der zweiten Hauptebene bis zur Linie S_1S_2 sei s', der Abstand BC der beiden Linsenhälften $2e$, dann ist der Abstand der beiden Bilder S_1S_2 von einander $2a = 2e\frac{s+s'}{s}$ und damit bekommen wir, wie in (24), wenn die Entfernung von S_1S_2 bis zu dem die Erscheinung auffangenden Schirm mit b bezeichnet wird; für die Streifenbreite den Ausdruck



(Ph. 452.)

$$\frac{bs\lambda}{2e(s+s')}.$$

Dabei ist angenommen, dass die Verschiebung rein seitlich, senkrecht zur Linsenaxe erfolge. Wir wollen noch sehen, welchen Einfluss eine kleine Verrückung ein der Linsenhälften (etwa L_2) nach S zu oder von S weg ausübt. Wird die Entfernung des Punktes S von einer durch S_2 senkrecht zu SO gelegten Ebene mit E, der Abstand der beiden Hauptpunkte von einander mit d bezeichnet, so ist $E = s + d + s'$, und da, wenn f die Brennweite der Linsen ist, $s' = \frac{fs}{s-f}$, so folgt $E = \frac{s^2}{s-f} + d$. Daraus erhalten wir für die Aenderung E, wenn s um ds wächst, $dE = \frac{s(s-2f)}{(s-f)^2}ds$, was eine Verschiebung des Punktes S_2 anzeigt, die nur verschwindet für $s = 2f$, d. h. wenn der leuchtende Punkt um die doppelte Brennweite von den Linsen absteht, die, wenn dieser Abstand grösser ist, eine Vergrösserung, wenn er kleiner ist, eine Verkleinerung von E bewirkt. Nennen wir die neue Lage des Bildpunkts S_2', so hat im Allgemeinen S_2S_2' eine ganz erhebliche Länge und das Streifensystem würde wesentliche Veränderungen erleiden, wenn es von in gleicher Phase schwingenden Punkten in S_1 und S_2' ausginge. Nun ist aber die Weglänge von S nach S_2' sehr nahe um den Betrag der Verschiebung des Bildpunktes verändert; nehmen wir z. B. an, sie sei vergrössert, so sind die von S_2 ausgehenden Strahlen gegen die von S_1 ausgehenden um S_2S_2' zurück und der Gangunterschied der in O sich treffenden Strahlen ist $OS_2' + S_2'S_2 - OS_1$. Man findet hierfür leicht den Ausdruck $\frac{e^2[b^2+(s+s')^2]}{2b^2s^2}dE$ und erkennt daraus, dass die Veränderung des Streifensystems unter gewöhnlichen Verhältnissen ganz unmerklich sein muss, weil der Werth des gefundenen Ausdrucks dann nur

sehr kleine Bruchtheile einer Wellenlänge darstellt. Es begründet dies einen wesentlichen Unterschied in der Behandlungsweise unseres Apparats und der FRESNEL'schen Spiegel; während bei diesen, wie wir gesehen haben, die grösste Vorsicht darauf verwendet werden muss, dass kein Spiegel vor dem andern vorsteht, ist eine gleiche Sorgfalt bei den Halblinsen nicht erforderlich.

Die Bilder S_1, S_2 sind in Folge der Abweichung wegen der Kugelgestalt niemals punktförmig, wenn man auch die Lichtquelle selbst so verkleinert hat, dass sie als leuchtender Punkt betrachtet werden darf, sondern haben unter Umständen eine ganz erhebliche Ausdehnung[1]). Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob dieser Umstand die Schärfe der Interferenzerscheinung beeinträchtigen müsste, in ähnlicher Weise, wie wir es für Lichtquellen von merklicher Ausdehnung bei den FRESNEL'schen Spiegeln gesehen haben. Es würde das auch der Fall sein, wenn die Bildflächen S_1 und S_2 sich wie kleine selbstleuchtende Flächenstücke von gleicher Ausdehnung verhielten, d. h. wenn alle Punkte derselben nach allen Richtungen hin Strahlen aussendeten. Da aber von jedem Punkt nur ein Strahl ausgeht, so gelangt nach den Punkten des Schirmes auch nur je ein Strahl von jedem Bild, und es ist keine Veranlassung zum Undeutlichwerden der Erscheinung durch Uebereinanderlagerung verschiedener Interferenzen gegeben.

4. Geneigte Glasplatten.

Man giebt häufig FIZEAU als ersten Urheber des Verfahrens an, Interferenzstreifen durch gegeneinander geneigte Glasplatten in Verbindung mit einer Linse hervorzurufen. Allein in den betreffenden Abhandlungen FIZEAU's[2]), welche sich auf seinen berühmten Versuch über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in bewegtem Wasser beziehen, ist nur von einer Glasplatte die Rede, welche vor einer der beiden Spalten, durch deren Zusammenwirken die benutzte Beugungserscheinung zu Stande kommt, in geneigter Lage angebracht, den Zwischenraum derselben durch die Brechung in ihr kleiner erscheinen lassen und dadurch die Streifen verbreitern soll. Auch die Anwendung, die ARAGO in seinem zur Bestimmung von Brechungscoëfficienten construirten Apparat[3]) von zwei gegen einander geneigten Glasplatten macht, ist von durchaus anderer Art; sie dienen da zur Compensation des Gangunterschieds, welchen die beiden gebeugten Strahlenbündel, die ebenso wie in der FIZEAU'schen Anordnung benutzt werden, infolge ihres Durchgangs durch verschiedene Medien erhalten haben. Vielleicht ist die Darstellung, die BILLET von dem Verfahren FIZEAU's giebt[4]), die Veranlassung gewesen, diesem die Anwendung unserer Methode zuzuschreiben, indem BILLET zwei geneigte Platten, vor jedem Spalt eine, als zu dem angegebenen Zweck dienend bezeichnet. Indessen, selbst wenn diese Darstellung richtig wäre, wäre das etwas Anderes als das hier zu besprechende Verfahren. Denn es sind da schon Streifen und zwar Beugungsstreifen vorhanden, die durch das Hinzukommen der Platten nur verbreitert werden, hier dagegen soll die Interferenzerscheinung durch die Wirkung der Platten überhaupt erst entstehen, indem diese zwei virtuelle Bilder eines leuchtenden Punktes erzeugen. JAMIN scheint zuerst das hierzu dienliche

---

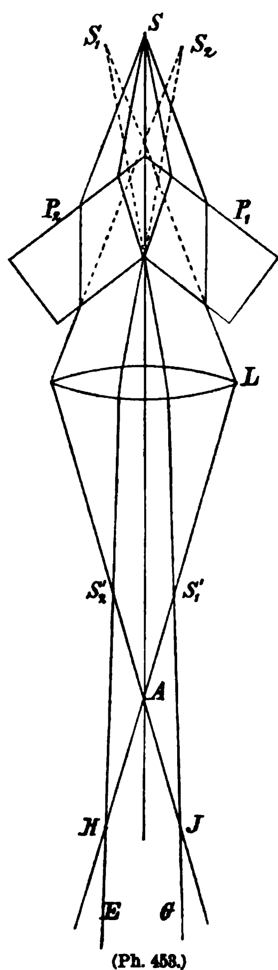
[1]) Vergl. z. B. STEINHEIL u. VOIT, Handbuch d. angewandten Optik I, pag. 119.

[2]) FIZEAU, Compt. rend. 33, pag. 349. 1851. — Ann. de chim. et de phys. (3) 57, pag. 385. 1859.

[3]) ARAGO, Oeuvres X, pag. 312; Deutsche Ausg. X, pag. 257. 1859.

[4]) BILLET, Traité d'optique physique I, pag. 86. 1858.

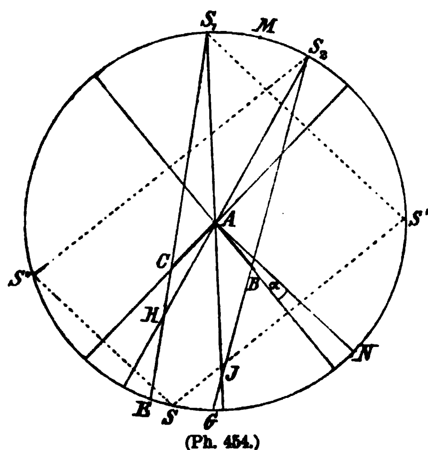
Verfahren angegeben zu haben[1]). Fig. 453 stellt dasselbe dar. Von dem in der Axe der Linse L gelegenen Punkt S gehen die Strahlen aus und durchsetzen, ehe sie auf die Linse fallen, das gegen die Linse gleichgeneigte, in ihrer Axe sich berührende Plattenpaar $P_1 P_2$. Die aus P_1 tretenden Strahlen können näherungsweise als von einem Punkt S_1, die aus P_2 tretenden als von S_2 herkommend angesehen werden; von diesen erzeugt die Linse die reellen Bilder $S_1' S_2'$, und von hier divergirend fallen die Strahlen in ihrem weiteren Verlauf theilweise übereinander und bilden den Interferenzraum $EHAJG$. Man erkennt so, dass eine Interferenzerscheinung entstehen muss, auch dass ihr allgemeiner Charakter dem der bisher erörterten Fälle sehr ähnlich sein wird; da aber die virtuellen Bildpunkte S_1 und S_2 von Strahl zu Strahl ihre Lage ändern und nicht mit gleicher Phase schwingen und ausserdem die Linsenwirkung hinzukommt, so erfordert die strenge Erklärung eine genauere Ableitung der Weglängen der interferirenden Strahlen, die uns hier zu weit führen wurde.



(Ph. 453.)

5. Michelson's Spiegelversuch.

Neuerdings hat A. A. Michelson einen Interferenzversuch angegeben[2]), welcher dem Fresnel'schen Spiegelversuch sehr ähnlich ist, aber einige Vorzüge vor demselben besitzt. Zwei Spiegel werden hier nahe in einem rechten Winkel zu einander angeordnet und die einfallenden Strahlen zwei Mal an denselben reflektiren gelassen. Fig. 454 stellt die durch die punktförmige Lichtquelle S senkrecht auf den Durchschnitt der Spiegel gelegte Ebene dar, AB und AC sind die Spiegel, der Winkel CAB ist um den kleinen Betrag α kleiner als ein Rechter. Der Spiegel AB erzeugt von der punktförmigen Lichtquelle S das virtuelle Bild S', der Spiegel AC von diesem das S_1, so dass die zwei Mal, zuerst an AB dann an AC reflectirten Strahlen von S_1 herzukommen scheinen, und auch ihre Weglänge dieselbe ist, wie sie von da ausgegangene Strahlen besitzen würden. Dasselbe gilt bezüglich der zuerst an AC, dann an AB reflektirten Strahlen und dem Punkt S_2. Man findet leicht, dass der Winkel $S_1 A S_2 = 4\alpha$ ist, und S in der Halbirungslinie dieses Winkels liegt; denn bezeichnen wir den beliebigen Winkel BAS durch φ, so ist



(Ph. 454.)

[1]) Jamin, Cours de physique III, pag. 524. 1866.

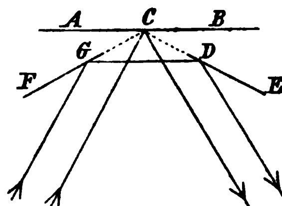
[2]) A. A. Michelson, Amer. journ. of science (3) 39, pag. 216. 1890.

$SAS' = 2\varphi$ und $S'AS_1 = 2(90^\circ - \varphi + \alpha)$, also die Summe beider Winkel $180^\circ + 2\alpha$, ebenso ist $SAS'' = 2(90^\circ - \varphi - \alpha)$ und $S''AS_2 = 2(\varphi + 2\alpha)$, also die Summe wieder $180^\circ + 2\alpha$. Die virtuellen Bildpunkte S_1 und S_2 spielen nun hier ganz die Rolle wie die gleichbenannten Punkte bei dem FRESNEL'schen Versuch; die Strahlenkegel, die ihre Scheitel in ihnen haben, bilden im Uebereinanderfallen den Interferenzraum $EHAJG$ und die in demselben zu Stande kommende Interferenzerscheinung besteht wie dort aus abwechselnd hellen und dunkeln zweischaligen Rotationshyperboloiden um S_1S_2 als Axe und S_1 und S_2 als Brennpunkten. Die Streifenbreite ist in der Entfernung b von S_1S_2 nach (24) $\frac{b\lambda}{4s\alpha}$, wenn SA durch s bezeichnet wird. Ist die Lichtquelle sehr weit entfernt und der Schirm den Spiegeln nahe, so ist dieser Ausdruck wenig von $\frac{\lambda}{4\alpha}$ verschieden, beobachtet man in gleicher Entfernung mit der Lichtquelle, so ist er $\frac{\lambda}{2\alpha}$. Da, wie wir gesehen haben, die Lichtquelle hier in dem Interferenzraum und zwar in der Halbirungslinie des Winkels HAJ liegt, die auch den Mittelstreifen der Inteferenzerscheinung enthält, so muss man den Schirm oder die FRESNEL'sche Loupe natürlich etwas seitlich von der durch die Lichtquelle gehenden Normalebene auf die Spiegel aufstellen, oder die auf die Spiegel fallenden oder von dort zurückkehrenden Strahlen durch eine unbelegte Glasplatte oder dergl. in geeigneter Weise ablenken.

Der Vortheil des MICHELSON'schen Verfahrens besteht wesentlich darin, dass keine besondere Justirung, wie sie die Benutzung des FRESNEL'schen Spiegelapparats so häufig erschwert, erforderlich ist. Es ist nur nöthig, dass der Winkel der beiden Spiegel sehr wenig kleiner ist als ein Rechter. Als Lichtquelle benutzt MICHELSON eine etwa 100 *m* entfernte Bogenlampe und beobachtet die Streifen in ungefähr 1 *m* Entfernung von den Spiegeln.

6. FRESNEL's Drei-Spiegel-Versuch.

Bei den bisher besprochenen Erscheinungen wurden die beiden interferirenden Lichtbündel im Wesentlichen gleich behandelt. Wir haben nun noch einige Versuchsanordnungen zu betrachten, wo das nicht der Fall ist. Eine derselben rührt von FRESNEL her[1]). Dabei wird das eine Lichtbündel einer einmaligen, das andere einer zweimaligen Reflexion an ebenen Spiegeln unterworfen. Fig. 455 zeigt die von FRESNEL benutzte Anordnung. AB, DE und FG sind drei Spiegel, von denen die letzteren nahe gleich geneigt gegen den ersten und so, dass ihre Verlängerungen



(Ph. 455.)

in der Mitte C desselben sich scheiden, aufgestellt werden; man erkennt dann leicht, dass die von einer weit entfernten Lichtquelle unter einer Neigung gegen AB, die doppelt so gross als die der Spiegel ist, einfallenden Strahlen verlaufen werden, wie es die Zeichnung darstellt, und bei ihrem Zusammentreffen in grosser Entfernung nahe gleiche Wege zurückgelegt haben werden und zu einer Interferenzerscheinung Veranlassung geben müssen. Da aber das eine Bündel einmal, das andere zweimal reflectirt worden ist, so werden die Strahlen von gleicher

[1]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. 15, pag. 379. 1819. Mém. de l'Ac. des sc. 20, pag. 209; Oeuvr. compl. I, pag. 687 u. 703.

Weglänge eine Phasendifferenz zeigen müssen, wenn die Reflexion mit einer solchen verbunden ist und allgemein wird für eine beliebige Stelle des Streifensystems sich diese Phasendifferenz zu der aus dem Wegunterschied entstehenden hinzuaddiren. In der That beobachtete FRESNEL bei den verschiedensten Neigungswinkeln der Spiegel gegen einander stets eine Interferenzerscheinung mit schwarzem Mittelstreifen und schloss daraus, wie es schon THOM. YOUNG zur Erklärung des schwarzen Mittelpunkts der NEWTON'schen Ringe gethan hatte, auf den Verlust einer halben Wellenlänge bei der Reflexion an Glas.

QUINCKE [1]) und MASCART [2]) haben die FRESNEL'schen Versuche wiederholt und durch Anwendung polarisirten Lichtes modificirt; MASCART hat einen besonderen Apparat construiren lassen, der die Führung der Spiegel erleichtert.

Uebrigens ist die symmetrische Lage der Spiegel, wie sie die genannten Physiker gewählt haben, nicht gerade erforderlich; die Stellung zweier Spiegel ist in weiten Grenzen beliebig. Die Fig. 456 zeigt, wie dann der dritte Spiegel und die Lichtquelle anzuordnen sind, um die Erscheinung zu erhalten. DE und FG sind die beiden Spiegel, deren Stellung beliebig angenommen sein möge; in einer zwischen ihnen gezogenen Linie, z. B. DF, muss ein Strahl verlaufen, also in dem an D oder F reflektirten die Lichtquelle sich befinden. Wir wollen sie in S annehmen. Dann schlagen wir um C, den Durchschnittspunkt von DE und FG, einen durch S gehenden Kreis; dieser enthält S', den Bildpunkt von S in DE, und S_1, den Bildpunkt von S' in FG. Legt man nun den Spiegel AB in die von C auf SS_1 gefällte Senkrechte CC', so ist S_1 auch der Bildpunkt von S in AB, und sowohl die von FG als die von AB reflektirten Strahlen kommen von demselben Punkte S_1 her; auch ihre Weglänge ist dementsprechend. Dreht und verschiebt man nun den Spiegel AB in geeigneter Weise um einen kleinen Betrag, so kann man leicht die von FG und AB reflektirten Strahlenbündel zu einem theilweisen Uebereinanderfallen bringen und die Interferenzerscheinung hervorrufen. In der Figur ist der Fall dargestellt, dass der Beginn des Interferenzraumes in den Punkt F fällt. Dazu muss S_2, der Bildpunkt von S in AB, von F ebensoweit entfernt sein als S_1; schlägt man also von F aus mit dem Halbmesser FS_1 den kleinen Kreisbogen S_1S_2, zieht die Linie SS_2 und errichtet in ihrer Mitte die Normale, so muss in dieser der Spiegel liegen. Man kann, wie es FRESNEL und QUINCKE für die symmetrische Lage gethan haben, die richtige Stellung der Spiegel zunächst durch eine genaue Zeichnung und dann durch einiges Probiren bestimmen, oder auch das MASCART'sche In-

(Ph. 456.)

[1]) QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 228. 1871.

[2]) MASCART, Compt. rend. 105, pag. 967. 1887. Journ. de phys. (2) 7, pag. 183. 1888. Traité d'optique I, pag. 186. 1889.

strument mit einer kleinen Abänderung zur Ausführung der erforderlichen Anordnung geeignet machen.

Die Fig. 456 zeigt noch eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit des Dreispiegelversuchs. Wenn die Lichtquelle eine merkliche Ausdehnung $S\mathfrak{S}$ besitzt und wir ihre Bilder durch $S'\mathfrak{S}'$, $S_1\mathfrak{S}_1$ und $S_2\mathfrak{S}_2$ bezeichnen, so sieht man, dass die beiden letzteren, von denen die Interferenzerscheinung herrührt, symmetrisch zur Mittellinie des Interferenzraumes liegen. Infolgedessen fallen die Mittelstreifen der von allen leuchtenden Punkten hervorgerufenen Bandensysteme in einer und derselben Linie übereinander, was wesentlich zur Schärfe der Erscheinung beiträgt und in den früheren Fällen nicht stattfand.

FRESNEL macht noch die Bemerkung, dass man die Spiegel einander nähern müsse in dem Maasse, als man den Einfall des Lichts steiler nehme, und schreibt das dem Umstande zu, dass nur solche Strahlen als im Einklang schwingend angesehen werden könnten, welche unter sehr kleinem Winkel gegen einander von der Lichtquelle ausgegangen seien. Wir wissen hierüber noch nichts Bestimmtes, und es wäre denkbar, dass bei weiter entfernten Spiegeln das Ausbleiben der Interferenzerscheinung in den FRESNEL'schen Versuchen von einer zu weit ausserhalb des Interferenzraumes befindlichen Lage der Mittellinie hergerührt hätte, was dann natürlich viel leichter eintreten kann als bei näherstehenden Spiegeln.

7. Der LLOYD'sche Spiegelversuch.

Einen dem vorigen in einiger Beziehung ähnlichen Versuch hat LLOYD[1]) angegeben. Bei demselben fallen die vom leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen zum Theil auf einen nicht zu kleinen Spiegel beinahe streifend auf und interferiren nach der Reflexion mit den direkten Strahlen. Man hat also als Ausgangspunkt des einen Strahlenbündels die Lichtquelle selbst, als den des andern ihr virtuelles Bild in dem Spiegel, und die Interferenzerscheinung ergiebt sich ganz in derselben Weise wie bei den FRESNEL'schen Spiegeln, nur dass hier durch die Reflexion blos bei einem Bündel eine Phasenänderung eintritt, also zwischen beiden Bündeln eine entsprechende Phasendifferenz und ein dem gewöhnlichen complementäres Streifensystem entstehen muss. Ein weiterer Unterschied ist der, dass hier nur höchstens die eine Hälfte des Streifensystems gebildet werden kann, indem der Spiegel selbst in der Normalebene auf die Mitte der Verbindungslinie der beiden Strahlungspunkte liegt, also der Interferenzraum nur längs des Spiegels an diese Mittelebene, die auch den Mittelstreifen enthält, heranreicht, weiterhin sich aber immer mehr seitlich davon entfernt. Man muss aus diesem Grunde auch, um die Erscheinung in möglichster Breite zu übersehen, die FRESNEL'sche Loupe auf die von der Lichtquelle abgewandte Kante des Spiegels einstellen.

QUINCKE hat die Versuche LLOYD's wiederholt und erweitert[2]). Er befestigte an der horizontalen Axe eines Goniometers eine rechteckige Glasplatte von 106 *mm* Länge und 40 *mm* Höhe, deren schmale Flächen von 5·5 *mm* Breite polirt und planparallel waren; ein horizontales Mikroskop von 10 facher Vergrösserung wurde auf den Rand der spiegelnden Fläche eingestellt. »Beim Drehen des Spiegels mittelst der Goniometeraxe nähert sich das erste Minimum der zuerst sichtbaren sogen. äusseren Interferenzstreifen, wie sie am Rande eines undurchsichtigen Schirms auftreten, dem Spiegelrande, bleibt dann stehen und verwandelt

[1]) LLOYD, R. Irish Trans. 17, pag. 174. 1837. POGG. Ann. 45, pag. 95. 1838.
[2]) QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 222. 1871.

sich in einen tief schwarzen Streifen. Gleichzeitig wird der Abstand der einzelnen Minima von einander gleich gross, an Stelle der äusseren schwach gefärbten Interferenzstreifen ist ein helles System gewöhnlicher, lebhaft gefärbter Interferenzstreifen getreten, wie sie FRESNEL'sche Spiegel zeigen . . . In beiden Fällen (Reflexion in Luft an Glas und Reflexion in Glas an Luft) war, sobald die lebhaft gefärbten Interferenzstreifen aufgetreten waren, der erste dunkle Streifen um eine ganze Fransenbreite von dem scharfen Rande der Glasplatte entfernt, auf welchen das Beobachtungs-Mikroskop eingestellt war. Auf der dem Rande der spiegelnden Fläche zugewandten Seite grenzte dieser dunkle Streifen an eine braune Zone, auf welche eine rein weisse bis zum Rande der Glasplatte folgte. Da nur ein halbes Interferenzstreifensystem wahrgenommen wird, so müssten in dem vollständigen System zu beiden Seiten der Mitte zwei weisse Zonen liegen, durch einen schwarzen, dunklen Interferenzstreifen getrennt. Dieser hätte an dem der Streifenmitte entsprechenden vorderen Rande der spiegelnden Fläche liegen müssen, doch habe ich ihn niemals deutlich wahrnehmen können.«

QUINCKE beobachtete so die Streifen bei Reflexion in Luft auf Silber, Gold, Nickel, Stahl, Flintglas, Kronglas, Quarz, Kalkspath, Wasser, bei Reflexion in Kronglas auf Silber, Luft, Wasser, bei Reflexion in Wasser auf Silber, Gold, Stahl, Flintglas, Kronglas, Quarz und nahm überall die Erscheinungen so wahr wie beschrieben.

Man kann[1]) das Streifensystem so verschieben, dass seine Mitte in den Interferenzraum fällt, indem man den direkten Strahlen eine geeignete Verzögerung ertheilt. Am besten verfährt man so, dass man die beiden Strahlenbündel hinter dem Spiegel durch eine passende Linse auffängt und so zwei reelle Bilder der Strahlungspunkte erzeugt. Diese geben Anlass zu einer Interferenzerscheinung, welche ebenso wie die ursprüngliche nur aus einem halben Streifensystem b e steht. Wenn man aber nun die direkten Strahlen in der Nähe ihres reellen Bildpunkts durch ein dünnes Blättchen hindurchgehen lässt, so wird, wie wir oben (pag. 33) gesehen haben, die ganze Interferenzerscheinung nach der Seite hin verschoben, auf der die Einführung des Blättchens erfolgt, hier also in den Interferenzraum hinein, und dann erkennt man deutlich, dass die Mitte von einem schwarzen Streifen eingenommen wird.

Da aber bei dem streifenden Einfall auch ein ziemlich grosser Spiegel auf die reflektirten Strahlen wie eine enge Oeffnung, auf die direkten wie ein Schirm wirkt, so ist bei diesem Versuch der Einfluss der Beugung nicht ausser Acht zu lassen.

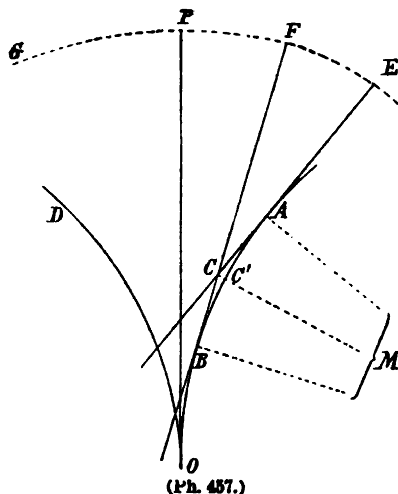
8. Interferenzstreifen längs Brennlinien.

Wenn die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen durch irgend ein optisches System wieder convergent gemacht werden, so bilden sie ein Strahlenbündel, dessen Querschnitt bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner wird. Als einfachsten Fall pflegt man gewöhnlich den zu betrachten, dass die gebrochenen Strahlen sich wieder in einem Punkte schneiden; die das Bündel einhüllende Fläche würde dann ein Kegel sein. Allein bekanntlich ist es nur für einzelne Punkte, und wenn wir uns auf die Anwendung kugelförmiger (und ebener) Flächen bei unsern Linsen und Spiegeln beschränken, wie wir aus praktischen Gründen thun müssen, überhaupt nicht möglich, eine solche Wiedervereinigung in Strenge zu bewirken. Die Strahlen werden niemals von Kegeln, sondern von verwickelteren Oberflächen eingehüllt, welche Brennflächen oder

---

[1]) Vergl. MASCART, traité d'optique I, pag. 184. 1889.

kaustische Flächen heissen. Wir wollen einen einfachen Fall betrachten, die Verhältnisse sind aber in allen Fällen ähnlich. Der leuchtende Punkt liege auf der Axe einer Sammellinse, sodass die durch dieselben gegangenen Strahlen convergiren, die kaustische Fläche ist dann natürlich ebenso wie die Wellenflächen eine Rotationsfläche um die Linsenaxe und die Strahlen liegen sämmtlich in durch die Axe gehenden Ebenen. In Fig. 457 sei *PO* die Axe der oberhalb *P* zu denkenden Linse, *ABOD* ein Meridianschnitt durch die Brennfläche, eine Brennlinie (kaustische Linie). Dieselbe wird von allen in der Ebene der Figur verlaufenden Strahlen berührt und zugleich stehen diese senkrecht auf den Wellenflächen, von denen eine durch *EFPG* angedeutet ist. Daraus folgt, dass die Brennlinie der Ort der Krümmungsmittelpunkte des Meridianschnitts der Wellenflächen ist, denn zwei unendlich benachbarte Tangenten einer Curve schneiden sich auf dieser und zwei unendlich benachbarte Normalen im Krümmungsmittelpunkt. Es folgt weiter, dass, wenn wir eine Tangente, z. B. *EA*, sich von der



(Ph. 457.)

Brennlinie abwickeln lassen (d. h. sie so in der Ebene der Figur drehen, dass sie beständig die Brennlinie berührt ohne auf ihr zu gleiten), ihre Punkte die Meridianschnitte der Wellenflächen beschreiben, denn dabei stehen in jedem Augenblick die erzeugten Kurven senkrecht auf der sich drehenden Geraden, und dasselbe gilt bezüglich der Wellenflächen, also müssen jene in diesen liegen. Bei diesem Abwickeln aber wird das abgewickelte Stück der Tangente gleich dem Bogen, von welchem es abgewickelt worden ist; also wenn wir zwei Tangenten wie *EA* und *FB* ins Auge fassen, ist *FB* gleich der Summe von *EA* und dem Bogen *AB*. Die beiden Tangenten schneiden sich in *C*, und es werde *AC* mit t_1, *BC* mit t_2, *AE* mit a und der Bogen *AB* mit s bezeichnet, dann ist $FC = a + s - t_2$ und $EC = a + t_1$, also $EC - FC = t_1 + t_2 - s$. Das ist aber auch der Gangunterschied für die beiden in *C* sich schneidenden Strahlen vom leuchtenden Punkt bis dahin, weil nach dem Malus-Dupin'schen Satze die Weglänge vom Ausgangspunkt bis zu irgend einer Wellenfläche für alle Strahlen gleich ist. Sehen wir den Bogen *AB* als Kreisbogen an, was bei einer kleinen Länge desselben gestattet ist, so können wir also leicht die Entfernung des Punktes *C* von der Brennlinie für einen gegebenen Gangunterschied der Strahlen finden. Nennen wir *R* den Radius dieses Kreises, α den Winkel *BMC*, so ist

$$t_1 = t_2 = R\, tang\, \alpha = R\left(\frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3}\right),$$

also die Wegdifferenz

$$t_1 + t_2 - s = \frac{s^3}{12R^2}.$$

Suchen wir nun z. B. die Stellen, wo die Strahlen sich aufheben, so ist dieser Ausdruck gleich einem ungraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$ zu setzen, und wir bekommen

$$s = [6(2n + 1)\lambda]^{\frac{1}{3}} R^{\frac{2}{3}};$$

da weiter

$$CC' = R\left(\frac{1}{cos\, \alpha} - 1\right) = \frac{1}{2} R\alpha^2 = \frac{s^2}{8R},$$

so kommt für die Entfernungen der dunkeln Stellen von der Brennlinie für Licht von der Wellenlänge λ der Ausdruck

$$\frac{1}{8}\,[6\,(2n+1)\lambda]^{\frac{2}{3}}\,R^{\frac{1}{3}}\,.$$

Durch die Aneinanderreihung aller der Punkte, welche dem gleichen Gangunterschied entsprechen, erhalten wir daher dunkle Linien, welche der Brennlinie nahezu parallel in den berechneten Entfernungen verlaufen, die sich zu einander verhalten wie die ungraden Zahlen auf der Potenz $\frac{2}{3}$. Betrachten wir die Erscheinung in einer zu OP senkrechten Ebene durch eine Lupe, so haben wir natürlich helle und dunkle Ringe, und der Abstand der letzteren ergiebt sich dem gefundenen Ausdruck gemäss.

Diese Streifen sind zuerst von TH. YOUNG[1]) und G. B. AIRY[2]) behandelt worden mit besonderer Rücksicht auf die Theorie des Regenbogens, später haben sie H. SCHRÖDER[3]) und JAMIN[4]) nochmals beschrieben, sich jedoch mit einer allgemeinen Erklärung ihrer Entstehungsweise und ihres Verlaufs begnügend.

Die oben gegebene Ableitung ist nur eine angenäherte. Strenger müssen die Streifen als Beugungserscheinung berechnet werden. AIRY hat sie so behandelt und auch gezeigt, um wieviel die genäherte Rechnung von der strengeren abweicht. So gefasst begreift die Erscheinung auch die scheibenartige Erweiterung der Fixsternbilder und die von HERSCHEL zuerst beobachteten, von AIRY, SCHWERD, KNOCHENHAUER u. A. behandelten Ringe um dieselben in sich, die in stark vergrössernden Fernrohren sich zeigen.

9. Gemischte Blättchen.

Die Interferenzerscheinung der sogen. »gemischten Blättchen« wurde von THOMAS YOUNG[5]) entdeckt, als er durch zwei aufeinandergelegte, etwas befeuchtete Glasplatten eine Flamme betrachtete. Er beobachtete dabei farbige Streifen, ähnlich den gewöhnlichen Farben dünner Blättchen, aber mehrmals breiter. Infolge der Bemerkung, dass überall da, wo sie erschienen, das Wasser mit kleinen Luftbläschen untermischt war, macht er zu ihrer Erklärung nach Zurückweisung des Gedankens, dass sie etwa nach Art der Höfe durch Beugung entstehen könnten, die Annahme, dass das Zusammenwirken der durch das Wasser und der durch die Luft gegangenen Strahlen die Ursache sei, indem dieselben in den verschiedenen Mitteln verschieden stark verzögert würden. Er zieht daraus die Folgerung, dass entsprechend dem Brechungsexponent des Wassers die Dicke der Schicht, wo hier eine bestimmte Farbe erscheine, sechsmal so gross sein müsse als bei den NEWTON'schen Ringen in Luft, und bestätigt dieselbe durch den Versuch unter Anwendung einer ebenen Glasplatte und einer Convex-

---

[1]) TH. YOUNG, Philos. Trans. 1804, pag. 8.

[2]) G. B. AIRY, Cambr. Trans. VI, pag. 379. 1836; POGG. Ann. Erg. Bd. I, pag. 232. 1842.

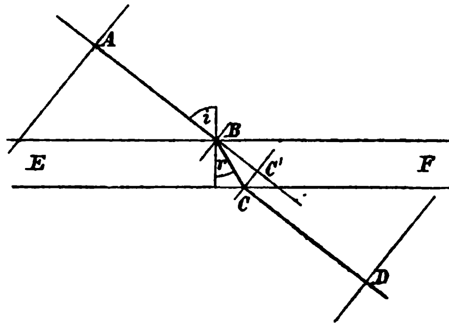
[3]) H. SCHRÖDER, POGG. Ann. 113, pag. 503. 1861.

[4]) JAMIN, Compt. rend. 67, pag. 938. 1868.

[5]) TH. YOUNG, Phil. Tr. 1802, pag. 390. Lect. on nat. phil. Ausg. von KELLAND, 369. BREWSTER sagt (Phil. Tr. 1838, pag. 73) ohne nähere Quellenangabe, dass dieselbe von MAZEAS entdeckt sei, und dass DUTOUR die Beobachtungen wiederholt und vermehrt habe. Es gründet sich das wohl auf die Abhandl. von MAZEAS, Mém. pres. II, pag. 26. 1755 und von DUTOUR, Mém. pr. IV. pag. 285. 1763. In der That enthält die erste Arbeit pag. 36 u. 37 eine Beobachtung, welche wahrscheinlich hierhergehört, ohne dass jedoch MAZEAS dieselbe verstanden oder ihren Unterschied von den Farben dünner Blättchen, mit denen er sich sonst beschäftigt, klar erkannt hätte. Die DUTOUR'sche Abhandlung scheint sich nur auf dünne Blättchen zu beziehen.

linse. Auch bei Anwendung von Butter oder Talg statt Wasser erhält man die Ringe leicht, sie sind dann aber schmäler entsprechend dem grösseren Brechungsexponenten dieser Körper, aber wenn die Zwischenräume mit Wasser statt Luft ausgefüllt werden, sind sie viel breiter. Neigt man die Platte, so ziehen sie sich zusammen entgegengesetzt dem Verhalten der NEWTON'schen Ringe. Die Ringe sind auch auf dem dunkeln Hintergrund neben der Flamme sichtbar und zwar reiner aber den direkt gesehenen complementär gefärbt. YOUNG leitet sie dann aus Strahlen ab, die an den Trennungsflächen der verschiedenen Mittel theils gebrochen theils reflektirt sind. — BREWSTER[1]) hat es schwierig gefunden auf die von TH. YOUNG angegebene Weise die Erscheinung befriedigend herzustellen. Die besten Resultate hat ihm zu Schaum geschlagenes Eiweiss gegeben, — indem er ein wenig davon zwischen die Gläser brachte, das Ueberflüssige abstrich, dann die Gläser auseinandernahm, einige Augenblicke über einer Flamme erwärmte und schliesslich wieder zusammenlegte.

YOUNG hat keine Berechnung der Erscheinung mitgetheilt, das hat zuerst VERDET[2]) gethan; wir geben im Folgenden seine Entwickelung in etwas vereinfachter Gestalt. Wir sehen dabei die wirksame Schicht als von parallelen Ebenen begrenzt an und beschränken uns auf die von den direkt durchgehenden Strahlen erzeugten Streifen. Wir nehmen ferner die Lichtquelle sehr entfernt an, so dass die interferirenden Strahlen untereinander parallel sind. Bedeutet nun in Fig. 458 EF eine planparallele Platte mit dem Brechungsexponenten n, $ABCD$ einen durch dieselbe gehenden Lichtstrahl, nennen wir a die Entfernung der Wellenebenen in A und D von einander, e die Dicke der Platte, i den Einfalls-, r den Brechungswinkel des Strahls, so ist die auf Luft bezogene Weglänge desselben von A bis D



(Ph. 458.)

$$a - BC' + nBC = a - \frac{e}{\cos r}\cos(i - r) + n\frac{e}{\cos r}.$$
$$= a + e(n\cos r - \cos i).$$

Besteht wie in unserem Fall die Platte aus zwei verschiedenen mosaikartig miteinander gemischten Stoffen und sind ihre Brechungsexponenten n_1 und n_2, die Brechungswinkel r_1 und r_2 für den Einfallswinkel i, so erhalten die durch die verschiedenen Stoffe gegangenen Strahlen dem eben abgeleiteten Ausdruck gemäss Wegdifferenzen von der Grösse

$$e(n_1\cos r_1 - n_2\cos r_2).$$

Bei senkrechtem Einfall wird daraus $e(n_1 - n_2)$, und wenn wir eine Platte von veränderlicher Dicke anwenden, z. B. unsere Mischung zwischen eine ebene Glasfläche und eine Linse bringen, so sind die Stellen der dunkeln Ringe durch die Gleichung

$$e = \frac{2m+1}{n_1 - n_2}\cdot\frac{\lambda}{2},$$

die der hellen durch

$$e = \frac{2m}{n_1 - n_2}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

[1]) BREWSTER, Philos. Trans. 1838, pag. 73.

[2]) VERDET, Oeuvres V, pag. 155. 1869.

gegeben. Nehmen wir eine Mischung von Wasser und Luft, so ist $n_1 - n_2$ etwa gleich $\frac{1}{3}$, also die Dicken, bei welchen die dunkeln Ringe gebildet werden $\frac{3}{2}(2m+1)\lambda$, während sie bei den NEWTON'schen Ringen für Luft im durchgehenden Licht $\frac{2m+1}{4}\lambda$ sind; sie ergeben sich also dort in der That sechsmal so gross als hier für die gleiche Ordnungszahl. — Man kann auch ohne Schwierigkeit die Einfallswinkel bestimmen, unter welchen sich bei einer planparallelen Platte die aufeinanderfolgenden Ringe bilden; dieselben stimmen überein mit den Gesichtswinkeln, unter welchen sie gegen die Mitte des Systems erscheinen. Wir erhalten aus dem obigen Ausdruck für die Wegdifferenzen, wenn i_m der Einfallswinkel für die Stelle des $m$ten Ringes ist, wo die Strahlen den gleichen Phasenunterschied wie im Mittelpunkt besitzen,

$$\sqrt{n_1^2 - sin^2 i_m} - \sqrt{n_2^2 - sin^2 i_m} = \frac{m\lambda}{e} + n_1 - n_2$$

und nach einer leichten Umformung, wenn wir

$\frac{m\lambda}{e} = 2\mu$ setzen

$$sin^2 i_m = 4\,\frac{\mu(n_1+\mu)(n_2-\mu)(n_1-n_2+\mu)}{(2\mu+n_1-n_2)^2}.$$

10. Die Interferenzerscheinungen dünner Blättchen.

Die bisher behandelten Fälle gehörten sämmtlich zu der ersten der beiden anfangs unterschiedenen Gruppen, wo die mit einander interferirenden Strahlenbündel von vornherein getrennt, wenn auch sehr nahe nebeneinander von der Lichtquelle ausgehen. Bei der zweiten Gruppe werden sie aus einem und demselben Bündel gewonnen, welches an einer Trennungsfläche zweier Mittel in ein zurückgeworfenes und ein durchgelassenes gespalten wird, die dann durch weitere Reflexionen und Brechungen wieder in nahe die gleiche Richtung und zur Interferenz gebracht werden. — Zunächst haben wir die Interferenzerscheinungen »dünner Blättchen« zu betrachten. Diese Erscheinungen sind von besonderer Wichtigkeit und erfordern desshalb eine eingehende Behandlung; sie haben eine wesentliche Rolle in der Entwickelung unserer Anschauungen von der Natur des Lichtes gespielt, man hat auf sie in mannigfaltiger Weise genaue Messungen sonst schwer zugänglicher Grössen gegründet und sucht ihre Anwendung in dieser Richtung immer weiter auszudehnen und zu vervollkommnen und man kann bei ihnen wegen der grossen Einfachheit der experimentellen Verhältnisse, höhere Gangunterschiede als bei andern Interferenzerscheinungen anwenden, sie sind daher zum Studium der »hohen Interferenzen« besonders geeignet und versprechen so noch wichtige Aufklärungen über die Natur des Lichtes zu liefern.

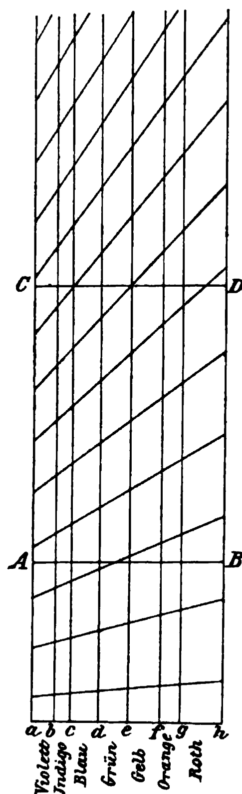
Oben sind schon bei der geschichtlichen Uebersicht die hauptsächlichsten Erklärungen der Erscheinung angeführt. Wir wollen sie nun im Einzelnen etwas näher betrachten. Die hierhergehörige Stelle aus R. HOOKE's im Jahre 1665 erschienener Micrographia (pag. 65 u. f.), wie sie TH. YOUNG in den Philos. Trans. 1802, pag. 39, anführt, lautet folgendermaassen: »Es ist ganz klar, dass die Reflexion von der unteren oder hinteren Seite die hauptsächliche Ursache der Entstehung dieser Farben ist. — Man lasse einen Strahl schief auf das dünne Blättchen fallen, dann wird ein Theil wieder von der ersten Oberfläche zurückgeworfen, ein Theil wird nach der zweiten Oberfläche hin gebrochen, wo er nochmals zurückgeworfen und gebrochen wird, so dass nach zwei Brechungen und

einer Zurückwerfung eine Art von schwächerem Strahl fortgepflanzt wird, und wegen der auf den Hin- und Rückgang (in dem Blättchen) verwandten Zeit kommt diese schwächere Schwingung nach der zuerst reflektirten Schwingung, sodass hierbei (da die Oberflächen einander so nahe sind, dass das Auge sie nicht von einander trennen kann) diese vermischte oder verdoppelte Schwingung, deren stärkerer Theil vorangeht während der schwächere folgt, auf der Retina die Empfindung von Gelb hervorruft[1]). Wenn diese Oberflächen weiter von einander entfernt sind, wird die schwächere Schwingung zusammenfallen mit der zweiten oder nächstfolgenden von der ersten Oberfläche reflektirten Schwingung, dann auch hinter dieser zurückbleiben und mit der dritten, vierten, fünften, sechsten. siebenten oder achten zusammenfallen; sodass, wenn wir einen dünnen, durchsichtigen Körper haben, der von der grössten zur Erzeugung von Farben geeigneten Dünne allmählich zur grössten Dicke wächst, die Farben sich so oft wiederholen werden, als die schwächere Schwingung um Stufen hinter ihrer ursprünglichen oder ersten Schwingung zurückbleibt und mit einer nachfolgenden zusammenfällt. Und wie dies mit der ersten von mir über die Farben aufgestellten Hypothese in Uebereinstimmung ist, oder aus ihr folgt, so habe ich es auch in einer Menge von Fällen durch das Experiment bestätigt gefunden.« Wir sehen aus dieser, wie Th. Young hervorhebt, sieben Jahre vor den ersten Beobachtungen Newton's gedruckten Stelle, dass R. Hooke sehr richtig erkannt hatte, dass zur Entstehung der Erscheinung ein Zusammenwirken der an der Vorderfläche und der an der Hinterfläche reflektirten Strahlen erforderlich sei, und dass jedesmal wieder eine ähnliche Wirkung entstehe, wenn der Wegunterschied der beiden Strahlen um denselben bestimmten Betrag zunehme. Ueber die Art und Weise jedoch, wie aus dem gegenseitigen Einfluss der beiden Strahlenbündel die Farben entstehen, konnte sich Hooke zu jener Zeit, wo die Zerlegung des weissen Lichtes in seine einfachen Bestandtheile noch nicht ausgeführt war, keine einigermaassen zutreffende Vorstellung bilden. Dies klarzulegen blieb Newton vorbehalten. Dieser hatte im Jahre 1672 der Londoner Royal Society seine epochemachende Entdeckung über die prismatische Zerlegung des Sonnenlichtes mitgetheilt und liess drei Jahre später zwei Abhandlungen folgen, die sich zum grossen Theil mit unserem Gegenstand beschäftigen und in den Sitzungen der Gesellschaft vom 9. December 1675 bis zum 10. Februar des folgenden Jahres gelesen wurden[2]). Die eine derselben (l. c. pag. 272 ff.) ist vollständig mit nur wenigen Aenderungen und Zusätzen von Newton in seine Optik aufgenommen worden; sie bildet den ersten, zweiten und dritten Theil (bis Propos. 9) des zweiten Buches von diesem Werke und enthält im Wesentlichen die Beobachtungen über die Farbenringe und Betrachtungen darüber. Die andere bezieht sich hauptsächlich auf Hypothesen über die Natur des Lichtes und entwickelt zuerst die Emissionstheorie in anderer Darstellungsweise freilich als später die Optik, aber von demselben Grundgedanken aus. Beide Abhandlungen geben nun eine Erklärung der Farben (Birch, Hist. III, pag. 264 ff., 277, und 286, Newton, Optice lib. II, p. I, obs. 12 ff., lib. II, p. II.) Newton geht dabei von der Erscheinung aus, welche die Combination eines ebenen und eines

[1]) R. Hooke hat unmittelbar vorher (pag. 64) auseinandergesetzt, dass die Empfindung des Blau durch eine Schwingungsbewegnng hervorgebracht werde, bei welcher einem vorausgehenden schwächeren Ausschlag ein stärkerer folge, die Empfindung des Roth und verwandter Farben dagegen durch einen vorausgehenden stärkeren mit nachfolgendem schwächeren Ausschlag.

[2]) Vergl. Birch, Thom., History of the Royal Society of London. Vol. III, pag. 247 bis 305.

darauf gelegten convexen Glases zeigt, wenn man sie mit dem durch prismatische Zerlegung des Sonnenlichtes erhaltenen farbigen Lichte beleuchtet. Es erscheint dann eine Aufeinanderfolge von dunkeln und hellen Ringen von der Farbe des auffallenden Lichtes; der Mittelpunkt, wo die Gläser sich berühren, ist im reflektirten Licht dunkel und die hellen Ringe liegen an Stellen, wo die Abstände der Gläser sich der Reihe nach verhalten wie 1 zu 3 zu 5 zu 7 u. s. w. Lässt man nun durch eine Drehung des Prismas die auffallende Farbe sich ändern, so ändern sich auch die Durchmesser der Ringe, indem sie aber die angegebene Proportionalität immer beibehalten; sie sind am grössten für Roth und werden immer kleiner bis zum Violett. Diese Beobachtung lieferte Newton den Schlüssel zur Erklärung der farbigen Ringe bei Einfall weissen Lichtes, denn da er von diesem wusste, dass es aus verschiedenartigen Strahlen zusammengesetzt ist, so lag der Schluss nahe, dass die Erscheinung, die es hervorruft, die Uebereinanderlagerung der Erscheinungen sein müsse, welche die einzelnen farbigen Strahlen erzeugen; von diesen aber hatte er gefunden, dass sie Ringe von verschiedenem Durchmesser bilden, welche bei der Uebereinanderlagerung sich also nicht decken können, sondern theilweise nebeneinander fallen, der rothe am weitesten nach aussen, der violette am weitesten nach innen. Die Zusammensetzung der Farben an den einzelnen Stellen erläuterte er noch näher durch die beistehende Fig. 459. In den Punkten *a, b, c, d, e, f, g* und *h* sind Seenkrechte auf der Linie *ah* errichtet und jede nach dem Verhältniss der Zahlen 1, 3, 5, 7 .... getheilt, in der Weise, dass sich die entsprechenden Abschnitte der aufeinanderfolgenden Geraden zu einander verhalten wie die Dicken der Luftschichten, welche den hellen Ringen gleicher Ordnung zugehören, die von den Grenzstrahlen der Farben Violett, Indigo, Blau, Grün, Gelb, Orange, Roth gebildet werden. Man hat demnach die Abschnitte bei allen Linien in der Figur mit einem und demselben Faktor zu multipliciren, um die wahre Luftdicke des zugehörigen hellen Ringes zu erhalten, und überhaupt liefert die Multiplikation einer beliebigen, auf einer der Linien abgetragenen Länge mit diesem Faktor die ihr entsprechende wahre Dicke. Sind die Längen der Linien *ab, bc, cd, de, ef, fg, gh* ferner so gewählt, dass sie den Unterschieden der Abschnitte auf den in ihren Endpunkten errichteten Senkrechten (d. h. den Unterschieden der Luftdicken für die von den Grenzfarben gebildeten hellen Ringe gleicher Ordnung) proportional sind, so fallen, wie man leicht erkennt, die Theilpunkte derselben Ordnung jedesmal in eine gerade Linie und alle diese Geraden convergiren nach einem auf der Verlängerung von *ah* gelegenen Punkt. Man sieht auch leicht ein, dass dieselben Geraden ebenfalls für jede zwischenliegende Farbe, wenn an der ihr auf der Linie *ah* zukommenden Stelle eine Senkrechte errichtet wird, durch ihre Durchschnitte mit dieser die Lage der hellen Ringe angeben. Um nun die Farbenzusammensetzung für einen beliebigen Punkt zu erhalten, brauchen wir nur in der der betreffenden Luftdicke entsprechenden Entfernung eine Parallele zu der Linie *ah* zu ziehen, diese giebt für alle einzelnen Farben die



(Ph. 459.)

Stelle des Ringsystems an, welche an den fraglichen Punkt fällt. So haben wir z. B. bei einer *aA* entsprechenden Dicke, wie die Linie *AB* zeigt, gar kein äusserstes Roth, denn der Punkt *B* fällt in die Mitte zwischen den zweiten und dritten hellen Ring dieser Farbe, auch das übrige Roth ist nur schwach vertreten, allmählich zunehmend Orange und Gelb und in grösster Stärke das mittlere Grün, im Blau nimmt die Lichtstärke wieder rasch ab, sodass die Grenze zwischen Indigo und Violett ganz fehlt, das äusserste Violett endlich ist wieder schwach vertreten. An der Stelle des sechsten hellen Ringes des mittleren Roth haben wir, wie die Linie *CD* zeigt, in voller Stärke ausser dem mittleren Roth noch die Grenze zwischen Gelb und Grün, die zwischen Blau und Indigo sowie das äusserste Violett, dazwischen fehlen die Grenzbezirke zwischen Orange und Gelb und zwischen Grün und Blau sowie der Anfang des Violett. Welchen Eindruck auf unser Auge die so sich ergebenden Farbenmischungen machen, ist keine physikalische, sondern eine physiologische Frage, doch haben schon NEWTON und in neuerer Zeit mehrere Forscher des praktischen Interesses wegen Untersuchungen darüber angestellt[1]).

Ausser der Erklärung für die Entstehung der Farbenringe hat die NEWTON-sche Behandlung unseres Gegenstandes noch eine Reihe von Ergebnissen geliefert, von denen wir die hauptsächlichen noch anzuführen haben. Dazu gehört vor Allem die Bestimmung der Luftdicke für die verschiedenen Ringe. Zu diesem Zweck namentlich hatte NEWTON die Erscheinung durch die Combination einer ebenen und einer sie berührenden kugelförmigen Fläche erzeugt, denn mittelst der Kenntniss des Halbmessers der letzteren war es leicht, die Dicke der Zwischenschicht für jede Entfernung vom Berührungspunkt zu bestimmen.

Als Resultat seiner Messungen giebt NEWTON an, dass sich die Luftdicken der Ringe gleicher Ordnung für die Grenzen der Spectralfarben Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo und Violett zu einander verhielten wie die Kubikwurzeln aus den Quadraten der Saitenlängen der Töne einer Octave, für welche er die folgende, mit den gewöhnlichen Annahmen nicht ganz übereinstimmende Reihe anführt: 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$. Aber es werden auch auf diese Weise die Farben nicht gut begrenzt, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, worin die zweite Spalte die hieraus und aus NEWTON's absoluter Grössenangabe für die Grenze von Orange und Gelb berechneten Wellenlängen für die in der ersten Spalte bezeichneten Spectralbezirke in Milliontel *mm* enthält, während die letzte Spalte die ungefähren wahren Werthe derselben giebt.

	Wellenlänge	
	nach NEWTON berechnet	ungef. richtiger Werth
Aeusserstes Roth	645	760
Grenze von Roth und Orange	596	647
„ „ Orange und Gelb	571	587
„ „ Gelb und Grün	532	536
„ „ Grün und Blau	492	492
„ „ Blau und Indigo	453	454
„ „ Indigo und Violett	439	426
Aeusserstes Violett	406	393

[1]) NEWTON, Optice lib. II. pars 2. — BRÜCKE, POGG. Ann. 74, pag. 582. 1848. — WERTHEIM, Ann. de chim. et de phys. 40, pag. 180. 1854. — QUINCKE, POGG. Ann. 129, pag. 180. 1866. — ROLLETT, Wien. Sitzber. 77 (3), pag. 177. 1878.

Namentlich im Roth ist die Abweichung beträchtlich; immerhin geben die Messungen NEWTON's zum Theil richtige Werthe und wurden mehr als hundert Jahre lang durch keine genaueren ersetzt, selbst FRESNEL berechnet nach ihnen die Wellenlängen (Oeuvr. compl. T. II, pag. 24), wenn er auch die Vermuthung ausspricht, dass die Resultate NEWTON's für das Roth ein wenig zu klein seien (Oeuvr. compl. T. I, pag. 327).

In der siebenten Beobachtung des ersten Theils vom zweiten Buch beschreibt NEWTON weiter die Verbreiterung der Ringe bei schiefer Betrachtung derselben. Er schliesst daraus, dass die Luftdicke eines und desselben Ringes umgekehrt proportional dem Cosinus eines Winkels (u) sei, dessen Sinus »die erste von 106 mittleren Proportionalen zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels, von dem grösseren aus gerechnet« sei, das heisst, wenn i den Einfalls-, r den Brechungswinkel bezeichnet,

$$\sin u = \sin r - \frac{1}{106}(\sin r - \sin i) = \frac{105 + n}{106} \sin r$$

unter n den Brechungsexponent für den Uebergang aus Glas in Luft verstanden. Wir wissen, dass die fragliche Luftdicke umgekehrt proportional dem Cosinus des Brechungswinkels (r) ist, dass NEWTON's Messungen also ein etwas zu kleines Resultat ergeben haben. NEWTON beschreibt seine Beobachtung nicht genau genug, dass man beurtheilen könnte, woran das liegt; vielleicht hängt es mit der Beobachtungsweise zusammen. N. hat einer früheren Stelle (Beob. 6) zufolge die Durchmesser der Ringe mit dem Zirkel gemessen, dabei befindet sich das Auge in der durch den Mittelpunkt derselben gehenden Vertikalebene, nimmt man nun als Einfallswinkel den Winkel, welchen die vom Mittelpunkt nach dem Auge gezogene Gerade mit der Verticalen macht, und als Entfernung des Auges die von NEWTON bei einer kurz vorhergehenden Beobachtung angegebene von ungefähr 8 Zoll an, so erhält man in der That Zahlen, die von den seinigen nicht sehr weit abweichen.

Die zehnte Beobachtung beschreibt die Wirkung eines zwischen die Gläser gebrachten Wassertropfens. Die Ringe ziehen sich im Bereich desselben zusammen ungefähr in dem Verhältniss von 8 zu 7. Die Dicken einer Luft- und einer Wasserschicht, welche einen Ring derselben Ordnung erzeugen, verhalten sich also nahe wie 4 zu 3. NEWTON schliesst, dass vielleicht allgemein für ein beliebiges Mittel der Brechungsexponent aus ihm in Luft das Dickenverhältniss von Schichten dieses Mittels und von Luft angebe, welche die gleichen Ringe erzeugen.

Endlich behandelt NEWTON (24. Beobachtung und Schluss des zweiten Theils vom zweiten Buch) die Erscheinungen, welche sich bei Betrachtung der Ringe durch ein Prisma zeigen. Man sieht dann auf der einen Seite des Mittelpunkts eine sehr viel grössere Anzahl von Ringen als vorher, während sie auf der andern verschwinden. NEWTON erklärt dies ganz richtig durch die verschieden starke Verschiebung, welche die verschiedenfarbigen Ringe durch die Brechung im Prisma erfahren. Unter den Ringen derselben Ordnung, welche die verschiedenen Farben bilden, sind die äusseren roth, die inneren violett, da aber Roth weniger stark gebrochen wird als Violett, so werden auch jene Ringe weniger stark verschoben als diese und das bewirkt auf der in der Richtung der Verschiebung gelegenen Seite eine Annäherung, auf der entgegengesetzten eine Entfernung. An einer bestimmten Stelle des Ringsystems wird die Annäherung zu einem Zusammenfallen des rothen und violetten Ringes führen und da die zwischenliegenden Farben ebenfalls mit den äusseren zusammenfallen, wird hier ein weisser

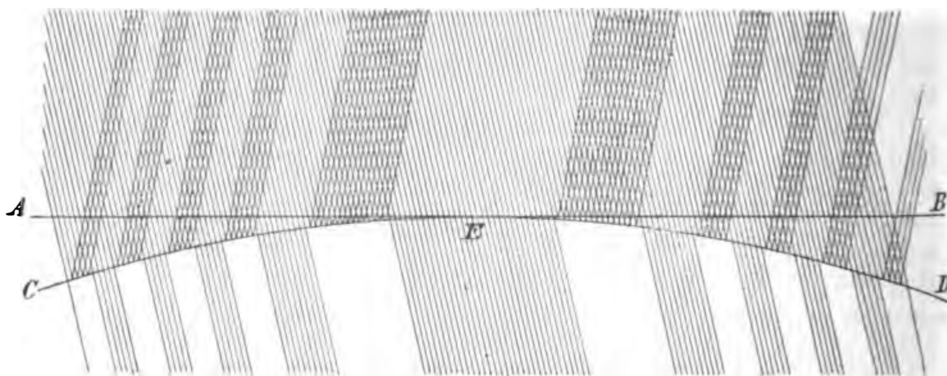
Streifen entstehen. Bei den Ringen der zunächst benachbarten Ordnungen wird merklich das Gleiche stattfinden, sie werden weisse Streifen bilden, die von dem ersten durch schwarze Zwischenräume getrennt sind. Je weiter nach aussen, um so mehr werden die Streifen wieder gefärbt erscheinen, denn die Ringe höherer Ordnung sind breiter und die Verschiebung der violetten Ringe ist nicht mehr so viel grösser als die der rothen, dass sie dieselben erreichten, wir werden also aussen roth, innen blau gefärbte Streifen haben. Dagegen ist es bei den weiter innen gelegenen Ringen umgekehrt, die violetten und blauen Ringe werden über die rothen, sie schneidend, hinaus verschoben, so dass der innere Saum der Streifen jetzt roth, der äussere blau erscheint. Bei weiterem Fortschreiten nach innen fallen bei passender Entfernung des Prismas von den Gläsern wieder die Farben verschiedener Ordnungen über einander, so dass die Ringe in der Mittellinie sich verwischen und ein gleichförmig weisses Feld entsteht; um die Durchschnittspunkte herum bleiben sie jedoch scharf, jeder Ring giebt also zu zwei getrennten seitlich von der Mitte gelegenen Streifen Veranlassung, deren Enden eine verschiedene Farbenfolge zeigen, indem die einander zugekehrten innen roth und aussen blau, die abgewandten dagegen innen blau und aussen roth gefärbt sind.

Hatte so NEWTON durch eine gut geleitete Experimental-Untersuchung die Kenntniss dieser Erscheinungen mehr gefördert als irgend jemand vor ihm, so blieb er doch in ihrer Erklärung um einen wesentlichen Schritt hinter R. HOOKE zurück. Dieser hatte, wie wir gesehen haben, richtig erkannt, dass zur Entstehung derselben ein Zusammenwirken des an der Vorderfläche und des an der Hinterfläche reflektirten Lichtes erforderlich sei. NEWTON dagegen, der die Vorstellung, dass dies Licht nur in Schwingungen des Aethers bestehe, verwarf[1]), hauptsächlich, weil er sie im Widerspruch mit der geradlinigen Fortpflanzung der Lichtstrahlen glaubte, die sich dann in den Schatten hinein verbreiten müssten, wie die Schallschwingungen und Wasserwellen um Hindernisse herumgehen (von der Lichtbeugung glaubte er, dass sie nur vom Schatten weg stattfinde), wurde durch seine Annahme materieller Lichtkörperchen fast mit Nothwendigkeit zu der Anschauung geführt, dass diese an bestimmten Stellen der zweiten Fläche der dünnen Schicht, nämlich da, wo im reflektirten Licht die dunklen Ringe erscheinen, durchgelassen, an anderen dagegen, wo man die hellen Ringe sieht, zurückgeworfen würden. Um dies zu erklären, musste er annehmen, dass die Lichttheilchen in zwei verschiedenen Zuständen sich befinden könnten, die er Anwandlungen *(fits, accessus, vices)* nannte, in deren einem sie beim Auftreffen auf die Trennungsfläche zweier Mittel leichter durchgelassen in dem andern leichter zurückgeworfen würden. Die Erscheinungen forderten weiter, dass diese Anwandlungen regelmässig in gleichen Zwischenräumen bei denselben Lichttheilchen wiederkehren, dass sie aber von verschiedener Länge sind bei verschiedenartigen Theilchen und zwar so, dass sie sich bei den Theilchen der verschiedenen Farben zu einander verhalten wie die Dicken der Schichten, welche Ringe gleicher Ordnung darin erzeugen. Bei dem Uebergang in andere Mittel muss eine Aenderung der Länge der Anwandlungen angenommen werden, die nicht nur von der Natur des Mittels, sondern auch von dem Brechungswinkel abhängt, nämlich: wenn Strahlen derselben Art senkrecht in verschiedene Mittel eintreten, so verhalten sich die Längen der Anwandlungen in einem Mittel zu denen in einem zweiten, wie der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des

[1]) S. Optice, Quaest. 28.

Brechungswinkels von Strahlen, welche aus dem ersten in das zweite Mittel übergehen (Opt. lib. II, pars III, prop. 17) und: wenn Strahlen derselben Art unter verschiedenen Winkeln in ein und dasselbe Mittel eintreten, so verhalten sich ihre Anwandlungen in demselben zu einander, wie die Produkte aus der Secante des Brechungswinkels und der Secante eines Winkels, dessen Sinus ist $\frac{105 + n}{106} \sin r$, wenn r den Brechungswinkel bezeichnet[1]) (Opt. lib. II, pars III, prop. 15). Welchen Zusammenhang NEWTON zwischen den Anwandlungen eines Lichttheilchens vor und nach seinem Uebergang aus einem Mittel in ein anderes annahm, geht aus seinen Aeusserungen nicht klar hervor[2]).

Nach diesen Annahmen erklärt sich nun die Entstehung der Ringe folgendermaassen. Es werde der Einfachheit wegen angenommen, dass einfarbige Lichtstrahlen auf die erste ebene Fläche *AB* (Fig. 460) einer dünnen Luftschicht auffallen, die sich zwischen dieser und einer kugelförmigen Schicht *CD* befindet,



(Ph. 460)

deren Krümmung in der Figur der Deutlichkeit wegen viel zu gross gezeichnet ist. Die auf *AB* treffenden Strahlen sind nun theils in der Anwandlung des leichten Zurückgeworfenwerdens und theils in der des leichten Durchgehens. Die ersteren, die an allen Stellen der Fläche *AB* in gleicher Menge nach vorn zurückgeworfen werden, sind in der Figur nicht gezeichnet, nur die durchgehenden sind angegeben. Von diesen gehen die in dem Punkte *E*, wo die Kugelfläche *CD* die Ebene *AB* berührt, und dessen nächster Umgebung auffallenden Strahlen auch durch die Fläche *CD* hindurch, denn sie befinden sich noch in der Anwandlung des leichten Durchgehens, wenn sie sie treffen, und es geschieht dies auf einer Kreisfläche um *E*, wo die Dicke der Zwischenschicht noch nicht die Länge einer Anwandlung erreicht hat. Von der Stelle an, wo letzteres der Fall ist, bis zur doppelten Dicke werden auf einem um die eben erwähnte Fläche herumliegenden Kreisring die Strahlen an der Fläche *CD* reflektirt, da sie dieselbe in der Anwandlung des leichten Zurückgeworfenwerdens erreichen. In einem weiteren Kreisring, der die zwischen der doppelten und dreifachen Dicke einer Anwandlung gelegene Stelle der dünnen Schicht einnimmt, werden die Strahlen wieder durchgelassen und so fort. So entsteht an der zweiten Fläche (*CD*) ein beständiger Wechsel von durchgelassenen und zurückgeworfenen Strahlen, wie es

[1]) Nach der oben (pag. 550) gelegentlich der Besprechung der Verbreiterung der Ringe bei schiefer Betrachtung gemachten Bemerkung muss dafür gesetzt werden: sie verhalten sich wie die Quadrate der Secanten der Brechungswinkel.

[2]) Vergl. FEUSSNER, POGG. Ann. 160, pag. 321 ff. 1877.

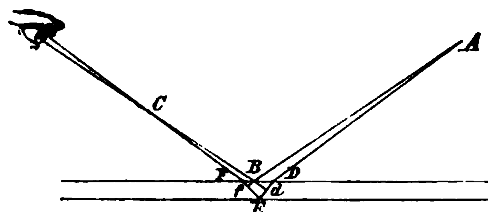
die Figur im Durchschnitt veranschaulicht, und in der Ansicht von oben ein System von hellen und dunklen Ringen mit dunklem Mittelpunkt in der Durchsicht von unten ein diesem complementäres System, wo die hellen Ringe durch dunkle, und die dunklen durch helle ersetzt sind. Das ist es, was die Beobachtungen im einfarbigen Lichte zeigen. Die Annahme über die verschiedene Länge der Anwandlungen bei den Lichttheilchen der verschiedenen Farben erklärt die Verschiedenheit der Durchmesser der Ringe bei diesen und damit die Erscheinung im weissen Licht. Die Veränderung der Ringdurchmesser bei Einführung von Flüssigkeiten in die Zwischenschicht erklärt sich aus der Annahme über die Abhängigkeit der Länge der Anwandlungen von dem Medium, in dem sich die Theilchen bewegen und die Verbreiterung der Ringe bei schiefer Betrachtung aus der angenommenen Veränderung der Anwandlungen mit dem Brechungswinkel. — Ist es demnach NEWTON in der That möglich, die hauptsächlichen von ihm beobachteten Erscheinungen in seiner Theorie zu erklären, so zeigt doch ein etwas tieferes Eingehen, dass dieselbe nicht nur in verschiedener Beziehung auf grosse Schwierigkeiten stösst, sondern es lassen sich auch Versuche angeben, die ihr direkt widersprechen. FRESNEL bespricht an mehreren Stellen[1]) die NEWTON'sche Erklärungsweise, er weist darauf hin, wie fast eine jede Beobachtung die Annahme einer neuen Eigenschaft der Lichttheilchen nöthig mache, die von vornherein meist unerwartet und auffallend sei, er zeigt dann, wie die regelmässige Brechung des Lichtes sich schwer mit dem angenommenen Wechsel der Anwandlungen vereinigen lasse, und führt namentlich als im Widerspruch mit den NEWTON'schen Anschauungen stehend die tiefe Schwärze der ersten dunklen Ringe an. Nach NEWTON würde in den ersten dunklen Ringen nur das an der zweiten Fläche reflektirte Licht fehlen, dagegen das an der ersten reflektirte vollständig vorhanden sein; wenn man aber den Versuch so anstellt, dass man das obere Glas etwas über das untere vorstehen und die Ringe sich am Rand des letzteren bilden lässt, so erkennt man leicht, dass die dunklen Ringe erheblich schwärzer sind, als die angrenzenden Stellen des oberen Glases, so dass in ihnen auch das an der ersten Fläche reflektirte Licht fehlen oder wenigstens stark geschwächt sein muss. Andere Betrachtungen hierüber finden sich in meiner schon angeführten Abhandlung (POGG. Ann. Bd. 160). Der einfachste und direkteste Nachweis dafür, dass die Erscheinung keineswegs allein von dem an der zweiten Fläche reflektirten Licht herrührt, sondern dass ein Zusammenwirken der von beiden Flächen herkommenden Bündel erforderlich ist, wird durch einen Versuch geliefert, der freilich zur Zeit NEWTON's und FRESNEL's noch nicht ausgeführt werden konnte, weil man damals noch nicht genügend einfarbige Lichtquellen besass, die eine verhältnissmässig erhebliche Dicke der dünnen Schicht anzuwenden gestatten. Wenn man nämlich die Flächen in eine solche Entfernung bringt, dass ein gespiegelter Gegenstand deutlich doppelt gesehen wird und sie mit einer gut einfarbigen Lichtquelle etwas schief und so beleuchtet, dass, während die Streifen sich zeigen, nach vorn ein Rand der Lichtquelle oder ein dazwischen eingeschobener Schirm gespiegelt erscheint, so steht das von der unteren Fläche reflektirte Bild etwas über das von der oberen Fläche gelieferte vor, und in diesem vorstehenden Rande müssten nach NEWTON die Streifen ebenso vorhanden sein wie in der übrigen beleuchteten Fläche, während der Versuch hier nur eine ganz gleichmässige Helligkeit ergiebt.

---

[1]) FRESNEL, Oeuvres compl. I, pag. 51, 133 u. 252.

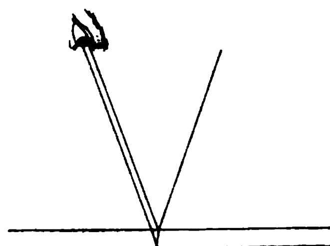
Ich übergehe die Arbeiten von EULER[1]), welcher sich die Farben durch die Eigenschwingungen der Moleküle der dünnen Schicht entstanden dachte, die je nach der Dicke der Schicht durch Lichtstrahlen von bestimmter Farbe angeregt werden sollten, ganz ähnlich wie gespannte Saiten durch Schallschwingungen, die mit ihnen im Einklang stehen, zum Tönen gebracht werden können, von MAZEAS[2]) von DUTOUR[3]) u. A., um zur Begründung der wahren Theorie unserer Erscheinungen zu kommen.

In seiner berühmten Abhandlung »On the theory of light and colours«[4]) wendet THOMAS YOUNG seinen 8. Lehrsatz, in welchem er das Princip der Interferenzlehre zuerst klar ausgesprochen hat, unter anderem im zweiten Zusatz auf die Erklärung der Farben dünner Blättchen an. Er betrachtet dieselben als von ebenen parallelen Flächen begrenzt, nimmt schief einfallendes Licht an und bestimmt die Verzögerung des an der Hinterfläche reflektirten Strahls gegen den von der Vorderfläche zurückgeworfenen. Die beigegebene Figur zeigt, dass er einen für die Erklärung wesentlichen Punkt, der später häufig nicht genügend beachtet worden ist, wohl im Auge behält, dass nämlich die zusammenwirkenden Strahlen von einem und demselben leuchtenden Punkt ausgegangen sein müssen, dass er aber keine richtige Vorstellung vom Verlauf derselben hat, der auch erst durch eine genauere Analyse bestimmt werden kann.



(Ph. 461.)

Doch hat das hier keinen Einfluss, denn man überzeugt sich leicht, dass bei planparallelen Platten, wo die beiden Strahlen in einer und derselben, durch den leuchtenden und den vom Auge fixirten Punkt bestimmten Normalebene der Platte verlaufen müssen, das Resultat das gleiche ist, die Strahlen mögen im übrigen gegen einander liegen wie sie wollen. Denn wenn man vom Punkte B (Fig. 461) die beiden Senkrechten Bd und Bf auf DE und BF fällt, so ist die Verzögerung des an der unteren Fläche reflektirten Strahls in dem Medium der Platte $dE + Ef$ und dies ist — einerlei, wo der Punkt B liegt — gleich $2D \cos r$, wenn durch D die Dicke der Platte, durch r der Brechungswinkel bezeichnet wird. Ist der Brechungsindex der Platte n, so entspricht dem die Weglänge $2nD \cos r$ in Luft. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass bei planparallelen Platten das Auge auf Unendlich accommodiren muss, wenn eine deutliche Interferenzerscheinung wahrgenommen werden soll; der Verlauf ist also wie er in Fig. 462 angegeben ist: es interferiren die aus demselben auffallenden Strahl entstehenden beiden reflektirten Strahlen.


(Ph. 462.)

TH. YOUNG fand also für den Gangunterschied der beiden Strahlen den Werth $2D \cos r$, und schloss daraus, dass die Dicke der Blättchen, welche dieselbe Farbe reflektiren, d. h. den Strahlen denselben Gangunterschied ertheilen

[1]) EULER, Mém. de Berl. 1752, pag. 262.

[2]) MAZEAS, Mém. prés. II.

[3]) DUTOUR, Mém. prés. IV, pag. 285. 1763; Journ. de phys I, etc.

[4]) TH. YOUNG, Philos. Trans. 1802, pag. 12.

sollen, wie die Sekante des Brechungswinkels variiren müsse, was mit NEWTON's Beobachtungen gut übereinstimme.

Noch einen anderen für unsere Erscheinung wichtigen Punkt behandelt TH. YOUNG in dieser Abhandlung zuerst, die Phasenänderung bei der Reflexion. Um seinen Gedankengang klar zu verstehen, muss man im Auge behalten, dass er sich die Lichtbewegung als Longitudinalschwingung dachte. Er stützt sich auf eine Bemerkung, die er im Anschluss an seinen vierten, auf die Reflexion bezüglichen Lehrsatz gemacht hat und die in einer Vergleichung mit dem Stoss elastischer Körper besteht. »Wenn ein kleinerer elastischer Körper gegen einen grösseren stösst, so wird der kleinere bekanntlich mehr oder weniger kräftig zurückgestossen, entsprechend dem Unterschied ihrer Massen: so entsteht immer eine Reflexion, wenn die Lichtstrahlen von einem optisch dünneren zu einem dichteren Mittel übergehen, und häufig ein Echo, wenn ein Schall gegen eine Wolke stösst. Wenn ein grösserer Körper einen kleineren trifft, stösst er ihn fort ohne alle seine Bewegungen zu verlieren: so übertragen die Theilchen eines dichteren Aethermittels nicht ihre ganze Bewegung auf ein dünneres, aber sie werden in ihrer Vorwärtsbewegung durch die Anziehung der brechenden Substanz mit gleicher Kraft zurückgezogen und so entsteht immer eine Reflexion secundär, wenn die Lichtstrahlen von einem dichteren zu einem dünneren Mittel übergehen.« Zu dieser Stelle, die YOUNG aus seiner Abhandlung Phil. Tr. 1800, pag. 127, citirt, fügt er jetzt hinzu: »Aber es ist nicht durchaus nothwendig, in dem letzteren Fall eine Anziehung vorauszusetzen, weil das Streben nach Vorwärtsbewegung ohnedies rückwärts fortgepflanzt werden wird; dabei wird die Schwingung umgekehrt werden, indem eine Verdünnung an die Stelle einer Verdichtung tritt. Dies wird vielleicht am besten mit den Erscheinungen im Einklang sein.«

TH. YOUNG kommt also durch diese Betrachtung zu dem Schluss, dass bei der Reflexion an einem dünneren Körper eine halbe Wellenlänge verloren werde, indem »eine Verdünnung an die Stelle einer Verdichtung tritt«. Da nun in den gewöhnlichen Fällen die Farben dünner Blättchen entweder in einem dünneren Medium zwischen zwei dichteren oder in einem dichteren zwischen zwei dünneren entstehen, so findet die eine der Reflexionen an einem dünneren Medium statt und es tritt der hierdurch erzeugte Phasenunterschied noch zu dem von der Wegdifferenz herrührenden hinzu, und damit ist erklärt, warum in diesen Fällen die Mitte der NEWTON'schen Ringe im reflektirten Licht durch einen schwarzen Fleck gebildet wird und die gegenseitige Lage der hellen und dunklen Ringe so ist, wie die Beobachtungen sie ergeben. THOMAS YOUNG sprach aber zugleich aus, dass man dann, wenn die optische Dichte der dünnen Schicht zwischen denen der begrenzenden Mittel liege, eine Umkehrung der Erscheinung, ein Ringsystem mit weissem Mittelpunkt erwarten müsse, und er hatte die Genugthuung, einige Monate später die experimentelle Bestätigung hierfür beibringen zu können[1]; als er zwischen ein Prisma aus Flintglas und eine Linse aus Kronglas einen Tropfen Sassafrasöl gebracht hatte, war ein weisser Mittelfleck umgeben von einem dunklen Ring im reflektirten Licht entstanden.

Hatte TH. YOUNG die Erklärung unserer Erscheinungen mehr in grossen Zügen, zum Theil nur andeutungsweise unter Herausgreifung der wesentlichsten Punkte gegeben, so behandelte sie FRESNEL dagegen mit tiefer eindringender

---

[1]) THOM. YOUNG, Philos. Trans. 1802, pag. 393.

Gründlichkeit[1]). In seiner ersten Arbeit erklärt er die Ringe aus der Undulationstheorie und zeigt, wie die Beobachtungen NEWTON's über die den verschiedenen Farben entsprechenden Luftdicken zu denselben Werthen für die Wellenlängen führen, wie seine eigenen Beobachtungen über die Beugungserscheinungen. Ferner leitet er die Formel für die Erweiterung der Ringe bei schiefer Betrachtung in ähnlicher Weise wie YOUNG ab, indem er gleichfalls eine planparallele Platte voraussetzt. Die Abweichung der Resultate der Rechnung für grosse Einfallswinkel von den Beobachtungen NEWTON's bespricht er ausführlich und schreibt dieselbe hauptsächlich der Benutzung eines nicht ganz genauen Brechungsexponenten von Seiten NEWTON's zu. — In der zweiten Arbeit erörtert FRESNEL einen Umstand, der auf den ersten Blick eine Schwierigkeit für die Erklärung zu enthalten scheint. ARAGO hatte durch ein sinnreiches Experiment nachgewiesen, dass die im reflektirten und im durchgelassenen Licht gesehenen Ringe immer dieselbe Intensität besitzen und dass, wenn die letzteren viel schwächer scheinen als jene, dies daher kommt, dass sie gleichsam in eine grosse Menge weissen Lichtes eingetaucht sind. Wenn nun, sagt FRESNEL, die einzige Ursache der durchgelassenen Ringe der Einfluss wäre, welchen die zwei Mal in der dünnen Schicht reflektirten Strahlen auf die direkt durchgegangenen ausüben, so müssten sie viel schwächer als die reflektirten sein, weil die Strahlen, welche diese bilden, nur einmal, die einen an der oberen, die andern an der unteren Fläche des Blättchens, reflektirt sind. Er löst hier die Schwierigkeit nicht, sondern giebt nur einen wenig befriedigenden Weg an, sie zu umgehen. Auch TH. YOUNG, mit dem ARAGO den Gegenstand etwa ein halbes Jahr später besprach, fand zunächst die richtige Erklärung nicht, wie sein Brief vom 12. Januar 1817[2]) beweist; erst im September desselben Jahres kündigte er ARAGO an[3]), dieselbe gefunden zu haben und giebt einige Andeutungen, ohne sie indessen genauer mitzutheilen. Die Sache verhält sich folgendermaassen. ARAGO's Experiment bestand darin, eine die NEWTON'schen Ringe erzeugende Gläsercombination von vorn und von hinten in gleicher Weise mit gleich intensivem Licht zu beleuchten. Dann sind keine Ringe sichtbar. Dies beweist, dass die Summe der Intensität des reflektirten und des durchgehenden Lichtes überall dieselbe ist, oder mit andern Worten, dass der Unterschied in der Lichtstärke eines hellen und eines dunklen Streifens im reflektirten Licht ebenso gross ist als im durchgehenden. Nennen wir nun a_1 die Amplitude des an der Vorderfläche, und a_2 des an der Hinterfläche zurückgeworfenen Strahles, so ist nach der oben (pag. 517) abgeleiteten Formel (9) die Intensität eines hellen Streifens im reflektirten Licht $(a_1 + a_2)^2$ und die eines dunklen $(a_1 - a_2)^2$, also ihr Unterschied $4a_1a_2$, und ebenso sind, wenn b_1 die Amplitute des direkt durch das Blättchen gehenden Strahls, b_2 die des nach zweimaliger innerer Reflexion durchgehenden bedeuten, die Intensitäten eines hellen und eines dunklen Streifens im durchgehenden Licht bezüglich $(b_1 + b_2)^2$ und $(b_1 - b_2)^2$, ihr Unterschied also $4b_1b_2$. Die Intensitätsunterschiede, um die es sich handelt, sind also den Produkten der Amplituden der interferirenden Strahlen proportional; und da ist es denn gar nicht mehr auffallend, dass das Produkt der Amplitude des zweimal mit der des gar nicht reflektirten Strahls gleich gefunden wird dem Produkt der Amplituden der beiden einmal reflektirten

[1]) Die betreffenden Stellen sind die folgenden: Oeuvres compl. I, pag. 51 (Novemb. 1815); I, pag. 133 (Juli 1816); II, pag. 74. Supplem. zur franz. Uebers. der Chemie von THOMSON (Juni 1822); II, pag. 247, Ann. de chim. et de phys. 23, pag. 129 (Juni 1823).

[2]) TH. YOUNG, Miscell. works I, pag. 381. — FRESNEL, Oeuvres compl. II, pag. 742.

[3]) TH. YOUNG, Miscell. works I, pag. 385. — FRESNEL, Oeuvres compl. II, pag. 745.

Strahlen. Wir werden auf den Gegenstand bei der Betrachtung der vielfachen Reflexionen zurückkommen.

In derselben Arbeit giebt FRESNEL auch eine Ableitung des Verlustes von einer halben Wellenlänge, während er ihn in der früheren einfach als experimentelle Thatsache ohne Erklärung hingenommen hatte. Er macht die Annahme, dass die Reflexion der Lichtstrahlen durch den ganzen Körper hin an seinen kleinsten Theilchen erfolge. Indem er dann den Körper in der Oberfläche parallele Schichten von der Dicke einer Viertelwellenlänge theilt, zeigt er, dass sich die von den innern Schichten kommenden Strahlen durch Interferenz aufheben müssen und nur die halbe Wirkung der beiden Grenzschichten übrig bleibt. Die von diesen ausgehenden Strahlen können als von ihrer Mitte kommend angesehen werden, d. h. von einer um $\frac{1}{8}$ Wellenlänge unter der Oberfläche liegenden Stelle. Dies ist der Fall, der reflektirende Körper mag sich im leeren Raum oder zwischen andern Körpern befinden, immer geschieht die Reflexion in dem dichteren, stärker reflektirenden Körper. Es wird dann also an jeder Seite des Blättchens, wenn es zwischen gleichartigen Mitteln liegt, eine Viertelwellenlänge gewonnen resp. verloren und das giebt einen Wegunterschied von einer halben Wellenlänge, der zu dem aus der Dicke des Blättchens entstehenden hinzukommt. FRESNEL hat diese Erklärung bald wieder verlassen, die zu Grunde liegende Annahme war in der That zu unwahrscheinlich. In dem um die Mitte des darauf folgenden Jahres (1822) gedruckten Abriss der Lichtlehre, welcher den Anhang der französischen Uebersetzung des Lehrbuchs der Chemie von TH. THOMSON bildet, geht er wieder auf die YOUNG'sche Erklärungsweise zurück. Auffallend ist dabei nur, dass er dieser ganz auf der Vorstellung longitudinaler Schwingungen beruhenden Entwickelung keine modificirende oder erläuternde Bemerkung beifügt, obgleich er den grossen Schritt der Annahme transversaler Lichtschwingungen schon mehr als ein Jahı früher gethan hatte. Seine definitive Stellung zu der Frage, obgleich er nicht ausdrücklich auf sie zurückgekommen ist, erreichte FRESNEL (1823) mit der Aufstellung seiner Formeln für die Reflexion des polarisirten Lichtes[1]). Diese fordern die betreffende Phasendifferenz und damit ist die Erklärung derselben auf die Grundlage dieser Formeln zurückgeführt. Das ist aber einmal das Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft und zweitens die Annahme, dass die zur Grenzfläche parallelen Verrückungen der Aethertheilchen in zwei aneinander grenzenden Mitteln gleich gross seien. Mit gewissen Modifikationen ist das auch heute noch der Standpunkt von dem wir ausgehen. Eine genauere Erörterung der Reflexionstheorie gehört nicht hierher, wir haben nur zu zeigen, dass aus den FRESNEL'schen Formeln wirklich ein Unterschied von einer halben Wellenlänge hervorgeht, je nachdem die Reflexion an dem dichteren oder an dem dünneren Mittel erfolgt.

Nach diesen Formeln hat ein der Einfallsebene parallel polarisirter Strahl von der Amplitude 1 nach der Reflexion die Amplitude $-\frac{sin(i-i')}{sin(i+i')}$ und ein senkrecht zur Einfallsebene polarisirter Strahl $-\frac{tang\,(i-i')}{tang\,(i+i')}$, worin i den Einfallswinkel, i' den Brechungswinkel bedeutet. Bei einem planparallelen Blättchen, das auf beiden Seiten von demselben Mittel umgeben ist, ist aber der Einfallswinkel i_1 der Strahlen auf die zweite Fläche gleich dem Brechungswinkel i'

[1]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. 19, pag 175. 1823; 46, pag. 225. 1831. Mém. de l'ac. des sc. XI, pag. 393. Oeuvres compl. I, pag. 767. POGG. Ann. 12, pag. 390; 22, pag. 90.

an der ersten, und der Brechungswinkel i_1' an der zweiten gleich dem Einfallswinkel i an der ersten, so dass

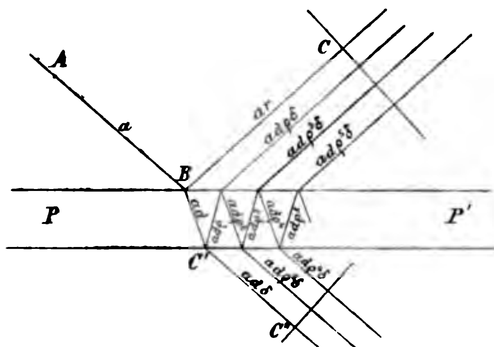
$$-\frac{\sin(i_1 - i_1')}{\sin(i_1 + i_1')} = \frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')} \text{ und } -\frac{\tan(i_1 - i_1')}{\tan(i_1 + i_1')} = \frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')}.$$

Es unterscheiden sich daher in beiden Fällen die an der Vorderfläche und der Hinterfläche reflektirten Strahlen, wenn wir hier von der kleinen Intensitätsänderung beim Ein- und Austritt der letzteren absehen, ausser durch den Gangunterschied $2\,D \cos i'$ noch durch das Vorzeichen der Amplituden; das ist aber gleichbedeutend mit einer Vergrösserung oder Verkleinerung des Gangunterschieds um eine halbe Wellenlänge.

Poisson[1]) hat zuerst bemerkt, dass zur vollständigen Erklärung der Farben dünner Blättchen die vielfachen Reflexionen im Innern der dünnen Schicht nicht vernachlässigt werden dürfen, und Fresnel hat bald darauf eine Vereinfachung und Verallgemeinerung seiner Darstellung gegeben[2]).

Dieselbe bezog sich indessen nur auf die Intensität der dunklen Ringe, eine allgemeine Formel für die Intensität einer beliebigen Stelle hat zuerst Airy[3]), aber auch unter Voraussetzung planparalleler Platten entwickelt. Wir folgen ihm im Nachstehenden theilweise.

In Fig. 463 sei PP' ein planparalleles Blättchen, an welches auf beiden Seiten dasselbe Mittel grenzt. AB sei ein unter dem Winkel i einfallender Strahl von der Amplitude a, r sei der Coëfficient, mit welchem die Amplitude des einfallenden Strahls multiplicirt werden muss, um die des an der Oberfläche des Blättchens reflektirten Strahls BC zu erhalten, d ebenso der Coëfficient, welcher die Amplitude des eintretenden Strahles giebt und ρ und δ die Coëfficienten für die Reflexion im Innern des Blättchens resp. für den Austritt aus dem Innern nach Aussen. Es erhalten dann die einzelnen Strahlen, in welche der einfallende sich theilt, die in der Figur ihnen beigesetzten Amplituden.



(Ph. 468.)

Nennen wir x die Weglänge des Strahls ABC und setzen zur Abkürzung $\vartheta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, ist ferner λ' die Wellenlänge in der Masse, D die Dicke des Blättchens, i' der Brechungswinkel (womit die Zunahme der Weglänge für den einmal im Innern reflektirten Strahl, wie wir oben gesehen haben, gleich $2\,D \cos i'$ ist) und wird zur Abkürzung gesetzt $\varepsilon = 2\pi \frac{2D \cos i'}{\lambda'}$, so sind die Gleichungen der reflektirtenStrahlen der Reihe nach

$$\xi_1 = ar \cos\vartheta;\ \xi_2 = ad\rho\delta \cos(\vartheta - \varepsilon);\ \xi_3 = ad\rho^3\delta \cos(\vartheta - 2\varepsilon);$$
$$\xi_4 = ad\rho^5\delta \cos(\vartheta - 3\varepsilon) \ldots$$

---

1) Poisson, Ann. de chim. et de phys. 22, pag. 337. 1823. Oeuvres compl. de Fresnel II, pag. 239.

2) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. 23, pag. 129. 1823. Oeuvres compl. II, pag. 247.

3) Airy, Mathematical tracts. 2. ed. pag. 301. 1831 (4. ed. pag. 295. 1858.) Pogg. Ann. 41, pag. 512. 1837.

Denn jeder folgende Strahl hat eine um denselben Betrag $2D\cos i'$ grössere Weglänge als der vorhergehende. Ebenso erhält man, wenn $AB + CC'' = y$ und $\vartheta' = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} - \frac{D}{\lambda'\cos i'}\right)$ gesetzt wird, für die Gleichungen der durchgehenden Strahlen der Reihe nach

$$\xi_1' = ad\delta\cos\vartheta';\ \xi_2' = ad\rho^2\delta\,(\cos(\vartheta' - \varepsilon);\quad \xi_3' = ad\rho^4\delta\cos(\vartheta' - 2\varepsilon)\ \ldots$$

Da diese Strahlen, wie wir schon oben bemerkt haben, jedesmal mit einander zur Interferenz kommen, so ergiebt sich für den resultirenden reflektirten Strahl

$$\xi = ar\cos\vartheta + ad\rho\delta\,[\cos(\vartheta - \varepsilon) + \rho^2\cos(\vartheta - 2\varepsilon) + \rho^4\cos(\vartheta - 3\varepsilon) + \ldots]$$
$$= A\cos\vartheta + B\sin\vartheta,$$

worin

$$A = ar + ad\rho\delta\,(\cos\varepsilon + \rho^2\cos 2\varepsilon + \rho^4\cos 3\varepsilon + \ldots)$$
$$B = ad\rho\delta\,(\sin\varepsilon + \rho^2\sin 2\varepsilon + \rho^4\sin 3\varepsilon + \ldots)$$

und für den resultirenden durchgehenden Strahl

$$\xi' = ad\delta\,[\cos\vartheta' + \rho^2\cos(\vartheta' - \varepsilon) + \rho^4\cos(\vartheta' - 2\varepsilon) + \ldots]$$
$$= A'\cos\vartheta' + B'\sin\vartheta'$$

worin

$$A' = ad\delta\,(1 + \rho^2\cos\varepsilon + \rho^4\cos 2\varepsilon + \ldots)$$
$$B' = ad\delta\rho^2\,(\sin\varepsilon + \rho^2\sin 2\varepsilon + \ldots),$$

da aber

$$\sin\alpha + x\sin 2\alpha + x^2\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

und

$$\cos\alpha + x\cos 2\alpha + x^2\cos 3\alpha + \ldots = \frac{\cos\alpha - x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

so ist

$$A = ar + ad\rho\delta\,\frac{\cos\varepsilon - \rho^2}{1 - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4};\quad B = ad\rho\delta\,\frac{\sin\varepsilon}{1 - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4}$$
$$A' = ad\delta\,\frac{1 - \rho^2\cos\varepsilon}{1 - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4};\quad B' = ad\delta\rho^2\,\frac{\sin\varepsilon}{1 - 2\rho^2\cos\varepsilon + \rho^4}.$$

Für die Intensität der reflektirten Strahlen haben wir nun nach unseren früheren Formeln (s. oben, pag. 517), $A^2 + B^2$, für die der durchgehenden $A'^2 + B'^2$. Die durch Einsetzung der abgeleiteten Werthe von A, B, A', B' sich ergebenden Ausdrücke sind zu vereinfachen durch die Beziehungen, die zwischen r, ρ, d und δ bestehen. Diese gehen aus der Theorie der Reflexion und Brechung hervor, lassen sich aber auch mittelst des vorhin besprochenen ARAGO'schen Experimentes aus unseren Interferenzerscheinungen ableiten, und diesen Weg wollen wir hier verfolgen.

Der Versuch ARAGO's zeigte, wie wir gesehen haben, dass ein dünnes Blättchen von vorn und hinten mit gleich intensivem Licht beleuchtet in ganz gleichmässiger Helligkeit erscheint, ohne helle und dunkle Streifen. Sehen wir nun die verschiedenen Stellen eines solchen Blättchens näherungsweise als planparallel an, so können wir die oben abgeleiteten Formeln darauf anwenden und erhalten für die Intensität des von einer solchen Stelle ausgehenden Lichtes den Ausdruck $A^2 + B^2 + A'^2 + B'^2$, wobei natürlich in ε für D die Dicke der betreffenden Stelle zu setzen ist. Da diese beständig wechselt, so ist nothwendige Bedingung für gleichmässige Helligkeit des Blättchens, dass der gefundene Ausdruck von ε frei wird. Wir erhalten nun

$$\frac{1}{a^2}(A^2 + B^2 + A'^2 + B'^2) = r^2 + d\delta\,\frac{d\delta(1 + \rho^2) - 2r\rho^3 + 2r\rho\cos\varepsilon}{1 + \rho^4 - 2\rho^2\cos\varepsilon}$$

und darin kann $\cos\varepsilon$ nur dadurch wegfallen, dass

$$\frac{d\delta(1+\rho^2)-2r\rho^2}{1+\rho^4}=-\frac{r}{\rho}$$

ist, woraus

$$d\delta\rho=-r(1-\rho^2)$$

folgt. Eliminiren wir hierdurch $d\delta$ aus dem Intensitätsausdruck, so wird derselbe

$$A^2+B^2+A'^2+B'^2=a^2\frac{r^2}{\rho^2}.$$

ARAGO hat aber weiter auch durch genaue Versuche gefunden[1]), dass, wenn ein Lichtstrahl auf eine planparallele Glasplatte fällt, an der Vorderfläche der gleiche Bruchtheil des auffallenden Lichtes reflektirt wird, wie an der Rückfläche. Es muss daher $r^2=\rho^2$ sein, also

$$A^2+B^2+A'^2+B'^2=a^2$$

und im Verein mit der eben abgeleiteten Gleichung folgt

$$\rho=-r,\quad d\delta=1-r^2.$$

Damit ergiebt sich für das reflektirte Licht

$$A^2+B^2=\frac{4a^2r^2sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{(1-r^2)^2+4r^2sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

und für das durchgehende

$$A'^2+B'^2=\frac{a^2(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

worin noch für $\frac{\varepsilon}{2}$ sein Werth $2\pi\frac{D\cos i'}{\lambda'}$ einzusetzen ist. Im reflektirten Licht treten also die Minima für Gangunterschiede der interferirenden Strahlen von ganzen Wellenlängen ein und sind unter der gemachten Voraussetzung planparalleller Blättchen und paralleler Strahlen vollkommen schwarz im homogenen Licht.

Wenn die Mittel, welche die dünne Schicht begrenzen, verschieden sind, treten unter Umständen andere Erscheinungen auf. Wenn die optische Dichte des Blättchens zwischen denen der begrenzenden Mittel liegt, so ist an beiden Flächen der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel, wenn der Lichtstrahl von der Seite des dünnsten Mediums herkommt, und kleiner im entgegengesetzten Fall. Es haben daher die FRESNEL'schen Ausdrücke für die Amplitude des reflektirten Lichts, sowohl für parallel als für senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahlen das gleiche Vorzeichen an Vorder- und Hinterfläche. Es tritt also der Verlust der halben Wellenlänge hier nicht ein, und unter solchen Umständen erzeugte NEWTON'sche Ringe müssen ein weisses Centrum besitzen, was schon THOMAS YOUNG, wie wir gesehen haben, gefunden hatte.

AIRY[2]) hat zuerst darauf hingewiesen, dass den FRESNEL'schen Formeln zufolge ein ähnlicher Wechsel bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Licht eintreten muss, wenn man die Strahlen in allmählich geänderter Neigung auf eine dünne Schicht fallen lässt, die zwischen sehr verschieden dichten Mitteln liegt, wenn auch beide dichter oder dünner als das Blättchen selbst sind.

In der That, wenn man z. B. eine Glaslinse (Brechungsexponent etwa 1·5 3) auf einen Diamant (Brechungsexponent 2·45) legt, wird zunächst von dem Ein-

---

1) Oeuvres compl. de FRESNEL II, pag. 204 u. 249.

2) AIRY, Cambr. Trans. IV, pag. 219 u. 409. 1831. 32. Phil. Mag. (2) 10, pag. 141; (3) 2, pag. 120. POGG. Ann. 26, pag. 123; 28, pag. 75. — Uebrigens hat ARAGO schon 1811 an den zwischen einer Glaslinse und einem Metallspiegel gebildeten Ringen hierher gehörige Erscheinungen beobachtet. — Mém. d'Arc. 3, pag. 323. ARAGO's Werke. Deutsche Ausg. X, pag. 20.

fallswinkel Null an bis zum Polarisationswinkel im Glas an Luft (33° 10′) der Ausdruck für die Amplitude der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen $-\frac{tang(i-i')}{tang(i+i')}$ an der oberen Fläche der Luftschicht einen positiven, an der unteren einen negativen Werth erhalten, also der gewöhnliche Fall des Ringsystems mit schwarzem Mittelpunkt eintreten. Beim Polarisationswinkel des Glases ist an diesem nach dem BREWSTER'schen Gesetz $i + i' = 90°$ und es wird da kein Licht reflektirt sondern nur an dem Diamant, daher verschwinden die Ringe. Wächst der Einfallswinkel weiter, so wird für die obere Fläche $tang\,(i + i')$ und damit die Amplitude selbst negativ, ebenso wie für die untere Fläche. Infolge dessen bekommen wir ein Ringsystem mit weissem Mittelpunkt, und dies bleibt bei zunehmendem Einfallswinkel so, bis der die untere Fläche treffende Strahl den Polarisationswinkel des Diamants (67° 48′) erreicht hat, indem mit dem Ueberschreiten desselben die Amplitude des unten reflektirten Strahls aus denselben Gründen wie vorhin die des andern ihr Vorzeichen ändert und so wieder eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge ausser der durch die Verschiedenheit des Wegs bewirkten zwischen den beiden Strahlen entsteht. Dann haben wir also wieder ein Ringsystem mit schwarzem Mittelpunkt.

AIRY hat diesen durch die Theorie vorausgesehenen Wechsel in der Erscheinung der Ringsysteme auch experimentell als thatsächlich stattfindend nachgewiesen, dabei jedoch in der Nähe des Polarisationswinkels des Diamants ein eigenthümliches Verhalten beobachtet, indem die Ringe nicht wie bei dem Polarisationswinkel des Glases verschwanden, sondern aus dem System mit weissem Mittelpunkt in das mit schwarzem dadurch übergingen, dass die Ringe sich zusammenzogen, bis der weisse Mittelfleck verschwunden war und der erste schwarze Ring einen schwarzen Fleck bildete. Er deutete dies Verhalten auch sofort als durch eine allmähliche Aenderung der Phase bewirkt. Die genauere Betrachtung hiervon, die auf eine Modifikation der FRESNEL'schen Reflexionsformeln führt, gehört in die Theorie der Reflexion.

Die Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen, wie wir sie bisher kennen gelernt haben, ist noch in mehrfacher Beziehung unvollkommen. Hauptsächlich liegt das daran, dass die Blättchen als planparallel und die interferirenden Strahlen als parallel angenommen wurden. Wäre dies richtig oder überhaupt nur eine genügende Annäherung an die Wirklichkeit, so würde man bei der Beobachtung der Streifen auf unendliche Entfernung accommodiren müssen, aber selbst die oberflächlichste Betrachtung zeigt, dass dies im Allgemeinen durchaus nicht zutrifft. Aus der Beobachtung der gewöhnlichen Fälle hatte man die Vorstellung gewonnen, dass die Streifen in dem Blättchen selbst lägen und wie Niveaulinien den Stellen gleicher Dicke desselben folgten. Diese Vorstellung, die in ihrem ersten Theil der Theorie geradezu widersprach, stand lange Zeit unvermittelt neben dieser und hat es jedenfalls bewirkt, dass man die Zusammengehörigkeit mancher Erscheinungen (z. B. der HAIDINGER'schen Streifen) mit den unsern nicht erkannte. Eine etwas genauere Untersuchung musste aber bald zeigen, dass sowohl die Folgerungen der Theorie als auch die aus der Beobachtung entstandenen Vorstellungen nur in ganz speciellen Fällen richtig seien; besonders in die Augen fallend war dabei, dass man häufig, um die Streifen deutlich zu sehen, auf beträchtlich entfernt von dem Blättchen bald diesseits bald jenseits gelegene Stellen accommodiren muss. Derartige Beobachtungen gaben denn auch den Anstoss zu einer genaueren Behandlung der Theorie. Die Grundlage musste dabei der oben erörterte Grundsatz der Interferenzlehre bilden, dass

nur diejenigen Strahlen miteinander interferiren können, welche von einem und demselben leuchtenden Punkt ausgegangen sind. Damit ist aber, wie betont werden muss, das Problem ein vollkommen bestimmtes und es ist kein Raum zu irgend einer weiteren Nebenannahme. Aus der Gestalt und der Lage des dünnen Blättchens gegen die Lichtquelle und den die Interferenzerscheinung auffangenden Apparat (im einfachsten Fall das Auge oder eine Linse mit Schirm) ergiebt sich geometrisch die Wegdifferenz der von einem Punkt der Lichtquelle stammenden und in einem Punkt der die Interferenzerscheinung enthaltenden Fläche vereinigten Strahlen und daraus die Intensität, welche sie hier erzeugen. Die Summation der von sämmtlichen Punkten der Lichtquelle dahin gesandten Intensitäten liefert die Gesammtintensität an diesem Punkt des Interferenzbildes. Aus den so erhaltenen Formeln sind die Gesetze der Erscheinung abzuleiten. Diesen Weg betrat ich zuerst in einer im Jahre 1880 erschienenen Abhandlung[1]). Es wurde darin der einfachste und zugleich wichtigste Fall eines keilförmigen, d. h. eines von zwei nur wenig gegeneinander geneigten Ebenen begrenzten Blättchens behandelt, auf welchen manche complicirtere Fälle zurückgeführt werden können. Nach den gewöhnlichen Vorstellungen würde man ein System von geradlinigen, in dem Blättchen gelegenen Interferenzstreifen zu erwarten gehabt haben von einer der Durchschnittslinie der Oberflächen, der Keilkante, parallelen Richtung und zwischen zwei aufeinander folgenden Streifen eine Dickenzunahme des Blättchens um den Quotienten aus einer halben Wellenlänge durch den Cosinus des Brechungswinkels der interferirenden Strahlen einschliessend. Die genauere Analyse zeigt in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, dass keine einzige dieser Vorstellungen begründet ist. Nur bei senkrechter Betrachtung des Blättchens treffen sie näherungsweise zu, bei schiefer dagegen erscheinen die Streifen je nach den Umständen bald vor, bald hinter dem Blättchen in häufig beträchtlicher Entfernung, sie machen alle möglichen Winkel mit der Keilkante und auch ihre Breite ist meist eine ganz andere als erwartet. Die vollständige Rechnung hier mitzutheilen ist nicht möglich, wir müssen uns damit begnügen, den Gang derselben und ihre Resultate anzugeben, aus welchen wir die für unsere Interferenzerscheinung wichtigsten Folgerungen ableiten wollen. Der Gang ist vorhin schon angedeutet; danach handelt es sich zunächst um die Feststellung der gegenseitigen Lage zweier zusammengehöriger Lichtstrahlen, d. h. zweier von demselben Punkt der Lichtquelle ausgehender und in demselben Punkt der die Interferenzerscheinung enthaltenden Fläche wieder zusammentreffender Strahlen; sodann ist der Wegunterschied dieser beiden Strahlen zu bestimmen, die hierfür erhaltene Formel ist die hauptsächliche Grundlage für die weitere Erklärung.

Die Interferenzstreifen entstehen entweder auf einem Schirm, auf welchen sie durch eine Linse geworfen werden[2]), oder auf der Netzhaut des Auges direkt

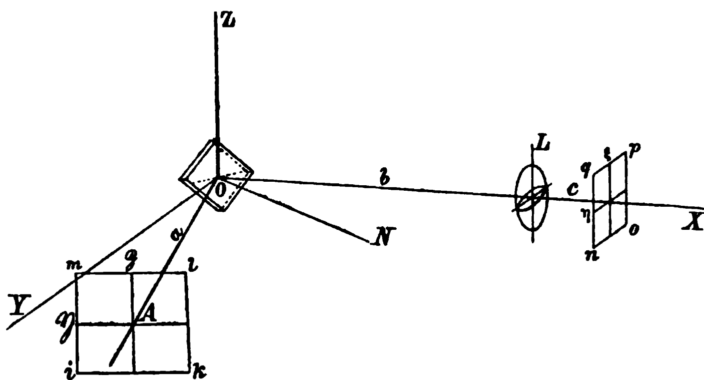
---

[1]) FEUSSNER, Sitzungsber. der Ges. z. Beförd. d. ges. Naturw. zu Marburg. 1880, pag. 1. — Einen Versuch, die Theorie durch Aufgabe der Voraussetzung paralleler interferirender Strahlen weiterzuführen, machte unter Zugrundelegung der unrichtigen Annahme von der Lage der Interferenzerscheinung in der Vorderfläche des Blättchens WANGERIN, POGG. Ann. 131, pag. 497. 1867.

[2]) Man kann freilich unter geeigneten Umständen auch hier wie bei dem Versuch mit den FRESNEL'schen Spiegeln und verwandten bei direktem Auffangen der Strahlen auf einem Schirm ohne Linse Streifen erzeugen, doch ist es mir auf diese Weise nicht gelungen, die Erscheinung einigermaassen scharf zu erhalten, und das ist nach den weiter folgenden Erläuterungen auch ganz natürlich. Will man die Lichtquelle auf einen leuchtenden Punkt oder einen Spalt von geeigneter Richtung beschränken, so wird man zum Ziele kommen, aber die Streifen werden dadurch auch in anderer Weise wesentlich beeinflusst.

oder nach Zwischenschaltung eines optischen Apparates wie Linse, Fernrohr oder Mikroskop. In dem ersten Fall verhält sich die Erscheinung auf dem Schirm bezüglich ihrer weiteren Abbildung in unserem Auge oder durch ein Fernrohr u. s. w. natürlich ganz wie ein körperliches Objekt und man hat sich seit FRESNEL gewöhnt, dies auf Interferenzerscheinungen überhaupt zu übertragen. FRESNEL berichtet[1]), dass er sehr erstaunt gewesen sei, als er die Beugungsstreifen auf einem Schirm aus mattem Glas auffing und von hinten mit einer Loupe betrachtete, zu bemerken, dass sie über den Rand des Glases hinaus in genau der gleichen Weise wie auf diesem selbst erschienen, und erst nachdem er sich durch vielfach abgeänderte Versuche überzeugt hatte, dass dies in seinem Fall immer stattfinde, liess er bei den Beobachtungen das matte Glas weg. Es ist in der Folge kein abweichender Fall bekannt geworden und deshalb wandte man das FRESNEL'sche Verfahren unbedenklich allgemein an. Ich habe indessen schon früher[2]) darauf hingewiesen, dass das nicht richtig ist, und dass gerade unsere Interferenzerscheinungen das beweisen. Ein einfacher Versuch in dieser Beziehung ist z. B. der folgende. Man stelle eine Glasplatte oder eine Verbindung von Gläsern, welche Streifen von nicht ganz niedriger Ordnung zeigt, so auf, dass dieselben auf den Beobachter zulaufen, also etwa der Einfallsebene des Lichts parallel liegen. Schaltet man dann bei nicht zu kleinem Einfallswinkel zwischen Platte und Auge eine Linse ein, so wird man sehr beträchtliche, von der Brennweite und dem Ort der Linse abhängige Drehungen der Streifen beobachten, die weit über 90° hinaus gehen können[3]), auch wenn beide Male auf ganz dieselben Punkte accommodirt wird. — Es ist also erforderlich bei der Theorie unserer Erscheinungen, den optischen Apparat, durch welchen sie entworfen werden, zu berücksichtigen. Wir wollen für unsere Betrachtungen den möglichst einfachen Fall annehmen, dass derselbe nur aus einer Linse besteht; darauf lässt sich auch meist die Beobachtung mit freiem Auge zurückführen.

Wir müssen nun die Lage des dünnen Blättchens der Lichtquelle und der Linse (resp. des Auges) gegen einander geometrisch ausdrücken. Wir beziehen dieselben zu dem Ende auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit den Axen OX, OY, OZ (s. Fig. 464), dessen Anfangspunkt O in die Vorderfläche des Blättchens und dessen X-Axe in die Axe der Linse, die wir auf das Blättchen gerichtet voraus-



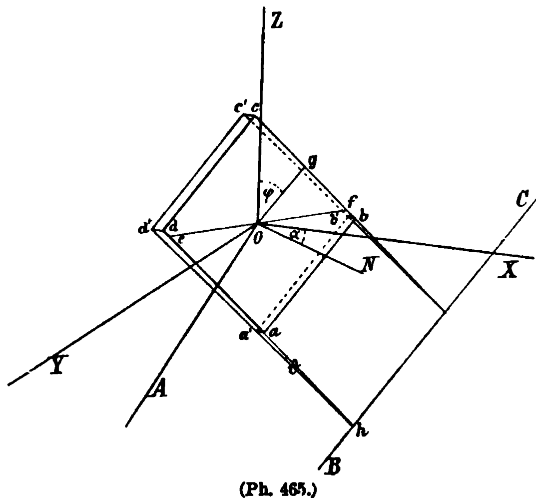
(Ph. 464.)

[1]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. 1, pag. 241. 1816. Oeuvres compl. I, pag. 90.

[2]) FEUSSNER, WIEDEM. Ann. 14, pag. 566. 1881.

[3]) Es mag nur im Vorbeigehen bemerkt werden, dass eine derartige Linsenwirkung vielleicht zur Erklärung für die bekannte Abweichung der Beobachtungen NEWTON's über die Verbreiterung der Ringe von denen Anderer mit herangezogen werden kann. NEWTON hatte eine planconvexe Linse mit der ebenen Fläche auf eine zweite Linse gelegt, dagegen benutzten DE LA PROVESTAYE und DESAINS ein Planglas über einer Linse.

setzen, gelegt ist. Die XY-Ebene ist so gelegt, dass sie die Normale ON der Vorderfläche des Blättchens enthält, sie ist daher auch die Einfallsebene des in der Axe der Linse verlaufenden Strahls (des »Axenstrahls«, wie wir ihn kurz nennen wollen), und die Z-Axe liegt in der Vorderfläche des Blättchens. Ueber die Lichtquelle werde zunächst vorausgesetzt, dass sie so gross sei, dass sämmtliche durch die Linse zu den betreffenden Punkten des Schirms gelangenden Strahlenkegel vollständig ausgefüllt seien. Auf ihre Gestalt kommt es dann nicht wesentlich an, wir wollen sie der Einfachheit wegen als eben annehmen und auf AO, dem Axenstrahl vor seiner Reflexion an dem Blättchen, senkrecht stehend denken; $iklm$ stellt ein Stück derselben dar, ihre Entfernung vom Coordinatenursprung sei gleich a. Die Linse ist in der Figur durch L bezeichnet, ihre Entfernung vom Coordinatenursprung sei b, ihre Brennweite f; der Schirm $nopq$, auf welchem die Interferenzerscheinung sich bildet, sei von ihr um c entfernt. Das dünne Blättchen ist in Fig. 465 noch einmal besonders gezeichnet, seine beiden ebenen Grenzflächen $abcd$ und $a'b'c'd'$



(Ph. 465.)

schneiden sich verlängert in der geraden Linie BC, der Keilkante. Dieser parallel ist durch den Coordinatenanfang die Linie Og gezogen, welche mit der, wie schon bemerkt, in der vorderen Fläche des Blättchens liegenden Z-Axe den Winkel φ bildet. Die in der XY-Ebene gelegene Normale ON auf die Vorderfläche bildet mit der X-Axe und der Geraden OA den Winkel α. Die Kanten des Blättchens sind parallel und senkrecht zur Keilkante gezeichnet, sodass da und $d'a'$ den Neigungswinkel ϑ der Flächen einschliessen. Eine vom Coordinatenursprung O auf die zweite Fläche $a'b'c'd'$ gefällte Senkrechte habe die Länge D. Durch diese vier Stücke α, φ, ϑ und D ist die Lage und Gestalt unseres keilförmigen Blättchens, soweit sie hier in Betracht kommt, vollständig bestimmt, der Brechungsindex der Substanz, aus der es besteht, sei n. Nach diesen Festsetzungen ist der Verlauf eines Strahls von der Lichtquelle bis zum Schirm durch die Coordinaten irgend zweier seiner Punkte und die Angabe wieviel mal er das Blättchen von der Vorder- zur Rückfläche und wieder zurück zur Vorderfläche durchsetzt habe, bestimmt. Für die vollständige Erklärung unserer Erscheinungen ist die Berücksichtigung der mehrfachen Reflexionen im Innern des Blättchens erforderlich, hier jedoch, wo es sich mehr um eine Darlegung der Hauptsachen und der wesentlichen Gesichtspunkte handelt, können wir uns im Interesse der Uebersichtlichkeit mit der Betrachtung der an der Vorderfläche und der unter einmaliger Durchlaufung des Blättchens an der Hinterfläche reflektirten Strahlen begnügen[1]). Als vorzüglich geeignete Punkte für die Bestimmung des Strahls bieten

[1]) Auf eine in den Sitzungsber. der Ges. zur Beförd. d. ges. Naturwiss. zu Marburg 1888, pag. 76, von mir gegebene Darstellung, welche den Verlauf der mehrfach reflektirten Strahlen geometrisch anschaulicher macht, will ich hier nur verweisen.

sich zunächst sein Ausgangspunkt auf der Lichtquelle und sein Endpunkt auf dem Schirm, aber auch die Punkte der Linse eignen sich gut hierfür, oder genauer gesprochen die Punkte einer kreisförmigen Diaphragmaöffnung, welche wir uns mit der zweiten (nach dem Schirm hin gelegenen) Linsenfläche verbunden denken wollen, denn die sämmtlichen nach allen den einzelnen Punkten des Schirms gelangenden Strahlenkegel fallen in dieser gemeinschaftlichen Grundfläche zusammen, während sie im übrigen Verlauf nach beiden Seiten auseinandertreten. Wir wollen die Coordinaten der Punkte dieser drei auf der XY-Ebene senkrechten Ebenen, Schirm, Diaphragma und Lichtquelle, besonders bezeichnen, indem wir in ihnen Coordinatensysteme einführen, deren eine Axe jedesmal die Durchschnittslinie mit der XY-Ebene ist und deren andere darauf senkrecht steht. Die Coordinaten der Schirmpunkte seien so η und ζ, die der Diaphragmapunkte η_2 und ζ_2, die der Punkte der Lichtquelle $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Zwischen den Coordinaten der Punkte eines und desselben Strahles bestehen nun[1]), wenn er an der Vorderfläche des Blättchens reflektirt ist, die Gleichungen

$$\mathfrak{y} + F\eta_2 + G\eta = 0; \qquad \mathfrak{z} + F\zeta_2 + G\zeta = 0 \tag{1}$$

und wenn er an der Hinterfläche reflektirt ist, in welchem Falle wir die Coordinaten mit Strichen versehen wollen,

$$\mathfrak{y}' + F\eta_2' + G\eta' = H; \qquad \mathfrak{z}' + F\zeta_2' + G\zeta' = J, \tag{1a}$$

darin ist gesetzt

$$F = \frac{a+b}{e} - 1 \qquad G = \frac{a+b}{c}$$
$$H = \frac{\sin 2\alpha}{w} D + \frac{2wa\cos\varphi}{\cos\alpha}\vartheta; \quad J = 2wa\sin\varphi\cdot\vartheta; \quad w = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}, \tag{2}$$

wobei e die Entfernung des durch die Linse vom Schirm entworfenen Bildes von dieser, oder mit andern Worten die Entfernung des Punktes, auf welchen der optische Apparat (Linse mit Schirm) »eingestellt« ist, von der Linse bedeutet.

Mittelst dieser Gleichungen können wir nun das Zusammenwirken der Strahlen näher verfolgen. Das in einem beliebig gewählten Punkt $\eta\zeta$ des Schirms sich vereinigende Strahlenbündel wird begrenzt von den Strahlen, welche den Rand des Diaphragmas berührt haben, für welche also die Gleichung

$$\eta_2^2 + \zeta_2^2 = r^2 \tag{3}$$

gilt, wenn durch r der Radius des Diaphragmas bezeichnet wird. Der hierdurch bestimmte Kegel setzt sich an dem Blättchen aus Strahlen zusammen, welche an der Vorderfläche reflektirt sind, und aus solchen, welche nach einer Reflexion an der Hinterfläche austreten. Die ersteren rückwärts bis zur Lichtquelle verfolgt, beschreiben auf derselben einen Kreis, dessen Gleichung durch Einsetzen der Werthe von η_2 und ζ_2 aus (1) in (3) wird

$$(\mathfrak{y} + G\eta)^2 + (\mathfrak{z} + G\zeta)^2 = r^2F^2; \tag{4a}$$

die letzteren beschreiben in gleicher Weise einen Kreis von der Gleichung

$$(\mathfrak{y}' + G\eta - H)^2 + (\mathfrak{z}' + G\zeta - J)^2 = r^2F^2. \tag{4b}$$

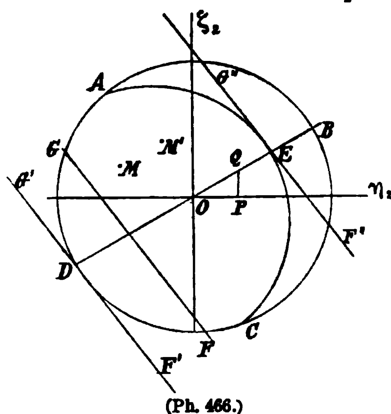
Die Radien beider Kreise sind gleich gross, die Mittelpunktscoordinaten des ersten $-G\eta$ und $-G\zeta$, der zweiten $H - G\eta$ und $J - G\zeta$. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte hat also die Länge $\sqrt{H^2+J^2}$ und macht mit der Axe der $\mathfrak{z}$ einen Winkel, dessen Tangente $\frac{H}{J}$ ist. Die Kreise fallen im Allgemeinen zum Theil übereinander und da der erste alle diejenigen Punkte umschliesst, welche an der Vorderfläche des Blättchens reflektirte Strahlen nach $\eta\zeta$ senden, der zweite

[1]) S. Marburger Sitzber. 1880, pag. 14. WIED. Ann. 14, pag. 551.

alle die, welche an der Hinterfläche zurückgeworfene dahin senden, so enthält die den beiden Kreisen gemeinschaftliche Fläche alle Punkte, von denen zusammengehörige Strahlen zu dem betrachteten Punkt gelangen, die also zur Bildung der Interferenzerscheinung beitragen; die nicht zusammenfallenden Theile der Kreise liefern keine interferirenden Strahlen, sondern bewirken nur eine ihrer Grösse proportionale Helligkeit in $\eta\zeta$. Dasselbe ergiebt sich vielleicht noch klarer bei der Betrachtung der Durchtrittspunkte zusammengehöriger Strahlen durch das Diaphragma. Aus (1) und (1a) folgt, da für zusammengehörige Strahlen $\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}$, $\eta' = \eta$, $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$, $\zeta' = \zeta$ ist:

$$\eta_2' - \eta_2 = \frac{H}{F} \qquad \zeta_2' - \zeta_2 = \frac{J}{F}. \tag{5}$$

Die Verbindungslinie der Durchtrittspunkte hat also die Länge $\frac{1}{F}\sqrt{H^2+J^2}$ und macht mit der Axe der ζ_2 einen Winkel, dessen Tangente $\frac{H}{J}$ ist. In Fig. 466 bedeutet der Kreis $ABCD$ die Oeffnung des Diaphragmas, wenn nun $OP = \frac{H}{F}$ und $PQ = \frac{J}{F}$ ist, so erhält man zu dem Durchtrittspunkt M eines beliebigen an der ersten Fläche reflektirten Strahls den Durchtrittspunkt M' des mit ihm zusammengehörigen, an der zweiten Fläche reflektirten Strahls, indem man MM' gleich und parallel OQ macht. Daraus geht hervor, dass zu den in der Fläche $ABCE$ durchtretenden Strahlen des ersten Bündels in dem zweiten keine mit ihnen zusammengehörigen vorhanden sind. Je grösser OQ wird, um so kleiner wird die Anzahl der interferirenden Strahlen, und wenn es den Durchmesser des Diaphragmas erreicht hat, ist die Fläche $AECD$ verschwunden und es giebt überhaupt keine interferirenden Strahlen mehr. Nun zeigt zwar eine aufmerksame Betrachtung der Gleichungen (2), in Verbindung mit den gleich abzuleitenden Sätzen über den Ort, wo die Streifen gesehen werden, dass dieser Fall unter gewöhnlichen Umständen, auch bei Beobachtung mit freiem Auge, nicht leicht eintreten wird, wohl aber sind die geschilderten Verhältnisse mitbetheiligt an der grösseren Unklarheit und Verschwommenheit der Streifen bei dickeren Blättchen und schiefer Betrachtung, und wenn man etwa durch eine Oeffnung von erheblich kleinerem Durchmesser als die Pupille des Auges beobachtet, können sie sehr wohl allein das völlige Verschwinden der Interferenzerscheinung bewirken. — Andererseits ergiebt sich aber aus unseren Gleichungen, dass es auch vorkommen kann, dass alle einfallenden Strahlen zur Interferenz gelangen; es wird das eintreten, wenn die beiden an Vorder- und Hinterfläche reflektirten Strahlenbündel vollständig zusammenfallen. Die Bedingung hierfür ist $H = 0$ und $J = 0$; dies ist erfüllt, wenn $\varphi = \pi$, d. h. die Neigungsebene des Blättchens mit der Einfallsebene zusammenfällt und die Keilkante auf der Seite der Lichtquelle liegt, und zugleich ist



(Ph. 466.)

$$a = \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{w^2}\,\frac{D}{8}.$$

Den auf Luft bezogenen Gangunterschied zweier zusammengehöriger Strahlen wollen wir durch Δ bezeichnen. Für denselben ergeben sich, je nachdem wir

die Punkte zur Bestimmung der Strahlen wählen, verschiedene Formen, von denen wir zwei, die wir benutzen werden, angeben wollen[1]). Es ist

$$\Delta = 2wD + \left(H_2\eta_2 + J_2\zeta_2 + \frac{H_1}{c}\eta + \frac{J_1}{c}\zeta + K\right) \tag{6}$$

und

$$\Delta = 2wD - \frac{1}{F}\left(H_2\mathfrak{y} + J_2\mathfrak{z} + \frac{H}{c}\eta + \frac{J}{c}\zeta - KF\right). \tag{6a}$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$H_1 = \frac{\sin 2\alpha}{w}D - \frac{2wb\cos\varphi}{\cos\alpha}\vartheta,\quad J_1 = -2wb\sin\varphi\cdot\vartheta$$

$$H_2 = \frac{\sin 2\alpha}{w}\frac{D}{e} - \frac{2w\cos\varphi}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{e} - 1\right)\vartheta,\quad J_2 = -2w\left(\frac{b}{e} - 1\right)\sin\varphi\,\vartheta \tag{7}$$

$$K = \frac{1}{2F}(H_2H + J_2J).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite in den Gleichungen (6) und (6a) ist der, wie wir gesehen haben, schon von THOM. YOUNG und FRESNEL angegebene Ausdruck für die Wegdifferenz der Strahlen, welcher allein früher zur Erklärung der Erscheinungen benutzt wurde. Es lag dabei stillschweigend die Vorstellung zu Grunde, als ob dasselbe Bild, wie wir es sehen, oder wie es auf dem Schirm erscheint, auch erhalten werde, wenn man den optischen Apparat mit unveränderter Axenrichtung über das Blättchen hinbewegt und die jedes Mal dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes entsprechenden Intensitäten in gleicher Reihenfolge nebeneinander ordnet. Erst die obigen Gleichungen geben jedoch die Möglichkeit, die Interferenzstreifen, wie sie wirklich erscheinen, ihrer Lage und ihrem Verlauf nach herzuleiten.

Sie enthalten nach dem ersten Glied in der Klammer Glieder von nächst höherer Ordnung; wenn wir also die Dicke des Blättchens als eine kleine Grösse erster Ordnung bezeichnen, werden wir die in der Klammer enthaltenen Ausdrücke klein von zweiter Ordnung nennen. Freilich sind auch sie bei etwas dickeren Blättchen gegen eine Wellenlänge häufig noch gross, so dass wir, um die Intensität an einem bestimmten Punkt angeben zu können, noch die Glieder von der dritten Ordnung würden berücksichtigen müssen. Anders ist es mit den Aenderungen der Intensität. Da die Glieder der dritten Ordnung sehr klein gegen die der zweiten sind, so wird, wenn diese z. B. um eine Wellenlänge zu- oder abgenommen haben, die Aenderung jener nur höchst unbedeutend sein, wir werden daher die Aenderungen des Gangunterschieds von einem Punkt bis zu einem anderen auf unserem Schirme und damit die Aenderung der Intensität zwischen denselben im Allgemeinen aus den angegebenen Gliedern der zweiten Ordnung ableiten können. Nur wenn die Coëfficienten der betreffenden Glieder verschwinden, werden wir über den Verlauf der Interferenzstreifen nichts aus ihnen schliessen können und dann solche höherer Ordnung heranziehen müssen.

Fassen wir nun einen bestimmten Punkt P des Schirmes mit den Coordinaten η, ζ ins Auge, so können in dem Ausdruck (6) für den Gangunterschied aller der Paare von zusammengehörigen Strahlen, welche nach P gelangen, nur die beiden Glieder

$$H_2\eta_2 + J_2\zeta_2 \tag{8}$$

---

[1]) S. Marburger Sitz.-Ber. 1880, pag. 18; WIEDEM. Ann. 14, pag. 555. 1881; Marb. Sitz.-Ber. 1882, pag. 4.

noch verschiedene Werthe erhalten. Setzen wir ihre Summe gleich einer Constanten, so wird dadurch eine Gerade in der Ebene des Diaphragmas bestimmt, etwa FG in Fig. 466, und die Strahlenpaare, deren erste Strahlen durch FG gehen, haben in P gleichen Gangunterschied. Die Veränderung dieses Gangunterschieds und damit der Intensität bei anderen Paaren hängt ab von der Veränderung des Ausdrucks (8). Bezeichnen wir durch m den Abstand der beiden Grenzlagen der Linie FG ($F'G'$ und $F''G''$ in der Fig. 466) von einander, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie die Differenz M der Grenzwerthe von (8):

$$M = m \sqrt{H_2^2 + J_2^2}. \tag{9}$$

Je grösser dieser Ausdruck ist, um so wechselnder sind die Intensitäten, die von den nach P gelangenden Strahlenpaaren daselbst erzeugt werden. Da dasselbe auch bei allen benachbarten Punkten des Schirms stattfindet, so kann offenbar bei einer einigermaassen beträchtlichen Grösse von M keine Interferenzerscheinung wahrnehmbar sein, und dieselbe muss am deutlichsten werden, wenn dieser Ausdruck einen möglichst kleinen Werth hat. Seine Grösse ist bei gegebener gegenseitiger Lage von Lichtquelle, Blättchen und Linse abhängig von e, das heisst von dem Ort des Punktes, auf welchen der optische Apparat eingestellt (das Auge accommodirt) ist, und wir müssen den Werth e_0 von e bestimmen, für welchen der Minimalwerth von M und damit die grösste Schärfe der Interferenzerscheinung eintritt. Nun ist zwar m nicht ganz unabhängig von e, aber man findet leicht, dass es fast immer so wenig veränderlich ist, dass wir es hier als constant betrachten können. Dann ergiebt sich

$$e_0 = -\frac{1}{2w\vartheta} \frac{H_1^2 + J_1^2}{\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} H_1 + \sin\varphi J_1}$$

und damit für die Entfernung E des eingestellten Punktes vom Blättchen

$$E = b - e_0 = \frac{\sin\alpha}{w^2} \cdot \frac{b w^2 \cos\varphi - \sin\alpha \cos^2\alpha \frac{D}{\vartheta}}{b w^2 (1 + \tang^2\alpha \cos^2\varphi) - \sin\alpha \cos\varphi \frac{D}{\vartheta}} \frac{D}{\vartheta} \tag{10}$$

Man sieht hieraus, dass man im Allgemeinen durchaus nicht auf das Blättchen zu accommodiren hat, um die Interferenzerscheinung deutlich zu erhalten. Nur bei senkrechter Betrachtung ist das immer der Fall, da dann mit $\sin\alpha$ zugleich E Null wird; bei schiefem Daraufsehen dagegen wird E häufig sehr gross, was man schon mit geeignet gewählten Deckgläschen im Natriumlicht leicht nachweisen kann. Die Streifen ändern ihren Ort, wenn die Linse in der Richtung ihrer Axe verschoben wird[1]). Unsere Gleichung bringt das zum Ausdruck, indem danach die Grösse von E abhängig von b ist. Wenn jedoch die Ebene des Neigungswinkels der beiden Flächen des Blättchens mit der Einfallsebene zusammenfällt, also $\varphi = 0$ oder $= \pi$ ist, so verschwindet b in dem obigen Ausdruck, der dann in

$$\pm \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha}{w^2} \frac{D}{\vartheta} \tag{11}$$

übergeht; in der hierdurch bestimmten Entfernung vom Blättchen erscheinen jetzt unverändert die Streifen, man mag sie aus der Nähe oder aus der Ferne

[1]) Da mir neuerdings wiederholt (Macé de Lépinay, Compt. rend. 1889, 22. Jul., Journ. de phys. (2) 9, pag. 122 u. 128. 1890) darüber die entgegengesetzte Ansicht zugeschrieben worden ist, bemerke ich, dass ich dies von vorn herein und später noch mehrfach ausdrücklich hervorgehoben habe (z. B. Wied. Ann. 14, pag. 562, Anm.).

betrachten, und zwar liegen sie vor dem Blättchen, wenn $\varphi = 0$ ist, d. h. die Keilkante sich auf der Seite des Beobachters befindet, hinter demselben, wenn $\varphi = \pi$ ist, die Keilkante nach der Lichtquelle hin liegt.

Der Ausdruck (11) zeigt, dass der Verlauf der Streifenörter in der Einfallsebene bei wachsendem Einfallswinkel ein wesentlich verschiedener ist, je nachdem die dünne Schicht aus einer Luftschicht zwischen zwei Gläsern (von denen das obere, wenn planparallel und von geringer Dicke gegen E, keinen merklichen Einfluss auf den Ort der Streifen hat) oder aus einem Blättchen von optisch dichterem Stoff besteht. Im ersteren Fall, wo $n = 1$ also $w = \cos\alpha$ ist, wird E einfach gleich $\pm \sin\alpha \cdot \frac{D}{\vartheta}$, die Entfernung der Streifen wächst beständig mit wachsendem Einfallswinkel, für streifenden Einfall liegt die Keilkante selbst in ihrer Ebene, und man erkennt leicht, dass die von ihnen beschriebene Curve ein Kreis ist, dessen im Durchschnitt der Einfallsebene mit der Vorderfläche des dünnen Blättchens gelegener Durchmesser von dem Durchschnittspunkt der Linsenaxe und dem der Keilkante begrenzt wird. Wenn dagegen das Blättchen aus einem dichteren Stoff gebildet ist, so durchlaufen die Streifen eine lemniskatenartige Curve. Die Entfernung E erreicht ein Maximum, das für Glasplättchen ungefähr bei einem Einfallswinkel von 40° eintritt und dessen Grösse etwa $0{\cdot}2\,\frac{D}{\vartheta}$ beträgt.

Setzen wir den oben bestimmten Werth e_0 von e in den Ausdruck für M ein, so erhält dieses seinen Minimalwerth M_0. Man findet dafür

$$M_0 = 2m\,\frac{\sin 2\alpha \sin\varphi}{\sqrt{H_1^2 + J_1^2}}\,D\vartheta.$$

Für schief auf das Blättchen fallendes Licht wird M_0 nur gleich Null, wenn $\varphi = 0$ oder $= \pi$ ist; es ist deshalb nur dadurch möglich, volle Gleichheit der von den verschiedenen Paaren zusammengehöriger Strahlen in P erzeugten Intensitäten herzustellen. Daher wird im Allgemeinen die Interferenzerscheinung in diesen Fällen besonders scharf sein.

Wir haben oben (pag. 566) gefunden, dass, wenn die Neigungsebene des Blättchens mit der Einfallsebene zusammenfällt und die Keilkante auf der Seite der Lichtquelle liegt, das an der Vorderfläche und das an der Rückfläche reflektirte Strahlenbündel vollständig ineinanderfallen, sodass mit jedem Strahl des einen ein Strahl des andern zur Interferenz kommt, wenn zugleich die Lichtquelle in der Entfernung $\frac{\sin\alpha \cos^2\alpha}{w^2}\,\frac{D}{\vartheta}$ vom Blättchen aufgestellt wird. Das ist aber nach (11) auch genau die Entfernung, in welcher in diesem Fall die Streifen jenseits des Blättchens erscheinen. Man sieht dann also zu gleicher Zeit scharf das an dem Blättchen reflektirte Bild der Lichtquelle und dasselbe der Keilkante parallel durchziehend die Interferenzstreifen. Da nach der eben gemachten Bemerkung in diesem Fall auch M_0 gleich Null wird, so sind die Umstände, soweit sie von der Anordnung der Apparate abhängen, für die Schärfe der Erscheinung dann die allergünstigsten.

Wie wir so aus der Gleichung (6) für die Wegdifferenz zusammengehöriger Strahlen den Ort der grössten Deutlichkeit der Interferenzerscheinung abgeleitet haben, können wir auch aus derselben die Richtung der Streifen finden. Da nämlich der Theil der Diaphragmaöffnung, durch welchen die an der Interferenz theilnehmenden Strahlen des an der Vorderfläche reflektirten Bündels durchtreten, für alle Punkte des Schirms ein und derselbe ist (*AECD* in Fig. 466), so kann

mit einem jeden nach einem Punkte P des Schirms gelangenden Paar zusammengehöriger Strahlen ein nach einem anderen Punkte P_1 gelangendes verglichen werden, das durch dieselben Punkte in der Ebene des Diaphragmas hindurchgegangen ist. Für diese beiden Strahlenpaare haben die beiden ersten Glieder in der viereckigen Klammer denselben Werth, und liegen die Punkte P und P_1 auf dem Schirm so, dass die Summe des dritten und vierten Gliedes für sie auch gleich ist, so ist jedesmal die Wegdifferenz eines Strahlenpaares der des mit ihm verglichenen gleich. Dann sind auch die in den Punkten P und P_1 von den einzelnen Strahlenpaaren erzeugten Intensitäten dieselben, also auch die daselbst bestehenden Gesammtintensitäten gleich. Daraus geht hervor, dass die Punkte des Schirms, welche auf demselben Interferenzstreifen liegen, die Gleichung

$$\frac{H_1}{c}\,\eta + \frac{J_1}{c}\,\zeta = const \tag{12}$$

befriedigen müssen. Die Interferenzerscheinung besteht demnach aus geradlinigen Streifen, die mit der Axe der η (oder der Einfallsebene) einen Winkel ψ einschliessen, dessen Tangente ist

$$tang\,\psi = -\frac{H_1}{J_1} = \frac{sin\,2\alpha}{2w^2\,b\,sin\,\varphi}\,\frac{D}{\vartheta} - \frac{cos\,\varphi}{cos\,\alpha\;sin\,\varphi}. \tag{13}$$

Das zweite Glied rechts $-\frac{cos\,\varphi}{cos\,\alpha\;sin\,\varphi}$ ist hier die Tangente des Winkels, welchen das Bild der Keilkante mit der Einfallsebene macht. Nach der früheren Ansicht müsste dies auch die Richtung der Streifen sein, da man glaubte, dass sie immer den Stellen gleicher Dicke der sie erzeugenden Blättchen folgten. Unsere Gleichung zeigt, dass ihr Verlauf im Allgemeinen ein ganz anderer ist, und was zunächst am meisten auffällt, dass sie eine Drehung erleiden, wenn man sich dem Blättchen nähert oder von ihm entfernt, denn ψ ist danach von b, der Entfernung der Linse vom Blättchen, abhängig. Für im Verhältniss zu $\frac{D}{\vartheta}$, der Entfernung der Keilkante vom Coordinatenursprung, sehr kleine Werthe von b wird $tang\,\psi$ bei schief einfallendem Licht sehr gross, die Streifen stehen nahe senkrecht auf der Einfallsebene, das Blättchen mag übrigens liegen, wie es will. Wächst dann b, so nähert sich $tang\,\psi$ immer mehr dem Werth $-\frac{cos\,\varphi}{cos\,\alpha\;sin\,\varphi}$, und wenn b sehr gross gegen $\frac{D}{\vartheta}$ ist, laufen die Streifen der Keilkante merklich parallel.

Dies gilt unter der anfangs gemachten und bisher immer festgehaltenen Voraussetzung, dass die Lichtquelle so breit sei, dass sie alle mit der Spitze auf dem Schirm, mit der Basis in der Diaphragmaöffnung gelegenen und rückwärts verlängerten Strahlenkegel vollständig ausfülle. Andere Fälle lassen sich am bequemsten vermittelst der Gleichung (6a) behandeln, worin der Gangunterschied zusammengehöriger Strahlen durch die Coordinaten des Ausgangspunkts auf der Lichtquelle und des Endpunkts auf dem Schirm ausgedrückt ist. Denken wir uns zunächst die Lichtquelle aus nur einem leuchtenden Punkt mit den Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bestehend, wo dann natürlich immer nur ein Paar zusammengehöriger Strahlen nach den einzelnen Punkten des Schirms gelangt und in jeder Stellung von Schirm und Linse eine scharfe Interferenzerscheinung gebildet wird, so ist der einzige veränderliche Bestandtheil des Ausdrucks auf der rechten Seite von (6a) die Summe des dritten und vierten Gliedes in der Klammer. In denjenigen Schirmpunkten, wo diese Summe denselben Werth besitzt, haben die

Strahlen den gleichen Gangunterschied, erzeugen also auch die gleiche Intensität. Daraus folgt, dass die Interferenzerscheinung aus geradlinigen Streifen von der Gleichung

$$\frac{H}{cF}\eta + \frac{J}{cF}\zeta = const \tag{14}$$

bestehen muss, welche einen Winkel χ mit der η-Axe einschliessen, dessen Tangente ist

$$tang\,\chi = -\frac{H}{J} = -\frac{\sin 2\alpha}{2w^2\cdot a\cdot \sin\varphi}\cdot\frac{D}{\vartheta} - \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha\,\sin\varphi}. \tag{15}$$

Dieser Ausdruck ist ganz ähnlich gebildet, wie der in dem früheren Fall für $tang\,\psi$ erhaltene, nur tritt an die Stelle von b hier a, sodass wir das Verhalten der Streifen in diesen beiden Grenzfällen folgendermaassen angeben können: Bei breiter Lichtquelle ist die Richtung der Streifen abhängig von der Entfernung des Beobachtungsinstruments vom Blättchen, sodass eine Drehung eintritt, wenn diese geändert wird, unabhängig aber ist sie von der Entfernung der Lichtquelle; — bei punktförmiger Lichtquelle dagegen ist die Streifenrichtung unabhängig von der Entfernung des Beobachtungsinstruments, aber abhängig von der der Lichtquelle, sodass eine Drehung eintritt, wenn diese dem Blättchen genähert oder von ihm entfernt wird.

Wenn man die beiden Ausdrücke (13) und (15) miteinander vergleicht, sieht man, dass der eine grösser, der andere kleiner als die Tangente des Winkels ist, welchen das Bild der Keilkante mit der η-Axe einschliesst, die Streifen weichen also in den beiden Fällen nach verschiedenen Seiten von dieser Richtung ab. Wenn man nun die Lichtquelle von der punktförmigen Gestalt ausgehend allmählich in passender Weise vergrössert, bis sie die in den optischen Apparat gelangenden Lichtkegel vollständig ausfüllt, so müssen sich die Streifen auch allmählich aus ihrer, der Gleichung (15) entsprechenden Anfangslage in die durch (13) bestimmte Endlage drehen. Dabei durchlaufen sie alle zwischen liegenden Richtungen, darunter auch die der Keilkante; will man also die durch die obigen Gleichungen dargestellten Drehungen aus dieser Lage heraus beobachten, so müssen auch die angegebenen Versuchsbedingungen erfüllt sein. — Man könnte versuchen, die auf die Grenzfälle bezüglichen Gleichungen durch eine allgemeine Formel zu verbinden; diese müsste jedoch von Gestalt, Grösse und Lage der Lichtquelle abhängig sein, würde also keine einfache Form besitzen.

In einem Fall wird bei der Vergrösserung der Lichtquelle von der punktförmigen Gestalt aus keine Drehung der Streifen stattfinden; nämlich dann, wenn für alle neu hinzukommenden Punkte die beiden ersten Glieder in der Klammer der Gleichung (6a) denselben Werth behalten wie für den ersten Punkt, d. h. wenn die Lichtquelle eine gerade Linie von der Gleichung

$$H_2\mathfrak{y} + J_2\mathfrak{z} = const$$

bildet, denn dann ruft jeder hinzutretende Punkt überall auf dem Schirm dieselbe Intensität hervor wie der erste. Experimentell kann man dem dadurch nahe kommen, dass man vor eine beliebige Lichtquelle einen Spalt von passender Richtung setzt, oder besser, dass man durch eine Projectionslinse ein Bild der Lichtquelle auf diesen Spalt wirft. Auch hier ist bei jeder Stellung von Linse und Schirm eine scharfe Interferenz möglich, aber es muss die Richtung des Spalts den jedesmaligen Werthen von H_2 und J_2 entsprechend gewählt werden; er muss den Gleichungen (7) gemäss einen Winkel mit der Einfallsebene bilden, dessen Tangente ist

$$\frac{\sin 2\alpha}{2w^2(b-e)\sin\varphi}\cdot\frac{D}{\vartheta}=\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha\cdot\sin\varphi}.$$

Die Richtung der Streifen bleibt dabei immer die durch Gleichung (15) bestimmte.

Man kann auch einen Spalt an der Linse (dem Diaphragma) in demselben Winkel gegen die Einfallsebene, wie er eben bei der Lichtquelle bestimmt ist, anbringen und hat dann auch bei jeder Stellung des Schirms gegen die Linse eine deutliche Interferenz, wie aus Gleichung (6) hervorgeht. Die Streifenrichtung ist dabei immer durch (13) bestimmt. Streng genommen würde in diesem Fall ein Doppelspalt erforderlich sein, einer für die an der ersten und einer für die an der zweiten Fläche reflektirten Strahlen; doch bringt auch ein einfacher Spalt von genügender Breite, sodass er beide Strahlen durchtreten lässt, in den meisten Fällen ähnliche Wirkung hervor.

Nimmt im Fall einer breiten Lichtquelle die Constante in Gleichung (12) um die Wellenlänge λ des Lichts zu oder ab, so ändern sich nach Gleichung (6) die Gangunterschiede aller zusammengehörigen Strahlen ebenfalls um eine Wellenlänge, wir erhalten also wieder dieselben Intensitäten wie vorher. Durch die wie angegeben geänderte Gleichung (12) wird aber bekanntlich eine zur ersten im Abstand $\frac{\lambda c}{\sqrt{H_1^2+J_1^2}}$ parallele Grade dargestellt, wir haben also in diesem Abstand auch die Streifenbreite unserer Interferenzerscheinung, wie sie sich auf dem Schirme bildet. Der Gesichtswinkel, unter dem die Breite erscheint, ist daher

$$\Lambda=\frac{\lambda}{\sqrt{H_1^2+J_1^2}} \tag{16}$$

Wenn b sehr gross gegen $\frac{D}{\vartheta}$ ist, geht das über in

$$\frac{\lambda}{2wb\vartheta\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}+\sin^2\varphi}}$$

und dies giebt auf das Blättchen selbst projicirt sowohl für $\varphi=0$ als $=\frac{\pi}{2}$ den Werth

$$\frac{\lambda}{2w\vartheta}=\frac{\lambda}{2\vartheta n\cos i'},$$

wenn i' den Brechungswinkel des Axenstrahls in dem Blättchen bedeutet. In diesem Ausdruck aber ist das bekannte Gesetz für die Abhängigkeit der Streifenbreite von der Schiefe des einfallenden Lichtes, wie es bisher angenommen wurde, enthalten. Wenn die Entfernung der Keilkante vom Coordinatenursprung auf dem Blättchen $\left(\frac{D}{\vartheta}\right)$ nicht gegen die Entfernung der Linse von demselben (b) verschwindet, ist das nicht mehr richtig; es muss dann vielmehr die scheinbare Streifenbreite nach Formel (16) berechnet werden.

Bei den vorstehenden Entwickelungen sind nur die kleinen Grössen von der zweiten Ordnung berücksichtigt. Dabei erhält man das Resultat, wie wir gesehen haben, dass die Interferenzerscheinung keilförmiger Blättchen von geradlinigen Streifen gebildet werde. Indessen ist das nur eine Annäherung an die Wirklichkeit; bei einigermaassen dickeren Platten sind die Streifen gekrümmt. Ich habe eine Glasplatte vor mir mit ganz ebenen Flächen, einem Keilwinkel von 57 Secunden und einer Dicke von 1·17 mm in der Mitte, diese zeigt die Krümmung

der Streifen schon sehr stark. Zur Ableitung dieser Erscheinung, sowie zur Beantwortung mancher anderer Fragen ist die Heranziehung der Glieder von der dritten Grössenordnung in dem Ausdruck für den Gangunterschied zusammengehöriger Strahlen erforderlich. Ich habe dieselben deshalb abgeleitet[1]); sie sind aber für den allgemeinen Fall naturgemäss etwas complicirt, sodass ich auf ihre vollständige Mittheilung hier verzichten muss. Ich will sie nur für die Erklärung eines besonderen Falles unserer Interferenzerscheinung benutzen, für welchen unsere bisherigen Formeln nicht ausreichen. Es sind das die Erscheinungen bei planparallelen Platten. HAIDINGER hat sie zuerst (mit Glimmerblättchen) beobachtet und beschrieben[2]), deshalb nennen wir sie auch HAIDINGER'sche Streifen oder HAIDINGER'sche Ringe. Dann hat sich MASCART[3]) und zuletzt O. LUMMER[4]) damit beschäftigt. Sie entstehen ganz auf dieselbe Weise durch die Interferenz der an der vorderen und der an der hinteren Fläche der Platte reflektirten Strahlen wie die bisher betrachteten Streifen überhaupt und das ihnen Eigenthümliche geht nur aus dem vollständigen Parallelismus der beiden Flächen hervor.

Sehen wir zunächst, was unsere bisherigen Formeln liefern. Da der Keilwinkel (ϑ) Null ist, so zeigt Gleichung (10) oder die ihr vorhergehende für e_0, welches dadurch unendlich wird, dass wir unser Auge oder den optischen Apparat auf grosse Entfernung einstellen müssen, um die Streifen deutlich zu erhalten. Mit $\vartheta = 0$ und $e = \infty$ wird nun nach Gleichung (2) und (7)

$$F = -1, \quad H_2 = J_2 = J_1 = J = K = 0, \quad H_1 = H = \frac{\sin 2\alpha}{w} D$$

also ergiebt sich aus (6) oder (6a) für den Gangunterschied zusammengehöriger Strahlen

$$\Delta = 2wD + \frac{\sin 2\alpha}{w} \frac{D}{c} \eta.$$

Danach sind für die Punkte des Schirms, für welche η constant ist, die Gangunterschiede dieselben, also die Intensität gleich. Die Interferenzerscheinung besteht aus geradlinigen, senkrecht zur Einfallsebene stehenden Streifen, deren gegenseitiger Abstand sich daraus ergiebt, dass für zwei aufeinanderfolgende Streifen der Gangunterschied um eine Wellenlänge zunehmen muss. Demnach ist der eben gegebenen Formel gemäss dieser Abstand

$$\frac{w}{\sin 2\alpha} \frac{c\lambda}{D},$$

der Winkel unter dem er erscheint, ergiebt sich daraus durch Division mit c. — Diese Folgerungen treffen nun auch sehr nahe für einigermaassen erhebliche Einfallswinkel zu.

Wenn aber α Null wird, so wird auch $H_1 = H = 0$, und damit verschwinden sämmtliche Glieder der zweiten Ordnung in den Gleichungen (6) und (6a), die Wegunterschiede werden überall bis auf die kleinen Grössen der dritten Ordnung gleich. Setzen wir nun in die a. a. O. angegebenen Werthe dieser letzteren $\vartheta = 0$ und $e = \infty$ ein, so vereinfachen sie sich bedeutend und wir erhalten für den Gangunterschied

---

1) FEUSSNER, Sitz.-Ber. d. Gesellsch. z. Beförd. d. gesammt. Naturw. zu Marburg 1882, pag. 6.

2) HAIDINGER, POGG. Ann. 77, pag. 219. 1849.

3) MASCART, Ann. de chim. et de phys. (4), 23, pag. 126. 1871.

4) LUMMER, WIED. Ann. 23, pag. 49. 1884.

$$\Delta = 2wD + \frac{\sin 2\alpha}{w}\frac{D}{c}\eta - \frac{D}{wc^2}\left[\left(\cos^2\alpha - \frac{n^2-1}{w^2}\sin\alpha\right)\eta^2 + \cos^2\alpha\cdot\zeta^2\right] + L,$$

worin L ein von den Constanten der Linse abhängiges Glied bedeutet. Bei senkrechter Betrachtung giebt das

$$\Delta = 2nD - \frac{D}{nc^2}(\eta^2 + \zeta^2).$$

Die Interferenzerscheinung besteht also aus hellen und dunklen Kreisen mit dem Coordinatenursprung als Mittelpunkt. Nennen wir die Radien ρ, so ist für die dunklen Kreise, unter k eine ganze Zahl verstanden

$$\rho^2 = \frac{nc^2}{D}(2nD - k\lambda)$$

und entsprechend für die hellen, wo nur $\frac{2k+1}{2}$ an die Stelle von k tritt. Sind ρ_1 und ρ_2 die Radien zweier aufeinanderfolgender Kreise, so ist die Breite des zwischenliegenden Ringes

$$\frac{nc^2\lambda}{D(\rho_1+\rho_2)}.$$

Wird die Platte gedreht, so dass α allmählich zunimmt, so wandern die Ringe, wie die allgemeine Gleichung zeigt, im Sinne der Drehung, indem sie anfangs ihre kreisförmige Gestalt nahezu bewahren.

Das von der Linse abhängige Glied hat die Bedeutung

$$L = \frac{n_1-1}{n_1}\frac{\sin 2\alpha}{w}\frac{Dd}{r_1}\left(\frac{\eta_2}{c_1} - \frac{\eta}{c} - \frac{\sin 2\alpha}{2wc_1}D\right),$$

worin n_1 den Brechungsexponenten der Linse, d ihre Dicke, r_1 den Krümmungshalbmesser ihrer vordern, nach der Platte zu gelegenen Fläche bezeichnet und $\frac{1}{c_1} = \frac{n_1-1}{r_1}$ ist. Da η_2 in dem Ausdruck vorkommt, so entstehen dadurch Verschiedenheiten in den Wegdifferenzen der nach demselben Schirmpunkt gelangenden zusammengehörigen Strahlen, welche bei mittleren Einfallswinkeln ein Undeutlicherwerden der Erscheinung und selbst ihr Verschwinden bewirken können. Diese Wirkung der Linse kann man vermeiden, wenn man ihre vordere Fläche eben nimmt, wodurch L gleich Null wird. Immerhin aber bleiben die oben (pag. 566) besprochenen Gründe für eine Trübung der Erscheinung bestehen.

Ein anderer besonderer Fall unserer Streifen ist von HERSCHEL[1]) beobachtet und beschrieben worden. Die Erscheinung, die nach ihm gewöhnlich als »HERSCHEL'sche Streifen« bezeichnet wird, entsteht, wenn man ein tolalreflectirendes Prisma mit der reflektirenden Fläche auf eine ebene Glas- oder Metallplatte legt. Es zeigt sich dann auf der concaven Seite des blauen Bogens, der bekanntlich das Gebiet der totalen Reflexion begrenzt, parallel mit ihm verlaufend eine Reihe schön gefärbter Fransen, deren Anzahl und gegenseitige Entfernung von dem Abstand des Prismas von der Platte abhängt. Wird der Abstand verringert, so verbreitern sie sich und nähern sich dem Auge, indem es scheint, als ob sie aus dem blauen Bogen heraus kommen. Eine vollkommene Politur der unteren Oberfläche ist zu ihrer Bildung nicht nöthig; ein mattgeschliffenes Glas, das so rauh ist, dass es bei einem mässigen Einfallswinkel kein regelmässiges Bild giebt, zeigt dieselben sehr deutlich. Die Entstehung der Erscheinung ist leicht verständlich; es ist offenbar die Interferenz der nahe dem Grenzwinkel der totalen

---

1) W. HERSCHEL, Philos. Tr. 1809, pag. 274. J. HERSCHEL,' On light. art. 641, 642. 1828. TALBOT, Phil. mag. (3) 9, pag. 401. 1836.

Reflexion auf die Prismenfläche auffallenden und sehr schräg die dünne Luftschicht durchlaufenden Strahlen und der an der Prismenfläche reflektirten, welche sie erzeugt. Indessen verdient ihre Theorie eine eingehendere Behandlung als sie bis jetzt gefunden hat.

Im durchgehenden Licht sind ganz entsprechende Streifen vorhanden, sie zeigen sich z. B. in den ABBE'schen Totalrefraktometern als ständige Begleiter der Grenze des dunkeln und hellen Feldes.

Eine sehr interessante Interferenzerscheinung endlich hat A. A. MICHELSON[1]) dargestellt und behandelt. Er fängt die von der Lichtquelle kommenden Strahlen mit einer unter 45° gegen sie geneigten Glasplatte auf und lässt sowohl das zurückgeworfene als auch das durchgehende Bündel durch senkrecht zu ihnen in gleicher Entfernung von der Platte aufgestellte Spiegel reflektiren. In der Richtung des vierten Arms des so gebildeten Kreuzes kommen dann die zuerst zurückgeworfenen und dann durchgegangenen mit den zuerst durchgegangenen und dann zurückgeworfenen Strahlen zusammen und bilden die fragliche Erscheinung. MICHELSON zeigt, dass dieselbe als ein besonders einfacher Fall der Interferenzen dünner Blättchen betrachtet werden kann. Man kann in der That das von dem einen der Spiegel kommende Strahlenbündel ohne irgend eine Aenderung im Verlauf und Zusammenwirken der Strahlen (ausser einer Phasenverschiebung von einer halben Wellenlänge) ersetzt denkendurch ein von dem Bild des Spiegels inder Glasplatte ausgehendes Bündel; dann wirkt aber die zwischen diesem Bild und dem andern Spiegel gelegene Schicht als dünnes Blättchen. Die Betrachtungen und Formeln vereinfachen sich hier, da der Einfallswinkel sehr klein und der Brechungsexponent n gleich Eins zu setzen ist. MICHELSON berechnet auch den Ort und die Gestalt der Streifen, doch sind in beiden Beziehungen Versehen mit untergelaufen. Die Entfernung der Streifen von dem vorderen Spiegel ergiebt sich nach unserer Gleichung (10), pag. 568, so lange $b \cos\varphi$ gross gegen $\frac{D\alpha}{\vartheta}$ ist, zu $\frac{D\alpha}{\vartheta} \cos\varphi$. Bezüglich der Gestalt der Streifen, welche MICHELSON je nach den Umständen als Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen, Kreise oder gerade Linien findet, ist zu bemerken, dass durch das von ihm ausgeführte Quadriren des Ausdrucks für den Gangunterschied, eine dem Problem fremdartige Lösung mit in die Gleichungen kommt, und dass sich mit Rücksicht darauf ausser den geraden Linien nur Kreise ergeben. Genauer würde der Gegenstand auf Grund der schon oben citirten Ausdrücke für die kleinen Grössen der dritten Ordnung zu behandeln sein, welche ich in dem Sitzungs-Bericht der Naturf. Gesellschaft zu Marburg 1882, pag. 6 gegeben habe, doch soll hier nicht darauf eingegangen werden. Unter Umständen lassen die Streifen eine merkliche Abweichung von der durch die Gleichung geforderten Form erkennen, sie gleichen dann gewissen Curven der dritten Ordnung. Um davon Rechenschaft zu geben, würde man noch die kleinen Grössen von der vierten Ordnung berücksichtigen müssen.

Wir haben unsere Betrachtung der Interferenzen dünner Blättchen hauptsächlich auf reflektirtes Licht bezogen, weil dieses die deutlicheren und zur Beobachtung geeigneteren Erscheinungen liefert. Die im durchgehenden Licht entstehenden sind ihnen in jeder Beziehung analog und die hier abgeleiteten Resultate lediglich mit den besprochenen Modifikationen hinsichtlich der Intensität auf jene übertragbar. Es ist daher nicht nöthig näher darauf einzugehen.

---

[1]) ALBERT A. MICHELSON, Phil. mag. (5) 13, pag. 236. 1882.

Nach meinen Arbeiten, deren wesentliche Ergebnisse mit einigen daran geknüpften Folgerungen im Vorhergehenden dargestellt sind, hat sich auch A. WANGERIN mit der Theorie dieser Erscheinung beschäftigt[1]). L. SOHNCKE hatte in Uebereinstimmung mit meinen Beobachtungen und Entwickelungen bei den NEWTON'schen Ringen gefunden, dass die Interferenzerscheinung keineswegs mit der oberen Fläche der dünnen Schicht zusammenfalle und durch eine eingehende experimentale Untersuchung besonders ermittelt, auf welche Punkte das Beobachtungsinstrument eingestellt werden muss, um die Erscheinung deutlich zu zeigen. WANGERIN suchte dies theoretisch auf einem anderen Wege, als ich eingeschlagen hatte, abzuleiten. Ich begnüge mich mit dem Hinweis auf diese Abhandlungen und meine Bemerkungen dazu[2]).

In neuerer Zeit hat noch J. MACÉ DE LÉPINAY die Theorie bearbeitet und theils allein, theils in Verbindung mit Ch. FABRY eine Reihe von Abhandlungen darüber veröffentlicht[3]). Er hat namentlich zuerst auf die Verwendung von Spalten, wie wir sie oben im Anschluss an unsere Formeln abgeleitet haben, hingewiesen und die Betrachtungen über den Ort der grössten Deutlichkeit durch Uebertragung auf beliebige Interferenzerscheinungen zu verallgemeinern gesucht. Auch eine Abhandlung von CH. FABRY[4]) über den Einfluss der Begrenzung der Lichtquelle auf die Interferenzerscheinung ist noch zu erwähnen.

Endlich haben wir noch einige experimentelle Arbeiten kurz nachzutragen.

F. DE LA PROVOSTAYE und P. DESAINS[5]) wiederholten die auf die Verbreiterung der Ringe bei Vergrösserung des Einfallswinkels bezüglichen Versuche NEWTON's, um den Widerspruch, der zwischen dieser und den Forderungen der Theorie bestand, zu lösen. Sie erzeugten die Ringe mittelst eines Planglases, das auf eine Convexlinse gelegt war, und liessen diese horizontal aufgestellte Combination durch eine Mikrometerschraube vor einem in gemessener Neigung gegen die Vertikale aufgestellten Fernrohr vorbeischieben. Sie konnten so die Coincidenzen der aufeinanderfolgenden Ringe mit dem Vertikalfaden des Fernrohrs leicht beobachten und die zugehörigen Verschiebungen an der Schraube ablesen. Bis zu einem Einfallswinkel von etwas über 86° konnten sie so beobachten, darüber hinaus erhielten sie keine Ringe mehr im Fernrohr, aber auch mit blossem Auge glaubten sie nicht bei grösseren Winkeln beobachten zu können. Sie fanden nun überall vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie. Doch lässt sich, da ihr Verfahren ein anderes als das NEWTON's war, daraus nicht sofort schliessen, dass dieser falsch gemessen habe. Ich habe schon oben

---

1) L. SOHNCKE u. A. WANGERIN, WIED. Ann. 12, pag. 1 u. 201. 1881; 20, pag. 177 u. 391. 1883. Die erste der Abhandlungen fällt zwischen die meinigen. — Eine unter SOHNCKE's Leitung entstandene Arbeit von GUMLICH (WIED. Ann. 26, pag. 337. 1885) bietet in theoretischer Beziehung nur eine Uebertragung der WANGERIN'schen Arbeit auf durchgehende Strahlen.

2) FEUSSNER, Sitz.-Ber. d. Ges. z. Beförd. d. ges. Naturw. zu Marburg 1881, pag. 1. WIED. Ann. 14, pag. 564. 1881. Ich muss hier, da es mehrfach nicht erkannt worden ist, hinzufügen, dass der von WANGERIN in seiner zweiten Abhandlung versuchte Nachweis von der Berechtigung einer wesentlichen, seiner Theorie zu Grunde gelegten Annahme unrichtig ist. Der Fehler liegt WIED. Ann. 20, pag. 186 unten.

3) MACÉ DE LÉPINAY, Compt. rend. 109, pag. 137; 109, pag. 893. 1889. Journ. de phys. (2) 9, pag. 121 u. 180. 1890. MACÉ DE LÉPINAY et FABRY, Compt. rend. 110, pag. 895; 110, pag. 997. 1890. Journ. de phys. (2) 10, pag. 5. 1891.

4) FABRY, Compt. rend. 111, pag. 600 u. 788. 1890.

5) F. DE LA PROVOSTAYE et P. DESAINS, Ann. de chim. et de phys. (3) 27, pag. 423. 1849; POGG. Ann. 76, pag. 459. 1849.

(pag. 549) auf einen möglichen Erklärungsgrund der Abweichungen hingewiesen, dann ist auch die verschiedene Stellung des Beobachters bei den Messungen zu berücksichtigen und für die Beobachtungen mit freiem Auge bei grösster Schiefe müssten die Einfallswinkel direkt gemessen werden, statt sie, wie DE LA PROVOSTAYE und DESAINS thaten, aus den Ringdurchmessern abzuleiten. —

Zur Bildung der dünnen Schichten, welche unsere Interferenzerscheinungen erzeugen, sind natürlich die durchsichtigen Körper in erster Linie geeignet. Allein auch viele der in dickeren Schichten undurchsichtigen Körper lassen sich benutzen, und es ist das in verschiedener Beziehung von besonderem Interesse. So hat WERNICKE[1]) Kupferoxydul, Bleisuperoxydhydrat, Mangansuperoxydhydrat und ähnliche, SIRKS[2]) Selen, Jod u. s. w. angewandt. QUINCKE[3]) hat geglaubt, auch in dünnen Silberschichten Interferenzstreifen beobachtet zu haben, doch hat sich gezeigt[4]), dass die beobachteten Erscheinungen auf Dickenunterschieden der Schichten beruhten. In neuerer Zeit hat B. DESSAU[5]) an durch elektrische Zerstäubung auf Glas gebildeten Spiegeln von Gold, Kupfer, Silber, Platin, Eisen und Nickel bei schiefer Beleuchtung Ringe beobachtet, die er als eine Art NEWTON'scher Ringe auffasst; doch ist die Berechtigung dieser Erklärung noch erheblichen Zweifeln ausgesetzt[6]).

Gewöhnlich benützt man zur Beleuchtung der dünnen Blättchen einfarbiges Licht, doch kann man auch weisses verwenden, wenn man dasselbe spectral zerlegt. Man kann Streifen erhalten, sowohl wenn man das Licht nach der Zerlegung, als auch, wenn man es vor der Zerlegung von dem Blättchen in geeigneter Weise reflektiren oder durch es hindurchgehen lässt. Besonders empfehlenswerth ist in vielen Fällen das Verfahren, das Blättchen direkt vor dem Spalt eines Spectroskopes anzubringen, normal zur Axe des Colimatorrohres, welches mit einer seitlichen Oeffnung versehen ist, so dass mittelst einer unter 45° gegen die Axe geneigten Glasplatte durch den Spalt Licht senkrecht auf das Blättchen geworfen werden kann. Dies wird nach seiner Reflexion im Spectroskop zerlegt und liefert ein von Interferenzstreifen durchzogenes Spectrum. Ausgezeichnete Stellungen des Blättchens sind dabei die, wo die Keilkante dem Spalt parallel, und die, wo sie senkrecht dagegen verläuft. Im ersteren Fall sind bei ebenen Begrenzungsflächen die vor dem Spalt liegenden Theile des Blättchens von gleicher Dicke und wir erhalten Interferenz-streifen, die das Spectrum der Quere nach, den FRAUNHOFER'schen Linien parallel durchziehen und deren gegenseitige Entfernung sich aus den Gleichungen ergiebt

$$k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = 2D,$$

worin D die Dicke des Blättchens, λ_1 und λ_2 die Wellenlängen zweier beliebiger Lichtarten im Blättchen, k_1 und k_2 die Anzahl der auf die doppelte Blättchendicke kommenden Wellenlängen derselben bedeuten. Für zwei benachbarte dunkle Linien sind k_1 und k_2 ganze Zahlen und $k_2 = k_1 + 1$, damit folgt aus den obigen Gleichungen für die Differenz der Wellenlängen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2D} = \frac{\lambda_1^2}{2D + \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{k_1 + 1}.$$

1) WERNICKE, POGG. Ann. 139, pag. 132. 1870.

2) SIRKS, POGG. Ann. 143, pag. 429. 1871.

3) QUINCKE, POGG. Ann. 120, pag. 181. 1863; 129, pag. 177. 1866.

4) Fortschritte der Phys. 27, pag 419. 1871.

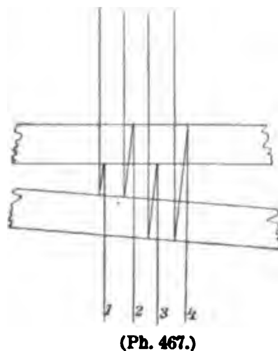
5) DESSAU, WIED. Ann. 29, pag. 364. 1886.

6) Vergl. dazu WERNICKE, WIED. Ann. 30, pag. 469. 1887; VOIGT, WIED. Ann. 35, pag. 95. 1888.

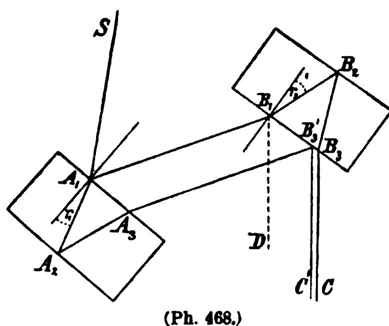
In dem zweiten Fall, wo die Keilkante senkrecht zum Spalt steht, durchziehen die Interferenzstreifen das Spectrum in seiner Längsrichtung, indem ihr Winkelabstand $\frac{\lambda}{2\vartheta}$ beträgt, wenn ϑ den Keilwinkel bedeutet, sie convergiren daher nach dem violetten Ende hin, da λ in dieser Richtung abnimmt.

11. Interferenzen mehrerer Platten.

Brewster[1]) beobachtete zuerst im Jahre 1817 eine Interferenzerscheinung, bei welcher die vier Flächen zweier Glasplatten zur Herstellung der interferirenden Lichtbündel zusammenwirkten. Er beschrieb auch schon eine Reihe von Abänderungen desselben Versuchs; namentlich construirte er ein kleines Instrument, mittelst dessen diese Erscheinungen bequem beobachtet werden sollten. Es bestand dasselbe aus einer Röhre, in welcher zwei genau gleich dicke Glasplatten ein wenig gegen einander geneigt und ungefähr senkrecht zur Axe der Röhre befestigt waren. An der einen Seite trug die letztere eine Platte mit einer seitlichen engen Oeffnung. Diese Seite wird gegen den Himmel oder oder einen anderen hellen Gegenstand gerichtet; beim Hindurchsehen von der entgegengesetzten Seite der Röhre her sieht man dann ausser der direkt gesehenen Oeffnung seitlich noch mehrere schwächer werdende Bilder derselben, und diese sind von farbigen Interferenzstreifen durchzogen. Zu dem ersten Bild wirken im Allgemeinen vier Strahlenbündel zusammen, deren Verlauf in Fig. 467 angedeutet ist. Die Strahlen der Bündel 2 und 3 haben nahe gleich grosse Wege durchlaufen, sie können interferiren. Der Gangunterschied der beiden anderen Bündel ist dagegen zu abweichend, sie bringen im Bild nur eine allgemeine Helligkeit hervor ohne zur Interferenzerscheinung beizutragen. Wegen dieser Beimischung fremden Lichts ist diese Beobachtung der Erscheinung in der Durchsicht nicht so günstig als ein anderer, ebenfalls von Brewster beschriebener und von Jamin[2]) zur Construction eines wichtigen Instruments, des Interferentialrefractors benutzter Fall. Derselbe ist in Fig. 468 dargestellt. Ein von der Lichtquelle einfallender Strahl SA_1 spaltet sich in A_1 in einen reflektirten A_1B_1 und einen in die erste Platte eindringenden A_1A_2, welcher letztere in A_2 reflektirt wird, in A_3 aus der Platte austritt und in B_3' die zweite der ersten vollkommen gleiche planparallele Platte trifft, wo er in der Richtung $B_3'C'$ reflektirt wird. Der andere in A_1 reflektirte Strahl verfolgt den Weg $A_1B_1B_2B_3C$ und tritt, wie man leicht sieht, der Planparallelität der Platten wegen dem ersten parallel aus, welchen Winkel die Platten auch mit einander machen mögen. Die andern in A_3, B_1, B_3 reflektirten, in B_3 durchgehenden Strahlen, welche mindestens eine viermalige Reflexion erfahren müssten, ehe sie



(Ph. 467.)



(Ph. 468.)

1) Brewster, Edinb. Trans. 7, pag. 435. 1817.

2) Jamin, Compt. rend. 42, pag. 482. 1856; Annales de chim. et phys. (3) 52, pag. 163, 1858; Pogg. Ann. 98, pag. 345. 1856.

die zweite Platte in einer B_3C parallelen Richtung verlassen, lassen wir ausser Acht, da sie in Fällen, wie wir sie im Auge haben, nämlich bei dicken nahezu parallelen Platten, ausserhalb des von uns betrachteten zweimal reflektirten Strahlenbündels fallen, also zur Erscheinung nichts beitragen. Von allen Punkten der breiten Lichtquelle fallen nun Strahlen auf die erste Platte, die sich ganz analog dem betrachteten verhalten, die die zweite Platte verlassenden werden von einem etwa bei CC' zu denkenden Auge oder Fernrohr aufgefangen und auf der Netzhaut oder in der Bildebene des Fernrohrs zur Interferenz gebracht. Um die entstehende Interferenzerscheinung bestimmen zu können, müssen wir den Gangunterschied zusammengehöriger, d. h. von demselben Punkt der Lichtquelle ausgehender und an denselben Punkt der Bildfläche gelangender Strahlen kennen. Wir müssen also vor allem wissen, wie die zusammengehörigen Strahlen liegen. Man hat bisher, ohne zu beweisen, dass das richtig ist, die aus einem einfallenden Strahl wie SA_1 entstehenden B_3C und $B_3'C'$ als zusammengehörig behandelt, was gleichbedeutend mit der Annahme ist, dass man auf unendlich accommodiren müsse, um die Interferenzerscheinung deutlich zu sehen. Es ist das nun in diesem Falle richtig, aber es kommt nur daher, dass man planparallele Platten hat, und ein Beweis dafür ist durchaus erforderlich. Derselbe ist nicht schwierig. Grösste Schärfe der Interferenzerscheinung findet dann statt, wenn alle in einen Punkt der Bildfläche gelangenden zusammengehörigen Strahlenpaare denselben Gangunterschied besitzen. Wir können zeigen, dass dies hier stattfindet, wenn wir auf unendliche Entfernung accommodiren. Wir wollen den Gang der Strahlen rückwärts verfolgen, wir sprechen also so, als gingen dieselben von den Punkten der Netzhaut oder Bildfläche des Fernrohrs aus und bewegten sich zur Lichtquelle hin. Ist nun das Auge oder Instrument auf unendlich eingestellt, so bildet der von einem Punkt der Bildfläche ausgehende Strahlenkegel, dessen Basis die Pupille oder die Oeffnung des Objektivs ist, nach seinem Austritt einen Cylinder paralleler Strahlen; beim Auftreffen auf die zweite Platte spaltet sich dieser in zwei Cylinder, einen zurückgeworfenen und einen eindringenden und diese durchlaufen ganz entsprechende Wege, wie wir es vorhin in der umgekehrten Richtung für den Strahl SA_1 gesehen haben, namentlich müssen sie ebenso wegen der Planparallelität der Platten dieselben parallel verlassen, wie die Strahlen B_3C und $B_3'C'$. Die beiden Strahlencylinder fallen aber, wenn der Winkel, den die beiden Platten mit einander bilden, nicht zu gross ist, nach dem Verlassen der ersten Platte zum Theil zusammen. In diesem zusammenfallenden Theil liegt in jeder zur Cylinderaxe parallelen Geraden ein Strahl des ersten und ein Strahl des zweiten Bündels, die also nun vereinigt zu einem und demselben Punkt der Lichtquelle gelangen. Sie sind daher zusammengehörige Strahlen. Der Gangunterschied dieser zusammengehörigen Strahlen, die wir uns nun wieder von der Lichtquelle ausgehend denken wollen, ist aber gar nicht von der Lage dieser letzteren abhängig, da sie von ihr bis zur ersten Platte zusammenfallen, auch nicht von ihrer Lage im Bündel, da die Strahlen eines jeden Paares beim Verlassen der ersten Platte in derselben Richtung und um denselben Betrag wie alle andern auseinandergetreten sind, also alle Paare zwischen den Platten den gleichen Gangunterschied erhalten, sondern er ist nur abhängig von der Dicke und dem Brechungsindex der Platten, ihrer Neigung gegen einander und den Einfallswinkeln der Strahlen an den Platten. Da wir aber parallele Strahlen haben, so sind diese Grössen für alle Paare dieselben, und alle Paare haben denselben Gangunterschied. Damit ist nachgewiesen, dass für Accommodation auf endliche Entfernung die Erscheinung am schärfsten

werden muss. Freilich wird dieselbe mit der Vergrösserung des Winkels zwischen den Platten auch dann allmählich undeutlicher werden und verschwinden, da wegen des Auseinandertretens der Strahlencylinder die Anzahl der Paare zusammengehöriger Strahlen immer kleiner wird. — Es ist leicht zu erkennen, dass dieser Beweis unabhängig ist von dem eben betrachteten speciellen Fall, dass vielmehr allgemein immer dann auf Unendlich zu accommodiren ist, wenn Interferenzerscheinungen durch planparallele Platten so erzeugt werden, dass die Theilstrahlen in den interferirenden Bündeln, in welche ein einfallender Strahl zerlegt wird, unter einander parallel sind.

Nachdem nun nachgewiesen ist, dass die aus demselben einfallenden Strahl entstehenden Strahlen zusammengehören, haben wir den Gangunterschied derselben festzustellen. Nennen wir den Brechungswinkel in der ersten Platte r_1, in der zweiten r_2, ebenso die Dicke der ersten Platte D_1, die der zweiten D_2, die Brechungsindices beider Platten bezüglich n_1 und n_2, so haben wir bekanntlich (s. oben pag. 545) für die Verzögerung des Strahls A_3B_3' gegen A_1B_1 den Ausdruck $2n_1D_1 \cos r_1$. Derselbe Ausdruck gilt natürlich auch für die Verzögerung des Strahls $B_3'C$ gegen den punktirten B_1D, den wir hier zu Hilfe nehmen. Gegen diesen letzteren ist aber der Strahl B_3C verzögert um $2n_2D_2 \cos r_2$, folglich ist seine Verzögerung (Δ) gegen den Strahl $B_3'C_3'$.

$$\Delta = 2(n_1D_1 \cos r_1 - n_2D_2 \cos r_2).$$

und wenn wir gleiche Dicke und gleichen Brechungsexponent bei den Platten annehmen

$$\Delta = 2Dn(\cos r_1 - \cos r_2) = 2D(\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i_2})$$

Ist der Winkel, welchen die Platten mit einander bilden, klein, nennen wir ihn α, und φ den Flächenwinkel zwischen zwei Ebenen, von denen die eine bestimmt ist durch die beiden Normalen der Platten und die andere durch die Normale der ersten Platte und den zwischen beiden verlaufenden Strahl, so ist allgemein

$$\cos i_2 = \cos i_1 \cos \alpha - \sin i_1 \sin \alpha \cdot \cos \varphi,$$

also bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\cos i_2 = \cos i_1 - \sin i_1 \cos \varphi \cdot \alpha,$$
$$\cos^2 i_2 = \cos^2 i_1 - \sin 2i_1 \cos \varphi \cdot \alpha$$
$$\sqrt{n^2 - \sin^2 i_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1 - \sin 2i_1 \cos \varphi \cdot \alpha},$$

also

$$\Delta = \frac{\sin 2i_1 \cdot \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} D \cdot \alpha.$$

Ist $\cos \varphi$ auch sehr klein, was eintritt, wenn die Einfallsebene der Strahlen und die Ebene des Neigungswinkels der Platten nahe senkrecht auf einander stehen, so ist zu setzen

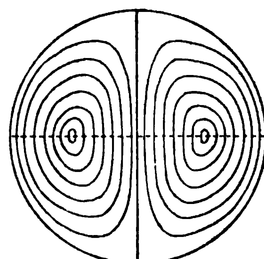
$$\Delta = \frac{\sin 2i_1 \cos \varphi + \cos^2 i_1 \cdot \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} D \cdot \alpha,$$

Aus diesen Formeln für den Gangunterschied können die Interferenzcurven abgeleitet werden. Wir gehen jedoch darauf hier nicht näher ein, sondern verweisen in dieser Beziehung auf die Arbeiten von KETTELER[1]), BOBYLEW[2]), ZEHNDER[3]),

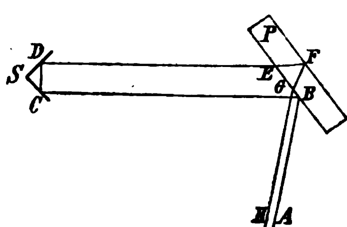
[1]) KETTELER, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.
[2]) BOBYLEW, CARL's Repert. 11, pag. 213. 1875.
[3]) ZEHNDER, WIED. Ann. 34, pag. 91. 1888.

BLASIUS[1]) und E. SCHMIDT[2]). Die Gestalt derselben, wie sie KETTELER beschreibt und abbildet, ist in Fig. 469 wiedergegeben.

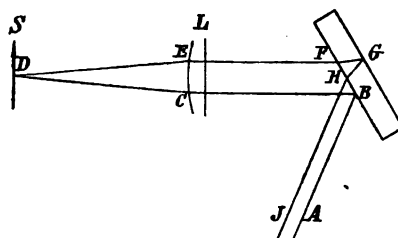
Optische Apparate, in welchen parallele Glasplatten von einiger Dicke verwandt werden, geben mitunter Anlass zur Entstehung unserer Streifen. So z. B. der »Analyseur« von DELEZENNE[3]), wie ihn die Herren Dr. STEEG und REUTER in Homburg v. d. Höhe anfertigten. Dieses Instrument besteht im Wesentlichen aus zwei in der Stellung der Fig. 468 angeordneten Glasplatten, auf welche die Strahlen unter dem Polarisationswinkel aufffallen, und die um eine zu diesen Strahlen parallele Axe drehbar sind. Dreht man sie ein wenig aus ihrer genau parallelen Stellung, so erscheinen die Streifen sehr hübsch, allerdings nicht in der Ausdehnung der Fig. 469.


(Ph. 469.)

Eine wesentliche Eigenthümlichkeit des Strahlenverlaufs bei dieser Interferenzerscheinung besteht darin, dass die Anordnung leicht so getroffen werden kann, dass die beiden zur Interferenz kommenden Bündel während eines beträchtlichen Theils ihres Wegs verhältnissmässig weit von einander getrennt sind. Darin beruht ihr Werth für die physikalische Forschung, der, wie angegeben, die auf sie gegründete Construction eines besonderen Instrumentes, des Interferentialrefractors, veranlasst hat. Bei diesem Instrument kann man in den Gang der getrennten Lichtbündel verschiedene Körper einschalten, und wenn man nun dem Zustand des von dem einen Bündel durchsetzten Körpers eine bekannte kleine Aenderung



(Ph. 470.)



(Ph. 471.)

(z. B. des Drucks oder der Temperatur) ertheilt, während man den anderen unverändert lässt, wird man den geänderten Gangunterschied der Bündel an einer Verschiebung der Interferenzstreifen erkennen. Führt man dann die Streifen, indem man in dem einen Bündel eine bekannte Beschleunigung oder Verzögerung bewirkt, wieder auf ihre ursprüngliche Lage zurück, so ist damit der durch die Zustandsänderung des Körpers bewirkte Gangunterschied gemessen und daraus kann man die Aenderung des Brechungsindex bei dem Vorgang ableiten.

JAMIN und MASCART haben noch andere Formen des Versuchs angegeben[4]), bei welchen nur eine planparallele Glasplatte erforderlich ist. Die Fig. 470 und 471 geben eine Vorstellung davon. JAMIN verwendet zwei rechtwinklig mit ein-

[1]) BLASIUS, WIED. Ann. 45, pag. 316. 1892. Hier ist auch der Fall ungleicher Dicke der Platten in Betracht gezogen.

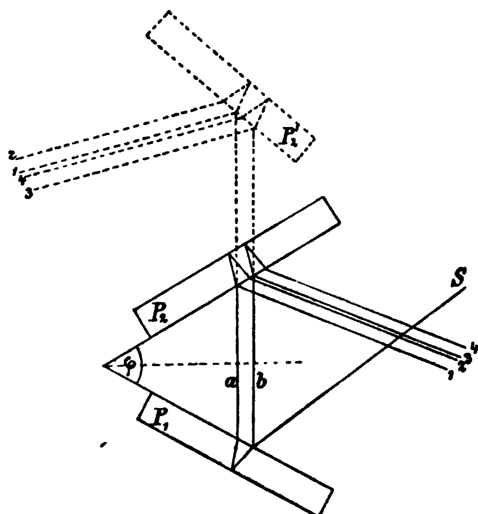
[2]) E. SCHMIDT, WIED. Ann. 46, pag. 1. 1892.

[3]) DELEZENNE, Notes sur la polarisation. Extr. des mém. de la soc. r. des sc. de Lille. pag. 22 u. 33. 1835.

[4]) MASCART, Annales de chim. et de phys. (4) 23, pag. 146. 1871.

ander verbundene Planspiegel S, welche den Lichtstrahl BC auf einem um das Stück CD davon entfernten Weg wieder zur Platte P zurücksenden. MASCART benutzt zu dem gleichen Zweck eine Linse mit einem Planspiegel. Auch O. LUMMER[1]) hat den letzteren Fall genauer untersucht. Der in den Figuren angedeutete Gang des einen Strahls lässt sofort erkennen, dass in der That ähnliche Erscheinungen auftreten müssen, wie bei der ursprünglichen Form des Experiments. Wir gehen nicht näher auf die Rechnung ein und verweisen bezüglich weiterer Ausführungen auf die angezogenen Arbeiten von MASCART und LUMMER. — Eine Anordnung des ursprünglichen JAMIN'schen Apparats, bei welcher die vier reflektirenden Flächen nicht zu je zweien auf einer Glasplatte vereinigt sind, sondern für jede eine besondere Platte verwandt wird, hat L. ZEHNDER[2]) beschrieben. Es wird dabei eine noch viel weitere Auseinanderlegung der Lichtbündel erreicht.

Eine mit der BREWSTER'schen Interferenzerscheinung nahe verwandte hat O. LUMMER[3]) noch behandelt. Man erhält dieselbe, wenn man zwei gleiche planparallele Platten (Fig. 472) mit einfarbigem Lichte beleuchtet und sich so stellt, dass der Axenstrahl des ins Auge gelangenden Lichtbündels zwischen den Platten (d. h. in seinem mit a, b bezeichneten Theile) ungefähr senkrecht auf der Halbirungslinie des (beliebigen) Winkels φ steht, welchen die Platten mit einander bilden. Ihre Verwandtschaft mit der BREWSTER'schen Erscheinung in der JAMIN'schen Anordnung zeigt ein Blick auf die Figur. Die darin punktirt gezeichnete Platte P_2' ist als eine den andern beiden gleiche zu denken und ist so gelegt, dass ihr Durchschnitt mit P_2 dem dieser Platte mit P_1 parallel verläuft und die Strahlen a, b sie unter demselben Winkel treffen wie P_2. Da nun a und b die Halbirungsebene des Winkels φ nahe senkrecht treffen sollen, so folgt, dass P_2' nahe parallel P_1 ist. In dieser Lage würden die Platten also die BREWSTER'sche Erscheinung zeigen und da P_2' von den Strahlen unter demselben Winkel getroffen wird wie P_2 erkennen wir auch, dass die Wegdifferenzen entsprechender Strahlen in beiden Fällen die gleichen sein müssen. Bezeichnen wir nämlich die Dicke der Platten mit D, ihren Brechungsindex mit n, den Brechungswinkel der Strahlen in P_1 mit r_1, in P_2 und P_2' mit r_2, so folgt, wenn l_a und l_b die Weglängen von einem beliebigen Punkt des einfallenden Strahls S an bis zu einer auf a und b senkrechten Ebene bedeuten,



(Ph. 473.)

$$l_a - l_b = 2nD\cos r_1,$$

und natürlich hat bei analoger Bedeutung von l_1 und l_3 bei den an P_2 und l_1' und l_3' bei den an P_2' reflektirten Strahlen, auch $l_1 - l_3$ und $l_1' - l_3'$ denselben Werth, also:

1) LUMMER, WIED. Ann. 23, pag. 513. 1884.

2) L. ZEHNDER, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 11, pag. 275. 1891.

3) LUMMER, WIED. Ann. 24, pag. 417. 1885.

$$l_1 - l_3 = l_1' - l_3' = 2nD\cos r_1,$$

und bei entsprechender Bezeichnungsweise

$$l_2 - l_1 = l_4 - l_3 = l_2' - l_1' = l_4' - l_3' = 2nD\cos r_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$l_2 - l_3 = l_2' - l_3' = 2nD(\cos r_1 + \cos r_2)$$
$$l_1 - l_4 = l_1' - l_4' = 2nD(\cos r_1 - \cos r_2)$$

Wir sehen also, dass die Gangunterschiede aller entsprechenden Strahlenpaare in beiden Fällen genau die gleichen sind. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber in der Lage der zusammengehörigen Strahlen. Während bei der JAMIN'schen Anordnung die Strahlen mit kleiner Wegdifferenz, 1 und 4, nahe zusammen liegen, sind die andern 2 und 3 weit von einander entfernt und können in den Interferentialrefraktoren wegen der grossen Dicke der Platten bei mittlerer Grösse des Einfallswinkels überhaupt nicht zusammen ins Auge gelangen. Umgekehrt liegt die Sache hier: Die Strahlen von der grossen Wegdifferenz liegen nahe zusammen, die andern weit auseinander, sodass mit dicken Platten die von den letzteren abhängige Interferenzerscheinung bei mittleren Einfallswinkeln verschwinden muss.

Von besonderem Interesse sind hier die durch die Strahlen mit grossem Gangunterschied hervorgebrachten Erscheinungen. Dieselben verlaufen nach LUMMER bei allmählich wachsendem Neigungswinkel (φ) der Platten etwa folgendermaassen. Bei kleinem φ erblickt man ein System concentrischer Ringe, deren gemeinsames Centrum auf der optischen Axe des Auges zu liegen scheint. Diese anfangs kaum von Kreisen zu unterscheidenden Ringe gehen allmählich in Ellipsen über, deren grosse Axen horizontal liegen, wenn die Schnittlinie der Platten vertikal ist. Das Verhältniss der Axen ist erst ungefähr bei $\varphi = 90°$ gleich zwei und nimmt von da an sehr schnell zu. Die Kreise resp. Ellipsen ziehen sich nach dem Centrum zusammen, um in demselben zu verschwinden. Bei $\varphi = 98°$ etwa sind die Ellipsen in gerade horizontale Linien übergegangen, diese nehmen bald eine hyperbolische Gestalt an, die um so ausgeprägter ist, je mehr φ wächst. Die Asymptoden der Hyperbelschaar mit senkrechten reellen Axen bilden also einen immer kleineren Winkel miteinander und in dem andern zwischen den Asymptoden gelegenen Winkelraum entwickelt sich eine zweite Schaar concentrischer Hyperbeln. Bei dem Winkel $\varphi = 114°$ ungefähr stehen die Asymptoden auf einander senkrecht und nähern sich von da an immer mehr der Vertikalen. Dabei wandern die Hyperbeln der ersten Schaar nach dem Mittelpunkt hin, die der zweiten von ihm fort. — Die Strahlen mit kleinem Gangunterschied erzeugen schon im weissen Licht sichtbare, der Durchschnittslinie der Platten parallele und zu einer weissen Mittellinie symmetrische Streifen. Der Centralstreifen geht durch den Mittelpunkt der andern Curven.

12. Stehende Lichtwellen.

Eine ganz neue Klasse von Interferenzerscheinungen hat O. WIENER[1]) neuerdings nachgewiesen. Während alle bisher bekannten Erscheinungen durch in nahe der gleichen Richtung sich fortpflanzende Strahlen hervorgerufen werden, handelt es sich hier um solche, welche in entgegengesetzter Richtung verlaufende Lichtstrahlen erzeugen. In der Nähe eines Spiegels, auf welchen ein paralleles einfarbiges Lichtbündel senkrecht auffällt, muss in der That nach allem, was wir

[1]) WIENER, Tageblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher u. Aerzte 1889, pag. 209. WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

von der Natur des Lichtes wissen, ein Schwingungszustand entstehen ganz analog denen, welche man in andern Gebieten der Physik als »stehende Schwingungen« zu bezeichnen pflegt. »In solchen Abständen vom Spiegel, wo der gesammte Gangunterschied (der ankommenden und der reflektirten Welle) das Vielfache einer ganzen Wellenlänge beträgt, haben ihre Schwingungen stets die gleiche Richtung und ihre gegenseitige Verstärkung ist am grössten; hier liegen die Schwingungsbäuche; in solchen Abständen dagegen, wo der Gangunterschied eine halbe Wellenlänge mehr als das Vielfache einer ganzen beträgt, haben die Schwingungen der beiden Wellen stets entgegengesetzte Richtung und ihre gegenseitige Vernichtung ist am stärksten; hier liegen die Schwingungsknoten.«

»Ist der Spiegel eben, so herrscht in einer zu ihm parallelen Ebene überall der gleiche Schwingungszustand und die Schwingungs-Bäuche und -Knoten liegen gleichfalls in dazu parallelen Ebenen und erfüllen so zwei Schaaren paralleler Ebenen. Der Abstand zweier aufeinander folgenden Ebenen derselben Schaar beträgt eine halbe Wellenlänge und wird von einer solchen der andern Schaar halbiert.«

»Dieses System von stehenden Wellen denke man sich nun von einer gegen den Spiegel geneigten Ebene durchsetzt. Auf dieser werden dann die beiden Schaaren von Ebenen mit Schwingungs-Bäuchen und -Knoten zwei Schaaren von parallelen, untereinander gleich weit abstehenden Geraden ausschneiden, bei denen ebenso Gerade mit Schwingungsbäuchen und solche mit Knoten abwechseln.«

»Der Abstand dieser Geraden wird abhängen von der Neigung, welche man der kreuzenden Ebene gegen den Spiegel ertheilt. Wählt man die Neigung schwach genug, so muss es möglich sein, die Geraden mit Schwingungs-Bäuchen und -Knoten so weit auseinander treten zu lassen, dass sie mit unbewaffnetem Auge getrennt wahrgenommen werden könnten.«

Wäre es nun möglich nachzuweisen, dass an den den verschiedenen Zuständen zukommenden Orten verschiedenartige Wirkungen stattfinden, so wäre damit ihre Existenz dargethan. Dazu benutzte WIENER sehr dünne photographische Platten. Die gebräuchlichen sind ihrer viel zu grossen Dicke wegen nicht anwendbar; denn da die Schwingungs-Knoten und -Bäuche in vertikaler Richtung nur um eine Viertelwellenlänge auseinanderliegen, so würde schon eine Platte von dieser Dicke wegen der Uebereinanderlagerung sehr verschiedener Schwingungszustände an derselben Stelle in ihr nur ein sehr unklares Bild geben. Die gebräuchlichen Platten sind aber noch mehr wie hundertmal so dick. Es handelte sich also zunächst um die Frage, ob es möglich sei, photographische Schichten von einer gegen eine Wellenlänge geringen Dicke herzustellen. Glücklicherweise gelingt dies sehr befriedigend auf mehreren Wegen. Als den geeignetsten hat WIENER die Herstellung von Häutchen aus Chlorsilbercollodium befunden, deren Dicke ohne zu grosse Beeinträchtigung ihrer Lichtempfindlichkeit auf $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{15}$ der Wellenlänge des Natriumlichtes gebracht werden konnte. Ein solches auf einer ebenen Glasplatte hergestelltes Häutchen wurde in passender Neigung einem ebenen Silberspiegel gegenüber angebracht. Die richtige Neigung wurde gefunden, indem die Glasplatte mit der das Häutchen tragenden Seite auf den Spiegel, der aus einer chemisch auf einer ebenen Glasplatte niedergeschlagenen und polirten Silberschicht bestand, aufgelegt und durch geeignetes Pressen der Gläser den in Natriumlicht entstehenden Interferenzstreifen der gewünschte Abstand (gewöhnlich $\frac{1}{2}$— 2 *mm*) gegeben wurde. Von einem Streifen zum nächstbenachbarten ändert sich dann der Abstand des Häutchens vom Spiegel um eine halbe

Wellenlänge des Natriumlichtes. Da ebensoviel auch der Abstand zweier aufeinanderfolgenden Ebenen mit Schwingungsbäuchen oder -Knoten der stehenden Wellen beträgt, so ist auch die Entfernung der Durchschnitte unseres Häutchens mit diesen Ebenen der der Interferenzstreifen von einander gleich. Zum Beleuchten bei den eigentlichen Versuchen ist Natriumlicht nicht geeignet, da es selbt bei langer Explosionsdauer nicht merklich auf Chlorsilbercollodium einwirkt. WIENER benutzte dazu das Licht einer elektrischen Bogenlampe, welches merkwürdiger Weise schon ohne Weiteres zu diesen Versuchen angewandt werden kann, woraus folgt, dass die darin enthaltenen, photographisch auf die Häutchen wirkenden Strahlen nur einen ziemlich begrenzten Raum einnehmen. Doch sind die so erhaltenen Bilder nicht sehr scharf, es wurde desshalb zu den endgültigen Versuchen nur spectral zerlegtes Licht benutzt. WIENER giebt seiner Abhandlung eine Figurentafel bei, welche die bei nahe senkrechtem Auffall dieses Lichts auf die beschriebenen Doppelplatten erhaltenen Resultate darstellt. Die Tafel ist so entstanden, dass von den Originalnegativen zunächst positive Abdrücke auf photographischem Papier gemacht wurden. Diese wurden auf Carton zusammengestellt und so durch Lichtdruck vervielfältigt. Jede Retouche und sonstige willkürliche Zuthat ist dabei vollständig ausgeschlossen. Die Figuren zeigen nun sämmtlich schöne, zum Theil sehr scharfe Interferenzstreifen. Um dieselben aber als Beweis für die stehenden Lichtschwingungen ansprechen zu können, ist noch ein Bedenken zu beseitigen. Wir haben schon bemerkt, dass auch der Zwischenraum zwischen Spiegel und Collodiumhäutchen als dünnes Blättchen wirkt und die an seinen beiden Flächen reflektirten Strahlen Streifen von derselben Breite und demselben Verlauf erzeugen müssen, wie die gedachten stehenden Schwingungen. Der Einwurf liegt also nahe, dass die auf den photographischen Blättchen erhaltenen Curven auf die letztere Art entstanden seien, dass es also die Zusammenwirkung der an dem Silberspiegel reflektirten mit der an der unteren Fläche des Collodiumhäutchens reflektirten nicht mit der einfallenden Schwingung sei, welche sie erzeugt habe. Diesen Einwurf widerlegt WIENER durch verschiedene Versuche. Er weist zunächst darauf hin, dass die Streifen der geringsten Lichteinwirkung sich an Helligkeit nicht merklich von den ausserhalb des Bildes gelegenen Stellen der Platte unterscheiden, auf die gar kein oder höchstens schwach diffuses Licht gefallen war Diese Beobachtung aber ist mit der Annahme der Entstehung der Streifen durch gewöhnliche Interferenzen allein unverträglich; denn über die Wirkung der Interferenzen musste sich dann die ungeschwächte Wirkung des einfallenden Lichtes legen, auch an den Stellen der Interferenzminima. Auch hier musste man also eine Lichtwirkung beobachten. Dass man keine findet, ist aber ein Beweis dafür, dass die Wirkung des einfallenden Lichtes durch Interferenz mit dem kräftig am Silberspiegel reflektirten vernichtet wurde, d. h. für das Auftreten der stehenden Wellen.

WIENER stellte weiter den folgenden Versuch an. Der reflektirende Spiegel war an einer Stelle von seiner Silberschicht befreit worden und die Platten wurden so dem einfallenden Lichtbündel ausgesetzt, dass dieses zur Hälfte auf die Silber- und zur Hälfte auf die nackte Glasfläche fiel. Die Berechnung der Intensitäten der Maxima und Minima in den Interferenzerscheinungen der reflektirten Strahlen ergiebt nun, die Intensität des einfallenden Lichts gleich eins gesetzt, bei der Silberreflexion 0·90 und 0·80, bei der Glasreflexion 0·18 und 0. Ist deshalb eine Interferenz allein zwischen den reflektirten Strahlen vorhanden, so müssten die dunklen Streifen bei Silberreflexion noch heller sein als die hellen bei Glasreflexion. Anders wenn auch die einfallenden Strahlen sich bei

der Interferenz betheiligen. Diese können von den am Silber kräftig reflektirten Strahlen viel vollständiger aufgehoben werden als von den schwächeren, von der Glasoberfläche kommenden. Dann müssen also die dunklen Streifen bei Silberreflexion noch dunkler als die dunklen bei Glasreflexion ausfallen. Die mitgetheilten Bilder zeigen ein Verhalten der letzteren Art.

Ferner überzog WIENER eine Glasplatte zur Hälfte mit einer dickeren Collodiumschicht von etwas über Halbwellenlänge Dicke, zur Hälfte mit einer so dünnen wie sonst. Nach der schon oben gemachten Bemerkung muss man bei der Annahme stehender Schwingungen, wo in der dickeren Schicht an jedem Punkt übereinander die verschiedensten Schwingungszustände fallen müssen, erwarten, dass hier das Bild keine Streifen, sondern nur allgemeine Helligkeit zeigt. Wenn aber die Interferenz nur bei den reflektirten Strahlen stattfindet, wo dann helle Strahlenbündel und dunkle nebeneinander entstehen, kann die Dicke der empfindlichen Schicht keinen wesentlichen Einfluss auf das Aussehen des Bildes ausüben. Der Versuch ergab, dass, während die dünnere Hälfte die Streifen wie früher zeigte, die dickere eine gleichmässige Lichtwirkung aufwies. Endlich wurde zwischen das Collodiumhäutchen und den Spiegel Benzol gebracht, dessen Brechungsexponent für das in den Versuchen verwandte Licht nahe derselbe wie für das Häutchen war. Damit war die Reflexion an der unteren Fläche des Häutchens aufgehoben und nur der einfallende und der an dem Silberspiegel reflektirte Strahl kamen in ihm zur Wirkung. Die Streifen entstanden in derselben Schärfe wie früher.

Wir haben bei unsern Erklärungen der Interferenzerscheinungen fast überall ausdrücklich oder stillschweigend angenommen, dass das einfallende Licht einfarbig sei. Ist es weiss, so werden die Erscheinungen im Allgemeinen unbestimmter und hören bald auf, sichtbar zu sein, indem bei einigermaassen erheblichen Gangunterschieden die in einem Punkt zusammenkommenden verschiedenfarbigen Strahlen die Wechsel von grösster Helligkeit zu tiefster Dunkelheit so viel Mal enthalten, dass die Gesammtwirkung ein Weiss von mittlerer Helligkeit ist und in dem gleichmässig erleuchteten Feld keine Streifen unterschieden werden können. Doch giebt es auch Ausnahmefälle, wo selbst bei grösserem Gangunterschied und weissem Licht Streifen sichtbar sind. Es findet das dann statt, wenn die Streifen derselben Ordnung für die verschiedenen Farben genau oder nahezu an derselben Stelle übereinander fallen. Da das Intensitätsverhältniss der verschiedenen Farben an diesen Stellen dann dasselbe ist wie im einfallenden Licht, so erhalten wir durch dunkle Zwischenräume getrennte weisse Linien. Meist findet ein genaues Zusammenfallen der verschiedenen farbigen Streifen nur in einer bestimmten Linie statt, nur diese ist dann rein weiss und die seitlich sich anschliessenden sind mehr oder weniger farbig gesäumt. Es kann aber auch vorkommen, dass auf verhältnissmässig weite Strecken hin ein so genaues Uebereinanderfallen der Streifen eintritt, dass viele helle und dunkle Linien ohne merkbare Färbung sichtbar sind. — Wir haben bei der Besprechung der Arbeiten NEWTON's gesehen, dass schon dieser eine hierher gehörige Beobachtung bei der Betrachtung der Ringe durch ein Prisma gemacht und sie auch ganz richtig erklärt hat[1]). Dann hat AIRY[2]) eine bezügliche Bemerkung gemacht, TALBOT[3])

[1]) Vergl. dazu auch F. PLACE, Pogg. Ann. 114, pag. 504. 1861.
[2]) AIRY, Phil. mag. (3) 2, pag. 161. 1833; Pogg. Ann. 29, pag. 304 u. 329. 1833.
[3]) TALBOT, Phil. mag. (3) 9, pag. 401. 1836.

sich mit diesen Erscheinungen beschäftigt und in neuerer Zeit sind sie von verschiedenen Forschern[1]) näher untersucht worden.

Wenn auch eine genauere Besprechung der mannigfaltigen Verwendungsweisen der verschiedenen Interferenzerscheinungen zu physikalischen Untersuchungen zu weit führen würde und auch nicht an diesen Ort gehört, so wollen wir doch einen gedrängten Ueberblick darüber geben.

Vielfach sind Interferenzerscheinungen, namentlich die der dünnen Blättchen, zu genauen Längenmessungen und noch mehr zu genauen Bestimmungen von Längenänderungen benutzt worden. Methoden zur direkten Vergleichung von Mikrometerschrauben oder Schlittenverschiebungen mit Wellenlängen (von Natriumlicht), wodurch Längenmessungen auf die Wellenlänge als Einheit zurückgeführt werden können, haben K. R. Koch[2]) sowie A. Michelson und E. Morley[3]) angegeben und zur Anwendung gebracht. — Für die Dickenbestimmung von Blättchen und Platten in Wellenlängen haben Vorschriften gegeben Fizeau[4]) (speciell für dünne Silberschichten durch Verwandlung in Jodsilber und Bestimmung von dessen Dicke durch Farben dünner Blättchen), Quincke[5]) (durch die Farbe gleichdicker Luftschichten), Wernicke[6]) (nach dem Fizeau'schen Verfahren unter Anwendung spectraler Zerlegung), Wiener[7]) (Verbesserung der Quincke'schen Methode besonders durch spectrale Zerlegung) Macé de Lépinay[8]) (durch Talbot'sche Linien), und Cantone[9]) (durch zweifarbige Beleuchtung). — Als einigermaassen verwandt mag hier eine Benutzung der Streifen dünner Blättchen erwähnt werden, die in den verschiedenartigsten experimentellen Anordnungen eine Rolle spielen kann, nämlich die, wo sie zur Bestimmung der genauen gegenseitigen Lage zweier Flächen in gewissen Zeitpunkten des Versuchs dienen. So benutzen sie K. R. Koch[10]) bei Sphärometermessungen, Michelson u. Morley bei ihrem vorhin erwähnten Verfahren der Theilung von Maassstäben, Auerbach[11]) bei seiner Methode der Härtebestimmung.

Die Gestaltsänderung der Oberfläche elastischer Körper untersuchte Cornu[12]) mittelst der Streifen dünner Blättchen. Dieselbe Methode wandte K. R. Koch[13]) zur Bestimmung des Elasticitätscoëfficienten durch Biegung besonders bei Krystallen

---

[1]) Cornu, Compt. rend. 93. 1881; Journ. de phys. (2) 1, pag. 293. 1882. — Hurion, Journ. de phys. (2) 1, pag. 303. 1882; Compt. rend. 94, pag. 1345; 95, pag. 75. 1882. — Mascart, Compt. rend. 108, pag. 591. 1889; Traité d'opt. I, pag. 429. 1889. — Lord Rayleigh, Phil. mag. (5) 28, pag. 77 u. 189. 1889. — Macé de Lépinay et Perot, Journ. de phys. (2) 9, pag. 376. 1890.

[2]) K. R. Koch, Berichte der naturf. Ges. zu Freiburg i. B. 8, pag. 123; Wied. Ann. 18, pag. 511. 1883.

[3]) A. Michelson u. E. Morley, Sill. Journ. 34, pag. 427. 1887.

[4]) Fizeau, Compt. rend. 52, (1), pag. 274. 1861.

[5]) Quincke, Pogg. Ann. 129, pag. 178. 1866.

[6]) Wernicke, Berl. Monatsber. Febr. 1876; Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8, pag. 65. 1878.

[7]) Wiener, Wied. Ann. 31, pag. 632. 1887.

[8]) Macé de Lépinay, Annales de chim. et de phys. (6) 10, pag. 68. 1887.

[9]) Cantone, R. Acc. dei Lincei (4) 4, pag. 815. 1888.

[10]) K. R. Koch, Wied. Ann. 3, pag. 611. 1878.

[11]) Auerbach, Wied. Ann. 43, pag. 61. 1891.

[12]) Cornu, Compt. rend. 69, pag. 333. 1869.

[13]) K. R. Koch, Wied. Ann. 5, pag. 251. 1878; 18, pag. 325. 1883.

an, die Beobachtungen wurden fortgesetzt von BECKENKAMP, VATER und NIEDMANN[1]).

Die durch die Wärme bewirkte Ausdehnung der Körper maass schon JERICHAU[2]) mit seinem »Thermomikrometer« ebenfalls mittelst der Streifen dünner Blättchen; eine genaue Methode zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten isotroper und anisotroper Körper gründete FIZEAU[3]) darauf und wandte sie zu vielen Messungen an. In neuerer Zeit hat BENOÏT[4]) die Methode wieder aufgenommen und ABBE ein verbessertes Dilatometer für solche Messungen construirt[5]).

H. SCHRÖDER[6]) gab ein Verfahren an, die Objektivlinsen optischer Instrumente mittelst der in der Nähe ihres Brennpunkts entstehenden Interferenzerscheinungen zu prüfen.

Mittelst der Interferenzstreifen des FRESNEL'schen Doppelprismas haben unter Anwendung intermittirenden Lichts TÖPLER und BOLTZMANN[7]) die Schwingungen tönender Luftsäulen untersucht.

Häufig hat man unsere Erscheinungen zur Messung von Brechungsexponenten und zur Bestimmung der Aenderungen derselben benutzt. Dazu wandten WERNICKE[8]), SIRKS[9]), RUBENS[10]) und SNOW[11]) die Streifen dünner Blättchen an. Der JAMIN'sche Interferentialrefraktor diente meist zur Messung der Aenderungen. Derartige Versuche hat schon JAMIN[12]) selbst über den Einfluss von Temperatur und Druck auf den Brechungsindex des Wassers, sowie über die verschiedene Brechung von trockener und feuchter Luft ausgeführt. Dann hat QUINCKE[13]) auf diese Weise den Brechungsindex sehr dünner Metallblättchen zu bestimmen gesucht, KETTELER[14]) die Dispersion verschiedener Gase, L. LORENZ[15]) und K. PRYTZ[16]) die Brechung von

---

1) BECKENKAMP, Zeitschr. f. Krystallogr. 10, pag. 41. 1885; VATER, Zeitschr. f. Krystallogr. 11, pag. 549. 1886; BECKENKAMP, Zeitschr. f. Kryst. 12, pag. 419. 1887; NIEDMANN, Zeitschr. f. Kryst. 13, pag. 362. 1888.

2) JERICHAU, POGG. Ann. 54, pag. 139. 1841.

3) FIZEAU, Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862; POGG. Ann. 119, pag. 87 u. 297. 1863. — Compt. rend. 58, pag. 923. 1864; Ann. de chim. et de phys. (4) 2, pag. 143. 1864; POGG. Ann. 123, pag. 515. 1864. — Compt. rend. 60, pag. 1161. 1865; POGG. Ann. 126, pag. 611. 1865. — Compt. rend. 62, pag. 1101, 1133. 1866; Ann. de chim. et de phys. (4) 8, pag. 335. 1866; POGG. Ann. 128, pag. 564. 1866. — Compt. rend. 64, pag. 314. 1867; POGG. Ann. 132, pag. 292. 1867. — Compt. rend. 66, pag. 1005 u. 1072. 1868; POGG. Ann. 135, pag. 372. 1868. — Compt. rend. 68, pag. 1125. 1869. — POGG. Ann. 138, pag. 26. 1869.

4) BENOÎT, Trave et mém. du bureau intern. des poids et mes. 1, C. 1. 1881. — 6, pag. 1, 1888.

5) Beschrieben von G. WEIDMANN, WIED. Ann. 38, pag. 453. 1889 und im Katalog über optische Messinstrumente von CARL ZEISS in Jena, pag. 29. 1893.

6) SCHRÖDER, POGG. Ann. 113, pag. 502. 1861.

7) TÖPLER und BOLTZMANN, POGG. Ann. 141, pag. 321. 1870.

8) WERNICKE, POGG. Ann. 139, pag. 132. 1870.

9) SIRKS, POGG. Ann. 143, pag. 429. 1871.

10) RUBENS, WIED. Ann. 45, pag. 238. 1892.

11) RKBENS u. SNOW, WIED. Ann. 116, pag. 529. 1892.

12) JAMIN, Compt. rend. 42, pag. 482. 1856; 43, pag. 1191. 1856; 45, pag. 892. 1857. Ann. de chim. et de phys. (3) 52, pag. 163, u. 171. 1858. POGG. Ann. 98, pag. 345. 1856; 100, pag. 478, 1857.

13) QUINCKE, POGG. Ann. 119, pag. 368. 1863; 120, pag. 599. 1863.

14) KETTELER, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865, pag. 29

15) L. LORENZ, Vidensk. Selsk. Skrifter (5) 8, pag. 205. 1869; 10, pag. 485. 1875; WIED. Ann. 11, pag. 70. 1880.

16) K. PRYTZ, Vidensk. Selsk. Skr. 6, pag. 1. 1880; WIED. Ann. 11, pag. 104. 1880.

Flüssigkeiten, Dämpfen und Gasen gemessen. QUINCKE[1]) und ZEHNDER[2]) haben die Versuche JAMIN's über den Einfluss des Drucks auf die Brechung des Wassers wiederholt, RÖNTGEN und ZEHNDER[3]) dieselben weitergeführt und auch auf Schwefelkohlenstoff ausgedehnt, CHAPPUIS und RIVIÈRE[4]) haben die Brechung einiger Gase bei verschiedenen Drucken, BRACE[5]) den Einfluss magnetischer Kräfte auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit cirkularpolarisirter Strahlen untersucht, SIERTSEMA[6]) hat die Brechungsindices einiger verdünnter Salzlösungen bestimmt. Mittelst TALBOT'scher Streifen hat MASCART[7]) die Refraction der Gase und die Brechung des Wassers unter Druck untersucht.

Wellenlängenbestimmungen mittelst NEWTON'scher Ringe hat schon NEWTON selbst ausgeführt (s. oben, pag. 549), dann FIZEAU[8]) und KETTELER[9]). ESSELBACH[10]) hat sich zur Vergleichung der Wellenlängen verschiedener Spectrallinien der TALBOT'schen Streifen bedient.

Von besonderem Interesse sind die auf unsere Interferenzerscheinungen gegründeten Untersuchungen, welche sich direkter auf die Natur des Lichts selbst, sein Verhalten beim Auffallen auf Trennungsflächen verschiedener Körper, die Vorgänge des Leuchtens und die Natur des Aethers beziehen. Zunächst kann man hierher rechnen die Untersuchungen über die Phasenänderung bei der Reflexion, wie sie BABINET[11]), SENARMONT[12]), BILLET[13]), QUINCKE[14]), WERNICKE[15]), GLAN[16]), WIENER[17]), RITTER[18]) ausgeführt haben. In engem Zusammenhang damit steht die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichts, die auch in einigen der letzten Arbeiten erörtert wird. Namentlich an die letzte Abhandlung von WIENER, worin er die Ergebnisse einiger seiner Versuche mit stehenden Lichtwellen auf diese Gegenstände anzuwenden sucht, hat sich eine Discussion geknüpft[19]).

J. J. MÜLLER[20]) glaubte durch Verschiebungen von Interferenzstreifen, die er

---

[1]) QUINCKE, WIED. Ann. 19, pag. 401. 1883.

[2]) ZEHNDER, WIED. Ann. 34, pag. 91. 1888.

[3]) RÖNTGEN u. ZEHNDER, Ber. d. Oberh. Ges. f. Nat. u. Heilk. 26, pag. 58. 1888.

[4]) CHAPPUIS et RIVIÈRE, Compt. rend. 96, pag. 699. 1883; 102, pag. 1461. 1886; 103, pag. 37. 1886; 104, pag. 1433. 1887. Ann. de chim. et de phys. (5) 14, pag. 5. 1888.

[5]) DE WITT BRISTOL BRACE, WIED. Ann. 26, pag. 587. 1885.

[6]) SIERTSEMA, DE JAMIN'sche Interferentialrefractor. Groningen 1890 (Inaug.-Diss.).

[7]) MASCART, Compt. rend. 78, pag. 417 u. 801. 1874. POGG. Ann. 153, pag. 149, 154. 1874.

[8]) FIZEAU, Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862; POGG. Ann. 119, pag. 88. 1863.

[9]) KETTELER, Beob. über d. Farbenzerstr. d. Gase. Bonn 1865, pag. 14.

[10]) ESSELBACH, POGG. Ann. 98, pag. 527. 1856.

[11]) BABINET, Compt. rend. 8, pag. 709. 1839.

[12]) SENARMONT, Ann. de chim. et de phys. (2) 73, pag. 360. 1840. POGG. Ann. Ergz.-Bd. I, pag. 473. 1842.

[13]) BILLET, Ann. de chim. et de phys. (3) 64, pag. 408. 1862.

[14]) QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 192. 1871.

[15]) WERNICKE, POGG. Ann. 159, pag. 198. 1876. WIED. Ann. 25, pag. 203. 1885. WIED. Ann. 30, pag. 452. 1887.

[16]) GLAN, WIED. Ann. 7, pag. 630. 1879; 47, pag. 252 1892.

[17]) WIENER, WIED. Ann. 31, pag. 647. 1887. WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

[18]) RITTER, WIED. Ann. 36, pag. 236. 1889.

[19]) DRUDE, WIED. Ann. 41, pag. 154. 1890. POINCARÉ, Compt. rend. 112, pag. 325. 1891. CORNU, Compt. rend. 112, pag. 365. 1891. POTIER, Compt. rend. 112, pag. 383. 1891. POINCARÉ, Compt. rend. 112, pag. 456. 1891. POTIER, Journ. de phys. (2) 10, pag. 101. 1891. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 177. 1891; WIED. Ann. 48, pag. 119. 1893.

[20]) J. J. MÜLLER, Leipz. Sitzbr. 23, pag. 19. 1871. POGG. Ann. 150, pag. 86. 1873.

bei gewissen Versuchen beobachtet hatte, eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts von seiner Intensität nachgewiesen zu haben. Spätere Untersuchungen von LIPPICH[1]) und EBERT[2]) haben jedoch gezeigt, dass dieser Schluss irrthümlich war.

Ueber die Natur der Lichtemission glühender Gase haben E. WIEDEMANN[3]), EBERT[4]), Lord RAYLEIGH[5]), A. MICHELSON[6]) besonders mittelst der bei hohen Gangunterschieden eintretenden Erscheinungen Aufschluss zu gewinnen gesucht. Den Einfluss der Bewegung des durchstrahlten Mittels auf die Lichtgeschwindigkeit haben FIZEAU[7]) und neuerdings MICHELSON und MORLEY[8]) nachgewiesen; ein ähnliches Verfahren hat ROITI[9]) mit negativem Erfolg auf einen von einem galvanischen Strom durchlaufenen Körper anzuwenden gesucht. FEUSSNER.

Beugung des Lichts.

Beugung des Lichts (oder Diffraction auch Inflexion) nennt man den Vorgang, welcher eintritt, wenn Lichtstrahlen nahe an der Grenze ponderabler Körper oder überhaupt einer optisch discontinuirlichen Stelle vorübergehen, und welchen man gewöhnlich als eine Abweichung der Strahlen von ihrer geradlinigen Bahn zu bezeichnen pflegt.

Wenn auch die erste Erwähnung sich bei LEONARDO DA VINCI findet[10]), hat doch hierhergehörige Erscheinungen FRANCISCUS MARIA GRIMALDI zuerst genauer beobachtet, in den zwei ersten Abschnitten seines nachgelassenen Werks (Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride . . . Bononiae 1665, pag. 1—23) beschrieben, abgebildet und zu erklären versucht. GRIMALDI beschreibt hauptsächlich zwei Versuche; bei dem ersten wird in den Lichtkegel, welchen die durch eine sehr kleine Oeffnung in ein verdunkeltes Zimmer geleiteten Sonnen-Strahlen bilden, ein schmaler Körper gebracht und die sich bildende Beugungserscheinung auf einem dahinter aufgestellten Schirm aufgefangen, bei dem zweiten wird an die Stelle des schmalen Körpers ein Schirm mit einer kleinen Oeffnung gesetzt, so dass nur die durch diese letztere gehenden Strahlen zu dem hinteren Schirm gelangen. Bei dem ersten Versuch war nun der von dem schmalen Körper geworfene Schatten erheblich breiter, als einer geradlinigen Fortpflanzung der Strahlen entsprach, er zeigte sich ferner bei genügend kleiner Eintrittsöffnung der Strahlen von drei Streifen umgeben, deren Mitte weiss und heller war, als diese Stelle bei ungestörter Ausbreitung des Lichts gewesen sein

---

1) LIPPICH, Wien. Sitzbr, 72, pag. 335. 1875.
2) EBERT, WIED. Ann. 32, pag. 337. 1887.
3) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 5, pag. 503. 1878.
4) EBERT, WIED. Ann. 34, pag. 39. 1888; 36, pag. 466. 1889; 43, pag. 790. 1891.
5) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 27, pag. 298. 1889.
6) A. MICHELSON, Phil. Mag. (5) 31, pag. 338. 1891.
7) FIZEAU, Ann. de chim. et de phys. (3) 57, pag. 385. 1859.
8) MICHELSON and MORLEY, SILL. Journ. (3) 31, pag. 377. 1886. MICHELSON, SILL. Journ. (3) 21, pag. 120. 1881. MICHELSON and MORLEY, SILL. Journ. (3) 34, pag. 333. 1887.
9) ROITI, Nuovo Cim. (2) 9, pag. 148. 1873. POGG. Ann. 150, pag. 164. 1873.
10) S. Libri, Hist. des sc. math. en Ital. III, pag. 54.

würde, und von denen der nach dem Schatten zu gelegene Rand blau und der nach aussen gelegene roth gefärbt war. An Breite und Intensität nahmen die Streifen von dem Schatten nach aussen hin ab und verliefen der Grenze des letzteren parallel, indem sie sich um erhabene Winkel krummlinig herumbogen, in hohlen Winkeln aber sich ohne gegenseitige Störung durchkreuzten. Ausserdem erschienen bei genügender Helligkeit des Lichts und passender Breite des schattenwerfenden Körpers auch innerhalb des Schattens Streifen, deren Anzahl mit der Breite des Körpers und der Entfernung des Schirms wuchs und deren Breite um so grösser war, je kleiner ihre Anzahl und umgekehrt. An winkeligen Stellen des Schattens verliefen auch diese krummlinig und ausserdem zeigte sich da noch eine andere eigenthümliche Art büschel- oder schleifenförmiger Streifen, deren Anzahl gleichfalls mit der Breite des schattenwerfenden Körpers zunahm. In dem zweiten Experiment erschien die erleuchtete Stelle auf dem hinteren Schirm erheblich grösser als einem geradlinigen Gang der Strahlen durch die Oeffnung des ersten Schirms entsprach, und von einem blau und roth gefärbten Rand umgeben. — GRIMALDI zeigt, dass die beschriebenen Erscheinungen nicht von geradlinig ausgebildetem oder reflektirtem oder gebrochenem Licht, sondern von auf andere Art, die er Diffraction nennt, verbreitetem herrühren und bemüht sich in dem zweiten Abschnitt, dieselben wenigstens theilweise aus seiner Ansicht von der Natur des Lichts abzuleiten, das er als eine von den leuchtenden Körpern ausströmende Flüssigkeit ansieht. Wie nun an den Ufern der Flüsse unregelmässige, von der geradlinigen Fortbewegung der Hauptmasse abweichende Bewegungen stattfinden und Aehnliches an der Grenze von aus Röhren austretenden Luftströmen eintritt, so denkt er sich auch die an der Grenze eines Lichtbündels gelegenen Strahlen nicht der geradlinigen Bewegung der übrigen streng folgend, sondern etwas in den umgebenden Raum abweichend. Speciell kommt dann noch in dem ersten Versuch hinzu, dass das auf den schmalen Körper gefallene und da zurückgeworfene Licht mit dem nachfolgenden zusammenstösst, seinen Lauf stört und ablenkt, und so um jenen Körper herum dem Lichtbündel eine wellenförmige Erschütterung mitgetheilt wird, ähnlich wie einer Flüssigkeit durch einen hineingeworfenen Stein, dass ferner ein Theil jenes zurückgeworfenen Lichts sich dem andern, vorbeifliessenden, zumischt und von ihm, seine Intensität verstärkend, mitgezogen wird, wodurch jene hellen Streifen an der Grenze des Schattens entstehen.

Richtig erkannte schon GRIMALDI (vergl. Prop. 31, pag. 239), dass eine Reihe von Erscheinungen hierher gehören, welche sich zeigen, wenn man durch gitter- oder netzförmige Körper, wie gewebte Zeuge, Vogelfedern, gekämmte Wolle und dergl. nach einem hellen Punkt hinsieht, oder derartige Körper im dunkeln Zimmer in den durch eine kleine Oeffnung einfallenden Lichtkegel bringt.

NEWTON behandelt im dritten Buch seiner Optik (1704 zuerst erschienen) die Beugung, die er Inflexion nennt; und obgleich das Buch, wie er selbst sagt, nur ein Bruchstück ist, das nicht die gründliche Bearbeitung der anderen Theile erfahren hat, so enthält es doch mehrere wichtige neue Bemerkungen. Die vier ersten »Beobachtungen« beziehen sich auf die Anordnung, wo wie in GRIMALDI's erstem Versuch in den Lichtkegel schmale Körper gebracht werden. NEWTON zeigt, dass es einerlei ist, ob man diese in Luft oder von Wasser umgeben anwendet, und weist durch Messung bei verschiedener Entfernung des Schirms vom Körper nach, dass der Verlauf der Schattengrenze kein geradliniger ist, dass der Schatten vielmehr näher dem Körper verhältnissmässig breiter ist, als in grösserer Entfernung. Das Gleiche gilt von den drei äusseren Streifen, deren Breiten und

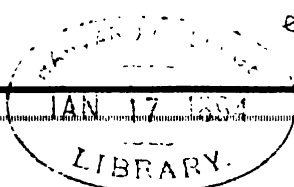
gegenseitige Abstände übrigens sehr nahe dasselbe Verhältniss bewahren. Die inneren Streifen erwähnt NEWTON gar nicht. Die sechs folgenden Beobachtungen betreffen die Erscheinungen, wenn in den Gang des Lichtkegels eine und namentlich zwei einen schmalen Spalt zwischen sich frei lassende Schneiden gebracht werden. Den letzteren Fall beschreibt er in folgender Weise: Man beobachtete bei geeignetem Abstand der Schneiden auf jeder Seite parallel der Schattengrenze drei helle Streifen, welche bei allmählicher Näherung der Schneiden zunächst deutlicher und breiter wurden, dann aber verschwanden und zwar in der Reihenfolge von aussen (d. h. der Seite des Lichts) nach innen (der Schattengrenze); darauf bildete sich in der Mitte des sehr verbreiterten Lichtstreifens ein dunkler Schatten, der dieselbe in zwei Linien theilte und sich immer mehr verbreiterte, bis das Licht vollständig ausgelöscht war. Diese so nach einander durch Aenderung der Spaltbreite erzeugten Erscheinungen machte NEWTON auch gleichzeitig sichtbar, indem er zwei unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigte Schneiden anwandte. Die drei dem Schatten parallel verlaufenden Banden kreuzten sich dann und waren hyperbelartig gekrümmt in der Weise, dass als Asymptoten je eine der beiden geometrischen Projectionen der Schneiden auf den Schirm und eine durch den Durchschnittspunkt dieser Projectionen gehende, auf ihrer Mittellinie senkrechte Gerade erschienen. Eine Messung der Lage der Durchkreuzungspunkte derselben Banden in verschiedenen Entfernungen von den Schneiden zeigte weiter, dass diese Entfernungen keineswegs in demselben Verhältniss wie die dazu gehörigen Spaltweiten standen, so dass die Aneinanderreihung jener Punkte keine gerade, sondern eine krumme Linie bilden würde. NEWTON schloss daraus, dass die Strahlen, welche die Streifen erzeugten, nicht dieselben seien in den verschiedenen Entfernungen von den Schneiden, sondern stärker gebeugt seien, wenn die Erscheinung näher, als wenn sie in weiterer Entfernung aufgefangen werde. In der letzten, der elften Beobachtung, zerlegte NEWTON den durch die kleine Oeffnung des Fensterladens eingetretenen Lichtkegel, indem er ihn durch ein Prisma gehen liess, und brachte nun in die verschiedenfarbigen Theile desselben schmale Körper, deren Schatten er wie in den ersten Beobachtungen auffing. Er fand so, dass immer einfarbige Banden von der Farbe des erzeugenden Lichts entstanden und dass die rothen die breitesten waren, die gelben, grünen, blauen und violetten folgeweise schmäler.

Er schloss daraus, dass die im weissen Licht sichtbaren verschiedenfarbigen Streifen durch einfache Uebereinanderlagerung der Erscheinungen, welche die Componenten dieses weissen Lichtes liefern, entständen.

Die Experimente NEWTON's sind in mehrfacher Beziehung mangelhaft und er macht keinen Versuch, das, was er beobachtet hat, in seinen Einzelheiten zu erklären. Nur bezüglich einiger Punkte tritt seine Ansicht klar hervor. Die Verbreiterung des Schattens denkt er sich durch eine Abstossung bewirkt, welche die Lichtkörperchen, die nach ihm die Erscheinungen des Lichts bewirken, von den ponderablen Körpern in um so stärkerem Maasse erleiden sollen, je näher sie an ihnen vorbeigehen; und die dritte der Fragen, mit welchen er seine Optik als Aufgaben künftiger Forschung schliesst, lautet: Werden nicht die Lichtstrahlen bei ihrem Vorübergang an den Körpern öfter hin und her gebeugt in einer gewissen wellen- und bogenförmigen Bewegung einem Aale ähnlich? und entstehen die drei erwähnten farbigen Streifen durch drei derartige Beugungen?

Im Laufe des 18. Jahrhunderts wurden die Versuche GRIMALDI's und NEWTON's von einer ziemlich grossen Zahl von Physikern wiederholt und abgeändert, auch

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule.)





HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

Prof. Dr. F. AUERBACH-Jena, Porf. Dr. F. BRAUN-Tübingen, Dr. E. BRODHUN-Berlin, Dr. S. CZAPSKI-Jena, Dr. P. DRUDE-Göttingen, Prof. Dr. K. EXNER-Wien, Prof. Dr. W. FEUSSNER-Marburg, Dr. L. GRÄTZ-München, Prof. Dr. H. KAYSER-Hannover, Prof. Dr. F. MELDE-Marburg, Prof. Dr. A. OBERBECK-Greifswald, Prof. Dr. J. PERNET-Zürich, Dr. PULFRICH-Jena, Prof. Dr. Fr. STENGER-Dresden, Dr. STRAUBEL-Jena, Prof. Dr. K. WAITZ-Tübingen

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

ACHTZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1893.

Handbuch der Physik. — Achtzehnte Lieferung.

Inhalt: II. Band. Optik. Artikel: »Beugung des Lichts« von Prof. Dr. W. Feussner (Seite 593—622). — »Die Natur des Lichts« von Dr. P. Drude (Seite 623—641). — »Theorie des Lichts für durchsichtige Medien« von Dr. P. Drude (Seite 642—686). — »Doppelbrechung« von Dr. P. Drude (Seite 687—720).

manche neue Beobachtungen hinzugefügt, wie z. B. über die Erscheinungen bei runden Schirmen und Oeffnungen, bei Reflexion von gestreiften Flächen u. s. w. ohne dass doch für ihre Erklärung etwas gewonnen worden wäre. Man sah der herrschenden NEWTON'schen Anschauungsweise gemäss das Licht als einen Strom feinster Theilchen an und dachte sich, dass bei der Beugung diese Theilchen von ihrer geradlinigen Bahn abgelenkt würden, was man bald abstossenden oder auch je nach der Entfernung anziehenden oder abstossenden Kräften, die die Körper selbst auf die Lichttheilchen ausübten, bald der Wirkung von verdichteten oder verdünnten Luftschichten um die Körper zuschrieb, konnte aber einen befriedigenden Grund für die Einzelheiten der Erscheinung, namentlich die Abwechselung der hellen und dunklen Streifen, nicht angeben[1]).

Ein wesentlicher Fortschritt geschah erst durch die grossen Physiker, denen wir die Wiederaufnahme und siegreiche Begründung der Undulationstheorie verdanken. THOMAS YOUNG und besonders AUGUSTIN FRESNEL. Die hierher gehörigen Arbeiten THOMAS YOUNG's sind hauptsächlich enthalten in den drei in den Londoner »Philosophical Transactions« veröffentlichten Abhandlungen: On the theory of light and colours (Philos. Tr. 1802, pag. 12, Miscellaneous works ed. by G. PEACOCK, I, pag. 140), An account of some cases of the production of colours not hitherto described (Ph. Tr. 1802, pag. 387; Misc. works I, pag. 170), Experiments and calculations relative to physical optics (Ph. Tr. 1804, 1; Misc. works I, pag. 179). Die Grundlage, von der YOUNG ausgeht, ist das von ihm aufgestellte und so glücklich auf die Erklärung einer Menge von Erscheinungen angewandte Interferenzgesetz des Lichts (s. d. Art. »Interferenz des Lichts«). Er denkt sich wie bei andern Interferenzerscheinungen so auch bei denen der Beugung zwei von derselben Quelle ausgegangene Lichtmengen auf einander wirkend, von denen die eine oder auch beide durch Reflexion oder Brechung oder Beugung ein wenig von ihrer geradlinigen Bahn abgelenkt sei, sodass sie die andere treffe. So sieht er die den Schatten begleitenden äusseren Streifen an als gebildet von direktem und am Rande reflektirtem resp. von gebeugtem und reflektirtem Licht, die Fransen feiner Fäden von an einer Seite reflektirtem und an der andern Seite gebeugtem Licht, die im Innern des Schattens schmaler Körper und die von zwei benachbarten schmalen Oeffnungen erzeugten Streifen von an beiden Rändern des schmalen Körpers resp. den Oeffnungen gebeugtem Licht u. s. w. Die berechnete Lage der Fransen findet er im Allgemeinen gut mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung, doch hebt er mehrmals hervor, dass die von weniger gebeugten Licht erzeugten Fransen immer ein wenig breiter seien als die Rechnung fordere; der unbekannte Grund hiervon hänge vielleicht mit der inneren Natur der Diffraktion zusammen. Seine Vorstellung über den eigentlichen Grund der Ablenkung bei der Beugung hat etwas gewechselt: anfangs denkt er sich dieselbe durch Aetherhüllen, welche die ponderabeln Körper umgeben, veranlasst (Misc.

[1]) Die Literatur dieses Zeitraums ist folgende: DELISLE, Mém. Par. 1715, pag. 147; 166. MARALDI, Mém. Par. 1723, pag. 111. MAIRAN, Mém. Par. 1738, pag. 53. s'GRAVESANDE, Physices elementa ed. III 1742, pag. 725. LE CAT, Traité des sens 1740, pag. 299. DUTOUR, Mém. sav. etr. V, pag. 635; VI, pag. 19 u. 36. 1768—74. DUTOUR, Journ. phys. p. Rozier V, pag. 120 u. 230; VI, pag. 135 u. 412. 1775. DU SÉJOUR, Mém. Par. 1775, pag. 265. MARAT, Découvertes sur la lumière. Londres 1780. Uebers. v. WEIGEL, 1783, pag. 2. HOPKINSON u. RITTENHOUSE, Trans. Amer. Soc. II, pag. 201. 1786. COMPARETTI, Observationes opticae de luce inflexa Patav. 1787. STRATICO, Saggi di Pad. II, pag. 185. 1789. BROUGHAM, Phil. Trans. 1796, pag. 227; 1797, pag. 352. JORDAN, The observations of NEWTON, Lond. 1799; GILB. Ann. 18, pag. 1.

works I, pag. 81, 164), später von der Natur der Wellenbewegung selbst abhängig und zieht zur Vergleichung das Verhalten der Wasserwellen und des Schalles beim Vorübergang an festen Körpern heran (Misc. works I, pag. 188. Lectures I, pag. 360), indem er bezüglich der Grösse der Ablenkung bemerkt, dass nach NEWTON der Schall schon weniger abgelenkt werde als die Wasserwellen, und schliesst, dass bei einem elastischeren Mittel dies noch weniger der Fall sein müsse. An die Benutzung des HUYGHENS'schen Principes hat er auch wohl gedacht (Misc. works I, pag. 150), doch verwarf er dieselbe eines Irrthums wegen, der ihn glauben liess, dass die Wirkung, welche ein Punkt einer Wellenfläche auf die Punkte einer anderen ausübe, diese gleichzeitig erfassen müsse, sodass sich in schiefer Richtung eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als in normaler ergeben würde; auch die Schwierigkeit, den Einfluss der Schiefe auf die Elementarwellen in Rechnung zu ziehen, hat dazu beigetragen (Vergl. den Brief an FRESNEL, Misc. works I, pag. 393).

Etwas über ein Jahrzehnt nach YOUNG gelang es AUGUSTIN FRESNEL, die wahre Grundlage für die Erklärung dieser Erscheinungen zu finden. Seine hierhergehörigen Arbeiten sind — abgesehen von einigen kleineren, theils aus dem Nachlass, theils aus Briefen in den Oeuvres complètes d'A. FRESNEL veröffentlichten Stücken — die folgenden:

1) Mémoire sur la diffraction de la lumière où l'on examine particulièrement le phénomène des franges colorées que présentent les ombres des corps éclairés par un point lumineux. Der Pariser Akademie der Wissenschaften eingereicht den 15. Oct. 1815. Oeuvres I, pag. 9. — Zusatz dazu den 10. Nov. 1815. Oeuvres I, pag. 41. — Umgearbeitet, Ann. de chim. et de phys. I, pag. 239 (März 1816). Oeuvres I, pag. 89. 2) Nachtrag zum vorigen Aufsatz. Der Akademie vorgelegt den 15. Juli 1816. Oeuvres I, pag. 129. 3) Note sur la théorie de la diffraction. Geschlossen bei der Akademie niedergelegt den 20. April 1818. Oeuvres I, pag. 171. 4) Mémoire sur la diffraction de la lumière. Der Akademie eingereicht als Preisschrift den 29. Juli 1818; gekrönt von derselben im März 1819. Veröffentlicht 1826 in Mémoires de l'Acad. V., pag. 339. Der zweite (wesentlichste) Theil der Abhandlung war bereits 1819 in den Ann. de chim. et de phys. XI, pag. 246, 337 gedruckt worden. Oeuvres I, pag. 247.

In dem ersten Aufsatz, der ursprünglich ohne Kenntniss der Arbeiten TH. YOUNG's geschrieben ist, steht FRESNEL ganz auf demselben Standpunkt wie dieser, erklärt ebenso die Erscheinung aus der Interferenz von direktem mit am Körperrande selbst gebeugtem Licht u. s. w., sodass YOUNG nicht Unrecht hat, wenn er in einem Brief an ARAGO erklärt (Misc. works I, pag. 381), dass er in FRESNEL's Abhandlungen nichts Neues von einiger Bedeutung finden könne. Gleichwohl erkennt man in dieser ersten Arbeit bereits, wie sich der grosse Schritt vorbereitete, den FRESNEL kein ganzes Jahr später in dem oben unter 2) aufgeführten Nachtrag schon gethan hat. FRESNEL hatte für die Entfernung der äusseren dunkelen Fransen vom Rand des geometrischen Schattens die Formel $\sqrt{\frac{2n\lambda(a+b)b}{a}}$ abgeleitet, worin a die Entfernung des leuchtenden Punkts vom schattenwerfenden Körper, b die des letzteren von dem die Erscheinung auffangenden Schirm, λ die Wellenlänge des Lichts und n die Ordnungszahl der Franse bedeutet, und für die Entfernung der inneren Fransen von der Mitte des Schattens eines schmalen Körpers von der Breite c die Formel $\frac{(2n-1)\lambda b}{2c}$. Die zu Grunde liegende Anschauung war gewesen, dass ausser dem leuchtenden

Punkt auch die Ränder des schattenwerfenden Körpers als Centren regelmässiger Lichtwellen zu betrachten seien, und dass durch die Interferenz dieser sich kreuzenden Wellen die Erscheinung entstehe; dabei musste zur Erklärung der äusseren Fransen angenommen werden, dass die von den Rändern des Körpers ausgehenden Schwingungen eine Verzögerung um eine halbe Wellenlänge erlitten hätten. Diese Formeln schienen zunächst die Beobachtungen vollkommen treu darzustellen; allein bald bemerkte FRESNEL Abweichungen. So hätte man in dem Falle eines schmalen Spaltes der Grundanschauung gemäss erwarten müssen, dass da, wohin die von den Rändern ausgehenden Strahlen allein gelangen, die Erscheinung genau den inneren Fransen eines schmalen Körpers gleiche, d. h. aus dunkeln Banden von dem überall gleichen Abstand $\frac{\lambda b}{c}$ (wo hier c die Spaltbreite bedeutet) bestehen; die Beobachtung ergiebt aber, dass dies freilich für die auf jeder Seite aufeinanderfolgenden Streifen richtig ist, nicht aber für die beiden mittelsten, deren Abstand grösser — bei hinreichend schmalem Spalt und grosser Entfernung sehr nahe $\frac{2\lambda b}{c}$ — ist. Dazu ist die ganze Helligkeitsvertheilung eine andere, als zu erwarten wäre. Wenn das gebeugte Licht nur von den die Ränder des Spalts berührenden Strahlen erzeugt würde, während durch den Raum der Oeffnung selbst die Strahlen unverändert durchgingen, so müsste man auf schwach erleuchtetem Grunde eine sehr helle Projection des Spaltes wahrnehmen. Dagegen liefert ein schmaler Spalt ein ziemlich gleichmässig helles Mittelfeld von sehr viel grösserer Breite als seine geometrische Projection, an welches sich in allmählicher Helligkeitsabnahme die Beugungsstreifen in der beschriebenen Weise anschliessen. Dies Verhalten führte FRESNEL zu der Annahme, dass das gebeugte Licht nicht allein von den Randstrahlen, sondern von sämmtlichen durch die Oeffnung tretenden Strahlen herrühre. Um die Intensität zu bestimmen, die an einem beliebigen Punkt erzeugt wird, zerlegte er die durch die Oeffnung tretende oder an dem schattenwerfenden Körper vorbeigehende Welle folgendermaassen in Zonen. Es sei A der Rand eines Körpers AG, F ein in dessen Schatten gelegener Punkt, $ACC'C''$ die Lichtwelle, von welcher der Körper AG einen Theil auffängt. Von F als Mittelpunkt werde mit einem Radius, der um eine halbe Wellenlänge grösser ist als FA, ein Kreisbogen beschrieben, welcher die Welle in C trifft, mit einem wieder um $\frac{\lambda}{2}$ grösseren Radius ein die Welle in C' treffender Bogen u. s. w. Dann wirken alle Schwingungen, die von den Punkten des Bogens CC' nach F gelangen, den von den entsprechenden Punkten von AC dahin gelangenden gerade entgegen; die von CC' kommenden sind aber bereits durch die des folgenden Bogens $C'C''$ sehr geschwächt und können daher die von AC ausgehenden Schwingungsbewegungen nur um die Hälfte etwa vermindern; die von den übrigen Abtheilungen der Welle ausgehenden werden jedesmal durch die der beiden anliegenden vernichtet. Es wird also nur von dem äussersten Bogen AC Bewegung in F erregt, und diese Wirkung kann ersetzt gedacht werden durch eine von dem Mittelpunkt B jenes Bogens ausgehende, der Strahl BF wird deshalb der »wirksame« Strahl genannt. Man erkennt leicht, wie durch diese von FRESNEL aus dem neuen Gesichtspunkt abgeleiteten Folgerungen, wenn sie auch nur erste Annäherungen an eine strenge Entwickelung darstellen, nicht nur die Helligkeitsvertheilung im Allgemeinen sondern auch die beobachteten Abstände der Banden sich erklären. Denn da die nach der Schattenseite gerichteten »wirksamen« Strahlen um eine Viertelwelle länger sind als die

Randstrahlen, während umgekehrt die nach der Lichtseite gerichteten um ebensoviel kürzer sind, so ergiebt sich für den Fall eines schmalen Spaltes, dass für einen jeden im geometrischen Schatten gelegenen Punkt des Beugungsbildes die Wegdifferenz der Randstrahlen um eine halbe Wellenlänge grösser ist, als die der wirksamen Strahlen und daraus folgt sofort im Vergleich mit der früheren Erklärungsweise für die Mittelfransen der doppelte Abstand, für zwei benachbarte seitliche dagegen ein unveränderter. Auch für die inneren Fransen eines schmalen Körpers fordert die neue Erklärungsweise von der Stelle an, wo sie den geometrischen Schatten verlassen, eine andere Lage, und die Beobachtung bestätigt dies. Dagegen bleibt jetzt für die äusseren Fransen eines schmalen Körpers eine Schwierigkeit bestehen, die FRESNEL ausdrücklich anerkennt. Die frühere Erklärungsweise konnte nach Analogie anderer Erscheinungen annehmen, dass die am Körperrand reflektirten Strahlen bei diesem Vorgang einen Verlust von einer halben Wellenlänge erlitten, das fällt jetzt weg, da keine Reflexion mehr angenommen wird, und die wirksamen Strahlen sind nur um eine Viertelwellenlänge kürzer als die Randstrahlen, während die Beobachtung eine halbe Wellenlänge fordert.

Etwa 8 Monate nachdem FRESNEL die eben besprochene Abhandlung der Akademie eingereicht hatte, stellte diese in ihrer Sitzung vom 17. März 1817 als Preisfrage für die mathematischen Wissenschaften die Aufgabe der Erklärung der Beugungserscheinungen. Die wesentlichsten Sätze des interessanten Ausschreibens lauten: ... Man hat die Beugungsstreifen beobachtet, welche sich ausserhalb des Schattens der Körper bilden und fortpflanzen, diejenigen, welche in diesem Schatten selbst auftreten, wenn die Strahlen zugleich auf beiden Seiten eines sehr schmalen Körpers vorbeigehen und diejenigen, welche durch Reflexion auf Oberflächen von geringer Ausdehnung entstehen, wenn das einfallende und zurückgeworfene Licht sehr nahe an den Rändern herstreift. Aber man hat noch nicht genügend den Gang der Strahlen in der Nähe der Körper selbst, wo die Inflexion stattfindet, bestimmt. Das ist daher hauptsächlich der Punkt, der genauer untersucht zu werden verdient, weil er das Geheimniss des physikalischen Vorgangs einschliesst, wodurch die Strahlen gebeugt und in Banden von verschiedener Richtung und Stärke getheilt werden. Die Akademie fordert deshalb 1) dass durch genaue Versuche alle Wirkungen der Beugung der Lichtstrahlen bestimmt werden, 2) dass aus diesen Versuchen auf mathematischem Wege die Bewegung der Strahlen in ihrem Vorübergang an den Körpern abgeleitet werde. — Die Bewerbungsschriften sollten vor dem 1. August 1818 eingereicht, der Preis in der öffentlichen Sitzung vom März 1819 zuerkannt werden.

Wenn auch die Fassung dieser Aufgabe und ihrer Begründung aus Anschauungen hervorgegangen war, die noch vollkommen in dem Boden der Emissionstheorie wurzelten und die FRESNEL von Anfang an bekämpft hatte, so entschloss er sich doch zu ihrer Bearbeitung und übergab am 29. Juli 1818 der Akademie die oben unter 4) aufgeführte Schrift, welche am 15. März 1819 mit dem Preise gekrönt wurde. Schon vor ihrer Einreichung hatte er am 20. April 1818 zu dem Zweck, sich die Priorität bezüglich der Hauptgesichtspunkte und Hauptresultate seiner Arbeit zu wahren, bei der Akademie eine verschlossene Note (oben unter 3) aufgeführt) niedergelegt, worin er diese kurz auseinandersetzt. Der erste Theil der Abhandlung ist im Wesentlichen der Kritik der Emissionstheorie gewidmet; FRESNEL zeigt darin, dass diese Theorie nicht im Stande ist, die Erscheinungen der Lichtbeugung zu erklären. In dem zweiten Theil leitet er dieselben dann aus der Undulationstheorie ab und vergleicht bei

einigen der hauptsächlichsten Fälle die Ergebnisse der Rechnung mit denen genauer Beobachtungen. Bei dieser Ableitung verfolgt er den zwei Jahre früher in der vorhin besprochenen, oben unter 2) aufgeführten Abhandlung betretenen Weg weiter und befestigt und vertieft die damals gelegten Grundlagen nach verschiedenen Seiten. An die Stelle des damaligen Grundgedankens, dass das gebeugte Licht von sämmtlichen einfallenden Strahlen ausgehe, tritt jetzt die Anwendung des HUYGHENS'schen Principes. Aber mit diesem Prinzip und mit der Vorstellung von dem Bewegungszustand, auf welchen es angewandt wird, nimmt er eine sehr wesentliche Umgestaltung vor. HUYGHENS hatte eine jede Welle als Resultat einer Erschütterung in einem Punkte der Lichtquelle und die aufeinanderfolgenden Erschütterungen als ganz unabhängig von einander aufgefasst. Er sagt in dieser Beziehung (Tractatus de lumine, Opera reliqua, Amst. 1728, T. I, pag. 13): »Da die Erschütterungen im Mittelpunkte der Wellen nicht in regelmässiger Reihenfolge eintreten, so ist nicht anzunehmen, dass die Wellen selbst in gleichen Zwischenräumen aufeinander folgen.« — Diese Vorstellung hielten die Späteren fest, auch THOM. YOUNG steht noch unter ihrem Einfluss. FRESNEL dagegen sagt (Mém. cour. § 34. — Oeuvres, T. I, pag. 285): »In der Natur sind die Schwingungen niemals vereinzelt, sie wiederholen sich immer viele Mal, wie man an der Bewegung eines Pendels oder den Schwingungen tönender Körper sehen kann. Wir werden daher voraussetzen, dass die Schwingungen der leuchtenden Theilchen in derselben Weise vor sich gehen, indem sie regelmässig in langen Reihen auf einander folgen; zu dieser Hypothese führt uns die Analogie, und sie erscheint ausserdem als eine Folge davon, dass Kräfte die Moleküle der Körper im Gleichgewicht halten.« — HUYGHENS hat ferner das nach ihm benannte Princip nicht scharf formulirt, sodass man in mancher Beziehung über seine Auffassung ungewiss bleibt. FRESNEL spricht dasselbe folgendermaassen aus: Die Schwingungen eines jeden Punktes einer Lichtwelle können als die Summe der Elementarbewegungen angesehen werden, welche von irgend einer der früheren Lagen dieser Welle aus alle die einzelnen Theile derselben, selbstständig wirkend, in demselben Augenblick dahin senden würden«. Bei dieser Fassung ist der Satz von der Coexistenz kleiner Bewegungen mit dem ursprünglichen Princip in Eins verschmolzen und so bildet es die Grundlage der Betrachtungen und Rechnungen FRESNEL's. Es war nun vor Allem nöthig, die Resultante der Elementarbewegungen, welche gemäss dem angeführten Satz zu dem betrachteten Punkte gelangen, bilden zu können. Zu dem Zweck zeigt FRESNEL, dass die Geschwindigkeit eines leuchtenden Punktes eine periodische Function der Zeit sein muss, und wenn man die Dauer einer Schwingung als Zeiteinheit nimmt, dargestellt werden kann durch $C \sin 2\pi t$, dass in gleicher Weise die Geschwindigkeit eines Aethertheilchens, das um x von jenem leuchtenden Punkte absteht, auszudrücken ist[1]), durch

$$u = a \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right),$$

worin λ die Wellenlänge des Lichts, a eine Constante bedeutet. Mittelst des letzteren Ausdrucks löst er sodann die Aufgabe, die Resultante zweier gleichge-

[1]) Es ist hier anzumerken, dass FRESNEL, wenn er sich auch schon zur Zeit, wo er diese Abhaudlung schrieb, mit der Hypothese transversaler Lichtschwingungen beschäftigte, doch in derselben überall die Vorstellung longitudinaler Schwingungen beibehalten hat. Auf solche beziehen sich also zunächst die angeführten Formeln; sie lassen sich aber unverändert auf transversale übertragen, wenn man die Strahlen sämmtlich in derselben Ebene polarisirt annimmt.

richteter Wellensysteme von einer Viertelwellenlänge Wegdifferenz zu bestimmen. Die Gleichungen der Einzelschwingungen sind

$$u_1 = a_1 \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right), \quad u_2 = a_2 \sin 2\pi \left(t - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right) = - a_2 \cos 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right), \qquad (\alpha)$$

wenn x die Entfernung des betrachteten Punktes von dem Mittelpunkt des ersten Wellensystems bedeutet. Daraus folgt, unter U die Geschwindigkeit der resultirenden Schwingung verstanden,

$$U = u_1 + u_2 = A \sin \left[2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right) - i\right], \qquad (\beta)$$

wenn

$$a_1 = A \cos i \quad \text{und} \quad a_2 = A \sin i \qquad (\gamma)$$

gesetzt wird.

Versteht man unter (α) die Gleichungen zweier zusammenfallender Strahlen, so stellt (β) den resultirenden Strahl dar, der beide ersetzt. Umgekehrt kann man auch (β) als die Gleichung eines ursprünglich gegebenen Strahls betrachten und hat dann in den Gleichungen (α) in Verbindung mit (γ) die Lösung der Aufgabe, einen gegebenen Strahl in zwei andere von einer Viertelwellenlänge Gangunterschied zu zerlegen. Man erkennt leicht, dass diese Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässt und erst bestimmt wird durch die Hinzufügung einer weiteren Bedingung. Als solche kann z. B. angenommen werden, dass die Ausgangspunkte der Strahlen [und damit die trigonometrischen Functionen in (α)] gegeben seien; dann handelt es sich nur noch um die Bestimmung der a_1 und a_2, welche die Gleichung (γ) liefern. — Hat man nun eine beliebige Anzahl von Strahlen zusammenzusetzen, so kann man einen jeden in zwei mit dem Gangunterschied einer Viertelwellenlänge zerlegen und für diese immer dieselben beiden Anfangspunkte wählen, dann setzen sich die Strahlen mit gleichem Anfangspunkte zu einem neuen einfach durch Addition zusammen. Die so entstehenden beiden Strahlen sind durch Gleichungen von der Form der (α) ausgedrückt und lassen sich zu einem Strahl von einer (β) entsprechenden Gleichung zusammensetzen, womit die Aufgabe gelöst ist. — FRESNEL giebt auch die Formeln für das Zusammenwirken zweier Strahlen von beliebigem Gangunterschiede c, doch benutzt er im weiteren Verlaufe nur die eben angegebene Art der Zerlegung und Zusammensetzung der Strahlen. Die erwähnten Formeln sind folgende. Wenn

$$u_1 = a_1 \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad u_2 = a_2 \sin 2\pi \left(t - \frac{x + c}{\lambda}\right)$$

die Gleichungen der gegebenen Strahlen sind, so ergiebt sich für den resultirenden

$$U = A \sin \left[2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right) - i\right],$$

worin

$$a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi c}{\lambda} = A \cos i \quad \text{und} \quad a_2 \sin \frac{2\pi c}{\lambda} = A \sin i$$

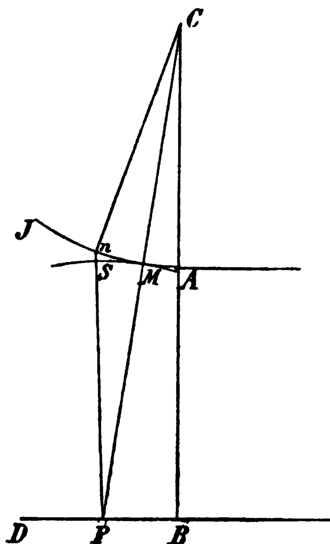
gesetzt ist, woraus folgt

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Bevor FRESNEL zur Anwendung der Rechnung auf die Beugungserscheinungen übergeht, behandelt er einige Fälle, in denen bereits eine freilich weniger strenge geometrische Betrachtung, die wesentlich auf der schon oben besprochenen Theilung der einfallenden Welle in Zonen beruht, zum Ziele führt. So die inneren Streifen im Schatten schmaler Körper und einiges Andere, worunter der Fall hervorgehoben werden mag, dass mit einem Spalt, für den hier eine ansehnliche

Breite zulässig ist, eine Linse so verbunden wird, dass sie von dem leuchtenden Punkte ein Bild auf dem Schirm, der die Beugungserscheinung auffängt, oder in der Brennebene der Loupe entwirft, mit welcher sie betrachtet wird. FRESNEL zeigt, dass sich dann das Problem sehr vereinfacht und in elementarer Weise berechnen lässt, und er findet volle Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

Bei der Ausführung der genaueren Rechnung nimmt nun FRESNEL dem HUYGHENS'schen Princip gemäss die Elemente einer bestimmten Wellenfläche — und zwar wählt er der Einfachheit der Betrachtungen wegen diejenige, welche den beugenden Körper entweder wirklich enthält oder näherungsweise als enthaltend angesehen werden kann — als Ausgangspunkte von Elementarwellen an und setzt voraus, dass die Verschiedenheit, welche die Neigung der Elementarstrahlen gegen die Normale der Wellenfläche rücksichtlich ihrer Intensität bewirkt, vernachlässigt werden dürfe, was er in plausibler Weise damit begründet, dass die Strahlen, welche die Beugungserscheinungen bewirken, nur sehr wenig geneigt sind, während die von grösserer Schiefe, bei welchen die Aenderung der Intensität merklich werden könnte, sich gegenseitig aufheben. — FRESNEL behandelt in dieser Weise die drei Fälle 1) eines einseitig und geradlinig begrenzten Schirmes, 2) eines zwischen zwei parallelen Geraden enthaltenen schmalen Streifens und 3) eines schmalen Spaltes. In allen diesen Fällen ist die einfallende Welle in der Richtung der Ränder der beugenden Körper nicht begrenzt und FRESNEL zeigt, dass dann ihre Wirkung proportional ist derjenigen des senkrecht zu diesen Rändern stehenden grössten Kreises, sodass sich die Betrachtung auf diesen beschränken kann. Die Ebene desselben sei die der Fig. 473 und er darin durch *AMJ* dargestellt, *C* sei der leuchtende Punkt, *BD* der die Beugungserscheinung auffangende Schirm. Es handelt sich nun darum, die Lichtintensität in irgend einem Punkt *P* des letzteren zu bestimmen. Bezeichnen wir die über ein bei *M* gelegenes Element dz nach *P* gelangende Schwingung durch



(Ph. 473.)

$$A \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right) dz,$$

so ist die über ein bei n gelegenes dahinkommende

$$A \sin 2\pi \left(t - \frac{x + nS}{\lambda}\right) dz;$$

diese wird nach den oben angeführten Formeln in zwei um eine Viertelwellenlänge verschiedene Strahlen zerlegt, deren einer dieselbe Weglänge wie der Strahl über *M* besitzt. Das in (β) und (γ) vorkommende i ist hier $2\pi \frac{nS}{\lambda}$, und da nS sehr nahe gleich $\frac{(a+b)z^2}{2ab}$, wenn $CA = a$, $AB = b$ und $Mn = z$ gesetzt wird, so wird

$$a_1 = A \cos\left(\pi \frac{a+b}{ab\lambda} z^2\right) dz, \quad a_2 = A \sin\left(\pi \frac{a+b}{ab\lambda} z^2\right) dz.$$

Da nun für alle in Betracht kommende n die z sehr klein gegen a und b,

also die Strahlen nahe parallel sind, so können wir alle a_1 und alle a_2 direkt summiren und erhalten die Lichtintensität proportional $(\Sigma a_1)^2 + (\Sigma a_2)^2$ oder

$$\left[\int cos\left(\pi\,\frac{a+b}{ab\lambda}\,z^2\right)dz\right]^2 + \left[\int sin\left(\pi\,\frac{a+b}{ab\lambda}\,z^2\right)dz\right]^2,$$

wo die Integration über den nicht abgeblendeten Theil des Kreises zu erstrecken ist. Setzen wir in den Integralen

$$2\,\frac{a+b}{ab\lambda}\,z^2 = v^2,$$

so geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\left[\left(\int cos\,\frac{\pi}{2}\,v^2dv\right)^2 + \left(\int sin\,\frac{\pi}{2}\,v^2dv\right)^2\right].$$

Es ist also die Berechnung dieser Beugungserscheinungen durch Fresnel auf die beiden Integrale

$$C_v = \int_0^v cos\,\frac{\pi}{2}\,v^2dv \quad \text{und} \quad S_v = \int_0^v sin\,\frac{\pi}{2}\,v^2dv$$

zurückgeführt, welche nach ihm die Fresnel'schen Integrale genannt werden. In complicirteren Fällen wird zwar der Intensitätsausdruck gewöhnlich nicht so einfach dadurch ausdrückbar sein, doch lässt er sich häufig auf sie zurückführen oder sie kommen in Doppelintegralen vor, aus denen jener dann besteht. Ihre genaue Kenntniss ist also für diese Theorie von der allerwesentlichsten Bedeutung. Fresnel hat die folgenden Tafeln für dieselben gegeben, welche immer um 0·1 fortschreitend von $v = 0$ bis $v = 5·5$ reichen.

v	C_v	S_v	v	C_v	S_v
0·1	0·0999	0·0006	2·9	0·5627	0·4098
0·2	0·1999	0·0042	3·0	0·6061	0·4959
0·3	0·2993	0·0140	3·1	0·5621	0·5815
0·4	0·3974	0·0332	3·2	0·4668	0·5931
0·5	0·4923	0·0644	3·3	0·4061	0·5191
0·6	0·5811	0·1101	3·4	0·4388	0·4294
0·7	0·6597	0·1716	3·5	0·5328	0·4149
0·8	0·7230	0·2487	3·6	0·5883	0·4919
0·9	0·7651	0·3391	3·7	0·5424	0·5746
1·0	0·7803	0·4376	3·8	0·4485	0·5654
1·1	0·7643	0·5359	3·9	0·4226	0·4750
1·2	0·7161	0·6229	4·0	0·4986	0·4202
1·3	0·6393	0·6859	4·1	0·5739	0·4754
1·4	0·5439	0·7132	4·2	0·5420	0·5628
1·5	0·4461	0·6973	4·3	0·4497	0·5537
1·6	0·3662	0·6388	4·4	0·4385	0 4620
1·7	0·3245	0·5492	4·5	0·5261	0·4339
1·8	0·3342	0·4509	4·6	0·5674	0·5158
1·9	0·3949	0·3732	4·7	0·4917	0·5668
2·0	0·4886	0·3432	4·8	0·4340	0·4965
2·1	0·5819	0·3739	4·9	0·5003	0·4347
2·2	0·6367	0·4553	5·0	0·5638	0·4987
2·3	0·6271	0·5528	5·1	0·5000	0·5620
2·4	0·5556	0·6194	5·2	0·4390	0·4966
2·5	0·4581	0·6190	5·3	0·5078	0·4401
2·6	0·3895	0·5499	5·4	0·5573	0·5136
2·7	0·3929	0·4528	5·5	0·4785	0·5533
2·8	0·4678	0·3913			

FRESNEL hat diese Tafel mit Hilfe von Näherungsformeln berechnet, welche die Aenderung des Integralwerthes für kleine Aenderungen des Arguments angeben (Oeuvres compl. T. I, pag. 317); aber diese Formeln sind ungenau und daher auch die gefundenen Zahlen mehrfach fehlerhaft. Immerhin sind sie, besonders weil die Fehler sich periodisch gegenseitig aufheben, insoweit genau, dass die Vergleichung der Beobachtungen mit der Rechnung davon unberührt bleibt.

Für den Fall eines einseitig begrenzten Schirmes mag in der Figur A der Punkt sein, wo die senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehende Schirmkante diese trifft. Soll dann für einen beliebigen Punkt P ausserhalb des geometrischen Schattens die Intensität bestimmt werden, so sind in dem oben ihr proportional gefundenen Ausdruck die Integrationen von M aus nach der einen Seite über die ganze Welle, also bis zu grossen Werthen von s und damit von v, und nach der andern bis A auszudehnen. Für grosse Werthe von v sind aber C_v und S_v sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$, sodass, wenn wir den Werth von v in A mit u bezeichnen, die Intensität proportional

$$(\tfrac{1}{2} + C_u)^2 + (\tfrac{1}{2} + S_u)^2$$

wird. Diejenigen Punkte P, für welche dieser Ausdruck ein Maximum wird, liegen auf einer hellen, die, für welche er ein Minimum wird, auf einer dunkeln Bande. Die Entfernung dieser Banden von der Grenze des geometrischen Schattens ergiebt sich folgendermaassen. Es sei u_m ein Werth von u, für welchen die Intensität ein Maximum oder ein Minimum wird; bezeichnen wir dann den entsprechenden Werth von s durch s_m, so ergiebt die obige Substitutionsgleichung für v

$$s_m = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\, u_m$$

und nennen wir die Entfernung des betreffenden Punktes P von der geometrischen Schattengrenze x_m, so giebt ein Blick auf die Figur die Proportion $x_m : s_m = a + b : a$, also

$$x_m = u_m \sqrt{\frac{(a+b)b\lambda}{2a}}.$$

Die Zahlenwerthe von u_m berechnet FRESNEL mit Hilfe seiner Tafeln der C und S nach einer Interpolationsformel[1]) bis zum 7. Maximum und 7. Minimum (z. B. 1. Max. 1·2172; 1. Min. 1·8726; 2. Max. 2·3449; 2. Min. 2·7392 u. s. w.) und findet sehr gute Uebereinstimmung zwischen den nach der Formel für x_m mittelst dieser Werthe berechneten Zahlen und den durch Beobachtung gefundenen.

Liegt der Punkt P im Innern des geometrischen Schattens, so sind die Integrationen nur auf einer Seite von M und zwar vom Schirmrand aus über die unbegrenzte Welle auszuführen, und man erhält in entsprechender Weise wie oben für den der Intensität proportionalen Ausdruck

$$(\tfrac{1}{2} - C_u)^2 + (\tfrac{1}{2} - S_u)^2.$$

Die numerische Ausrechnung desselben für verschiedene Lagen von P ergiebt mit wachsender Entfernung von der Schattengrenze eine rasche Abnahme ohne Andeutung eines Maximums oder Minimums, übereinstimmend mit der Beobachtung.

Ferner hat FRESNEL durch numerische Rechnung die Lage und das Aussehen (die Intensitätsverhältnisse) der Banden für die beiden Fälle eines schmalen geraden Spaltes und eines schmalen geraden Streifens bestimmt unter möglichster

---

[1]) Oeuvres compl. I, pag. 321.

Abänderung der verschiedenen Grössenverhältnisse und hat in beiden Beziehungen vollständige Uebereinstimmung mit der Beobachtung gefunden.

In einem Anhang zu seiner Abhandlung berechnet er noch die Lichtintensität im Mittelpunkt der von einer kreisrunden Oeffnung erzeugten Erscheinung. POISSON hatte bemerkt, dass sich für diesen Fall der Werth der Integrale, von welchen die Intensität abhängt, leicht angeben lässt, und FRESNEL leitet nun an der angegebenen Stelle die zum Theil schon von jenem gefundenen Resultate aus einfachen geometrischen Betrachtungen ab, die hier wegen der Symmetrie der Verhältnisse besonders leicht zum Ziele führen. Er setzt den leuchtenden Punkt in der Axe (der in dem Mittelpunkte der Oeffnung errichteten Normale auf ihre Ebene) gelegen voraus, und theilt die einfallende Welle durch eine Reihe concentrischer Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen und deren Radien sich wie die Quadratwurzeln aus der Reihe der natürlichen Zahlen verhalten, in Ringe oder Zonen, deren Flächen, wie man leicht findet, alle den gleichen Inhalt haben. Nennt man r den Radius irgend eines dieser Kreise, so ist, wenn a und b die frühere Bedeutung behalten, nach einer oben gegebenen Formel die Entfernung der Peripherie des Kreises von dem Punkt, wo die Axe die Bildebene trifft, um $\frac{a+b}{2ab}r^2$ grösser als die Entfernung dieses Punktes vom Scheitel der Welle. Dem Verhältnisse der Radien gemäss vergrössert sich also bei dem Uebergang von irgend einem Kreis zu dem nächst grösseren die genannte Entfernung immer um dasselbe Stück und zwar mag die absolute Grösse der Radien so gewählt gedacht werden, dass dieses Stück eine halbe Wellenlänge ist. Dann wird offenbar die Wirkung eines jeden Ringes durch die halbe Wirkung der beiden anliegenden aufgehoben, und es bleiben, wenn die Welle in eine ganze Anzahl von Zonen getheilt ist, nur die halben Wirkungen der innersten und der äussersten übrig. Ist die Zonenanzahl eine ungerade, so verstärken sich die beiden Wirkungen und es entsteht ein Helligkeitsmaximum im Mittelpunkt der Erscheinung, ist sie eine gerade, so heben sie sich auf, und es entsteht Dunkelheit.

Lässt sich die einfallende Welle nicht in eine ganze Anzahl solcher Zonen theilen, so giebt eine einfache Integration für die Intensität, wenn die der freien Welle in der Entfernung 1 vom leuchtenden Punkt zur Einheit genommen wird und r den Halbmesser der Oeffnung bedeutet, den Ausdruck

$$\frac{2}{(a+b)^2}\left(1-\cos\pi\frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}\right).$$

So zeigt sich der Mittelpunkt des Beugungsbildes bei einfarbigem Lichte abwechselnd hell und vollständig dunkel, wenn man sich allmählich von der beugenden Oeffnung entfernt, bei weissem Lichte erscheint er, weil die Lage der Maxima und Minima von der Wellenlänge abhängt, in wechselnder intensiver Färbung.

In dem Fall eines kreisrunden Schirmes denkt sich FRESNEL die einfallende Welle vom Schirmrand aus durch concentrische Kreise derart in Ringe getheilt, dass wie vorhin die Entfernung vom Mittelpunkte der Beugungsfigur nach einer Kreisperipherie um $\frac{\lambda}{2}$ wächst, wenn wir zur nächst grösseren fortschreiten. Dann wird wieder die Wirkung eines beliebigen Ringes durch die halbe der beiden anliegenden aufgehoben und da die der äusseren wegen grosser Schiefe der von ihnen ausgesandten Strahlen verschwindet, so bleibt hier nur die halbe Wirkung des ersten, dem Schirmrand anliegenden Ringes übrig. Da aber alle so construirten Ringe gleichen Flächeninhalt haben, so ist diese Wirkung gleich der halben

Wirkung des innersten kleinen Kreises, welche bei der Betrachtung einer freien Welle allein übrig bleibt. Der Mittelpunkt des Schattens hat also dieselbe Lichtstärke als ob der Schirm gar nicht vorhanden wäre.

Wie oben angeführt, hatte bereits FRESNEL bemerkt, dass die Erscheinungen, welche entstehen, wenn eine Linse derart mit einer Beugungsöffnung verbunden wird, dass sie ein Bild des leuchtenden Punktes auf dem Schirm erzeugt, eine wesentlich einfachere Behandlung zulassen, doch hat er dieselben nicht eingehender verfolgt. Dies that gleichzeitig oder kurz nach ihm JOS. FRAUNHOFER in einer ausführlichen Experimentaluntersuchung: »Neue Modifikation des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen, und Gesetze derselben«, welche im Jahre 1822 gedruckt und im 8. Band der Münchener Denkschriften veröffentlicht ist[1]). Die Beobachtungsweise FRAUNHOFER's war die, dass ein Fernrohr auf die mit dem Heliostat verbundene entweder kleine runde oder schmale, spaltförmige Eintrittsöffnung der Strahlen eingestellt und die beugenden Oeffnungen nahe vor das Objectiv desselben gebracht wurden, sodass die Drehungsaxe eines Theodolits, zu dem das Fernrohr wie bei den jetzigen Spectrometern stand und mit dessen Alhidade es fest verbunden war, durch ihre Ebene ging. Der Verticalfaden des Fernrohrs wurde nun auf die verschiedenen Theile des Beugungsbildes eingestellt und so ihre Abweichung von der Richtung der einfallenden Strahlen auf das Genaueste gemessen. FRAUNHOFER beschreibt viele durch einzelne oder zu mehreren verbundene runde oder viereckige Oeffnungen, gerade oder kreisförmige Linien (Spalte) erhaltene Erscheinungen, besonders eingehend behandelt er aber in richtiger Erkenntniss der Wichtigkeit derselben die durch viele parallele Spalte, Gitter, gelieferten, welche bei Parallelismus des Eintrittsspaltes und der Gitteröffnungen bekanntlich in einer Reihe zu beiden Seiten des Spaltbildes aufeinanderfolgender Spectren bestehen. Er leitet aus seinen Beobachtungen sowohl in dieser als in einer im folgenden Jahr im 74. Band von GILBERT's Annalen (pag. 337) veröffentlichten Abhandlung: »Kurzer Bericht von den Resultaten neuerer Versuche über die Gesetze des Lichtes, und die Theorie derselben« Gesetze und Formeln für das durch Gitter gebeugte Licht bei senkrecht einfallenden Strahlen ab und findet für den Ablenkungswinkel ϑ_n eines bestimmten farbigen Strahls im $n$ten Spectrum, wenn ω eine diesem Strahl eigenthümliche Constante — der Undulationstheorie gemäss seine Wellenlänge — und ε den Abstand der Mitten zweier benachbarter Spalte bedeuten, die Gleichung $sin\,\vartheta_n = \frac{n\omega}{\varepsilon}$ [2]). Die Constante ω ergiebt sich aus seinen Versuchen in Pariser Zoll ausgedrückt für die hauptsächlichen Spectrallinien folgendermaassen (a. a. O., pag. 359):

für C zu 0·00002422
„ D „ 0·00002175
„ E „ 0·00001945
„ F „ 0·00001794
„ G „ 0·00001587
„ H „ 0·00001464.

In seiner ersten Abhandlung berührt FRAUNHOFER nirgends die Theorie und wenn er auch in der zweiten eine daraus abgeleitete Formel für den Abstand der unsymmetrischen Spectra bei schief einfallendem Licht mittheilt, so giebt er

[1]) Französisch auch in SCHUMACHER's astronomischen Abhandlungen, Heft II.
[2]) GILBERT's Ann. 74, pag. 352.

doch keine Herleitung derselben, und noch weniger versucht er eine der complicirteren Erscheinungen rechnend zu verfolgen. —

Dies that in erschöpfender Weise[1]) erst zwölf Jahre später SCHWERD in seinem bekannten Werk: »Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt«, Mannheim 1835, worin er nicht nur die von FRAUNHOFER, von HERSCHEL[2]) von BARTON[3]) beobachteten Erscheinungen erklärt, sondern auch noch eine Anzahl neuer hinzufügt. Er behandelt so die Erscheinungen, welche nach der FRAUNHOFER'schen Methode[4]) im einfarbigen Licht entstehen, durch einen Spalt, ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Dreieck, eine kreisrunde Oeffnung (daran schliesst sich eine Bemerkung über die scheibenförmigen, mit Ringen umgebenen Bilder der Fixsterne in Fernröhren); ferner durch eine Reihe von Parallelogrammen, von Dreiecken, von Kreisöffnungen, durch verschiedene Drahtgitter (hier schliesst sich die Ableitung der FRAUNHOFER'schen Beobachtungen über nicht symmetrische Spectren und Parthiegitter an); dann durch mehrere Reihen von Parallelogrammen, Dreiecken und Kreisöffnungen; endlich durch eine beliebige Gruppe von Oeffnungen besonders HERSCHEL's Dreiecksgitter, zwei Dreiecke von entgegengesetzter Lage ein regelmässiges Sechseck, den Zwischenraum von zwei concentrisch ineinander liegenden Parallelogrammen, zwei ungleiche, neben einander liegende Vierecke, einen Kreisring, zwei neben einander liegende, ungleiche Kreisöffnungen, die Fahne einer Vogelfeder; den Schluss bildet die Bestimmung der Erscheinungen, welche ein nicht homogener Lichtpunkt zeigt, wenn man denselben durch ein beliebiges Gitter beobachtet und derjenigen, welche mehrere Lichtpunkte, eine oder mehrere Lichtlinien oder eine Lichtfläche hervorbringen.

Die Rechnungen SCHWERD's waren noch ziemlich umständlich und wurden bald von Verschiedenen[5]) vereinfacht. Sie ruhen natürlich auf den von FRESNEL gelegten Grundlagen; eine Abweichung, die von SCHWERD herrührt und allgemein angenommen wurde, ist aber hervorzuheben. FRESNEL betrachtet immer die Punkte einer Wellenfläche als den Ursprung der Elementarstrahlen, SCHWERD setzt an deren Stelle die Punkte der beugenden Oeffnung, eine Aenderung, die nur ohne Weiteres gestattet ist, wenn beide einen kleinen Winkel mit einander bilden, deren Berechtigung in anderen Fällen aber nicht von ihm nachgewiesen ist. — Von LITTROW rührt die folgende Ableitung der Grundformeln für die Lichtintensität her. Die Oberfläche der Welle bildet nach der Brechung durch das Objectiv des auf den leuchtenden Punkt eingestellten Fernrohres eine Kugel, deren Mittelpunkt in O, dem Kreuzungspunkt der Fäden in der Bildfläche liegt. Wir nehmen diesen Punkt als Coordinatenanfang und legen die Z-Axe in die

[1]) Als in dieser Richtung vorhergehend ist zu nennen: YOUNG, TH., Phil. Mag. (2) I, pag. 112; Ann. chim. phys. (2) 40, pag. 178. 1827; AIRY, G. B., Undul. theory of optics, prop. 20 in Mathem. tracts Cambr. 1831; ferner Cambr. Trans. V, pag. 283. 1834; POGG. Ann. 45, pag. 86, 1838.

[2]) HERSCHEL, Vom Licht, Art. 766 ff. 1828; POGG. Ann. 23, pag. 281. 1831.

[3]) Edinb. philos. Journ. 15, pag. 123; GILBERT's Annalen 74, pag. 379. 1823.

[4]) SCHWERD vereinfachte die Beobachtungsweise, indem er statt die Strahlen durch eine enge Oeffnung in ein Dunkelzimmer eintreten zu lassen, als Lichtquelle das Sonnenbildchen in einem, auf der hohlen Seite geschwärzten Uhrglas und Aehnliches benützte.

[5]) RADICKE, Handbuch der Optik. Berl. 1839; KNOCHENHAUER, Die Undulationstheorie des Lichtes, Berl. 1839; LITTROW in GEHLER's physikalischem Wörterbuch, Bd. IX, pag. 1422 ff., Lpz. 1839.

Axe des Fernrohrs, bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes P der Welle, mit $\xi, \eta, 0$ die eines Punktes M der Bildfläche, dann ist

$$PM^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

und wenn wir den Halbmesser der Kugel durch b und zur Abkürzung $b + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2b}$ durch B bezeichnen, so ist unter der Annahme, dass die Punkte P und M der Z-Axe nahe liegen,

$$PM = B - \frac{\xi x + \eta y}{b},$$

sodass die von sämmtlichen Punkten P in M hervorgerufene Geschwindigkeit v sich ergiebt als

$$v = \iint \sin 2\pi\left(t - \frac{B}{\lambda} + \frac{\xi x + \eta y}{b\lambda}\right) dx\,dy,$$

worin die Integration über die ganze, in der Oberfläche der Welle liegend gedachte Beugungsöffnung zu erstrecken ist. Lösen wir den Sinus auf, und setzen

$$P = \iint \cos 2\pi \frac{\xi x + \eta y}{b\lambda} dx\,dy, \qquad Q = \iint \sin 2\pi \frac{\xi x + \eta y}{b\lambda} dx\,dy,$$

so bekommen wir

$$v = P \sin 2\pi\left(t - \frac{B}{\lambda}\right) + Q \cos 2\pi\left(t - \frac{B}{\lambda}\right),$$

also ist die Intensität proportional dem Ausdruck

$$P^2 + Q^2 = \left(\iint \cos 2\pi \frac{\xi x + \eta y}{b\lambda} dx\,dy\right)^2 + \left(\iint \sin 2\pi \frac{\xi x + \eta y}{b\lambda} dx\,dy\right)^2.$$

Da in dem Argument der trigonometrischen Functionen hier die Variabeln x und y nur auf der ersten Potenz vorkommen, so sind diese Integrale sehr viel einfacher zu behandeln als die im allgemeinen Fall auftretenden Fresnel'schen Integrale.

Wir wollen die Form, welche sie im Fall einer oder mehrerer paralleler Spalten erhalten, der besonderen Wichtigkeit dieses Falles wegen noch angeben. Denken wir uns die Spalten der Y-Axe parallel und sämmtlich von der Länge l, so liefert die Integration nach y für den obigen Ausdruck

$$\left(\frac{b\lambda}{\pi\eta}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi\eta l}{b\lambda}\left[\left(\int \cos 2\pi \frac{\xi x}{b\lambda} dx\right)^2 + \left(\int \sin 2\pi \frac{\xi x}{b\lambda} dx\right)^2\right].$$

Darin wird die Veränderung der Intensität in der Richtung der Y-Axe durch den vor der Klammer stehenden Faktor, die in der Richtung der X-Axe durch die Klammer selbst angegeben. Mit der Entfernung von der X-Axe nimmt also nach beiden Seiten die Lichtstärke ab und vollkommen dunkele, dieser Axe parallele Gerade durchziehen das Beugungsbild in der Entfernung $\pm \frac{mb}{l}\lambda$ von derselben, worin m eine Zahl der Reihe 1, 2, 3 . . . bedeutet. Wählen wir statt des leuchtenden Punktes als Lichtquelle eine den Spalten parallele leuchtende gerade Linie, so fallen die von den Punkten derselben erzeugten Bilder übereinander und es entsteht gleichmässige Helligkeit auf jeder zur Y-Axe parallelen Geraden. Die Veränderung in der Richtung der X-Axe bleibt dem Ausdruck

$$\left(\int \cos 2\pi \frac{\xi x}{b\lambda} dx\right)^2 + \left(\int \sin 2\pi \frac{\xi x}{b\lambda} dx\right)^2$$

proportional. Haben wir p Spalten von der Breite a und der Entfernung d, von Mitte zu Mitte gemessen, welche bei $x = e$ beginnen, so erhalten wir durch Integration

$$\left(\frac{b\lambda}{2\pi\xi}\right)^2 \left[\left(\sum sin \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+nd+a) - \sum sin \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+nd)\right)^2 + \left(\sum cos \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+nd+a) - \sum cos \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+nd)\right)^2\right],$$

worin die Summationen in Beziehung auf n, welches eine Zahl der Reihe 0, 1, 2 . . . $p-1$ bedeutet, auszuführen sind. Setzen wir zur Abkürzung

$$sin \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+a) - sin \frac{2\pi\xi}{b\lambda} e = s \qquad \sum sin\, n \frac{2\pi\xi}{b\lambda} d = \sigma$$

$$cos \frac{2\pi\xi}{b\lambda}(e+a) - cos \frac{2\pi\xi}{b\lambda} e = c \qquad \sum cos\, n \frac{2\pi\xi}{b\lambda} d = \gamma,$$

so wird der Inhalt der viereckigen Klammer

$$(s\gamma + c\sigma)^2 + (c\gamma - s\sigma)^2 = (s^2 + c^2)(\sigma^2 + \gamma^2).$$

Es ist aber

$$s^2 + c^2 = 2\left(1 - cos \frac{2\pi\xi}{b\lambda} a\right) = 4\, sin^2 \frac{\pi\xi a}{b\lambda}$$

und nach bekannten Formeln

$$\sigma = \frac{cos \frac{\pi\xi d}{b\lambda} - cos\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\xi d}{b\lambda}}{2\, sin \frac{\pi\xi d}{b\lambda}}, \qquad \gamma = \frac{sin \frac{\pi\xi d}{b\lambda} + sin\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi\xi d}{b\lambda}}{2\, sin \frac{\pi\xi d}{b\lambda}},$$

also

$$\sigma^2 + \gamma^2 = sin^2 p \frac{\pi\xi d}{b\lambda} : sin^2 \frac{\pi\xi d}{b\lambda},$$

sodass sich die Intensität als proportional dem Ausdruck

$$a^2 \frac{sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{sin^2 pv}{sin^2 v}$$

ergiebt, worin $u = \pi \frac{\xi a}{b\lambda}$, $v = \pi \frac{\xi d}{b\lambda}$ gesetzt ist.

Ist nur eine Spalte vorhanden, also $p = 1$, so fällt der zweite Quotient weg, und wir erhalten eine Reihe vollkommen dunkeler, zur X-Axe senkrechter Geraden in den Abständen $\pm m \frac{b\lambda}{a}$ von der Y-Axe, zwischen welchen die Maxima so liegen, dass ihre Abscissen die Gleichung $tang\, u = u$ befriedigen. Mit dem Hinzukommen weiterer Spalten tritt ein zweites System dunkeler Linien auf, das dem Nullwerden des Faktors $\frac{sin^2 pv}{sin^2 v}$ entspricht. Diese Linien liegen in den Abständen $\pm m \frac{b\lambda}{pd}$, worin m alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4 . . . . bedeutet ausser denjenigen, welche durch p, die Anzahl der Spalten theilbar sind; denn für diese verschwindet der Werth jenes Faktors, der dann die Form $\frac{0}{0}$ erhält, nicht, sondern wird gleich p^2.

Die Maxima liegen an den durch die Gleichung

$$\frac{d}{a}(p\, ctg\, pv - ctg\, v) + ctg\, u - \frac{1}{u} = 0$$

bestimmte Stellen. Ihre Intensität ist dem oben gegebenen Ausdruck gemäss sehr verschieden; bei grossen p, d. h. einem aus vielen Spalten gebildeten Gitter findet man im Allgemeinen die übrigen verschwindend[1]) gegen die in der Nähe jener ausfallenden Minima gelegenen, die deshalb auch Hauptmaxima genannt werden

[1]) Für die nächstbenachbarten ist dies zwar nicht der Fall, aber bei grossen p liegen diese den Hauptstreifen meist so nahe, dass sie wegen der unvermeidlichen Breite der Lichtquelle mit ihnen verschmelzen.

und die meist allein beobachteten Gitterspectra bilden. In demselben Falle grosser p ist auch die Lage dieser Hauptmaxima nur unmerklich gegen die Stelle der weggefallenen Minima verschoben, also durch den Ausdruck $\pm m \frac{b\lambda}{d}$ bestimmt. Ihre Breite, d. h. die Entfernung der benachbarten Minima von einander ist $2 \frac{b\lambda}{pd}$ und kann durch genügende Vermehrung der Anzahl der Spalten sehr gering und damit die entsprechenden Spectren sehr rein hergestellt werden. Diese Gitterspectra bieten uns ein vorzügliches Mittel, die Wellenlänge des Lichtes mit grosser Genauigkeit zu bestimmen, denn der Ausdruck für die Entfernung ξ der Hauptmaxima von der Mitte liefert die Gleichung

$$\lambda = \frac{\xi d}{mb},$$

worin alle auf der rechten Seite stehenden Grössen sehr scharf bestimmt werden können. —

Bezüglich der Bezeichnung ist zu bemerken, dass FRAUNHOFER in seiner ersten Abhandlung (in den Münchener Denkschriften) die dem ersten Theil des obigen Intensitätsausdrucks entsprechenden Spectra, welche in der Erscheinung einer Spalte allein auftreten, Spectra *äusserer Art*, die welche die Hauptmaxima des zweiten Theils veranlassen, Spectra *mittlerer Art*, und die übrigen dem zweiten Theil entsprechenden solche *innerer Art* nannte; später (GILBERT's Ann. 74, pag. 338) führte er dafür die Bezeichnung Spectren *erster*, *zweiter* und *dritter Klasse* ein, welche von SCHWERD angenommen und allgemein üblich wurde.

Ueberblicken wir nun die Arbeiten über die Beugung des Lichtes in dem weiteren Verlauf, so treten uns besonders zwei Hauptrichtungen in denselben entgegen. Die Arbeiten der ersten Richtung stehen rein auf dem Boden der FRESNEL'schen Anschauungen und suchen durch analytische Entwickelungen eine genauere Beschreibung der Erscheinungen zu liefern; sie bestehen im Wesentlichen in mathematischen Untersuchungen über die FRESNEL'schen Integrale und verwandte Functionen und Anwendung der Resultate auf einfache, besonders die schon von FRESNEL untersuchten klassischen Fälle der Beugung. Es gehören hierhin besonders Schriften von KNOCHENHAUER, CAUCHY, PH. GILBERT und LOMMEL. Die Arbeiten der zweiten Richtung suchen sowohl in theoretischer als experimenteller Weise die eigentliche Natur des Beugungsvorganges näher zu ergründen; in theoretischer Beziehung werden die nicht einwurfsfreien Punkte des FRESNEL-schen Verfahrens, die Anwendung und Verbindung der zwei Principien, des HUYGHENS'schen und des der Coexistenz kleiner Bewegungen, auf Grundlage der allgemeinen Differentialgleichungen der Lichtbewegung genauer untersucht und schärfer gefasst, in experimenteller einige früher nicht beachtete Punkte, namentlich die Polarisationsverhältnisse und von der Natur des beugenden Randes abhängige Färbungen des gebeugten Lichtes erforscht und mit theoretischen Entwickelungen verglichen.

Wir werden diese zwei Richtungen gesondert betrachten und denselben dann noch eine Anzahl besondere Punkte behandelnder Arbeiten anschliessen.

KNOCHENHAUER hat in zwei Abhandlungen[1]) und besonders in seinem Werk »Die Undulationstheorie des Lichts. Berlin 1839«, Hierhergehöriges behandelt. In dem letzteren giebt er pag. 36 für die FRESNEL'schen Integrale

[1]) POGG. Ann. 41, pag. 103. 1837; 43, pag. 286. 1838.

$$C = \int_0^\mu \cos\frac{\pi}{2} v^2 dv \quad \text{und} \quad S = \int_0^\mu \sin\frac{\pi}{2} v^2 dv,$$

die durch wiederholte partielle Integration zu gewinnenden Formeln

$$C = M\cos\frac{\pi}{2}\mu^2 + N\sin\frac{\pi}{2}\mu^2$$

$$S = M\sin\frac{\pi}{2}\mu^2 - N\cos\frac{\pi}{2}\mu^2,$$

worin M und N die folgenden unendlichen Reihen bedeuten

$$M = \frac{\mu}{1} - \frac{\pi^2\mu^5}{1\cdot3\cdot5} + \frac{\pi^4\mu^9}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9} - \dots$$

$$N = \frac{\pi\mu^3}{1\cdot3} - \frac{\pi^3\mu^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7} + \frac{\pi^5\mu^{11}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11} - \dots$$

Diese Reihen convergiren zwar immer, aber für ein einigermaassen grosses μ so langsam, dass sie dann keinen Werth mehr besitzen. Zur Rechnung brauchbar würden sie für $\mu < 1$ sein, doch haben wir auch für diesen Bereich bequemere, gleich anzugebende Formeln.

Cauchy[1]) hat zunächst die für grosse μ sehr brauchbaren Formeln

$$C = \frac{1}{2} + M'\sin\frac{\pi}{2}\mu^2 - N'\cos\frac{\pi}{2}\mu^2$$

$$S = \frac{1}{2} - M'\cos\frac{\pi}{2}\mu^2 - N'\sin\frac{\pi}{2}\mu^2$$

gegeben, worin

$$M' = \frac{1}{\pi\mu} - \frac{1\cdot3}{\pi^3\mu^5} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{\pi^5\mu^9} - \dots$$

$$N' = \frac{1}{\pi^2\mu^3} - \frac{1\cdot3\cdot5}{\pi^4\mu^7} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{\pi^6\mu^{11}} - \dots$$

halbconvergente Reihen bedeuten, welche, um dem wahren Werth der Integrale möglichst nahe zu kommen, bei gewissen Gliedern abgebrochen werden müssen also nur eine beschränkte Genauigkeit gestatten, die übrigens für grosse μ, etwa von $\mu = 3$ an, vollständig genügt. Sollen diese Formeln den Werth der Integrale C und S genau angeben, so müssen den rechten Seiten noch Restglieder R_c und R_s beigefügt werden, welche, wenn M' und N' nach dem $p$ten Glied abgebrochen werden, sind:

$$R_c = (-1)^{p+1}\frac{1\cdot3\dots4p-1}{\pi^{2p}}\int_\mu^\infty \frac{\sin\frac{\pi}{2}v^2}{v^{4p}}dv$$

$$R_s = (-1)^{p+1}\frac{1\cdot3\dots4p-1}{\pi^{2p}}\int_\mu^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}v^2}{v^{4p}}dv.$$

Man kann diesen Restgliedern auch eine Form geben, dass sie Zusätze zu den Reihen selbst bilden, sodass man unter M' die angegebene Reihe nebst dem Glied

$$(-1)^p\frac{1\cdot3\dots4p-1}{\pi^{2p}}\int_\mu^\infty \frac{\sin\frac{\pi}{2}(v^2-\mu^2)}{v^{4p}}dv$$

und unter N' die dafür gegebene Reihe nebst

[1]) Compt. rend. 15, pag. 578. 1842.

$$(-1)^p \frac{1 \cdot 3 \ldots 4p-1}{\pi^{2p}} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(v^2 - \mu^2)}{v^{4p}} dv$$

versteht, die CAUCHY'schen Formeln genau und für alle μ richtig sind. An der angeführten Stelle giebt CAUCHY auch für kleine μ (etwa bis $\mu = 1$) geeignete Formeln, die durch Entwickelung der trigonometrischen Functionen unter dem Integralzeichen in Reihen und Integration der einzelnen Glieder erhalten werden:

$$C = \mu - \frac{\pi^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu^5}{5} + \frac{\pi^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\mu^9}{9} - \ldots .$$

$$S = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^3}{3} - \frac{\pi^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\mu^7}{7} + \frac{\pi^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{\mu^{11}}{11} - \ldots .$$

PH. GILBERT[1]) hat in den Mém. des sav. étr. der Brüsseler Akademie d. Wiss. nachgewiesen, dass die FRESNEL'schen Integrale ausgedrückt werden können durch die Gleichungen

$$C = \frac{1}{2} + M'' \sin \frac{\pi}{2} \mu^2 - N'' \cos \frac{\pi}{2} \mu^2$$

$$S = \frac{1}{2} - M'' \cos \frac{\pi}{2} \mu^2 - N'' \sin \frac{\pi}{2} \mu^2,$$

worin

$$M'' = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} \mu^2 x}}{1 + x^2} dx$$

$$N'' = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} \mu^2 x}}{1 + x^2} dx.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den CAUCHY'schen zeigt, dass die M'' und N'' GILBERT's identisch sind mit dem M' und N' nebst ihren Restgliedern. Es sind also die Reihen damit durch zwei bestimmte Integrale ausgedrückt und aus der Form derselben ergiebt sich sofort, dass ihr Werth immer positiv ist und mit wachsendem μ beständig abnimmt. GILBERT hat Tafeln berechnet, welche die den verschiedenen Werthen von μ^2 zugehörenden M'' und N'' ergeben und aus diesen durch Interpolation die nöthigen Werthe entnommen, um eine nach den μ fortschreitende Tafel der FRESNEL'schen Integrale herzustellen.

Endlich führt LOMMEL[2]) die FRESNEL'schen Integrale in verschiedener Weise auf BESSEL'sche Functionen zurück. Bedeutet $J_\nu(z)$ eine BESSEL'sche Function erster Art vom Argument $z = \frac{\pi}{2} \mu^2$, so zeigt er, dass

$$C = \sum J_{\frac{4p+1}{2}} \qquad S = \sum J_{\frac{4p+3}{2}}$$

und benutzt diese Formeln nach Aufstellung von Tafeln für die hier auftretenden BESSEL'schen Functionen mit gebrochenem Index zur Ableitung einer Tafel der

1) Mém. cour. et mém. des sav. étr. 31, pag. 1, Brux. 1863.

2) Münchener Abhandl. Math.-phys. Cl. 15, pag. 229, 529. 1885. 86. — Zu erwähnen sind auch H. STRUVE, FRESNEL's Interferenzerscheinungen, Dorpat 1881 und A. LINDSTEDT, WIED. Ann. 17, pag. 720. 1882. Dagegen scheint die Angabe VERDET's (Oeuvres V, pag. 330), dass man ABRIA ausführlichere Tafeln der FRESNEL'schen Integrale verdanke, auf einem Irrthum zu beruhen. Die angezogene Abhandlung enthält sie nicht und auch ausserdem sind sie nicht aufzufinden gewesen.

FRESNEL'schen Integrale mit dem Argument z. Ferner drückt er sie durch zwei mit den BESSEL'schen Functionen eng zusammenhängende Functionen U_ν und V_ν aus, welche er für am besten geeignet zur analytischen Darstellung der Beugungserscheinungen erklärt, und welche definirt sind durch die Gleichungen

$$U_\nu(y, z) = \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{\nu+2p} J_{\nu+2p}(z),$$

$$V_\nu(y, z) = \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{-\nu-2p} J_{-\nu-2p}(z) = U_{-\nu+2}(y, z) + \cos\left(\frac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} + \frac{\nu}{2}\pi\right).$$

Darin hängt y von der Lage der Bildebene in Bezug auf die Lichtquelle und den Beugungsschirm ab, während z den Ort eines Punktes in der Bildfläche angiebt. Die M und N KNOCHENHAUER's, CAUCHY's und GILBERT's sind specielle Fälle dieser Functionen.

Je nachdem man nun in den Intensitätsausdruck die eine oder andere der angegebenen Functionen einführt, erhält man durch Nullsetzen der Differentialquotienten desselben Gleichungen für die Lage der Maxima und Minima der Lichtstärke in den betreffenden Functionen. KNOCHENHAUER, QUET[1]) und GILBERT haben so Formeln für verschiedene Fälle abgeleitet. Von besonderem Interesse sind die durch viele Intensitätscurven veranschaulichten Untersuchungen LOMMEL's über die kreisrunde Oeffnung und den kreisrunden Schirm, den engen Spalt und den schmalen Streifen.

Die zweite oben bezeichnete Richtung schlagen Arbeiten ein von STOKES[2]), HOLTZMANN[3]), LORENZ[4]), MASCART[5]), DITSCHEINER[6]), STRUTT (RAYLEIGH)[7]) QUINCKE[8]), W. VOIGT[9]), FRÖHLICH[10]), RETHY[11]), KIRCHHOFF[12]) KÖNIG[13]), GLAZEBROOK[14]), GOUY[15]), WIEN[16]). In dem Artikel über die Theorie des Lichts wird genauer auf die Polarisation des gebeugten Lichts eingegangen werden, wir beschränken uns daher in dieser Beziehung hier auf einige kurze Bemerkungen. Die Grundlegung der Beugungstheorie, wie sie KIRCHHOFF gegeben hat, stellen wir dagegen eingehender dar.

Die schon früheren Beobachtern (ARAGO, FRAUNHOFER, BREWSTER) aufgefallenen Polarisationsverhältnisse bei der Beugung wurden zuerst von STOKES genauer untersucht und von demselben eine Formel für die Lagenänderungen

---

1) Annales de chim. et de phys (3) 49, pag. 385, 417. 1857.
2) CAMBR. Trans. 9, pag. 1. 1850. 52; Mathemat. and. Phys. Papers. Vol. II, pag. 243.
3) POGG. Ann. 99, pag. 446. 1856.
4) POGG. Ann. 111, pag. 315. 1860.
5) Compt. rend. 63, pag. 1005. 1866.
6) Wien. Sitzber. 60, pag. 567. 1869.
7) Phil. Mag. 41, pag. 450. 1871.
8) POGG. Ann. 149, pag. 273. 1873; Gött. Nachr. 1873, pag. 22.
9) WIED. Ann. 3, pag. 532. 1878; BORCHARDT's Journ. 89, pag. 322. 1880.
10) WIED. Ann. 1, pag. 321. 1877; 3, pag. 376; 3, 568. 1878; 6, pag. 414. 1879; 15, pag. 592. 1882; 22, pag. 161. 1884; Ungar. Ber. 2, pag. 365. 1885.
11) WIED. Ann. 11, pag. 504. 1880; 24, pag. 282. 1885.
12) Berliner Sitzber. 1882, pag. 641; WIED. Ann. 18, pag. 663. 1883; Vorlesungen üb. math. Optik, pag. 22 ff. 1891.
13) WIED. Ann. 17, pag. 1016. 1882.
14) Cambr. Proc. 5, pag. 254. 1885.
15) Compt. rend. 96, pag. 697. 1883; 98, pag. 1573. 1884; Ann. chim. phys. (6) 8, pag. 145. 1886.
16) Berl. Sitzber. 1885, pag. 817; WIED. Ann. 28, pag. 117. 1886.

der Polarisationsebene des gebeugten Lichts abgeleitet, welche eigene und eine Reihe von Andern ausgeführter Versuche näherungsweise bestätigten. Doch zeigten sich auch Abweichungen und namentlich traten diese stark in den Versuchen FRÖHLICHS mit von Gittern reflektirtem Licht auf. Diese suchten RETHY und KÖNIG durch Ableitung allgemeinerer Formeln darzustellen und zu erklären und der letztere verfolgte noch besonders theoretisch und experimentell die Ellipticität des reflektirten Lichtes. FRÖHLICH hat aber in seiner zuletzt angeführten Abhandlung gezeigt, dass alle bisherigen Formeln nicht genügten und eine neue aufgestellt, welche zwölf Constanten einschliesst.

KIRCHHOFF hat in den angeführten Abhandlungen durch schärfere Fassung und Ableitung des HUYGHENS'schen Principes eine neue Grundlage der Beugungstheorie gegeben, auf die wir nun näher einzugehen haben. Wir weisen dabei auch auf die von ähnlichen Erwägungen ausgehenden Abhandlungen von WOLD. VOIGT hin, die gleichfalls oben angegeben sind.

KIRCHHOFF geht in seinen Entwickelungen von einer Anwendung des GREEN-schen Lehrsatzes aus. Wenn U und V zwei Functionen von x, y, z bedeuten, welche nebst ihren ersten Differentialquotienten innerhalb eines begrenzten Raumes T endlich und stetig verlaufen, so ist nach diesem Lehrsatz

$$\int\left(U\frac{V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds=\int(V\Delta U-U\Delta V)\,d\tau, \tag{1}$$

worin das Integral rechts über den Raum T, das links über seine Oberfläche zu erstrecken, die Differentiation nach n in der Richtung der Normale dieser Oberfläche, positiv gerechnet in den Raum T hinein, zu nehmen ist und das Zeichen Δ die Summe der drei zweiten partiellen Differentialquotienten nach x, y, z der dahinterstehenden Function bedeutet.

Wir setzen $U = \varphi$ und verstehen darunter die Verrückung der schwingenden Aethertheilchen nach einer der Coordinatenrichtungen oder ihre Geschwindigkeit in einer dieser Richtungen oder die Drehungscomponenten oder überhaupt irgend eine mit der Lichtbewegung zusammenhängende Function, welche die Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\Delta\varphi. \tag{2}$$

befriedigt. Wir setzen weiter

$$V=\frac{F(r+at)}{r}. \tag{3}$$

worin $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ die Entfernung von einem in dem Raum T beliebig angenommenen Punkt P mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 bedeutet. Man findet leicht, dass V ebenfalls der Gleichung (2) genügt. Ueber die Function $F(\zeta)$ setzen wir voraus, dass sie für alle Argumente verschwinde mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft eines bestimmten $\zeta_0 = at_0$, dass sie hier positiv und so beschaffen sei, dass für endliche c das Integral $\int_{\zeta_0-c}^{\zeta_0+c}F(\zeta)d\zeta$ gleich 1 sei. Eine diesen Forderungen entsprechende Function ist

$$F(\zeta)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2(\zeta-\zeta_0)^2}$$

worin μ eine sehr grosse positive Constante bedeutet.

Wir wenden nun die Gleichung (1) auf den Raum T mit Ausnahme einer kleinen um P zu construirenden Kugel an und erhalten nach den gemachten Annahmen

$$\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds=\frac{1}{a^2}\int\left(V\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)d\tau=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right)d\tau$$

und wenn wir bezüglich der Zeit zwischen t_1 und t_2 integriren

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds=\frac{1}{a^2}\left[\int\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right)d\tau\right]_{t_1}^{t_2}$$

Wenn wir t_1 und t_2 so wählen, dass auch für das grösste vorkommende r ist: $r+at_1<at_0$ und für das kleinste: $r+at_2>at_0$, so verschwinden alle rechts vorkommenden V und $\frac{\partial V}{\partial t}$; und wenn wir zugleich berücksichtigen, dass unser Integrationsraum von der Oberfläche von T und der der kleinen um P construirten Kugel eingeschlossen wird, also die innere Integration links über diese beiden Flächen zu erstrecken ist, so erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds+\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma=0, \tag{4}$$

wo die Integrationen über die beiden Flächen getrennt geschrieben und die Elemente der kleinen Kugelfläche mit $d\sigma$ bezeichnet sind. Führen wir ein System von Polarcoordinaten ρ, ϑ, χ mit dem Anfangspunkt in P ein, so ist $d\sigma=\rho^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi$, und wenn wir den Radius der Kugel so klein annehmen, dass $\rho F(\zeta)$ und $\rho F'(\zeta)$ immer vernachlässigt werden können, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma=-\iint\varphi F(\rho+at)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi=-4\pi\varphi_p F(at),$$

worin mit φ_p der Werth von φ in dem Punkte P bezeichnet ist.

Setzen wir das in (4) ein und berücksichtigen, dass F nur für das Argument at_0 von Null verschieden und $\int_{t_1}^{t_2}F(at)\,dt=\frac{1}{a}$ ist, so erhalten wir, wenn φ_{p,t_0} den Werth von φ im Punkt P zur Zeit t_0 bezeichnet,

$$\varphi_{p,t_0}=\frac{a}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds. \tag{5}$$

Da die rechts zu integrirende Function im ganzen Integrationsgebiet endlich und stetig verläuft, so kann die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden. Es ist aber

$$\int_{t_1}^{t_2}V\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{F(r+at)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt=\frac{1}{ar}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{t=t_0-\frac{r}{a}}.$$

Denn nur für $r+at=at_0$ ist $F(r+at)$ von Null verschieden, also kann $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{t=t_0-\frac{r}{a}}$ aus dem Integralzeichen herausgesetzt werden und das übrigbleibende Integral ist nach den Annahmen über F gleich $\frac{1}{a}$. Weiter ist

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}F(r+at)+\frac{1}{r}\frac{\partial F(r+at)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

und da

$$\frac{\partial F(r+at)}{\partial r} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial F(r+at)}{\partial t},$$

folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi \frac{\partial V}{\partial n}\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\varphi_{t=t_0-\frac{r}{a}} + \frac{1}{ar}\,\frac{\partial r}{\partial n}\int_{t_1}^{t_2}\varphi\,\frac{\partial F(r+at)}{\partial t}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\varphi_{t=t_0-\frac{r}{a}} - \frac{1}{ar}\,\frac{\partial r}{\partial n}\int_{t_1}^{t_2} F(r+at)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dt = \left(\frac{1}{a}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\varphi - \frac{1}{a^2 r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=t_0-\frac{r}{a}}.$$

Wenn wir dies in (5) einsetzen, erhalten wir

$$\varphi_{p,t_0} = \frac{1}{4\pi}\int \Omega\,ds,$$

$$\Omega = \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\varphi - \frac{1}{ar}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t=t_0-\frac{r}{a}} \quad (6)$$ [1].

In der vorstehenden Entwickelung ist vorausgesetzt, dass φ der Gleichung (2) genüge, welche nur für die Lichtbewegung ausserhalb der Lichtquelle aufgestellt wird, die letztere muss daher ausserhalb des Integrationsraums T angenommen werden.

Befindet sich aber in T ein von der Integration ausgeschlossener Hohlraum so kann die Lichtquelle auch in diesem liegen. Das Integral in (6) ist dann über die innere (A) und über die äussere Begrenzung (B) von T zu erstrecken. Nennen wir die Oberflächenelemente der ersteren ds, die der letzteren dS, so können wir schreiben

$$\varphi_{p,t_0} = \frac{1}{4\pi}\int \Omega\,ds + \frac{1}{4\pi}\int \Omega\,dS.$$

Denken wir uns die äussere Fläche B als eine unendlich grosse Kugel, so haben wir als Integrationsraum T den ganzen Raum mit Ausnahme des die Lichtquelle enthaltenden, von A umschlossenen Gebiets. Es lässt sich nun zeigen, dass das über B erstreckte Integral in diesem Fall verschwindet. Wir denken uns den Mittelpunkt der Kugel B in dem Punkte P gelegen, ihr Radius sei R dann ist $dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi$ und die nach B gelangende Lichtbewegung ist unendlich nahe gleich einer vom Mittelpunkt in Kugelwellen ausgehenden. Die Form von φ kann also als $\frac{1}{r} f(r-at)$ angenommen werden. Das erste Glied in Ω und ein Theil des dritten verschwinden nun unmittelbar, da sie $\frac{1}{R^2} f(R-dt)$ werden, also auch nach der Multiplikation mit dS nur eine unendlich kleine Function zur Integration nach ϑ und χ übrig bleibt. Das zweite Glied wird $\frac{1}{aR^2}\,\frac{\partial f(R-at)}{\partial t}$ und der vom dritten übrige Theil $\frac{1}{R^2}\,\frac{\partial f(R-at)}{\partial R}$, diese beiden Ausdrücke heben sich aber gegenseitig auf. Der Werth des Integrals $\int \Omega\,dS$ ist also Null und wir erhalten für den Fall eines ausserhalb einer die Lichtquelle umschliessenden Fläche gelegenen Punktes P ganz dieselbe Gleichung (6) wie in dem früher behandelten Fall, wo der Punkt P innerhalb einer die Lichtquelle

---

[1]) KIRCHHOFF fasst noch die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks in eins zusammen und schreibt das letzte etwas anders. Wir ziehen es zur Vermeidung von Missverständnissen vor, bei der obigen Gestalt stehen zu bleiben.

ausschliessenden Fläche lag, nur dass jetzt entsprechend der äusseren Lage des Integrationsraums die positive Richtung der Normale von der Fläche nach aussen zu rechnen ist.

In diesen Fällen liegt also die Lichtquelle immer auf der andern Seite der Fläche, über welche zu integriren ist, als der Punkt *P*. Aus der Gleichung (6), welche dann gilt, lässt sich nun leicht ableiten, dass der Werth des Integrals $\int \Omega \, ds$ verschwindet, wenn es über eine Fläche erstreckt wird, die entweder beide, Lichtquelle und Punkt *P*, umschliesst oder beide ausschliesst. Hat man eine beide umschliessende Fläche, so kann man den Innenraum durch eine Schnittfläche in zwei Theile zerlegen, von denen der eine die Lichtquelle, der andere den Punkt *P* enthält, für die Oberflächen beider gilt die Gleichung (6), bei der einen mit nach Aussen, bei der andern mit nach Innen gerichteter Normalen. Zieht man die eine Gleichung von der andern ab, so wird die linke Seite Null, rechts fällt die Integration über die Schnittfläche fort und es bleibt nur das über die ursprüngliche Schnittfläche zu erstreckende Integral $\int \Omega \, ds$ übrig. Ebenso kann man bei einer den Punkt *P* umschliessenden, die Lichtquelle aber ausschliessenden Fläche, einen kleineren, den Punkt *P* enthaltenden Raum durch eine Querfläche abgrenzen; für dessen Oberfläche gilt wie für die ursprüngliche die Gleichung (6). Daraus folgt, dass das über die Oberfläche des abgeschnittenen Stücks, das weder den Punkt *P* noch die Lichtquelle enthält, erstreckte Integral verschwindet.

Die Gleichung (6) ist das Huyghens'sche Princip in der genaueren und zugleich verallgemeinerten Gestalt, die ihm Kirchhoff gegeben hat. Fresnel sah bei der Ableitung des Ausschlags eines Aethertheilchens aus den Ausschlägen in einer vorausgegangenen Wellenfläche, von der Anschauung des einfachen continuirlichen Fortschreitens der Bewegung von der ersten zur zweiten Stelle ausgehend die Wirkung, die ein Element der Wellenfläche hervorbringt, lediglich als von dem Ausschlag in ihm abhängig an, so dass, wenn dieser durch

$$\frac{A}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda}\right)$$

gegeben ist, der von dem Element ds in der Entfernung r hervorgerufene durch

$$K \frac{A}{\rho r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) ds$$

auszudrücken sein würde, worin K einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Dagegen sagt Gleichung (6) aus, dass der in *P* erzeugte Ausschlag ausser von demjenigen im Oberflächenelement auch von der da stattfindenden zeitlichen und örtlichen Aenderung desselben abhänge. Statt des eben erhaltenen Ausdrucks würde nach ihr für den Ausschlag, welcher von einem in der Nähe der geraden Verbindungslinie des leuchtenden Punkts mit dem Punkt *P* gelegenen Element ds der Wellenfläche vom Radius ρ erzeugt wird, sich ergeben:

$$A \left[\frac{\rho + r}{4\pi\rho^2 r^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda r \rho} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right)\right] ds.$$

Der Fresnel'sche Ausdruck führt, wie schon Voigt hervorgehoben hat, zu Widersprüchen bezüglich der Phase der resultirenden Schwingung, aus Gleichung (6) folgt dagegen auch hierfür der richtige Werth[1]).

[1]) Es mag dies hier gezeigt werden. L sei ein leuchtender Punkt und es werde eine Wellenfläche, die Kugel vom Radius ρ, als die Fläche gewählt, durch Integration über welche nach Gleichung (6) der Ausschlag in *P* bestimmt werden soll. Die Linie LP werde durch b bezeichnet, der Radiusvektor LN nach irgend einem Oberflächenelement ds mache mit ihr den

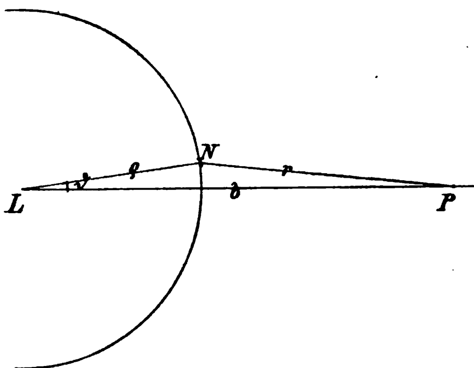
KIRCHHOFF hat aus Betrachtungen, welche sich unmittelbar an die vorstehenden Entwickelungen, namentlich die Gleichung (6) anschliessen, die geradlinige

---

Winkel ϑ, die Linie NP werde r denannt. Die durch ρ und r bestimmte Ebene mache den Winkel χ mit einer festen durch LP gehenden. Setzen wir für die von L ausgehende Lichtbewegung den Ausschlag

$$\varphi = \frac{1}{\rho} f(\rho - at),$$

so ist φ_{p, t_0}, der Ausschlag in P zur Zeit t_0, gleich $\frac{1}{b} f(b - at_0)$, und es ist zu zeigen, dass auch die Integration über die Wellenfläche nach Gleichung (6) denselben Werth liefert. Es ist nun



(Ph. 474.)

$$r^2 = b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos\vartheta.$$

Wird N auf der Kugel verschoben, so ändern sich zugleich r und ϑ, während b und ρ constant bleiben, es ist also

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{r dr}{b\rho}.$$

Die in (6) vorkommende Differentiation nach n ist hier mit der Differentiation nach ρ gleichbedeutend. Wir erhalten demnach

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\varphi = -\frac{\rho - b\cos\vartheta}{r^3\rho} f(\rho - at) = -\frac{r^2 + \rho^2 - b^2}{2r^3\rho^2} f(\rho - at)$$

$$\frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho - b\cos\vartheta}{r^2\rho} f'(\rho - at) = -\frac{r^2 + \rho^2 - b^2}{2r^2\rho^2} f'(\rho - at)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{r\rho^2} f(\rho - at) + \frac{1}{r\rho} f'(\rho - at),$$

also wird

$$\Omega = \frac{r^2 - \rho^2 + b^2}{2\rho^2 r^3} f(\rho + r - at_0) + \frac{(r - \rho + b)(r - \rho - b)}{2\rho^2 r^2} f'(\rho + r - at_0)$$

und da

$$ds = \rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi = \frac{\rho r}{b}\, dr\, d\chi$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \Omega ds = \frac{1}{4}\int_{b-\rho}^{b+\rho} \frac{r^2 - \rho^2 + b^2}{\rho r^2 b} f(\rho + r - at_0) dr + \frac{1}{4}\int_{b-\rho}^{b+\rho} \frac{(r - \rho + b)(r - \rho - b)}{\rho r b} f'(\rho + r - at_0) dr.$$

Formen wir das zweite Integral rechts durch partielle Integration um, so folgt

$$\frac{1}{4\pi}\int \Omega ds = \left(\frac{(r - \rho + b)(r - \rho - b)}{4\rho r b} f(\rho + r - at_0)\right)_{b-\rho}^{b+\rho}$$

$$= \frac{1}{b} f(b - at_0).$$

Das ist in der That derselbe Ausdruck, wie er ohne Vermittelung der Wellenfläche unmittelbar aus der für die Lichtbewegung aufgestellten Gleichung folgt.

Wir können hieran noch eine Bemerkung knüpfen. Wenn es sich um einen innerhalb der Wellenfläche gelegenen Punkt P handelt, so können wir dessen Bewegung erhalten, wenn wir noch eine innere Fläche um den leuchtenden Punkt L legen, welche P ausschliesst und den Raum zwischen beiden Flächen mit Ausschluss einer kleinen Kugel um P als Integrationsraum nehmen. Wir erhalten dann φ_{p, t_0}, gleich dem über beide Flächen zu erstreckenden Integral $\frac{1}{4\pi}\int \Omega ds$. Für die äussere Fläche bleibt die Rechnung (abgesehen von der veränderten Normalenrichtung) ganz wie oben, nur die untere Grenze in den letzten Integralen heisst jetzt $\rho - b$, wodurch die rechte Seite verschwindet. Wird angenommen, dass auf der inneren Fläche überall Ruhe herrsche, so ist auch das über sie erstreckte Integral Null und der Punkt P bleibt selbst in Ruhe. Eine Wellenfläche sendet also nach rückwärts keine Bewegung aus.

Fortpflanzung des Lichts, sowie die Gesetze der Reflexion, der Brechung und der Beugung abgeleitet. Wir haben es hier nur mit der letzteren zu thun.

Beugung tritt ein, wenn die Lichtbewegung in der Nähe eines Körpers vorbeigeht. Wir wollen, um unnöthige Complicationen zu vermeiden und es mit der Beugung allein zu thun zu haben, annehmen, dass der fremde Körper schwarz sei, d. h. dass keine Lichtbewegung sich in ihm fortpflanze oder von seiner Oberfläche reflektirt werde. Seine ganze Wirkung besteht in der Absorption; ein ihn treffender Strahl bleibt bis zur Berührung ungeändert und ist von da an als Lichtbewegung vernichtet. Um die Bewegung eines Punktes P unter dem Einfluss der von einem leuchtenden Punkt L ausgehenden Lichtbewegung und der Gegenwart des fremden Körpers zu bestimmen, schliessen wir den letzteren durch eine ihn unmittelbar umgebende Fläche vom Integrationsraum aus, ebenso den Punkt L vermittelst einer kleinen Kugel und erhalten nach der Gleichung (6)

$$\varphi_{p,t_0} = \frac{1}{4\pi}\int \Omega\, ds,$$

worin das Integral rechts über die Kugel um L und über die den fremden Körper umhüllende Fläche zu erstrecken ist. Auf die Lichtbewegung in der den Punkt L nahe umgebenden Kugel übt die Anwesenheit des fremden schwarzen Körpers nur einen verschwindenden Einfluss aus. Ist daher ψ die die Lichtbewegung darstellende Function, welche der Punkt L allein, ohne den fremden Körper erzeugt, so kann in dem Integral über die kleine Kugel ψ an die Stelle von φ gesetzt werden und der Werth dieses Integrals ist nach (6) gleich ψ_{p,t_0}, d. h. gleich dem Ausschlag, der in P stattfinden würde, wenn der fremde Körper fehlte.

Ebenso ist in dem über den letzteren zu nehmenden Integral auf der dem Punkt L zugekehrten Fläche, d. h. von der Berührungscurve des Tangentenkegels aus L (der Randcurve) nach diesem Punkte hin, $\varphi = \psi$ dagegen auf der L abgewandten Seite $\varphi = 0$. Wir wollen die Oberflächenelemente der ersten Seite mit ds_1, die der letzteren mit ds_2 bezeichnen, dann erhält man

$$\varphi_{p,t_0} = \psi_{p,t_0} + \frac{1}{4\pi}\int \Omega\, ds_1,$$

wo das Integral nur auf die dem Punkt L zugewandte Seite des Körpers zu erstrecken und darin φ durch ψ zu ersetzen ist.

Man kann auch von der erwähnten Randcurve des schwarzen Körpers aus eine den Punkt P ausschliessende und L einschliessende Fläche s construiren, welche mit der von L abgekehrten Seite des Körpers zusammen eine geschlossene Fläche um L bildet. Die Bewegung in dieser neu construirten Fläche, deren Elemente mit ds bezeichnet werden mögen, wird nur in verschwindendem Maasse von dei Anwesenheit des fremden Körpers beeinflusst. Nach Gleichung (6) ist nun

$$\varphi_{p,t_0} = \frac{1}{4\pi}\int \Omega\, ds,$$

wo das Integral eigentlich über die ganze geschlossene Fläche um L sich erstreckt, da aber Ω auf der L abgewandten Seite des schwarzen Körpers verschwindet, bleibt nur das Integral über s übrig, worin nach der eben gemachten Bemerkung φ durch ψ ersetzt werden kann.

Wir legen die letztere Formel der weiteren Betrachtung zu Grunde und ver-

stehen unter ψ die allgemeine Verschiebungsfunction für eine von L ausgehende Lichtbewegung, setzen also

$$\psi = \frac{D_1}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda}\right) + \frac{D_2}{\rho} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{\lambda}\right).$$

Daraus ergiebt sich

$$\Omega = \left[\frac{D_1}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right) + \frac{2\pi D_2}{\lambda r \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n}\right)\right] \cos 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right)$$
$$+ \left[\frac{D_2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right) - \frac{2\pi D_1}{\lambda r \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n}\right)\right] \sin 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right).$$

Nehmen wir nun an, dass der schwarze Körper den leuchtenden Punkt mit Ausnahme einer kleinen Oeffnung ganz umschliesse, also s ein kleines von der Randcurve dieser Oeffnung begrenztes Flächenstück sei, so dass r und ρ, wo sie ausserhalb der trigonometrischen Functionen vorkommen, sowie $\frac{\partial r}{\partial n}$ und $\frac{\partial \rho}{\partial n}$ als constant betrachtet werden können, nehmen wir ferner an, dass die Linie LP durch die Fläche s oder in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft vorbeigehe, woraus folgt, dass sehr nahe $\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial \rho}{\partial n}$ ist, so sind in dem Ausdruck für Ω die mit λ dividirten Glieder sehr gross gegen die andern, so dass diese weggelassen werden können, und es wird

$$\varphi_{p, t_0} = \frac{1}{\lambda r \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n}\left[D_2 \int \cos 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) ds - D_1 \int \sin 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) ds\right]. \quad (7)$$

Versteht man nun unter ψ resp. φ der Reihe nach die drei Verrückungscomponenten u, v, w und setzt dann statt D_1 und D_2 bei $u : A_1$ und A_2, bei $v : B_1$ und B_2, bei $w : C_1$ und C_2, so wird die Intensität J_s in s, welche wir durch den Ausdruck

$$\frac{M}{2T}\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial t}\right)^2\right] dt,$$

die lebendige Kraft in s, definirt annehmen wollen, mittelst der Gleichungen

$$\int_0^T \sin^2 2\pi \frac{t}{T} dt = \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T} dt = \frac{T}{2} \text{ und } \int_0^T \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} dt = 0$$

$$J_s = \frac{M\pi^2}{\rho^2 T^2}(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2). \quad (8)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\int \cos 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) ds = S_1 \quad \text{und} \quad \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho + r}{\lambda}\right) ds = S_2,$$

so erhält man

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_p}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_p}{\partial t_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda \rho r}\frac{\partial \rho}{\partial n}\frac{2\pi}{T}\right)^2 [(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) S_1^2$$
$$+ (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) S_2^2 + 2(A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) S_1 S_2],$$

und zerlegt man die trigonometrischen Functionen in den Integralen S_1 und S_2 und setzt

$$c = \int \cos 2\pi \frac{\rho + r}{\lambda} ds, \quad s = \int \sin 2\pi \frac{\rho + r}{\lambda} ds, \quad (9)$$

so ergiebt sich für die Intensität in P durch Einsetzung in die Formel

$$J_p = \frac{M}{2T}\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_p}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_p}{\partial t_0}\right)^2\right] dt$$

unter Benutzung von (8) und den vorher angewendten Formeln

$$J_p = J_s \frac{1}{\lambda^2 r^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)^2 (c^2 + s^2). \tag{10}$$

Dies ist die Grundformel, auf welcher die Erklärung der Beugungserscheinungen beruht. Die darin vorkommenden Integrale c und s sind durch einfache Reihenentwickelung für ρ und r in die bei der Betrachtung der FRESNEL-schen und FRAUNHOFER'schen Beugungserscheinungen benutzten überzuführen. –

Die Versuche von GOUY und WIEN, über welche die oben (pag. 610) angeführten Abhandlungen berichten, beweisen einen merkwürdigen Einfluss der Substanz des beugenden Körpers auf die Natur des gebeugten Lichtes. Nach dem ersteren soll sich dies schon in der Lage der Polarisationsebene aussprechen, besonders aber tritt es hervor in gewissen Farbenerscheinungen.

Lässt man auf einen scharfen, möglichst staubfreien Rand intensives Licht auffallen, so nimmt die Intensität des gebeugten Lichts mit zunehmendem Beugungswinkel anfangs rasch, dann immer langsamer ab und man kann unter geeigneten Umständen selbst bei um 160° abgelenkten Strahlen noch eine merkliche Helligkeit wahrnehmen. Diese Intensität hängt wesentlich von der Breite des Randes ab, je mehr dieser abgerundet ist, um so geringer ist dieselbe; so liefert ein vergoldeter Messingdraht von $\frac{1}{18}$ *mm* Durchmesser merklich Licht bis zu einem Beugungswinkel von 15°, eine gute Stahlschneide bei gleicher Lichtquelle bis zu 140°. Ist das einfallende Licht natürliches, so ist das in den Schatten gebeugte theilweise polarisirt und zwar senkrecht zur Beugungsebene. Der nicht polarisirte Theil ist stets weiss, der polarisirte zeigt verschiedene Farben, je nach der Natur der beugenden Körper, bei Stahl und ähnlich bei Eisen, Nickel, Kobalt, Platin ist er gleichfalls weiss. Kupfer giebt lebhaftes Roth und Orange, Wismuth Roth, Neusilber, Aluminium, Spiegelmetall Gelb, die roth oder gelb gefärbten Metalle stehen zwischen Kupfer und Silber, sie zeigen Farbenwechsel mit geändertem Beugungswinkel, doch überwiegt ihre Oberflächenfarbe. Gold liefert sehr reines Roth, Messing giebt Färbungen von Roth bis Grün, worunter Orangegelb die Hauptfarbe ist. Sehr lebhafte Farbenwechsel zeigt Silber von reinem Roth bis zu kräftigem Gelbgrün. Zink giebt sogar Blaugrün. Jod liefert gelbes Licht, Eisenglimmer grünliches, Kupferoxydul grünes. Es scheinen diese Farben im Wesentlichen complementär zu sein zu den von dünnen Schichten der Körper durchgelassenen und übereinzustimmen mit den bei vielfacher Reflexion an den betreffenden Körpern auftretenden. Das nach der entgegengesetzten Seite, vom Schatten weggebeugte Licht, ist nach GOUY ebenfalls theilweise polarisirt, aber in der Beugungsebene. Alle diese Verhältnisse erfordern noch eingehendere Untersuchung[1]).

Wir holen nun noch einige bisher übergangene Punkte nach. Bei den FRAUNHOFER'schen Beugungserscheinungen lassen sich aus dem Intensitätsausdruck mit Leichtigkeit eine Anzahl geometrischer Sätze ableiten, die wir anführen wollen. Beachtet man, dass bei einer jeden solchen Beugungserscheinung der Ausdruck für die Intensität in einem beliebigen Punkt der Bildebene aus der Summe der Quadrate zweier über die Beugungsöffnungen zu erstreckender In-

[1]) Ganz neuerdings ist eine Abhandlung über diesen Gegenstand von E. MARY erschienen. S. WIEDEM. Ann. 49, pag. 69. 1873.

tegrale besteht, und dass bei frei einfallender (Kugel-) Welle überall in der Bildfläche mit Ausnahme des Wellenmittelpunkts Dunkelheit herrschen würde, also jedes der beiden Integrale über die freie Fernrohröffnung erstreckt verschwindet, so erkennt man, dass die Vertauschung eines beliebigen Beugungsschirms mit dem ihm complementären (worin die dort offenen Theile gedeckt sind und umgekehrt) in dem Bild nichts ändert. Dieser Satz ist zuerst von BABINET[1]) ausgesprochen worden. Für die Ableitung einiger anderer zuerst von BRIDGE[2]) gezogener Folgerungen geben wir dem Intensitätsausdruck die Form

$$J = \left(\int y \sin 2\pi \frac{x \sin \vartheta}{\lambda} dx\right)^2 + \left(\int y \cos 2\pi \frac{x \sin \vartheta}{\lambda} dx\right)^2.$$

Derselbe ergiebt sich, wenn wir die XY-Ebene des Coordinatensystems mit dem Beugungsschirm zusammenfallend denken und die Intensität für einen sehr entfernten Punkt P der XZ-Ebene bestimmen. Es ist dann, wenn der Beugungswinkel ϑ genannt wird, die von einem schmalen Streifen ydx der Oeffnung in P erregte Vibrationsgeschwindigkeit $ydx \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \vartheta}{\lambda}\right)$, woraus der angegebene Ausdruck folgt. Derselbe führt zu den Sätzen:

1. Die Sinus der Beugungswinkel, welche einem bestimmten Maximum oder Minimum entsprechen, sind den Wellenlängen proportional. Die Beugungsfiguren, welche man bei Anwendung homogener Lichtarten von verschiedener Wellenlänge erhält, sind also ähnlich und ihr lineares Grössenverhältniss ist das der Wellenlängen.
2. Aehnliche, aber ungleich grosse Beugungsöffnungen geben ähnliche Beugungsfiguren, deren lineares Grössenverhältniss das umgekehrte desjenigen der Oeffnungen ist.
3. Aendert sich die Beugungsöffnung derart, dass sämmtliche Ordinaten mit einem constanten Faktor m multiplicirt erscheinen, so wird für einen Punkt der XZ-Ebene die Intensität m^2 mal so gross.
4. Wird die Beugungsöffnung in der XY-Ebene parallel zu sich selbst verschoben, so ändert sich die Beugungsfigur nicht.
5. Die von einer Gruppe gleicher und gleichliegender Oeffnungen auf einen entfernten Punkt übertragene Intensität ist gleich dem Produkt der Intensität, welche eine Oeffnung hervorbringt, mit derjenigen, welche ein aus homologen Punkten der Oeffnungen gebildetes Punktsystem erzeugt.

Einige Fälle der Beugung haben wiederholte und eingehendere theoretische und experimentelle Behandlung erfahren, theils wegen der interessanten Erscheinungen, welche sie zeigen, theils wegen ihrer praktischen Wichtigkeit. Es gehören dahin namentlich die Beugungen bei Bildern von Sternen in Fernröhren, die TALBOT'schen Streifen, die sogen. lamellaren Beugungserscheinungen, die NEWTON'schen Staubringe und die Brennpunktseigenschaften von Gittern.

Verschiedene Beobachter[3]), worunter jedoch W. und J. HERSCHEL hervorzuheben sind, haben schon früh bemerkt, dass in stark vergrössernden Fernrohren das Bild eines Fixsterns nicht als Punkt erscheint, sondern als eine kreisrunde Scheibe, je nach der Helligkeit des Sterns von mehr oder weniger grossem Durchmesser und von mehr oder weniger Ringen umgeben. Es ist dies nichts

[1]) Compt. rend. 4, pag. 638. 1837.

[2]) Phil. Mag. (4) 16, pag. 321. 1858; vergl. VERDET, Optique phys. I, pag. 315.

[3]) HALLEY, Philos. Trans. 31, pag. 3. 1720; USHER, Irish Trans. 1788; ARAGO, Ann. de chim. et de phys. 26, pag. 435. 1824; POGG. Ann. 23, pag. 288. 1831; HERSCHEL, Vom Licht Art. 766 ff. 1828, Uebers. v. SCHMIDT, pag. 415; POGG. Ann. 23, pag. 281. 1831.

anderes, als die Beugungserscheinung, welche die kreisförmige Fernrohröffnung in der einfallenden, ebenen Lichtwelle liefert. Nach HERSCHEL, welcher viele Versuche darüber anstellte, haben sich besonders SCHWERD (in seinem Werk »Die Beugungserscheinungen«) und AIRY[1]) damit beschäftigt, ferner FOUCAULT[2]) welcher den reciproken Werth der scheinbaren Entfernung zweier leuchtender Punkte, deren Bilder im Fernrohr noch getrennt erkannt werden, als das »optische Vermögen« des Instrumentes eingeführt hat, endlich H. BRUNS[3]) und H. STRUVE[4]).

TALBOT'sche Streifen werden nach ihrem Entdecker[5]) Streifen genannt, welche das Spectrum in der Richtung der FRAUNHOFER'schen Linien durchziehen und dadurch entstehen, dass von dem violetten Ende her ein durchsichtiges Blättchen vor das Auge, etwa bis zur Bedeckung der halben Pupille, eingeschoben wird. Man kann das Blättchen nach STEFAN[6]) auch irgendwo zwischen Spalt und Auge in den Gang der Strahlen einschieben, wenn man darauf achtet, diejenige Hälfte derselben, welche das Prisma zunächst der brechenden Kante durchsetzt, durchgehen zu lassen. Zur Erklärung dieser Erscheinung berücksichtigte man anfangs allein den Wegunterschied, welchen die durch das Blättchen gegangenen Strahlen gegen die frei verlaufenen erhalten haben. Ist d die Blättchendicke, n der Brechungsexponent für eine bestimmte Farbe und λ die Wellenlänge derselben in Luft, so ist der Unterschied für senkrecht durch das Blättchen gegangene Strahlen bekanntlich $(n - 1)d$. Man schloss nun, dass überall da eine dunkle Linie sich einstellen müsse, wo für die betreffende Farbe

$$(n-1)d = \frac{2k+1}{2}\lambda$$

ist, unter k eine ganze Zahl verstanden. Man erhält so allerdings die Lage der Linien richtig, aber diese Betrachtung liefert keine Erklärung für den Umstand, der von vornherein bei der Erscheinung das grösste Interesse erregt hatte, dass nämlich die Streifen ausbleiben, wenn das Blättchen von der rothen Seite her vor das Auge geschoben wird. Um den Grund hierfür zu finden, müssen die Streifen als Beugungserscheinung behandelt werden. Das hat zuerst AIRY[7]) gethan. Von späteren Arbeiten über die Theorie sind namentlich die von H. STRUVE[8]) und KIRCHHOFF[9]) zu erwähnen, auf welche wir verweisen.

Lamellare Beugungserscheinungen nennt man solche, welche von durchsichtigen Schirmen, die eine sehr geringe Dicke haben müssen, damit charakteristische Erscheinungen auftreten, erzeugt werden. Die interferirenden Elementarstrahlen kommen hier von allen Punkten der einfallenden Welle, haben aber zum Theil durch die Lamellen Verzögerung erlitten, wodurch Gangunterschiede gegen die frei einfallenden Strahlen entstehen. Sind diese Gangunterschiede gross, wie bei dicken Lamellen, so interferiren die frei gegangenen und die verzögerten Strahlen merklich nur unter sich und das Resultat ist eine einfache Uebereinanderlagerung der Erscheinung, wie sie ein Schirm mit undurchsichtigen

---

[1]) Cambr. Trans. 5, pag. 283. 1834; POGG. Ann. 45, pag. 86. 1838.
[2]) Ann. de l'observ. de Paris 5. 1858.
[3]) Astron. Nachr. 104, pag. 1. 1883.
[4]) Mém. de l'Ac. de St. Pet. (7) 34, No. 5. 1886.
[5]) TALBOT, Philos. Mag. (2) 10, pag. 364. 1837.
[6]) POGG. Ann. 123, pag 509. 1864.
[7]) Philos. Trans. 1840, Bd. 2, pag. 1; 1841, Bd. 1, pag. 1; POGG. Ann. 53, pag. 459. 1841; 58, pag. 535. 1843.
[8]) Mém. de l'Ac. d. sc. de St. Pétersb. 31, No. 1. 1883.
[9]) KIRCHHOFF, Vorlesungen über mathem. Optik, pag. 111. Leipzig 1891.

Lamellen, und der, wie sie ein Schirm liefern würde, der an Stelle der Lamellen Oeffnungen besitzt, während der übrige Raum gedeckt ist. Sind aber die Lamellen dünn, die Gangunterschiede beider Lichtarten klein, so kommen durch die Einwirkung derselben auf einander eigenthümliche Interferenzerscheinungen zu Stande. FRESNEL[1]) hat dieselben schon erwähnt, QUINCKE[2]) sie genauer untersucht und JOCHMANN[3]) eine eingehende Theorie derselben geliefert. QUINCKE hat die Lamellen hauptsächlich dadurch hergestellt, dass er auf Glasplatten niedergeschlagene Silberschichten durch aufgelegtes Jod in durchsichtiges Jodsilber verwandelte. Lässt man nun durch eine zur Hälfte mit einer solchen geradlinig begrenzten Jodsilberschicht bedeckte Glasplatte Licht von einem leuchtenden Punkt fallen und untersucht wie bei den gewöhnlichen FRESNEL'schen Beugungserscheinungen in passender Entfernung die Grenze des geometrischen Schattens der Lamelle mit der Lupe, so beobachtet man eine Reihe im weissen Licht heller und dunkler Streifen parallel der Lamellengrenze und zu beiden Seiten derselben. Ihre Lage hängt namentlich auch von der Dicke der Schicht ab, so dass, wenn dieselbe etwa keilförmig ist in der Richtung der Begrenzung, die Streifen gegen die letztere geneigt verlaufen und zwar in der Weise, dass sie beim Fortschreiten in der Richtung abnehmender Dicke von der Lamellenseite auf die freie Seite übertreten. An Stellen, welche einem Gangunterschied von einer ganzen Anzahl Wellenlängen entsprechen, verschwinden die Streifen und die ganze Erscheinung wird bei gleichmässiger Dickenabnahme der Lamellen durch diese Stellen in Abtheilungen von identischem Aussehen zerlegt.

Streifen oder Ringe bestäubter Spiegel sind in der objektiven Form, wie sie Hohlspiegel liefern, zuerst von NEWTON beobachtet und im vierten Theil des zweiten Buches seiner Optik beschrieben worden. Sie entstehen, wenn die auf einen Hohlspiegel von belegtem Glase einfallenden Strahlen durch eine kleine Oeffnung in einem Schirm hindurchgehen, der so aufgestellt wird, dass der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels in seine Oeffnung fällt. Diese ist dann auf dem Schirm von einem schönen, bei Anwendung weissen Lichtes farbigen Ringsystem umgeben. Der Herzog von CHAULNES[4]) und BIOT[5]) führten die Beobachtungen weiter, und WHEWELL[6]) und QUETELET[7]) fanden die subjective Form der Erscheinung, welche von ebenen Glasspiegeln mit etwas bestäubter Vorderfläche erzeugt wird, wenn das beobachtende Auge der von der Lichtquelle auf den Spiegel gefällten Senkrechten nahe steht. Die Theorie der Erscheinung wurde genauer entwickelt oder durch Messungen geprüft von SCHLÄFLI[8]), MOUSSON[9]), STOKES[10]) und in neuerer Zeit von LOMMEL[11]) und K. EXNER[12]). Danach entstehen die Ringe durch das Zusammenwirken des beim ersten Durchgang durch die Vorderfläche

---

1) Mém. de l'acad. des sc. 5, pag. 451; Oeuvres I, pag. 359.

2) POGG. Ann. 132, pag. 321. 1867.

3) POGG. Ann. 136, pag. 561. 1869.

4) Mém. de l'acad. des sc. 1755, pag. 136.

5) Traité de physique T. 4, pag. 149. 1816.

6) Phil. Mag. (4) 1, pag. 336. 1851.

7) Corresp. phys. et math. 5, pag. 394. 1829.

8) Mitth. d. naturf. Ges. in Bern, No. 131 u. 132. 1848; GRUNERT's Archiv 13, pag. 299. 1849.

9) Neue Denkschr. d. allg. Schweiz. Ges. f. d. ges. Naturw. 1853, pag. 3.

10) Cambr. Trans. 9, pag. 147. 1851; POGG. Ann. Ergänz.-Bd. 3, pag. 546. 1853.

11) Namentlich: Erlanger Sitz.-Ber. 1875 u. 76. Auch besonders ersch.: Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. Erlangen 1875.

12) Wiener Sitz.-Ber. 76, pag. 522. 1878 u. folg., namentl. 90, pag. 827. 1884.

und des nach der Reflexion an der Hinterfläche an demselben Staubtheilchen gebeugten Lichtes.

Endlich haben wir noch die sogen. Brennpunktseigenschaften von Gittern zu erwähnen. MASCART beobachtete zuerst bei anscheinend sehr regelmässigen Gittern die Eigenthümlichkeit, dass die auf der einen Seite liegenden Spectra von convergirenden Strahlenbündeln, die auf der andern Seite liegenden von divergirenden gebildet wurden. CORNU[1]) wurde dadurch veranlasst zu untersuchen, nach welchem Gesetz die Oeffnungen eines Gitters angeordnet sein müssen, damit derartige Wirkungen entstehen. Wir betrachten eine durch den leuchtenden Punkt F gehende, auf den Gitterstrichen senkrechte Ebene und setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die Verbindungslinie von F mit dem Brennpunkt F' auf der Gitterebene normal sei, wir nennen $x_0, x_1 \ldots$ den Abstand der Oeffnungen $T_0, T_1 \ldots$ vom Fusspunkt O des Perpendikels FF', D die Linie OF, D' die OF', dann ist die Bedingung, dass sämmtliche nach F gelangende Strahlen sich verstärken, wenn F und F' auf verschiedenen Seiten des Gitters liegen, unter k eine ganze Zahl verstanden:

$$FT_{n+1} + F'T_{n+1} - (FT_n + F'T_n) = k\lambda$$

oder

$$\sqrt{D^2 + x_{n+1}^2} + \sqrt{D'^2 + x_{n+1}^2} - \left(\sqrt{D^2 + x_n^2} + \sqrt{D'^2 + x_n^2}\right) = k\lambda,$$

und da die x sehr klein gegen D und D' sind, durch Entwickelung der Wurzeln nach dem binomischen Satz und Vernachlässigung der höheren Glieder

$$(x_{n+1}^2 - x_n^2)\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D'}\right) = 2k\lambda.$$

Das Gesetz der Vertheilung der aufeinanderfolgenden Oeffnungen ist ganz dasselbe, wie das der NEWTON'schen Farbenringe zwischen einem Glas vom Radius R und einer Ebene bei Licht von der Wellenlänge λ', nämlich $x_{n+1}^2 - x_n^2 = R\lambda'$.

Die Verbindung beider Gleichungen giebt

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = k\,\frac{2}{R}\,\frac{\lambda}{\lambda'},$$

was der Linsenformel $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ ganz analog ist. — Das Vorstehende gilt auch noch, wenn die Linie FF' etwas gegen die Gitterebene geneigt ist, und ebenso für den Fall ringförmiger Beugungsöffnungen. Wir können also sagen: Ein ebenes Gitter, dessen geradlinige oder kreisförmige Striche vertheilt sind nach dem Gesetze der Durchmesser der Farbenringe, welche unter lothrechtem Einfall des Lichts zwischen einer ebenen Fläche und einer cylindrischen oder sphärischen vom Radius R gebildet werden, besitzt die Eigenschaften einer cylindrischen oder sphärischen Linse, welche eine Reihe reeller oder virtueller Brennpunkte in gerader Linie mit dem Mittelpunkt der Ringe hätte; ihre Abstände vom Gitter enthalten als Faktoren die reciproken Werthe der ganzen positiven oder negativen Zahlen, die den Ordnungen der Beugungsspectren entsprechen. Die Brennweite erster Ordnung, die grösste von allen, ist für einfaches Licht von der Wellenlänge λ' gleich der Hälfte des Radius R. Für Licht von anderer Wellenlänge λ ist sie ein Multiplum von dem Verhältniss λ' zu λ. Auch J. SORET[2]) hat diesen Gegenstand untersucht und bei Kreisgittern experimentell geprüft.

FEUSSNER.

---

[1]) Compt. rend. 80, pag. 645. 1875; POGG. Ann. 156, pag. 114. 1875.

[2]) Arch. des sc. phys. 52, pag. 320. 1875; POGG. Ann. 156, pag. 99. 1875.

Die Natur des Lichtes.

I. Grundvorstellungen.

Ueber die Natur des Lichtes haben ursprünglich zwei verschiedene Vorstellungsweisen geherrscht, die sogenannte Emanationstheorie und die Undulationstheorie. Die erstere hatte ihren Hauptvertreter in NEWTON[1]). Nach ihm verursachen kleine Partikelchen, welche von einem leuchtenden Punkte mit sehr grosser Geschwindigkeit fortgeschleudert werden, die Empfindung des Lichtes. Die Partikelchen bewegen sich geradlinig mit constanter Geschwindigkeit, so lange sie sich in einem homogenen Medium befinden, an der Grenze zweier verschiedener Medien tritt aber eine Richtungsänderung der Bahn der Lichtpartikelchens ein. Das Gesetz, nach welchem dieselbe stattfindet, das sogenannte Brechungsgesetz, findet man auf Grund folgender Ueberlegung: Zerlegt man die Geschwindigkeit eines an die ebene Grenzfläche zweier Medien auftreffenden Lichtpartikelchen in zwei Componenten, von denen die eine der Grenze parallel, die andere senkrecht zu ihr gerichtet ist, so wird die erste nicht geändert, da man diese Geschwindigkeit nach Belieben als in dem ersten oder in dem zweiten Medium stattfindend sich denken kann, dagegen wird die letztere geändert, da die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Medien als verschieden anzunehmen ist, falls bei der Brechung überhaupt eine Richtungsänderung stattfindet. Wenn man nun berücksichtigt, dass die in beiden Medien resultirenden Geschwindigkeiten des Lichtpartikelchens in einem für die beiden Medien charakteristischen Verhältniss stehen, so folgt unmittelbar das SNELLIUS-sche Brechungsgesetz, und zwar ergiebt sich nach dieser Vorstellung direkt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demjenigen der beiden Medien, in welchem der Weg des Lichtpartikelchens einen kleineren Winkel mit dem Einfallsloth einschliesst, die grössere ist.

Auch das Reflexionsgesetz wird nach der Emanationstheorie erklärt, jedoch sind schon bei diesen verhältnissmässig einfachen optischen Erscheinungen die Erklärungen unvollständig, da die Theorie über die Menge des reflektirten und gebrochenen Lichtes keinen Aufschluss zu geben vermag. Noch weit unwahrscheinlicher wird die Theorie, wenn sie auf Interferenz- oder Diffractionsphänomene angewandt wird, da die Zahl der neu einzuführenden Hilfshypothesen sehr stark wächst, und da trotz dieser die Erscheinungen zum Theil unrichtig beschrieben werden.

Die zweite der genannten Theorien, die Undulationstheorie, ist von HUYGENS[2]) entwickelt. Nach ihm besteht das Licht in einer schwingenden Bewegung einer sehr feinen, alle Körper und den leeren Raum durchdringenden Materie, des Lichtäthers, welcher seinen Schwingungszustand mit einer endlichen Geschwindigkeit, die in verschiedenen Medien verschieden ist, fortzupflanzen befähigt ist. Vor HUYGENS fassten allerdings schon DESCARTES[3]) und HOOKE[4]) das Licht als einen Schwingungszustand des Aethers auf, ihre Vorstellungsweise erwies sich aber als

[1]) NEWTON, Optics. London 1704.

[2]) HUYGENS, Traité de la lumière. Leyden 1690. — Auch in OSTWALD's Klassikern, No. 20.

[3]) DESCARTES, Dioptrica. 1637. Principia philosophiae III. 1644. Mundus sive dissertatio de lumine. 1704.

[4]) HOOKE, Micrographia. London 1665.

unfruchtbar, da sie die Fortpflanzung dieser Bewegung für zeitlos hielten, entgegen den Beobachtungen, welche RÖMER in den Jahren 1670—1676 über die Verfinsterung der Jupitermonde angestellt hatte. Daher ist HUYGENS als Begründer der Undulationstheorie anzusehen.

HUYGENS führte die Gesetze der geradlinigen Fortpflanzung, der Reflexion und Brechung auf ein einziges Princip zurück, welches üblich jetzt das Princip der einhüllenden Wellen genannt wird. Nach HUYGENS ist jeder Punkt des Raumes, nach welchem eine Erschütterungswelle fortgepflanzt ist, der Erregungsmittelpunkt eines neuen Wellensystems. Daher treffen in jedem Punkte P des von der Primär-Welle durchlaufenen Raumes in einem bestimmten Zeitpunkte unendlich viele von verschiedenen Punkten ausgehende Wellen zusammen. Das obige Princip sagt nun aus, dass dieselben nur dann zu einer merkbaren Lichtbewegung Anlass geben, wenn sie in P gleich gerichtet sind, d. h. eine gemeinsame Tangentialebene besitzen. Der Ort der fortgepflanzten Wellenbewegung ist daher die Enveloppe der Elementarwellen, die Richtung des Lichtstrahls wird gefunden, wenn man den Punkt P mit dem Erschütterungscentrum einer die Enveloppe in P berührenden Elementarwelle verbindet.

Hieraus erklärt sich zunächst die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, d. h. die Identität[1]) des geometrischen und des optischen Schattens, da für keinen Punkt innerhalb des geometrischen Schattens eines Körpers die Elementarwellen sich berühren. — Ausserdem erklärt sich das Gesetz der Reflexion und Brechung in einfacher Weise. Fasst man die Punkte der ebenen Grenze zweier verschiedener Medien, auf welche eine ebene Lichtwelle auffällt, als Erschütterungscentren auf, so beginnen dieselben bei einer schief einfallenden Welle ihre Erschütterungen in nacheinander folgenden Zeiten, und zwar ist die Zeitdifferenz, welche zwischen dem Beginn der von zwei Punkten P_1 und P_2 der Grenze fortgepflanzten Erschütterungen verstreicht, ihrem Abstande proportional. Hieraus folgt, dass die Enveloppe der von der Grenze ausgesandten Wellen zwei Ebenen sind, von denen die eine (im ersten Medium, in welchem das Licht einfällt) in Bezug auf die Grenze symmetrisch zu der einfallenden Wellenebene liegt (Reflexionsgesetz), während die Richtung der in dem zweiten Medium fortgepflanzten Wellenebene, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes verschieden von derjenigen im ersten Medium ist, mit der Richtung der einfallenden Wellenebene nach dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz verknüpft ist. Aus dieser Construction ergiebt sich unmittelbar, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demjenigen Medium, in welchem der Lichtstrahl, d. h. die Normale zur Wellenebene, den kleineren Winkel mit dem Einfallsloth bildet, die kleinere ist.

Nur in letzterem Punkte unterscheidet sich also die von der Undulationstheorie gegebene Erklärung der Brechung von der nach der Emanationstheorie gegebenen. Jedoch erweist sich erstere schon bei der Behandlung dieser optischen Erscheinungen der letzteren überlegen, da sie die Möglichkeit einer theoretischen Ableitung auch der reflektirten und gebrochenen Lichtmengen zulässt, wie YOUNG im Jahre 1803 für den Fall senkrechter Incidenz darthat; in eminentem Maasse erweist sich aber die grössere Fruchtbarkeit der Undulationstheorie, falls es sich um die Erklärung von Interferenz-Erscheinungen handelt, welche sie auf die natürlichste Weise ohne neue Hilfshypothesen leistet.

---

[1]) Dass diese Identität nur eine angenäherte ist, zeigte erst FRESNEL in seiner Theorie der Diffractionserscheinungen (Oeuvres complètes 1, pag. 201), in welcher er obiges HUYGENS'sches Princip mit dem Princip der Interferenz verband.

Würde allein schon dieser Punkt genügt haben, die Emissionstheorie endgültig zu verlassen, so ist es doch immerhin von grossem Werth, dass es FOUCAULT[1]) gelungen ist, einen direkten Beweis ihrer Unzulässigkeit erbracht zu haben, indem er nach seiner auf pag. 7 dieses Bandes beschriebenen Methode die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Wasser kleiner fand, als in Luft.

Dass das Licht sich in optisch dichteren Medien langsamer fortpflanzt, als in Luft, kann man noch durch andere Experimente bestätigt finden, wenn man zu ihrer Erklärung sich auf den Boden der HUYGENS'schen Theorie stellt.

Lässt man z. B. das von dem einen Spiegel des FRESNEL'schen Zweispiegelversuchs reflektirte Lichtbündel eine dünne Glas- oder Glimmerplatte durchsetzen, so verschiebt sich das System der Interferenzfranzen nach der Seite der eingeschalteten Platte.

Ebenso spricht die Verengerung der Ringe bestimmter Ordnung eines NEWTON'schen Farbenglases, welche bei Ersetzung der Luftschicht desselben durch Wasser eintritt, für geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in letzterem.

Obgleich also NEWTON's Grundvorstellungen zu verwerfen sind, so hat derselbe dennoch um die weitere Ausbildung auch der Undulationstheorie sich Verdienste erworben, indem durch seine Arbeiten über die Dispersion und die Farben dünner Blättchen das Princip der Periodicität der Lichtbewegung eingeführt wurde. Dieses ist besonders von EULER[2]) betont, er erkannte als der erste die Abhängigkeit der Farbe von der Schwingungsdauer und die Analogie zwischen Farbe und Tonhöhe.

So vortheilhaft auch diese Analogie zur Vorstellbarkeit vieler optischer Erscheinungen war, so war sie doch der allgemeinen Anerkennung der Undulationstheorie eine grosse Zeit lang hinderlich. Es machte zwar die Theorie von HUYGENS keinerlei Voraussetzungen über die Richtung der Bewegung in den Wellen, implicite war aber doch die ursprüngliche Vorstellung die, dass die Wellenbewegung eine longitudinale sei, da man den Lichtäther als Flüssigkeit auffasste, und in einer solchen nur longitudinale Wellen auftreten. Nach dieser Vorstellung konnte aber HUYGENS nicht die von ihm im Doppelspath entdeckten Erscheinungen erklären, und dies war der Grund, weshalb NEWTON die Undulationstheorie, welche zunächst nach den Arbeiten YOUNG's mit Evidenz bestätigt schien, verwarf, und für die neuen Erscheinungen eine Erklärung auf dem Boden seiner Emanationstheorie suchte. Bei diesen Erscheinungen treten gewisse Richtungsunterschiede auf, und diese suchte NEWTON durch eine den Magneten analoge Polarisation der Lichtpartikelchen zu erklären. In Folge dieser NEWTON'schen Auffassung werden die hierhin gehörigen optischen Phänomene Polarisationserscheinungen genannt. Es soll zunächst eine Beschreibung der experimentellen Thatsachen und dann der hieraus für die Natur der Lichtbewegung gezogenen Schlüsse folgen.

II. Das polarisirte Licht.

a) Herstellungsweise.

Wir nennen einen Lichtstrahl polarisirt, wenn er sich nicht rings um seine Fortpflanzungsrichtung gleichmässig verhält. Man kann dies daran erkennen, dass eine Drehung des Lichtstrahls um die Richtung der Fortpflanzung als Axe

[1]) FOUCAULT, Ann. de chim. et de phys. (3) 41, pag. 129. 1854.

[2]) EULER, Mém. de Berl. 1745, pag. 13; 1746, pag. 141.

eine Aenderung in den beobachteten Lichterscheinungen hervorruft. Eine solche ist zuerst von HUYGENS[1]) beobachtet. Er fand, dass ein durch einen isländischen Doppelspath hindurchgegangener Lichtstrahl im Allgemeinen in zwei Lichtstrahlen von gleicher Intensität[2]) getheilt wird. Lässt man nun einen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen neuerdings auf einen Kalkspathkrystall fallen, so zeigt sich, dass der Lichtstrahl auch dann noch im Allgemeinen in zwei zerlegt wird, deren Intensität aber je nach der Orientirung der beiden Kalkspathkrystalle zu einander verschieden ist. Man nennt daher die beiden aus dem ersten Krystall austretenden Strahlen polarisirt, und da der eine derselben im zweiten Krystall dieselben Erscheinungen hervorruft, wie der andere, falls man den ersten Krystall um 90° um die Strahlrichtung dreht, so nennt man die beiden aus dem ersten Kalkspath austretenden Strahlen rechtwinklig zu einander polarisirt.

Ausser dem Kalkspath besitzt noch eine grosse Anzahl anderer Krystalle die Eigenschaft der Doppelbrechung. Für alle gilt die Regel, dass die beiden austretenden Strahlen rechtwinklig zu einander polarisirt sind.

Verweilen wir zunächst bei den Erscheinungen am Kalkspath. Die beiden Strahlen, in welche sich der einfallende zertheilt, liegen in dem Hauptschnitt des Krystalls, d. h. in derjenigen Ebene, welche durch das Einfallsloth und die krystallographische Hauptaxe geht. Der eine der beiden Strahlen geht bei senkrechter Incidenz ungebrochen hindurch, d. h. er befolgt das gewöhnliche Brechungsgesetz und wird daher der ordentliche oder ordinäre Strahl genannt, der andere Strahl wird abgelenkt, befolgt also ein aussergewöhnliches Brechungsgesetz und heisst daher der ausserordentliche oder extraordinäre.

Will man die Richtungsunterschiede der Polarisation der beiden Strahlen auf eine feste Ebene beziehen, so wählt man dazu am zweckmässigsten den Hauptschnitt, resp. die zu ihm parallel durch einen Strahl gelegte Ebene. Der Hauptschnitt ist in der That eine besonders ausgezeichnete Ebene, indem die Intensitäten der aus dem zweiten Krystall austretenden Strahlen, welche im Allgemeinen vier an der Zahl sind, nur abhängen von der Lage der Hauptschnitte der beiden Krystalle gegen einander, und zwar nur von der absoluten Grösse ihres Winkels, nicht von seinem Vorzeichen. In letzterer Thatsache spricht sich aus, dass die Eigenschaften des ordentlichen sowohl, wie des ausserordentlichen Strahles symmetrisch zum Hauptschnitt liegen müssen.

Man nennt den Hauptschnitt die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, eine Ausdrucksweise, mit der vorläufig weiter nichts gesagt ist, als dass dieser Strahl rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum sich nicht gleichmässig verhält, dass aber die nach verschiedenen Richtungen stattfindenden Verschiedenheiten symmetrisch zu seiner Polarisationsebene, dem Hauptschnitt, liegen.

Da, wie wir oben sahen, der ausserordentliche Strahl rechtwinklig zum ordentlichen polarisirt ist, so muss man consequenter Weise die zum Hauptschnitt senkrechte Ebene die Polarisationsebene des ausserordentlichen Strahles nennen. Man drückt, diese Bezeichnung auch in der Form aus, dass man sagt, der ordentliche Strahl sei im Hauptschnitt, der ausserordentliche senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

Das Gesetz, nach welchem die Intensität der beiden in einem Doppelspath sich bildenden Strahlen von der Lage der Polarisationsebene des einfallenden

---

[1]) HUYGENS, l. c., pag. 89.

[2]) Dies gilt nur in gewisser Annäherung, s. weiter unten.

Lichtes abhängt, ist zuerst von MALUS[1]) ausgesprochen. Bezeichnet man mit α den Winkel jener Ebene mit dem Hauptschnitt des Krystalls, so verhalten sich nach MALUS die Intensitäten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles wie $cos^2\alpha : sin^2\alpha$.

MALUS giebt nicht an, ob er durch eigentliche photometrische Messungen zu diesem Gesetz gelangt sei. Die von LANGIER und PETIT im Auftrage von ARAGO[2]) ausgeführten Messungen bestätigten das MALUS'sche Gesetz mit einer Genauigkeit von ungefähr $\frac{1}{50}$ des Intensitätsverhältnisses der beiden Strahlen. Seitdem ist dies Gesetz als auch innerhalb engerer Grenzen gültig angenommen und bei photometrischen Messungen öfter benutzt, wie z. B. von BEER, HAGEN, PROVOSTAYE und DESAINS.

Indessen zeigte WILD[3]) durch genauere Messungen, dass das MALUS'sche Gesetz nicht streng gültig ist, vielmehr das Intensitätsverhältniss der beiden in einem Kalkspathrhomboëder bei senkrechter Incidenz sich bildenden Strahlen gleich $C \cdot cos^2\alpha : sin^2\alpha$ ist, wo die Constante C sich aus der Beobachtung desjenigen Winkels α ergiebt, für welchen die Intensitäten der beiden Strahlen gleich sind. Diesen beobachtete WILD nicht zu 45°, wie er nach MALUS sein müsste, sondern zu 44° 36', wobei der Beobachtungsfehler nur ± 30'' betrug. Dieser Werth stimmt bis auf 2' mit demjenigen überein, welcher aus der NEUMANN'schen Theorie[4]) folgt, die diese Erscheinungen strenger, d. h. unter Rücksicht auf die an den Grenzflächen des Kalkspaths stattfindenden Intensitätsverluste durch Reflexion zu berechnen gestattet. Unter ihrer Berücksichtigung folgt ferner, dass die Intensitäten der beiden im Kalkspathrhomboëder sich bildenden Strahlen, falls unpolarisirtes Licht einfällt, nicht genau gleich sind, sondern dass der ordentliche Strahl um $\frac{1}{33}$ seiner Intensität schwächer ist, als der ausserordentliche.

Die Constante C hängt von der Natur des doppelbrechenden Krystalles und seiner Orientirung ab. Für Bergkrystall ist C merklich gleich 1; für ein Kalkspathbruchrhomboëder ergiebt sich nach dieser Beobachtung WILD's C zu 0·9725, für ein NICOL'sches Prisma mit schiefen Endflächen (s. unten) ist nach BASSO's Berechnung[5]) $C = 0{\cdot}9773$.

Der Durchgang des Lichtes durch Doppelspath war lange Zeit die einzige Methode, um polarisirtes Licht zu erhalten, bis im Jahre 1810 MALUS[6]) eine wesentlich davon verschiedene zweite Methode entdeckte: Das unter einem gewissen Einfallswinkel (55° etwa) vom Glase reflektirte Licht zeigt dieselben Eigenschaften, wie die beiden durch Kalkspath hindurchgegangenen Strahlen; und zwar verhält sich für dasselbe die Einfallsebene, d. h. die durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallsloth gehende Ebene, gerade so, wie der Hauptschnitt des Kalkspaths zu dem ordentlichen Strahl, eine Thatsache, welche man constatiren kann, wenn man das durch Reflexion polarisirte Licht auf einen Kalkspathkrystall fallen lässt. Es ist daher die Einfallsebene die Polarisationsebene des unter dem gewissen Winkel reflektirten Lichtes, d. h. man kann auch sagen: dasselbe ist in der Einfallsebene polarisirt.

Weiterhin zeigte MALUS, dass nicht nur Glas oder Wasser, sondern alle

---

[1]) MALUS, Théorie de la double réfraction. Paris 1810.

[2]) ARAGO, Mém. scientifique t. I, pag. 179.

[3]) WILDO, POGG. Ann. 118, pag. 193. 1863.

[4]) F. NEUMANN, Abhandl. d. Berl. Akad. 1835.

[5]) BASSO, Atti dell' Acc. delle Sc. di Torino, 22, pag. 671. 1887.

[6]) MALUS, Bulletin de la Soc. Philom. 1, No. 16. — Mémoires d'Arcueil, I, pag. 113. 1808.

durchsichtigen Substanzen dem Lichte die gleiche Modifikation ertheilen, dass jedoch der Einfallswinkel, unter welchem dieses geschah, und den er Polarisationswinkel nannte, für die verschiedenen Substanzen verschieden sei. Er konnte jedoch nicht eine Beziehung zwischen diesem Winkel und den sonstigen optischen Eigenschaften der Substanzen auffinden.

Eine solche Beziehung entdeckte BREWSTER[1]) durch Experimente an 18 verschiedenen Körpern.

Das nach ihm benannte BREWSTER'sche Gesetz lautet: die Tangente des Polarisationswinkels ist gleich dem Brechungsexponenten der Substanz. Hieraus folgt, dass das reflektirte Licht dann die Eigenschaft der Polarisation erhält, wenn der reflektirte Strahl senkrecht zum gebrochenen steht.

Lässt man das unter dem Polarisationswinkel von einer Glasfläche reflektirte Licht von einer zweiten Glasfläche unter demselben Winkel reflektiren, so ist, wie MALUS gefunden hat, die Intensität des reflektirten Lichtes gleich $J \cos^2 \alpha$, wobei α den Winkel zwischen den beiden Einfallsebenen der zwei Glasflächen bedeutet, und J die Intensität des reflektirten Lichtes, falls jene beiden Einfallsebenen zusammenfallen.

Die Erscheinungen des zweimal unter dem Polarisationswinkel an Glas reflektirten Lichtes werden bequem studirt an dem von NÖRRENBERG construirten Polarisationsapparat[2]).

Eine dritte Methode, polarisirtes Licht herzustellen, besteht darin, einen Lichtstrahl durch einen Satz paralleler Glasplatten unter einem Einfallswinkel, welcher gleich dem Polarisationswinkel ist, hindurchzuschicken. Auf den Grad der hierdurch erreichten Polarisation wird später zurückgekommen werden.

Die Methode, polarisirtes Licht durch Reflexion oder Brechung zu erhalten, hat den Vortheil vor der auf der Doppelbrechung beruhenden, dass man nur einerlei polarisirtes Licht erhält, aber den Nachtheil der geringeren Intensität desselben, und was besonders störend ist, den, dass die Polarisation in gewissem Maasse unvollständig ist, wie wir unten sehen werden.

In gewissen Fällen erhält man auch durch Doppelbrechung nur einerlei polarisirtes Licht, nämlich bei denjenigen Krystallen, welche die beiden Strahlen ungleich stark absorbiren. Wählt man die Dicke der Krystallplatte genügend gross, so tritt nur ein Lichtstrahl aus derselben heraus. In hervorragendem Maasse besitzt diese Eigenschaft der Tourmalin, wie BIOT[3]) gefunden hat. Eine zwischen 1 und 2 *mm* dicke Platte desselben, welche seiner krystallographischen Hauptaxe parallel ist, lässt nur den ausserordentlichen Strahl durch.

In noch stärkerem Maasse absorbirt ein von HERAPATH hergestelltes Chininsalz[4]) einen der gebrochenen Strahlen, sodass auch dieses als Polarisationsinstrument zu gebrauchen ist.

Bei dem Gebrauche dieser absorbirenden Krystalle ist aber die Intensitätsverminderung, welche auch der durchgehende Strahl in hohem Maasse erleidet, ein Uebelstand. Daher ist es vortheilhafter, ein stark doppelt brechendes Prisma, z. B. ein Kalkspathprisma, dessen brechende Kante zur krystallographischen

---

1) BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. 125.

2) HACHETTE, Nouv. Bull. de la soc. philom. année 1833, pag. 86. Abbildung und Beschreibung desselben s. Lehrbuch der Physik und Meteorologie von MÜLLER, bearb. von PFAUNDLER. 8. Aufl., 2. Bd. pag. 486. Braunschweig 1879. MASCART, Traité d'Optique, 2. Bd. Paris 1890, pag. 30.

3) BIOT, Ann. de chim. et de phys. 94, pag. 191. 1815.

4) STOKES, Rep. of the Brit. Asssoc. Part. II., pag. 15, 1852.

Hauptaxe parallel ist, anzuwenden und dasselbe durch ein zu ihm inverses Glasprisma zu achromatisiren.

SÉNARMONT[1]) hat an Stelle des Glasprismas ein Kalkspathprisma gesetzt, dessen Axe senkrecht zu einer seiner Flächen steht, während bei dem zweiten an das erste angekittete Kalkspathprisma die Axe senkrecht zur brechenden Kante und in einer Prismenfläche liegt. Bei senkrecht einfallendem Licht geht daher der ordentliche Strahl ungebrochen, der ausserordentliche gebrochen hindurch. — Eine noch grössere Divergenz der beiden Strahlen wird in dem von WOLLASTON[2]) angegebenen Prisma erreicht, allerdings mit Verzicht auf Achromatisirung. —

Ein dem WOLLASTON'schen in gewissem Maasse ähnliches Prisma hat AHRENS[3]) construirt[4]). — Das von DOVE[5]) construirte Prisma bezweckt ebenfalls eine weite Trennung des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles. Dasselbe ist ein gleichschenklig rechtwinkliges Kalkspathprisma, von welchem die eine Kathetenfläche senkrecht, die andere parallel zur optischen Axe liegt. Der ordentliche Strahl, welchen man allein benutzen will, erleidet eine zweimalige Brechung an den Kathetenflächen und eine Totalreflexion an der Hypothenusenfläche.

Wenn auch bei diesen Prismen durch die Divergenz der beiden Strahlen leicht der eine abzublenden ist, so bieten die sogenannten Polarisationsprismen, welche durch Totalreflexion einen Strahl nicht zum Durchtritt gelangen lassen, doch grösseren Vortheil. Man kann dieselben in zwei Gruppen sondern, je nachdem der ordentliche, oder der ausserordentliche Strahl vernichtet wird.

Bei der ersten Gruppe verfährt man so, dass ein prismatischer Kalkspathkörper durch einen Schnitt in zwei congruente Hälften zertheilt wird, zwischen welche eine Substanz in dünner Schicht verbreitet wird, welche einen Brechungsexponenten besitzt, der kleiner als der dem ordinären Strahl entsprechende ist. Ueberschreitet daher der Einfallswinkel desselben an der Schicht einen gewissen Betrag, so wird der ordinäre Strahl an ihr totalreflektirt und an den geschwärzten Seitenflächen des Prismas vernichtet, während der extraordinäre Strahl, dessen Brechungsexponent beim Kalkspath stets kleiner ist, als der des ordinären[6]), eventuell noch durch die Schicht treten kann.

Die verschiedenen nach diesem Princip construirten Prismen unterscheiden sich nach der Orientirung der Begrenzungsflächen und der Zwischenschicht zur krystallographischen Hauptaxe des Kalkspaths, sowie nach der Wahl des Zwischenmediums.

Die erste von NICOL[7]) angegebene Herstellungsart ist folgende: Man spaltet

---

1) DE SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (3) 50, pag. 480. 1857.

2) WOLLASTON, Phil. Trans. of the Roy. Soc. 1820, I, pag. 126.

3) AHRENS, Phil. Mag. (5) 19, pag. 69. 1885.

4) Eine besondere Anwendung eines Doppelprismas, in welchem der ordinäre Strahl nicht abgelenkt wird, sondern nur der extraordinäre, zur Messung der Grösse eines Gegenstandes bei bekannter Entfernung, oder zur Messung letzterer bei bekannter Grösse hat ROCHON (Nova Acta Acad. Petropol. VI) gemacht. Diese Vorrichtung wird das ROCHON'sche Mikrometer genannt.

5) DOVE, POGG. Ann. 122, pag. 18. 1864.

6) Letzerer ist für gelbes Licht 1·658; ersterer schwankt zwischen diesem Werth und 1·486, je nach der Richtung der Wellennormale.

7) NICOL, Edinb. new phil. Journ. No. 11, pag. 83. 1828; No. 54, pag. 332. 1839. — S. auch POGG. Ann. 29, pag. 182. 1833; 44, pag. 168. 1838; 49, pag. 238. 1840; 50, pag. 25. 1840.

aus wasserhellem Kalkspath ein Rhomboëder, welches reichlich dreimal so lang als breit ist, schleift die Endflächen, deren Neigungswinkel gegen die Seitenkanten ursprünglich 72° beträgt, so ab, dass dieser Winkel 68° gross wird, und führt durch das Prisma den Schnitt so, dass er senkrecht zu den Endflächen und der Ebene der Längsaxe und krystallographischen Hauptaxe steht. Als Zwischenmedium verwendet man Canadabalsam. — Der Oeffnungswinkel des in das Prisma eintretenden Lichtkegels, dessen ordinäre Strahlen noch total reflektirt werden (er soll im Folgenden mit Gesichtsfeld bezeichnet werden), beträgt etwa 30°. Es ist übrigens zu beachten, dass bei einem convergent eintretenden Lichtbündel die Polarisation der austretenden Strahlen nicht mehr vollständig ist, indem die Lage ihrer Polarisationsebene etwas mit ihrer Neigung variirt.

Ein Uebelstand an dem NICOL'schen Prisma ist die grosse Länge im Verhältniss zur Breite, sowie die schiefe Lage der Endflächen gegen die Prismenaxe. Durch ersteres ist ein grosser Materialaufwand bedingt, durch letzteres eine ungleichmässige Intensitätsvertheilung in den austretenden Lichtstrahlen verschiedener Richtung. Dem ersteren Mangel kann man abhelfen durch schiefere Lage der Endflächen, andererseits kann man Prismen mit geraden Endflächen herstellen[1]), wobei aber das Verhältniss der Länge zur lichten Weite noch weiter wächst (auf 3·75).

Durch Wahl einer anderen Zwischenschicht kann man das Prisma bedeutend verkürzen, allerdings auf Kosten der Grösse des Gesichtsfeldes. Dies findet beim FOUCAULT'schen Prisma[2]) statt, in welchem die Zwischenschicht aus Luft besteht; die beiden Stücke, in welches ein Spaltrhomboëder von ungefähr der $1\frac{1}{2}$fachen Länge im Verhältniss zur Breite zerschnitten ist, werden, ohne sich zu berühren, nur durch die Fassung zusammengehalten. Das Gesichtsfeld beträgt nur 8°. Die Wahl eines Zwischenmediums mit einem Brechungsexponenten, welcher stark von denen des Kalkspaths abweicht, hat indessen den Nachtheil, dass störende Wirkungen entstehen durch die mehrfach in der Zwischenschicht reflektirten Bilder.

Man erhält vervollkommnete Leistungen gegenüber den von den bisher genannten Polarisationsprismen gelieferten, wenn man die Orientirung des prismatischen Kalkspathkörpers anders wählt, d. h. zu Seitenflächen nicht mehr Spaltflächen verwendet. So vergrössert THOMPSON[3]) das Gesichtsfeld auf 39°, indem er die krystallographische Hauptaxe senkrecht zur Prismenaxe wählt, und den Schnitt in den Hauptschnitt verlegt. GLAZEBROOK[4]) construirte ein diesem gleich orientirtes Prisma mit geraden Endflächen, welches nach ihm noch den Vortheil bietet, dass divergent austretende Lichtstrahlen möglichst eben polarisirt sind (s. oben).

Von diesem Prisma unterscheidet sich das GLAN'sche[5]) nur durch die Wahl der Luft als Zwischenschicht. Dadurch wird eine bedeutende Verkürzung herbeigeführt, die Länge beträgt nur das 0·83fache der Breite. Das Gesichtsfeld ist 8°.

Eine dieser in gewisser Weise ähnliche Construction wendeten MADAN und AHRENS[6]) an, welche bei einem Prisma, dessen Länge doppelt so gross wie

---

1) Vergl. K. FEUSSNER, Zeitschr. f. Instrkde. 4, pag. 41. 1884.

2) FOUCAULT, Compt. rend. 45, pag. 238. 1857. — POGG. Ann. 102, pag 642. 1857.

3) S. P. THOMPSON, Phil. Mag. (5) 12, pag. 349. 1881.

4) GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) 15, pag. 352. 1883.

5) P. GLAN, CARL's Repert. 16, pag. 570. 1880; 17, pag. 195. 1881.

6) MADAN und AHRENS, La Nature 31, pag. 371. 1885.

die Breite, und dessen Zwischenschicht ebenfalls Luft ist, ein Gesichtsfeld von 28° erhielten.

Die Frage, wie ein Polarisationsprisma mit geraden Endflächen und symmetrisch zur Prismenaxe liegendem Gesichtsfeld am günstigsten, d. h. mit möglichst grossem Gesichtsfeld zu construiren sei, hat FEUSSNER[1]) untersucht. Es muss dazu die Hauptaxe des Kalkspaths senkrecht zum Schnitt liegen und der Brechungsexponent der Zwischenschicht gleich dem der ausserordentlichen Strahlen, d. h. ungefähr gleich 1·49 sein. Ein solches Prisma würde ein Gesichtsfeld von fast 42° besitzen, und seine Länge das 4·02fache der Breite sein.

Durch Verkürzung des Prismas wird das Gesichtsfeld kleiner, wie es bei dem im Uebrigen ähnlich construirten Prisma von HARTNACK und PRAZMOWSKI[2]) der Fall ist, welches bei 3·5facher Länge im Verhältniss zur Breite ein Gesichtsfeld von 35° besitzt[3]).

In der zweiten Gruppe von Polarisationsprismen wird der extraordinäre Strahl durch Totalreflexion entfernt, indem eine Kalkspathplatte die Zwischenschicht zweier gleicher Medien mit genügend hohem Brechungsexponenten bildet[4]). Ein solches Prisma ist zuerst von JAMIN[5]) construirt, indem er die Platte in einen mit Schwefelkohlenstoff gefüllten Glastrog tauchte. ZENKER[6]) hat den JAMIN'schen Polarisator dadurch dauerhafter zu machen gesucht, dass er den Schwefelkohlenstoff durch Flintglas ersetzte. Der Vortheil dieser Constructionen besteht in der Materialersparniss. Ausserdem ist man nicht mehr an Kalkspath gebunden, sondern kann, wie FEUSSNER[7]) vorschlug, Natronsalpeter als Zwischenplatte verwerthen, welcher deshalb noch günstiger als Kalkspath ist, weil bei ihm die Differenz der Brechungsexponenten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles eine noch grössere ist (1·587 zu 1·336). Das Gesichtsfeld wächst bei der Wahl des Natronsalpeters an Stelle des Kalkspaths von 44° auf 56°, das Verhältniss der Prismenlänge zur Breite nimmt von 4·25 auf 3·34 ab.

Diesen ähnliche Constructionen hat ferner BERTRAND[8]) vorgeschlagen.

b) Interferenz des polarisirten Lichtes.

Die von ARAGO im Jahre 1811 beobachteten Farbenerscheinungen von Krystallblättchen, welche sich zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen befinden, veranlassten FRESNEL und ARAGO[9]) zum Studium der Interferenz des polarisirten Lichtes.

---

[1]) FEUSSNER, l. c. pag. 45. Ueber die genauere Berechnung vergl. auch W. GROSSE, die gebräuchlichen Polarisationsprismen etc. Clausthal 1889. — Verhandl. d. Ges. deutsch. Naturf. 11, pag. 33—36. 1891.

[2]) HARTNACK und PRAZMOWSKI, CARL's Repert. II, pag. 217. 1866. — Ann. de chim. et de phys. (4), 7, pag. 181. 1866. — POGG. Ann. 127, pag. 494; 128, pag. 336. 1866.

[3]) Betreffs nach anderen Constructionen vergl. THOMPSON, Phil. Mag. (5) 21, pag. 476. 1886.

[4]) Dieser Vorschlag ist zuerst von E. SANG in der R. Soc. Edinb. im Jahre 1837 gemacht. Vergl. Proc. R. Soc. Edinb. 18, pag. 323. 1891.

[5]) JAMIN, POGG. Ann. 137, pag. 174. 1869.

[6]) Zeitschr. f. Instrkde. 4, pag. 50. 1884.

[7]) ibid.

[8]) BERTRAND, Compt. rend. 99, pag. 538. 1884.

[9]) FRESNEL, Mém. sur l'influence de la polarisation dans l'action, que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres. 1816; Oeuvr. compl. I, pag. 385 u. 410. — ARAGO et FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 10, pag. 288. 1819; Oeuvr. compl. de FRESNEL I, pag. 507; Oeuvr. compl. D'ARAGO 10, pag. 132.

Zunächst stellte ARAGO die Frage auf, ob polarisirte Strahlen wie gewöhnliche interferiren. In der That zeigten sich die inneren Streifen des Beugungsbildes eines sehr schmalen Körpers unter Anwendung polarisirten Lichtes in gleicher Weise wie beim gewöhnlichen Licht.

FRESNEL liess hierauf die von einem Lichtpunkt kommenden Strahlen durch ein Kalkspathrhomboëder treten, um zu sehen, ob die von den beiden Bildern des leuchtenden Punktes kommenden, rechtwinklig gegen einander polarisirten Strahlenbüschel im gemeinsamen Felde Interferenzstreifen hervorbringen in der Weise, wie bei seinem Spiegelversuch. Durch besondere Anordnungen sorgte er dafür, dass die beiden Strahlen keinen erheblichen Gangunterschied erhielten, was am vollkommensten dadurch erreicht wurde, dass das Licht zwei identische Kalkspathrhomboëder hintereinander in rechtwinklig zu einander gekreuzten Lagen durchsetzte. Der beiden austretenden Strahlenbüscheln gemeinsame Raum zeigte keine Interferenzstreifen. FRESNEL schloss daraus, dass zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Lichtstrahlen nicht interferenzfähig sind. — ARAGO gab hiervon einen Beweis, der von der Doppelbrechung unabhängig ist, indem er die beiden von zwei einander nahen Spaltöffnungen kommenden Strahlen, welche im gewöhnlichen Lichte Interferenzstreifen erzeugen, durch zwei identische, unabhängig von einander drehbare Glimmerplatten-Sätze (s. o. pag. 628) polarisirte. Waren dieselben einander parallel, so erschienen die Interferenzstreifen wie beim gewöhnlichen Lichte, waren sie rechtwinklig zu einander, so verschwanden die Streifen völlig. Dies Experiment kann noch bequemer mittelst zweier gleich dicker, unabhängig von einander drehbarer Turmalinplatten ausgeführt werden.

Gemeinsam führten die genannten Physiker das Experiment in der Weise aus, dass sie vor die beiden Spaltöffnungen ein Gypsblättchen schalteten. Es erscheint nur ein Interferenzstreifensystem. Dieses ist als eine Uebereinanderlagerung zweier congruenter Streifensysteme aufzufassen, deren jedes aus der Interferenz der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen entsteht und die sich deshalb decken, weil die Gangunterschiede der in jedem System zur Interferenz gelangenden Strahlen die gleichen sind. Würden die ordentlichen mit den ausserordentlichen Strahlen ebenfalls interferiren können, so müssten noch zwei andere Streifensysteme auftreten, welche in Folge der ungleichen Geschwindigkeiten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles im Krystall zu beiden Seiten vom centralen Streifensystem in einiger Entfernung von demselben sich befinden müssten. Ihr Ausbleiben beweist die Nicht-Interferenzfähigkeit zweier rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen.

Zerschneidet man das Gypsblättchen in der Mitte zwischen den beiden Spaltöffnungen und dreht den einen Theil um einen rechten Winkel, so verschwindet das centrale Streifensystem und es treten zwei seitliche Systeme auf. Diese rühren nun her von der Interferenz der ordentlichen Strahlen, welche die eine Hälfte des Gypsblättchens durchsetzt haben, mit den ausserordentlichen Strahlen, welche die andere Hälfte des Gypsblättchens durchsetzten und mit ersteren parallel polarisirt sind. Aus dem Verschwinden des centralen Streifensystems schliesst man in gleicher Weise wie vorhin auf die Nicht-Interferenzfähigkeit zweier rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen.

FRESNEL und ARAGO untersuchten weiterhin die Interferenzfähigkeit zweier rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen, welche sie auf dieselbe Polarisationsebene zurückführten, indem sie dieselben durch einen Kalkspath treten liessen, dessen Hauptschnitt um 45° gegen jede der Polarisationsebenen der beiden Strahlen geneigt war. Die von ihnen gefundenen Gesetze sind folgende:

1) Zwei in derselben Richtung polarisirte Strahlen interferiren wie gewöhnliches Licht.
2) Zwei rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren nicht.
3) Zwei von einem natürlichen Strahle herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren auch dann nicht, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.
4) Zwei von einem polarisirten Strahle herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen interferiren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.
5) Wenn zwei von einem polarisirten Strahle herrührende rechtwinklig polarisirte Strahlen, auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht, interferiren, so muss in gewissen Fällen der wirklichen Differenz der durchlaufenen Wege eine halbe Wellenlänge zugefügt werden. Diese treten dann ein, wenn die Polarisationsebene, auf welche die beiden Strahlen zurückgeführt werden, mit der ursprünglichen Polarisationsebene nicht in demselben von den Polarisationsrichtungen der beiden Strahlen gebildeten Quadranten liegt.

Die FRESNEL-ARAGO'schen Versuche sind von STEFAN[1]), MACH und ROSICKY[2]) erweitert und modificirt, indem sie das Princip der spectralen Auflösung von im weissen Licht hervorgerufenen Interferenz- resp. Beugungserscheinungen anwandten.

c) Analytische Darstellung der Lichtbewegung.

Nach der HUYGHENS'schen Undulationstheorie besteht die Lichtbewegung in der Entfernung der Aethertheilchen aus ihrer Ruhelage oder, wie wir kurz sagen wollen, in gewissen Elongationen der Aethertheilchen. Haben wir es mit streng homogenem Licht zu thun, d. h. Licht von einerlei Farbe, so ist die Elongation der Aethertheilchen in einem bestimmten Punkte (sie soll im Folgenden mit s bezeichnet werden) nach den von NEWTON und EULER eingeführten Auffassungen eine periodische Function der Zeit t. Nennt man T die Periode der Lichtbewegung, so ist s entwickelbar in eine Reihe nach den *sin* und *cos* der Vielfachen der Grösse $\frac{2\pi t}{T}$. Wir sind nun berechtigt, mit dem ersten Glied der Entwickelung abzubrechen, einerseits, da wir Licht, dessen Periode $\frac{1}{2}T$ ist, als wesentlich andere Farbe empfinden, als solches mit der Periode T, und da andererseits Licht einerlei Farbe sich nur noch in seiner Intensität unterscheiden kann, dagegen eine Verschiedenheit, wie sie der Klangfarbe gleich hoher Töne entspricht, nicht wahrzunehmen ist.

Durch Zusammenziehung des *sin* und *cos* kann man daher den Ansatz machen

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right). \quad (1)$$

A heisst die Amplitude, das Argument des *sin* die Phase der Lichtbewegung.

Die Entwickelungen des Folgenden sind nicht daran gebunden, dass s gerade die oben genannte specielle Bedeutung hat, sie gelten vielmehr, falls man überhaupt nur voraussetzt, dass bei der Lichtbewegung die periodische Aenderung irgend einer Vectorgrösse maassgebend ist. s kann daher auch z. B. eine

[1]) J. STEFAN, Wien. Ber. (2) 66, pag. 425. 1872.
[2]) E. MACH und W. ROSICKY, Wien. Ber. (2) 72. 1875.

elektrische Verschiebung bedeuten, oder eine Drehung, welche ein Volumenelement des Aethers ausführt. Wegen dieser allgemeinen Gültigkeit wird s im Folgenden oft als Lichtvector bezeichnet werden, falls aber die Bequemlichkeit des Ausdrucks es wünschenswerth macht, wird von der speciellen, anfangs erörterten Vorstellung Gebrauch gemacht werden.

Senden zwei leuchtende Punkte P_1 und P_2 gleichgerichtete Erschütterungen nach einem Punkte P und hätten die von P_1 und P_2 einzeln hervorgerufenen Lichtvectoren s_1 und s_2 die Werthe:

$$s = A_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p_1\right), \quad s_2 = A_2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p_2\right), \tag{2}$$

so ist der in F resultirende Lichtvector s die Summe der Vectoren s_1 und s_2, d. h. es ist

$$s = s_1 + s_2 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right). \tag{3}$$

Dabei ist

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(p_1 - p_2), \tag{4}$$

$$\tang p = \frac{A_1 \sin p_1 + A_2 \sin p_2}{A_1 \cos p_1 + A_2 \cos p_2}. \tag{4'}$$

Nach diesen Gleichungen ist der Lichtvector in einem Punkte P leicht zu bilden, falls beliebig viel leuchtende Punkte parallel gerichtete Erschütterungen dorthin senden. — Sind diese nicht mehr parallel, so muss man die einzelnen Lichtvectoren in P nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen x, y, z zerlegen. Die Componenten nach derselben Richtung kann man dann nach dem Schema obiger Gleichungen addiren. Hieraus erkennt man, dass die allgemeinste Lichtbewegung, welche in P stattfinden kann, durch die Gleichungen dargestellt wird:

$$u = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right), \quad v = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q\right), \quad w = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right), \tag{5}$$

worin u, v, w die Componenten des Lichtvectors nach den rechtwinkligen Richtungen x, y, z bedeuten.

Man erhält die Bahn, welche die Aethertheilchen bei der Lichtbewegung beschreiben, falls man t aus den Gleichungen (5) eleminirt. Es folgt aus (5)

$$\frac{u}{A} \sin(q - r) + \frac{v}{B} \sin(r - p) + \frac{w}{C} \sin(p - q) = 0, \tag{6}$$

d. h. die Bahn ist eine ebene Curve. Die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Coordinatenebenen erhält man durch Elimination von t aus je zweien der Gleichungen (5). So folgt für die Projection die xy-Ebene:

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - \frac{2uv}{AB} \cos(p - q) = \sin^2(p - q). \tag{7}$$

Diese Curve stellt eine Ellipse dar, diese ist also die allgemeinste Form der Bahn eines Aethertheilchens. Bezeichnet man das Axenverhältniss derselben durch $\tang i$, den Winkel einer Hauptaxe der Ellipse mit der x-Axe durch ϑ, so ist

$$\sin 2i = \frac{2AB}{A^2 + B^2} \sin(p - q), \quad \tang 2\vartheta = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \cos(p - q). \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (5) erkennt man, dass diese Ellipse, falls $p > q$ ist, in dem Sinne einer Drehung durchlaufen wird, welche die positive x-Axe mit der positiven y-Axe zur Deckung bringt. Bei Wechsel des Vorzeichens der Phasendifferenz $p - q$ ändert sich der Sinn, in welchem die Aethertheilchen die

Ellipse durchlaufen. — Bei stetiger Veränderung jener Phasendifferenz geht die Bahn in der xy-Ebene stetig aus elliptischer Form in zwei gerade Linien über, wie man leicht diskutiren kann aus (7) und (8). Für $p - q = \frac{\pi}{2}$ und $A = B$ geht die Bahn in einen Kreis über.

Es soll jetzt die Schwingungsart näher untersucht werden, wie sie im polarisirten Lichte, z. B. in dem durch einen Kalkspath gegangenen ordinären Strahl, stattfindet. Dass der Lichtvector nicht in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes liegen kann, dass also die Wellen keine longitudinalen sein können, ergiebt sich ohne Weiteres, da sonst die Richtungsunterschiede des polarisirten Lichtes nicht zu erklären wären. Daher erklärte FRESNEL[1]) die Lichtbewegung für eine transversale, welchen Gedanken schon vor ihm HOOKE[2]) ausgesprochen, aber nicht an beweisenden Experimenten durchgeführt hatte, und zwar schloss FRESNEL aus der Nichtinterferenz rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen, dass die Schwingungen geradlinig seien, und entweder in oder senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen. Der von FRESNEL hierfür gegebene[3]) Beweis, welcher nicht zwingend ist, ist später von VERDET[4]) vervollständigt. Im Folgenden ist derselbe etwas modificirt.

Die Componenten des Lichtvectors in einem Punkte P sind nach den Gleichungen (5) gegeben durch die Ausdrücke:

$$u_1 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right), \quad v_1 = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q\right), \quad w_1 = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right).$$

Ausser der durch diese Gleichungen definirten Lichtbewegung soll in P noch eine solche stattfinden, wie sie herrührt von einem rechtwinklig zu dem vorigen polarisirten Strahl, welcher mit ihm die gleiche Intensität besitzt, aber auf seinem Wege einen Phasenunterschied δ gegen die im ersten Strahl stattfindende Lichtbewegung erhalten haben mag. Die FRESNEL-ARAGO'schen Versuche zeigen, dass ein rechtwinklig zu einem anderen polarisirter Strahl dadurch definirt ist, dass letzterer um 90° gedreht wird um seine Fortpflanzungsrichtung als Axe. Wählen wir dazu die z-Achse, so werden daher die Componenten des Lichtvectors, wie sie durch den zweiten Strahl in P hervorgerufen werden, gegeben durch:

$$u_2 = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q + \delta\right), \quad v_2 = -A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p + \delta\right),$$
$$w_2 = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r + \delta\right).$$

Die resultirende Lichtbewegung hat die Componenten

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2.$$

Nennt man die Amplituden derselben A', B', C', so ist nach der Gleichung (4)

$$A'^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\delta + q - p),$$
$$B'^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(-\delta + q - p),$$
$$C'^2 = 2C^2 (1 + \cos\delta).$$

Die Intensität eines Lichtstrahls wird nun definirt als die innerhalb einer Schwingungsperiode stattfindende mittlere lebendige Kraft der Bewegung der Aethertheile. Diese ist aber, wie man durch Rechnung leicht erhält, proportional

[1]) FRESNEL, Oeuvr. compl. I, pag. 394.
[2]) HOOKE, Micrographia, London 1665.
[3]) FRESNEL, Oeuvr. compl. II, pag. 493.
[4]) VERDET, Compt. rend. 32, pag. 46. 1850.

der Summe der Quadrate der Amplituden der nach den Coordinatenrichtungen genommenen Componenten des Lichtvectors.

Nennen wir daher die Intensität J, und sehen von dem Proportionalitätsfaktor ab, so ist

$$J = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 2(A^2 + B^2 + C^2) + 2C^2 \cos\delta - 4AB \sin(q-p) \sin\delta.$$

Man beobachtet nun bei einer Ueberlagerung zweier rechtwinklig zu einander polarisirter Strahlen auf allen Stellen des auffangenden Schirmes, d. h. für jeden Werth von δ, eine constante Intensität. Da also J von δ unabhängig sein soll, so folgt

$$C = 0, \quad AB \sin(q-p) = 0.$$

Erstere Relation besagt, dass die Schwingungen senkrecht zum Lichtstrahl stattfinden, letztere sagt nach der Gleichung (8), dass dieselben geradlinig sind. Da nun die Eigenschaften des Lichtstrahls symmetrisch in Bezug auf seine Polarisationsebene sein müssen, so erfolgen die Schwingungen entweder in der Polarisationsebene oder senkrecht zu ihr. Es ist zu bemerken, dass letzter Schluss nur für isotrope Medien gültig ist, d. h. z. B. für die Schwingungen der durch einen Kalkspath gegangenen Strahlen in Luft. Für die Schwingungen im Krystall selbst ist jener Schluss nicht berechtigt, da dort die Symmetrieeigenschaften aufhören. — Ueber die Versuche, welche man angestellt hat, um zu entscheiden, ob die Schwingungen in oder senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen, soll in einem späteren Capitel die Rede sein.

Nach der soeben auseinandergesetzten Schwingungsweise der Aethertheilchen im polarisirten Licht erklären sich das vierte und fünfte der FRESNEL-ARAGO'schen Gesetze (cf. pag. 633) ohne Schwierigkeit.

Die geradlinige Polarisation des Lichtes ist ein specieller Fall der Polarisation welcher immer dann eintritt, wenn wir uns nach einer der eben beschriebenen Methoden nur einen polarisirten Strahl verschaffen, z. B. durch Reflexion oder durch Anwendung einer Turmalinplatte, oder durch ein Polarisationsprisma, welches den einen der zwei Strahlen vernichtet. Durch Zusammensetzung zweier nicht in derselben Ebene polarisirter Strahlen erhält man den allgemeineren Fall polarisirten Lichtes, in welchem nach den obigen Auseinandersetzungen die Aethertheilchen in elliptischer resp. circulärer Form schwingen, die Bewegung geht dann aber stets noch rechtwinklig zur Fortpflanzungsrichtung, d. h. transversal vor sich. Ausser diesen transversal-elliptisch polarisirten Lichtbewegungen, welche im Allgemeinen in durchsichtigen Medien die einzig möglichen sind, kann man nun aber in der That durch gewisse Mittel, z. B. Totalreflexion oder Anwendung absorbirender Medien, auch den oben genannten allgemeineren Fall der schief- resp. longitudinal-elliptischen Lichtschwingungen realisiren.

III. Das natürliche und partiell polarisirte Licht.

Ist das Verhalten eines Lichtstrahls rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum das gleiche, so nennen wir ihn einen unpolarisirten oder natürlichen Lichtstrahl. Letztere Bezeichnung rührt daher, weil das von einem leuchtenden Körper ausgehende Licht im Allgemeinen keine Polarisation zeigt, d. h. dies Verhalten das natürliche ist. Indess ist es nicht nöthig, dass ein Lichtstrahl rings um die Fortpflanzungsrichtung wirklich das gleiche Verhalten zeigt, um doch die dem natürlichen Lichte charakteristischen Eigenschaften zu besitzen. Diese letzteren sind folgende:

1) Die Intensität der beiden Strahlen, in welche sich ein Strahl natürlichen Lichtes bei senkrechter Incidenz auf einen doppeltbrechenden Krystall theilt, ist (abgesehen von den durch Reflexion stattfindenden Verlusten, cf. oben pag. 627) von der Orientirung des Krystalls unabhängig. Mit anderen Worten, die Amplitude der Componente des Lichtvectors, welche nach einer beliebigen, senkrecht zur Fortpflanzung liegenden Richtung genommen wird, ist von der Lage derselben unabhängig.

2) Diese Eigenschaft des natürlichen Lichts geht im Gegensatz zu dem circular polarisirten Lichte nicht verloren, wenn man seinen nach zwei senkrechten Richtungen genommenen Componenten eine beliebige Phasendifferenz ertheilt (z. B. durch Totalreflexion oder Durchgang durch eine Platte eines doppeltbrechenden Mediums).

Diese Eigenschaften des natürlichen Lichtes kann man nur[1]) erklären, wenn man annimmt, dass die Schwingungsweise eines natürlichen Lichtstrahls in einer für das Auge nicht mehr wahrnehmbaren schnellen Zeitfolge wechselt, dass also die beiden zu einander und zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Componenten des Vectors eines natürlichen Lichtstrahls durch die Formeln ausgedrückt werden:

$$u = \sum A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + p\right), \quad v = \sum B \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + q\right), \tag{9}$$

wo die Summen über die verschiedenen successiven Schwingungen zu erstrecken sind.

Die beiden genannten charakteristischen Eigenschaften polarisirten Lichtes drücken sich, wie VERDET[2]) gezeigt hat, in den Gleichungen aus:

$$\sum A^2 = \sum B^2, \quad \sum AB\cos(p-q) = 0, \quad \sum AB\sin(p-q) = 0. \tag{10}$$

Hiernach kann man auf unendlich viel Arten Licht von den Eigenschaften des unpolarisirten sich hergestellt denken, z. B. kann man $p - q = 0$ oder $= \pi$ annehmen, den Lichtstrahl also aus nur geradlinig polarisirten Einzelstrahlen zusammengesetzt denken.

DOVE[3]) hat in der That bei einem Lichtstrahl, welcher ein schnell rotirendes NICOL'sches Prisma durchsetzte, alle Eigenschaften des natürlichen Lichtes constatirt. — Man erhält aber auch natürliches Licht, wenn man der Phasendifferenz $p - q$ alle möglichen Werthe beilegt. — Am einfachsten kann man natürliches Licht dadurch sich hergestellt denken, dass die Aethertheilchen zunächst eine gewisse Anzahl mal eine bestimmte Ellipse durchlaufen, darauf aber eine andere Anzahl mal eine andere Ellipse, deren Lage zu der ersten leicht aus den Gleichungen (10) abzuleiten ist. Der Durchlaufungssinn der ersten Ellipse muss dem der zweiten entgegengesetzt sein, da $p - q$ wegen der letzten der Gleichungen

[1]) Von vielen Autoren werden die Eigenschaften natürlichen Lichtes dadurch zu erklären gesucht, dass sie annehmen, es seien in jedem auch noch so schmalen Strahl natürlichen Lichtes ausserordentlich viele Strahlen verschiedenen, aber im Laufe der Zeit nicht wechselnden Polarisationszustandes enthalten. Diese Erklärung ist aber deshalb unzulässig, weil Erschütterungen einer Anzahl benachbarter Punkte, auch wenn sie für jeden Punkt anders gerichtet sind, Wellen entstehen lassen, deren Polarisationszustand eine stetige Function des Ortes ist. Also auch in diesem Falle würde an jeder Stelle des Raumes die Lichtbewegung einen gewissen, mit der Zeit sich nicht ändernden Polarisationszustand besitzen, welcher mit den Eigenschaften des natürlichen Lichtes nicht verträglich wäre.

[2]) VERDET, Ann. de l'Ecole norm. 2, pag. 291. 1865; Mondes 8, pag. 252. 1865.

[3]) DOVE, POGG. Ann. 71, pag. 97. 1847.

(10) nicht in der Summe einerlei Vorzeichen haben darf, und da mit dem Vorzeichen dieser Grösse der Durchlaufungssinn wechselt (pag. 634).

Jedenfalls ist es nicht möglich, durch ein Experiment näheren Aufschluss über die Natur der Aetherschwingungen im unpolarisirten Licht zu erhalten, wie STEFAN[1]) versucht hat, da, wie STOKES[2]) gezeigt hat, zwei aus Einzelstrahlen zusammengesetzte Vibrationssysteme, welche in den vier Grössen: ΣA^2, ΣB^2, $\Sigma AB \cos(p-q)$, $\Sigma AB \sin(p-q)$ übereinstimmen, völlig gleiche optische Wirkung haben — nach STOKES Benennung äquivalente Systeme sind. Bei der dargelegten Auffassung des natürlichen Lichtes ist das dritte der FRESNEL-ARAGO-schen Gesetze (cf. pag. 633) leicht erklärt. Während nämlich ein Einzelstrahl des natürlichen Lichtstrahls wohl ein gewisses Interferenzstreifensystem hervorbringen würde, so bringt ein anderer Einzelstrahl, dessen Polarisationsebene nicht in demselben von den senkrecht aufeinander stehenden Polarisationsebenen der beiden Polarisatoren gebildeten Quadranten liegt, nach dem letzten der FRESNEL-ARAGO'schen Gesetze ein Fransensystem hervor, dessen Minima auf die Maxima des ersten fallen. Daher interferiren zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen natürlichen Lichtes nicht, auch wenn sie auf dieselbe Polarisationsebene gebracht werden.

Die Auffassung des natürlichen Lichtes als eine Succession verschiedener Schwingungen besitzt, wie AIRY[3]) zuerst bemerkt hat, noch die Schwierigkeit, dass die Veränderungen der Lage und Gestalt der Vibrationsellipse des natürlichen Lichtes, wenn dieses in der Farbe absolut homogen sein soll, nicht als continuirlich gedacht werden können. Denn bei continuirlicher Aenderung der Bahn kann die resultirende Bewegung als aus zwei Bewegungen verschiedener Schwingungsdauer zusammengesetzt angesehen werden. So ist bei einer gleichmässigen Drehung der Polarisationsebene linear polarisirten Lichtes, wie beim DOVE'schen Experiment, der Lichtstrahl als aus zwei entgegengesetzt rotirenden, circular polarisirten Strahlen der Schwingungszahlen $N+n$ und $N-n$ zusammengesetzt anzusehen, wo N die Schwingungszahl des einfallenden Lichtes bedeutet, n die Zahl der Umdrehungen der Polarisationsebene in der Sekunde.

Dass diese Auffassung richtig ist, hat RIGHI[4]) durch ein Experiment gezeigt, in welchem durch geeignete Anordnungen die beiden circular polarisirten Strahlen verschiedener Schwingungszahl in geradlinige, gleichgerichtet polarisirte Strahlen verwandelt werden, welche zur Interferenz gelangen. In diesem Falle hängt die resultirende Amplitude von der Zeit ab, und in der That beobachtete RIGHI eine Bewegung der Interferenzstreifen, indem durch einen festen Punkt des auffangenden Schirmes zwei n Interferenzfranzen in der Sekunde hindurchwanderten, entsprechend der Differenz zwei n der Schwingungszahlen der interferirenden Strahlen. Diese Erscheinung ist ganz dem der Schwebungen zweier fast gleich hoher Töne analog.

Diese Schwierigkeit, welche LIPPICH[5]) zu complicirten Annahmen über die Aetherschwingungen im natürlichen homogenen Lichte veranlasst hat, fällt aber nicht sehr ins Gewicht, wenn man annimmt, dass die Aenderungen der Bahn der Aethertheilchen nur sehr langsam im Verhältniss zu ihrer Schwingungs-

---

1) STEFAN, Wien. Ber. 50, pag. 380. 1864; POGG. Ann. 124, pag. 623. 1864.
2) STOKES, Phil. Mag. (4) 3, pag. 316. 1852.
3) AIRY, Cambr. Trans. 4, pag. 79, 198. 1831.
4) RIGHI, Journ. de Phys. (2) 2, pag. 437. 1883.
5) LIPPICH, Wien. Ber. (2) 48, pag. 146. 1863.

geschwindigkeit vor sich gehe, dass also in dem betrachteten Beispiel n sehr klein gegen N sei, da in diesem Falle die Homogenität des Lichtes wenigstens sehr annähernd erhalten bleibt.

Dass nun in der That diese Annahme berechtigt ist, haben FIZEAU und FOUCAULT[1]) gezeigt, welche durch spectrale Zerlegung der von einem FRESNEL-schen Spiegel hervorgebrachten Interferenzfigur noch Interferenzen bei einem Gangunterschied von 4000 Wellenlängen beobachteten.

Noch in anderer Weise hat FIZEAU[2]) gezeigt, dass bei einer Phasendifferenz, wie sie 50000 Wellenlängen entspricht, noch die Interferenzen ganz ungestört auftreten. Er beobachtete die Ringe eines NEWTON'schen Farbenglases, welches durch eine Flamme beleuchtet war, die ein Gemisch von vier Theilen rektificirten käuflichen Methylalkohols mit einem Theil absoluten Alkohols lieferte. Die geringe Menge des in beiden vorhandenen Kochsalzes färbte die Flamme rein gelb, so dass in ihr nur die D-Linie, welche im wesentlichen aus zwei verschiedenen Wellenlängen besteht, auftrat. Durch Vergrösserung des Abstandes wanderten die Ringe und die Zahl der durch eine bestimmte Marke hindurchgegangenen Ringe giebt direkt die Vergrösserung des Gangunterschiedes der beiden an der Vorder- und Rückfläche der Luftschicht reflektirten, zur Interferenz gelangenden Lichtstrahlen in Wellenlängen an. Betrug dieselbe 500 Wellenlängen, so verschwanden die Ringe, weil die dunkeln Stellen der von dem einen Bestandtheil der D-Linie gelieferten Interferenzfigur auf die hellen Stellen der von dem anderen Bestandtheil der D-Linie gelieferten Ringe fallen. Bei 1000 Wellenlängen Gangunterschied waren die Interferenzen wieder sehr deutlich. FIZEAU konnte 52 Reihen deutlicher Ringe vorübergehen lassen, ohne dass die Interferenzen aufhörten.

Hieraus ist also zu schliessen, dass, falls wirklich das natürliche Licht in einer Succession verschiedener Schwingungszustände besteht, dieselben so langsam vor sich gehen, dass in einem Zeitraum, welcher grösser als 50000 Schwingungsdauern ist, das Licht noch als wesentlich von einerlei Schwingungsart anzusehen ist. Der Zeitraum von 50000 Schwingungsdauern hat ungefähr den Werth $2 \cdot 10^{-10}$ *sec.*

Ist daher dies eine untere Grenze für die Dauer der Constanz des Schwingungszustandes natürlichen Lichtes, so kann man auch eine obere für dieselbe angeben, innerhalb deren also das natürliche Licht seinen Schwingungszustand schon oft gewechselt haben muss. Mit Hilfe der HERTZ'schen Versuchsanordnung kann man die Dauer einer einzelnen elektrischen Entladung unter den Werth $2 \cdot 10^{-9}$ *sec* herabdrücken. Würde das von einer solchen Entladung herrührende Licht keine nachweisbaren Spuren von Polarisation enthalten, so würde $2 \cdot 10^{-9}$ *sec* ein Werth für jene obere Grenze sein. — Diesbezügliche Versuche sind bei diesen schnellen Entladungen noch nicht angestellt.

Ein Vibrationssystem, welches einer oder mehreren der Gleichungen (10) nicht genügt, entspricht dem sogen. partiell polarisirten Licht. Es lassen sich stets zwei Richtungen x und y, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung liegen, auffinden, für welche die zweite jener Gleichungen erfüllt ist. Die nach diesen Richtungen genommenen Componentensummen ΣA^2 und ΣB^2 sind ein Maximum resp. Minimum. Die Differenz $\Sigma A^2 - \Sigma B^2$ wird als Quantum des

---

[1]) FIZEAU und FOUCAULT, Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 138. 1849.

[2]) FIZEAU, Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862; POGG. Ann. 119, pag. 87. 1863.

(10) nicht in der Summe einerlei Vorzeichen haben darf, und da mit dem Vorzeichen dieser Grösse der Durchlaufungssinn wechselt (pag. 634).

Jedenfalls ist es nicht möglich, durch ein Experiment näheren Aufschluss über die Natur der Aetherschwingungen im unpolarisirten Licht zu erhalten, wie STEFAN[1]) versucht hat, da, wie STOKES[2]) gezeigt hat, zwei aus Einzelstrahlen zusammengesetzte Vibrationssysteme, welche in den vier Grössen: ΣA^2, ΣB^2, $\Sigma AB \cos(p - q)$, $\Sigma AB \sin(p - q)$ übereinstimmen, völlig gleiche optische Wirkung haben — nach STOKES Benennung äquivalente Systeme sind. Bei der dargelegten Auffassung des natürlichen Lichtes ist das dritte der FRESNEL-ARAGO-schen Gesetze (cf. pag. 633) leicht erklärt. Während nämlich ein Einzelstrahl des natürlichen Lichtstrahls wohl ein gewisses Interferenzstreifensystem hervorbringen würde, so bringt ein anderer Einzelstrahl, dessen Polarisationsebene nicht in demselben von den senkrecht aufeinander stehenden Polarisationsebenen der beiden Polarisatoren gebildeten Quadranten liegt, nach dem letzten der FRESNEL-ARAGO'schen Gesetze ein Fransensystem hervor, dessen Minima auf die Maxima des ersten fallen. Daher interferiren zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen natürlichen Lichtes nicht, auch wenn sie auf dieselbe Polarisationsebene gebracht werden.

Die Auffassung des natürlichen Lichtes als eine Succession verschiedener Schwingungen besitzt, wie AIRY[3]) zuerst bemerkt hat, noch die Schwierigkeit, dass die Veränderungen der Lage und Gestalt der Vibrationsellipse des natürlichen Lichtes, wenn dieses in der Farbe absolut homogen sein soll, nicht als continuirlich gedacht werden können. Denn bei continuirlicher Aenderung der Bahn kann die resultirende Bewegung als aus zwei Bewegungen verschiedener Schwingungsdauer zusammengesetzt angesehen werden. So ist bei einer gleichmässigen Drehung der Polarisationsebene linear polarisirten Lichtes, wie beim DOVE'schen Experiment, der Lichtstrahl als aus zwei entgegengesetzt rotirenden, circular polarisirten Strahlen der Schwingungszahlen $N + n$ und $N - n$ zusammengesetzt anzusehen, wo N die Schwingungszahl des einfallenden Lichtes bedeutet, n die Zahl der Umdrehungen der Polarisationsebene in der Sekunde.

Dass diese Auffassung richtig ist, hat RIGHI[4]) durch ein Experiment gezeigt, in welchem durch geeignete Anordnungen die beiden circular polarisirten Strahlen verschiedener Schwingungszahl in geradlinige, gleichgerichtet polarisirte Strahlen verwandelt werden, welche zur Interferenz gelangen. In diesem Falle hängt die resultirende Amplitude von der Zeit ab, und in der That beobachtete RIGHI eine Bewegung der Interferenzstreifen, indem durch einen festen Punkt des auffangenden Schirmes zwei n Interferenzfranzen in der Sekunde hindurchwanderten, entsprechend der Differenz zwei n der Schwingungszahlen der interferirenden Strahlen. Diese Erscheinung ist ganz dem der Schwebungen zweier fast gleich hoher Töne analog.

Diese Schwierigkeit, welche LIPPICH[5]) zu complicirten Annahmen über die Aetherschwingungen im natürlichen homogenen Lichte veranlasst hat, fällt aber nicht sehr ins Gewicht, wenn man annimmt, dass die Aenderungen der Bahn der Aethertheilchen nur sehr langsam im Verhältniss zu ihrer Schwingungs-

---

[1]) STEFAN, Wien. Ber. 50, pag. 380. 1864; POGG. Ann. 124, pag. 623. 1864.
[2]) STOKES, Phil. Mag. (4) 3, pag. 316. 1852.
[3]) AIRY, Cambr. Trans. 4, pag. 79, 198. 1831.
[4]) RIGHI, Journ. de Phys. (2) 2, pag. 437. 1883.
[5]) LIPPICH, Wien. Ber. (2) 48, pag. 146. 1863.

geschwindigkeit vor sich gehe, dass also in dem betrachteten Beispiel n sehr klein gegen N sei, da in diesem Falle die Homogenität des Lichtes wenigstens sehr annähernd erhalten bleibt.

Dass nun in der That diese Annahme berechtigt ist, haben FIZEAU und FOUCAULT[1]) gezeigt, welche durch spectrale Zerlegung der von einem FRESNEL-schen Spiegel hervorgebrachten Interferenzfigur noch Interferenzen bei einem Gangunterschied von 4000 Wellenlängen beobachteten.

Noch in anderer Weise hat FIZEAU[2]) gezeigt, dass bei einer Phasendifferenz, wie sie 50000 Wellenlängen entspricht, noch die Interferenzen ganz ungestört auftreten. Er beobachtete die Ringe eines NEWTON'schen Farbenglases, welches durch eine Flamme beleuchtet war, die ein Gemisch von vier Theilen rektificirten käuflichen Methylalkohols mit einem Theil absoluten Alkohols lieferte. Die geringe Menge des in beiden vorhandenen Kochsalzes färbte die Flamme rein gelb, so dass in ihr nur die D-Linie, welche im wesentlichen aus zwei verschiedenen Wellenlängen besteht, auftrat. Durch Vergrösserung des Abstandes wanderten die Ringe und die Zahl der durch eine bestimmte Marke hindurchgegangenen Ringe giebt direkt die Vergrösserung des Gangunterschiedes der beiden an der Vorder- und Rückfläche der Luftschicht reflektirten, zur Interferenz gelangenden Lichtstrahlen in Wellenlängen an. Betrug dieselbe 500 Wellenlängen, so verschwanden die Ringe, weil die dunkeln Stellen der von dem einen Bestandtheil der D-Linie gelieferten Interferenzfigur auf die hellen Stellen der von dem anderen Bestandtheil der D-Linie gelieferten Ringe fallen. Bei 1000 Wellenlängen Gangunterschied waren die Interferenzen wieder sehr deutlich. FIZEAU konnte 52 Reihen deutlicher Ringe vorübergehen lassen, ohne dass die Interferenzen aufhörten.

Hieraus ist also zu schliessen, dass, falls wirklich das natürliche Licht in einer Succession verschiedener Schwingungszustände besteht, dieselben so langsam vor sich gehen, dass in einem Zeitraum, welcher grösser als 50000 Schwingungsdauern ist, das Licht noch als wesentlich von einerlei Schwingungsart anzusehen ist. Der Zeitraum von 50000 Schwingungsdauern hat ungefähr den Werth $2\cdot10^{-15}$ *sec.*

Ist daher dies eine untere Grenze für die Dauer der Constanz des Schwingungszustandes natürlichen Lichtes, so kann man auch eine obere für dieselbe angeben, innerhalb deren also das natürliche Licht seinen Schwingungszustand schon oft gewechselt haben muss. Mit Hilfe der HERTZ'schen Versuchsanordnung kann man die Dauer einer einzelnen elektrischen Entladung unter den Werth $2\cdot10^{-9}$ *sec* herabdrücken. Würde das von einer solchen Entladung herrührende Licht keine nachweisbaren Spuren von Polarisation enthalten, so würde $2\cdot10^{-9}$ *sec* ein Werth für jene obere Grenze sein. — Diesbezügliche Versuche sind bei diesen schnellen Entladungen noch nicht angestellt.

Ein Vibrationssystem, welches einer oder mehreren der Gleichungen (10) nicht genügt, entspricht dem sogen. partiell polarisirten Licht. Es lassen sich stets zwei Richtungen x und y, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung liegen, auffinden, für welche die zweite jener Gleichungen erfüllt ist. Die nach diesen Richtungen genommenen Componentensummen ΣA^2 und ΣB^2 sind ein Maximum resp. Minimum. Die Differenz $\Sigma A^2 - \Sigma B^2$ wird als Quantum des

[1]) FIZEAU und FOUCAULT, Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 138. 1849.

[2]) FIZEAU, Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862; POGG. Ann. 119, pag. 87. 1863.

im Strahl enthaltenen polarisirten Lichtes bezeichnet. Ist die letzte der Gleichungen (10) gleichzeitig mit der zweiten derselben erfüllt, so kann man den Lichtstrahl als aus einem natürlichen und einem linear polarisirten Strahle zusammengesetzt denken. Ist die letzte der Gleichungen (10) nicht erfüllt, so kann der Strahl aus einem natürlichen und einem elliptisch polarisirten entstanden gedacht werden. — Bei Zusammensetzung eines natürlichen Strahles mit einem circular polarisirten ist die erste der Gleichungen (10) erfüllt, nach Durchgang des Strahles durch eine doppelbrechende Platte aber nicht mehr.

Ein partiell polarisirter Lichtstrahl ist daran zu erkennen, dass er sich beim Durchgang durch einen doppelbrechenden Krystall in zwei Strahlen theilt, deren Intensität mit dessen Lage wechselt, aber nie ganz verschwindet.

Man erhält partiell polarisirtes Licht bei der Reflexion und Brechung eines natürlichen, auf ein durchsichtiges Medium einfallenden Strahles. Arago[1]) hat das Gesetz aufgestellt und durch ein einfaches Experiment bestätigt, dass der reflektirte und gebrochene Strahl gleiche Quantitäten polarisirten Lichtes enthalten, und zwar liegt die Ebene der grössten Intensität im reflektirten Lichte senkrecht zu der im gebrochenen. Dies Gesetz folgt direkt aus der Ueberlegung, dass die Intensität des reflektirten und gebrochenen Strahles zusammen gleich der Intensität des einfallenden sein müssen, und zwar einzeln für die Componenten, welche parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind.

Ebenfalls ist das blaue Himmelslicht partiell polarisirt. — Ueber die Bestimmungsmethoden des Quantums der Polarisation cf. unten.

IV. Dichte des Lichtäthers.

Während die Entwickelungen des Vorigen nur basirten auf der undulatorischen Natur des Lichtes, dagegen unabhängig von specielleren Vorstellungen über dieselbe waren, so hat der Begriff der Dichte des Lichtäthers nur einen Sinn, wenn man sich auf den mechanischen Standpunkt der Lichttheorie stellt, nach der die kinetische Energie der Lichtbewegung gemessen wird durch das halbe Produkt aus der Dichte des Lichtäthers in das Quadrat der Geschwindigkeit seiner Theilchen. — Die Dichte ist als sehr klein, aber nicht als streng Null anzunehmen, da die Energie der Lichtbewegung einen durchaus merkbaren und messbaren Betrag besitzt.

Thomson[2]) hat eine untere Grenze für die Dichtigkeit des Lichtäthers angegeben auf Grund der von Pouillet gemessenen Sonnenstrahlung. Dieselbe beträgt 1240 $cm^2 \cdot gr \cdot sec^{-2}$.

Dieser Betrag von Energie muss gleich sein der Energie, welche in einer schwingenden Aethermasse von $V cm^3$ Volumen enthalten ist, wo V die in *cm* und *sec* ausgedrückte Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bezeichnet. Die kinetische Energie der Volumeneinheit ist nun jedenfalls kleiner als $s \cdot v^2$, wo s die Dichte des Aethers, d. h. die Masse der Volumeneinheit, v die grösste Geschwindigkeit der schwingenden Theilchen bedeutet. Setzt man $v : V = n$, so folgt

$$s > \frac{4}{n^2} \cdot 10^{-29}.$$

[1]) Arago, Oeuvr. compl. 7, pag. 323 u. 379. 1812; das Gesetz ist nur verificirt beim Durchgang des Lichtes durch eine Platte. Es gilt für diese und ebenso für einen Plattensatz (cf. pag. 628) aus denselben Gründen, wie sie hier bei der Brechung an nur einer einzigen Fläche bestehen.

[2]) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinb. 21, pag. 57. 1854.

Ueber n haben wir direkt keine Anhaltspunkte. Nach THOMSON ist n jedenfalls kleiner als $\frac{1}{50}$, da schon in der Nähe der Sonne v viel kleiner als V sein muss. Daraus würde folgen

$$s > 10^{-25}.$$

Um zu einer Schätzung von n zu gelangen, stellt GLAN[1]) die Ueberlegung an, dass die Lichtschwingungen ohne Zerreissung des Aethers stattfinden müssen, und dass daher die Dilatation seiner Längeneinheit einen gewissen grössten Betrag δ nicht überschreiten könne. δ steht mit n in der Beziehung $\delta = \sqrt{1 + n^2} - 1$. Indem GLAN annimmt, dass δ ungefähr gleich dem für Wasser oder Glas gültigen Werthe sei, folgt

$$s > 10^{-18}.$$

Eine obere Grenze der Dichte des Lichtäthers hat GRAETZ[2]) berechnet auf Grund der MAXWELL'schen Molekularwirbeltheorie in Verbindung mit der Beobachtung von KUNDT über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes beim Durchgang durch Eisen. Er findet

$$s < 9 \cdot 10^{-16}.$$

Diese Zahl kann keinen Anspruch auf grosse Zuverlässigkeit machen, da zu ihrer Ermittelung mehrere nicht erwiesene Hypothesen nothwendig sind. In noch weit höherem Maasse tritt dies ein bei den von WOOD[3]) zur Ermittelung der Aetherdichte angestellten Ueberlegungen. P. DRUDE.

Theorie des Lichtes für durchsichtige Medien.

I. Experimentelle Thatsachen. Uebersicht über die verschiedenen Theorien.

Wenn für eine gewisse Klasse von Naturerscheinungen eine Theorie ausgebildet werden soll, so heisst das, aus einigen Grundhypothesen die beobachteten Erscheinungen deduktiv ableiten. Eine Theorie ist um so vollkommener, je wahrscheinlicher die angenommenen Hypothesen durch andere bekannte physikalische Thatsachen gemacht werden, je geringer ihre Anzahl ist, und je mannigfaltiger die durch sie erklärten Erscheinungen sind.

Die Anforderungen, die an eine Theorie des Lichtes zu stellen sind, welche nach den erwähnten Gesichtspunkten vollkommen zu nennen wäre, sind ausserordentlich hohe, einmal, weil die optischen Erscheinungen so mannigfaltiger Art sind, wie in kaum einem anderen Zweige der Physik, und andererseits, weil wir über die Eigenschaften des Lichtäthers, an welche die anzunehmenden Hypothesen anzuknüpfen haben, durch keine Eigenschaften der ponderablen Materie, welche unseren Messungen direkter zugänglich ist, Aufschluss erhalten. Diesen hohen Anforderungen hat bisher noch keine Lichttheorie genügt, indem noch keine Theorie das Gesammtgebiet der optischen Erscheinungen umfasst, und auch einige der Hypothesen, welche zur theoretischen Darstellung eines Partialgebietes angenommen sind, nicht als unmittelbar nothwendige erscheinen, sondern vielmehr nur nachträglich durch den Erfolg gerechtfertigt werden.

Aber auch eine unvollkommene Theorie kann dadurch von grossem Werthe für die Forschung sein, dass sie in einfachster, ökonomischer Weise ein grosses

1) GLAN, WIED. Ann. 7, pag. 655. 1879.
2) GRAETZ, WIED. Ann. 25, pag. 165. 1885.
3) WOOD, Phil. Mag. (5) 20, pag. 389. 1885.

Gebiet von Erscheinungen beschreibt und eventuell Fingerzeige zu noch unbeobachteten Thatsachen giebt. Ein typisches Beispiel hierfür bietet die Entdeckung der konischen Refraction am Aragonit, zu welcher LLOYD durch Betrachtungen von HAMILTON veranlasst wurde, welche dieser an die in dem oben genannten Sinne sicher sehr unvollkommen zu nennende Theorie der Doppelbrechung von FRESNEL anknüpfte. — Der Weg, auf welchem in dieser rationellsten Weise eine Theorie zu verfahren hat, ist der, dass sie Differentialgleichungen bildet — wir wollen sie Hauptgleichungen nennen — welche die zu erklärenden Erscheinungen umfassen, soweit sie sich in demselben homogenen Medium abspielen. Ist dies nicht als unendlich ausgedehnt anzunehmen, sondern werden die Erscheinungen wesentlich beeinflusst durch das Vorhandensein anderer vom ersten verschiedener Medien, so hat die Theorie noch Gleichungen zu bilden, welche für die Erscheinungen beim Uebergang der Grenze zweier verschiedener Medien gültig sind, die sogen. Grenzbedingungen. Dieselben können aus den Hauptgleichungen der Theorie abgeleitet werden, falls letztere auch für inhomogene Medien aufgestellt sind, da die Grenzschicht zweier verschiedener Medien stets als eine Schicht aufgefasst werden kann, innerhalb deren die optische Natur sehr schnell variirt. Dieser Weg der Ableitung der Grenzbedingungen ist bisher nur von HERTZ[1]) für die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes eingeschlagen, während die mechanischen Lichttheorien bisher die Grenzbedingungen durch Heranziehung besonderer Principien aufgestellt haben. — Bei der Beurtheilung einer Theorie sind sowohl ihre Hauptgleichungen, als ihre Grenzbedingungen zu prüfen, weil beide für eine grosse Klasse optischer Erscheinungen nothwendig mit einander verknüpft sind. Gerade dieser Umstand bewirkt es, dass einige Theorien, welche nach ihren Hauptgleichungen unanstössig erscheinen, doch zu verwerfen sind, weil ihre Grenzbedingungen zu Widersprüchen mit der Beobachtung führen.

Dass hier die Theorie einer grossen Klasse optischer Erscheinungen vorher behandelt wird, bevor im Genaueren diese selbst beschrieben sind, geschieht deshalb, weil wir dadurch eine weit bessere und classificirende Uebersicht über unseren Gegenstand gewinnen. Nur wenige experimentelle Thatsachen mögen vorangeschickt werden, weil sie zum Aufbau der Theorien von wesentlicher Bedeutung gewesen sind.

Zunächst lassen sich durch einige Thatsachen allgemeine Schlüsse auf die Gestalt, welche die Theorie ihren Gleichungen geben muss, ziehen. Es ist constatirt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes unabhängig von der Intensität, d. h. der Grösse des Lichtvectors, ist. J. J. MÜLLER[2]), welcher zuerst diese Frage einer genaueren Untersuchung unterzog, erhielt allerdings ein abweichendes Resultat, indem er eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude constatirt zu haben glaubte, die allerdings erst merklich wäre, wenn man Differenzen von Milliontheilen des eigenen Werthes und kleinere berücksichtigt. Er verfuhr nach zwei verschiedenen Methoden: 1. Er erzeugte zwischen zwei NEWTON'schen Gläsern Interferenzringe mit grosser Wegdifferenz (25000 Wellenlängen). Bei Abnahme der Intensität der Beleuchtung glaubte er ein Zusammenschieben der Ringe zu erkennen, was auf eine Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit deuten würde. Dies Experiment ist später von EBERT[3]) mit verbesserten Anordnungen wiederholt.

[1]) H. HERTZ, Gött. Nachr. No. 4, pag. 117. 1890. — WIED. Ann. 40, pag. 589. 1890.
[2]) J. J. MÜLLER, POGG. Ann. 145, pag. 86. 1872.
[3]) EBERT, WIED. Ann. 32, pag. 337. 1887.

Ebert zerschnitt eine dicke, schwach keilförmige Glasplatte senkrecht zur brechenden Kante und legte dann die beiden Stücke mit entgegengesetzt liegenden Keilwinkeln nebeneinander. Die in monochromatischem Lichte erzeugten Interferenzstreifen müssen, falls ihre Lage von der Intensität der Beleuchtung abhängt, nach entgegengesetzter Richtung bei Wechsel derselben wandern, was daran deutlich zu erkennen ist, dass zwei Streifen der beiden Platten, welche ursprünglich in ihrer gegenseitigen Verlängerung liegen und so als ein einziger Streifen erscheinen, bei Wechsel der Intensität der Beleuchtung an der Schnittfläche als abgesetzt erscheinen. Dieses letztere war indess nicht wahrzunehmen, selbst wenn die Intensität bedeutend variirt wurde, sodass z. B. für die Quecksilberlinie Hg_α die Constanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bis auf fast ein Milliontel des eigenen Betrages nachgewiesen wurde, falls die Intensität zwischen den Werthen 1 und 250 variirt. Die Erklärung der abweichenden Resultate Müller's, welcher die Intensität nur bis auf $\frac{1}{3}$ schwächte, sucht Ebert in physiologischen Gründen.

2) Die zweite Versuchsanordnung Müller's bestand darin, dass er das aus einem mit 2 Spalten behafteten Beugungsschirm austretende Strahlenbündel schräg eine planparallele Glasplatte durchsetzen liess. Da für den einen Strahl die Intensitätsschwächung, welche beim Durchtritt der Grenze Luft — Glas eintritt, eher erfolgt, als für den anderen, so muss, falls die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität abhängt, eine Phasenänderung der beiden Strahlen durch Einschalten der Glasplatte eintreten, d. h. eine Verschiebung der Interferenzstreifen. Eine solche glaubte Müller zu constatiren um 0·1—0·3 Streifenbreite. — Dies Experiment ist in bedeutend verfeinerter Anordnung später von Lippich[1]) wiederholt, indem er durch eingeschaltete Rauchgläser oder polarisirende Vorrichtungen eine viel grössere Schwächung der Intensität, als Müller durch den Verlust bei Reflexion, erreichte, und die Distanz der Schwächungsstellen etwa 100 Mal grösser machte als Müller. Lippich erreichte dies dadurch, dass er die Interferenzstreifen der beiden Strahlenbündel beobachtete, erst nachdem dieselben von einem Spiegel reflektirt wurden, der vermöge einer eingeschalteten Convexlinse den Weg der beiden Lichtbündel vertauschte. Eine Vorrichtung, welche in den Gang des einen Lichtbündels eingeschaltet wird, schwächt die Intensität des einen Bündels beim Hingang zum Spiegel, die des zweiten beim Rückgang von demselben, sodass die Distanz der Schwächungsstellen das Doppelte der Entfernung der Schwächungsvorrichtung vom Spiegel beträgt. — Schon bei mässiger Lichtschwächung hätte bei einem Betrage jener Distanz von 2·5 *m* für mittlere Wellenlängen die Verschiebung der Interferenzfransen, wenn die von Müller gefundenen numerischen Ergebnisse genau wären, 13 Fransenbreiten betragen müssen, also würden bei weissem Licht die Minima im Beugungsbilde ganz verschwunden sein; allein Lippich sah dieselben sehr rein und deutlich und nahm selbst bei den stärksten Schwächungen keine Spur von Verschiebung wahr. Ebenso wenig war eine solche zu bemerken, als anstatt Luft Glas-, resp. Wassersäulen eingeschaltet wurden. Die Genauigkeit, mit welcher die Constanz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bis zu den stärksten Schwächungen hin in Luft constatirt wurde, beträgt den 182 millionsten Theil des eigenen Betrages.

Es ist also die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude als experimentell erwiesen anzusehen. Hieraus fliesst mit Nothwendigkeit, dass die Hauptgleichungen der Theorien homogene Differentialgleichungen sein müssen.

---

[1]) Lippich. Wien. Ber. 2, 72, pag. 355. 1875.

Eine weitere Thatsache, welche bis jetzt durch kein Experiment widerlegt ist, ist die, dass die optischen Erscheinungen additiver Natur sind, in der Weise, dass man die aus dem Zusammenwirken zweier Wellenzüge resultirende Lichtbewegung durch (geometrische) Addition der aus den einzelnen Wellenzügen resultirenden Bewegungen erhält. Dies prägt sich z. B. darin aus, dass das Verhältniss der Intensität des reflektirten Lichtes zu dem des einfallenden lediglich durch die Beschaffenheit der Medien und die Lage der einfallenden Wellennormale und Polarisationsebene zur Grenze der Medien gegeben ist, dagegen von der Intensität des einfallenden Lichtes unabhängig ist.

Aus dieser Thatsache folgt, dass sowohl Hauptgleichungen, als Grenzbedingungen lineare Gleichungen sein müssen, und sollten letztere durch die Theorie in noch nicht linearer Form geliefert werden, so müssen sie in eine solche transformirbar sein.

Ein weiterer Prüfstein für die Brauchbarkeit einer Theorie bieten die Erscheinungen in doppelbrechenden Krystallen, weil sie zum Theil einer besonders genauen experimentellen Untersuchung fähig sind. Die Doppelbrechung, d. h. die Zertheilung eines einfallenden Lichtstrahls in zwei gebrochene, wurde am Kalkspath entdeckt von ERASMUS BARTHOLINUS[1]). Es gelang HUYGENS[2]) kurz darauf, die Gesetze dieser Doppelbrechung durch eine einfache, derjenigen für isotrope Mittel analoge Construction darzustellen, indem er annahm, dass die Wellenfläche im Kalkspath, d. h. diejenige Fläche, auf welcher sich eine von einem Punkte des Krystalls ausgegangene Erschütterung nach Ablauf einer gewissen Zeit befindet, aus einer Kugel und einem dieselbe in den Endpunkten eines Durchmessers berührenden Rotationsellipsoide bestehe. Durch Anwendung seines Princips der einhüllenden Wellen gelangte er gerade wie bei der Brechung an isotropen Medien[3]) unmittelbar zu den Gesetzen, welchen die Brechung ebener Lichtwellen beim Eintritt aus Luft in Kalkspath unterworfen ist, und die durch Messungen von WOLLASTON und MALUS bestätigt wurden[4]). Aus der Construction folgt unmittelbar der Unterschied im Verhalten des ordinären und extraordinären Strahles, indem ersterer das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgt, letzterer dagegen nicht.

FRESNEL constatirte[5]) durch Versuche am Topas, dass es Krystalle gäbe, welche ein von dem beschriebenen abweichendes Verhalten zeigten, indem sie gar keinen ordinären, nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz gebrochenen Strahl besässen.

Am deutlichsten wies FRESNEL diese Thatsache durch folgendes, auf Anregung von ARAGO angestelltes Experiment nach. Er schnitt aus Topas planparallele Platten in verschiedenen Richtungen, klebte dieselben auf einander und gab der so entstehenden Säule die Gestalt eines Prismas mit zu den Grenzflächen der verschiedenen Platten senkrechter brechender Kante. Blickt man durch dasselbe nach einer der letzteren parallelen Geraden, so überzeugt man sich, dass bei keinem der beiden Bilder der Geraden die den einzelnen Platten entsprechenden Theile eine gerade Linie bilden, wie dies der Fall sein müsste, wenn einer der beiden Strahlen das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgen würde.

Für diese, sogen. zweiaxigen Krystalle, stellte FRESNEL das nach ihm be-

---

[1]) E. BARTHOLNUS, Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici. Hafniae 1670.

[2]) HUYGENS, Traité de la lumière. Leyden 1690.

[3]) s. oben pag. 624.

[4]) Das Nähere hierzu s. im Kapitel: Doppelbrechung.

[5]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 20, pag. 337. 1821.

nannte Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes auf[1]). Er fand dasselbe zunächst rein intuitiv[2]), indem er sich die Aufgabe stellte, eine Wellenfläche zu finden, welche zu drei rechtwinkligen Axen symmetrisch sei, welche ferner stets zwei Wellen ergebe, von denen keine das gewöhnliche Brechungsgesetz befolge; und die schliesslich im Falle zweier gleichberechtigter Axen in die HUYGENS'sche Wellenfläche, d. h. eine Kugel und ein dasselbe berührendes Ellipsoid, überginge. Er suchte dann seinem Gesetze eine theoretische Grundlage zu geben, indem er u. A. von der Vorstellung ausging, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle lediglich von der Schwingungsrichtung der Aethertheilchen abhinge, eine Annahme, die, wie CAUCHY[3]) bald darauf gezeigt hat, durchaus nicht aus irgend welchen Grundannahmen, wie z. B. aus der elastischen Natur des Aethers, folgt. Es lassen sich vielmehr Theorien bilden, die in sich widerspruchsfrei sind und mit den Beobachtungen ebenso im Einklang stehen, und bei welchen die Richtung der Wellennormale ebenfalls von Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Ist demnach die FRESNEL'sche Theorie der Doppelbrechung als unbefriedigend zu bezeichnen, was darin seine natürliche Erklärung findet, dass damals noch die durch NAVIER, POISSON und CAUCHY geschaffene Elasticitätstheorie fehlte, so ist trotzdem die Divinationsgabe FRESNEL's zu bewundern, indem sein Gesetz durch die bisherigen Experimente stets mit grosser Genauigkeit bestätigt ist. Dieselbe ist eine derartige, dass alle Theorien, welche ein von dem FRESNEL'schen abweichendes Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in doppelbrechenden Medien ergeben, selbst wenn die numerischen Differenzen nur wenige Bruchtheile von Procenten betragen sollten, als mit der Erfahrung nicht im Einklang stehend zu verwerfen sind[4]).

Die verschiedenen Theorien, welche mit dem FRESNEL'schen Gesetz im Einklang sind, unterscheiden sich nun wesentlich in der Art der Herleitung desselben. Im Allgemeinen treten nämlich so viele zunächst als unabhängig von einander erscheinende Coëfficienten in den Hauptgleichungen auf, dass zunächst ein viel allgemeineres Gesetz als das FRESNEL'sche gefolgert wird. Dieses kann erst durch Bedingungsgleichungen zwischen jenen Coëfficienten erhalten werden. Bei den einzelnen Theorien ist nun die Begründung derselben eine verschiedene, die einen stellen jene Gleichungen einfach als mathematische Beziehungen hin, ohne den Coëfficienten und jenen Beziehungen eine physikalische Bedeutung unterzulegen, die anderen leiten jene Gleichungen mit mehr oder weniger Strenge aus physikalischen Vorstellungen ab. Bei gleichem Erfolge werden wir der letzten Klasse von Theorien den Vorrang vor der ersten einräumen. Es ist indess nicht zu verkennen, dass bis jetzt gerade die Theorien, welche in ihrem ersten Ansatz die höchsten Anforderungen an Vollendung zu erfüllen bestrebt waren, nämlich Hauptgleichungen und Grenzbedingungen abzuleiten auf Grund

---

[1]) FRESNEL, Mém. de l'Acad. des scienc. 7, pag. 45. 1821; Ann. de chim. et de phys. (2) 28, pag. 263. 1821; Oeuvr. compl. 2, No. 38, 39, 47.

[2]) Der Weg, auf welchem FRESNEL wahrscheinlich zu seiner Entdeckung gelangt ist, ist unten im Kapitel »Doppelbrechung« ausführlicher angegeben. FRESNEL selber deutet ihn in seinen soeben citirten Schriften nicht an.

[3]) CAUCHY, Mém. de l'Acad. des sc. 9, pag. 114. 1829.

[4]) Die allgemeinsten mit dem FRESNEL'schen Gesetze vereinbaren Hauptgleichungen gab M. LÉVY (Compt. rend. 105, pag. 1044. 1887). Dieselben schliessen in der That als specielle Fälle die Differentialgleichungen der im Folgenden auseinander gesetzten Theorien in sich, welche zu dem FRESNEL'schen Gesetze führen.

von Kräften, welche zwischen den kleinsten Theilchen eines Mediums nach irgend welchen Gesetzen wirken, in ihren Erfolgen zurückstehen hinter denjenigen Theorien, welche nicht auf mechanisch vorstellbare Molekularwirkungen zurückgehen. Letztere Theorien suchen eine Erklärung für das Wesen und die Gesetze der Lichterscheinungen entweder in anderen Erscheinungen des Aethers, welche ebenfalls dem Verständniss insofern verschlossen sind, als sie Analoga in der Physik der ponderablen Materie nicht besitzen, wie die elektromagnetische Lichttheorie, oder sie berücksichtigen nur die von den unbekannten Molekularwirkungen herrührenden Resultanten, deren Gesetze eventuell weit complicirter, als die der Molekularwirkungen sind. Die Theorien der letzteren Gattung sollen mit dem Namen »Theorien der resultirenden Wirkungen« bezeichnet werden, im Gegensatz zu den Theorien der ersten Gattung, »den Theorien der Molekularwirkungen«. Beide Gattungen zusammen werden üblich mit dem Namen »mechanische Lichttheorien« belegt, um sie in Gegensatz zu der elektromagnetischen Lichttheorie zu stellen.

Dieser Gegensatz liegt aber, wie im vierten Abschnitt dieses Capitels näher erläutert werden soll, mehr in den Grundvorstellungen. Für die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen führen beide Anschauungsweisen zum grossen Theil zu gleichen Resultaten, und da durch die Beobachtung nur die Richtigkeit jener Gleichungen, nicht die der Grundannahmen, zu prüfen ist, so sind auch gewisse mechanische Lichttheorien mit der Erfahrung im Einklang, wenn es die elektromagnetische Lichttheorie ist.

Trotzdem drängt letztere die Bedeutung der mechanischen Theorien zurück, und zwar nicht nur, weil sie einige optische Erscheinungen, z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Aether und in manchen ponderabeln Körpern aus rein elektrischen Experimenten zu berechnen erlaubt, sondern auch, weil die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie in gewisser Weise umfassender als die irgend einer mechanischen Theorie sind.

Der letztere Vorzug bleibt bestehen, selbst wenn auch die eben erwähnten numerischen Beziehungen oft nicht mit der Erfahrung im Einklange stehen. Jedoch aus diesem Grunde bedarf auch die elektromagnetische Theorie noch weiterer Ausbildung.

Im Folgenden sollen nur die mechanischen Theorien ausführlich besprochen werden, da die elektromagnetische Theorie in dem dritten Bande dieses Buches näher erläutert wird. — Zum Schluss dieses Capitels sollen jedoch kurz die Resultate, wie sie sich aus beiden Anschauungsweisen über die Natur des Lichtes ergeben, verglichen werden.

Es dient zur Erleichterung der Uebersicht des Folgenden, schon hier auf einen wesentlichen Unterscheidungspunkt der verschiedenen Theorien hinzuweisen. Derselbe liegt darin, ob dieselben bei zwei optisch verschiedenen Medien in den Hauptgleichungen Gleichheit der Coëfficienten der Differentialquotienten des Lichtvectors nach der Zeit, aber Verschiedenheit der Coëfficienten der Differentialquotienten nach den Coordinaten annehmen, oder umgekehrt. In den rein elastischen Theorien haben diese genannten Coëfficienten die Bedeutung der Dichtigkeit und der Elasticität des Aethers. Irgend eine Relation zwischen diesen anzunehmen, ist man schon deshalb gezwungen, weil die Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an der Grenze zweier isotroper Mittel lediglich nur von einer durch die Natur derselben gegebenen Constante, dem Brechungsexponenten, abhängen und nicht von deren zwei. Bei Ersetzung der Grenzbedingungen durch allgemeinere in der Weise, dass in ihnen ein weiterer verfügbarer Coëfficient auftritt,

kann man allerdings[1]) sowohl Dichte, als Elasticität in den verschiedenen Medien als verschieden annehmen. Indess ist dies kein direkter Vortheil, so lange jener in den Grenzbedingungen neu eingeführte Coëfficient nicht durch irgend welche physikalische Vorstellung von vornherein bestimmbar ist.

Mit dem genannten Unterscheidungspunkte der Theorien Hand in Hand geht die Verschiedenheit hinsichtlich der Definition der Polarisationsebene, indem erstere dieselbe als mit der Schwingungsrichtung zusammenfallend, letztere dagegen senkrecht zu ihr annehmen.

II. Theorien der Molekularwirkungen.

a) Rein elastische Theorien.

Unter diesen Theorien verstehen wir solche, in denen der Einfluss der ponderablen Körper auf die Lichtbewegung nicht berücksichtigt wird, vielmehr der Lichtäther als ein homogenes, eventuell krystallinisches Medium angesehen wird, welches vermöge seines elastischen Verhaltens Wellen fortzupflanzen im Stande ist, und dessen Eigenschaften in den verschiedenen Körpern, z. B. Luft, Glas etc. verschiedene sind.

Der Erste, welcher von dieser Anschauung aus der unvollkommenen Theorie FRESNEL's eine grössere Strenge zu geben suchte, war CAUCHY[2]); das Charakteristische seiner Elasticitätstheorie ist, dass die Molekulardruckkräfte aus Einzelwirkungen der Moleküle abgeleitet werden, welche gewisse unbekannte Functionen ihrer gegenseitigen Entfernung sind. Aus diesem allgemeinen Ansatz ergiebt sich zunächst ein viel allgemeineres Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als das FRESNEL'sche. Vor Allem ist das Resultat ein von der Beobachtung zunächst sehr abweichendes, dass ein Erschütterungscentrum eines krystallinischen Mittels Anlass zu drei Wellensystemen giebt, an Stelle von nur zwei beobachteten. Durch gewisse zwischen den Coëfficienten der Hauptgleichungen aufzustellende Relationen kann man eine angenäherte Uebereinstimmung mit dem FRESNEL'schen Gesetze erhalten, insofern dasselbe für zwei jener drei Wellensysteme gültig ist, in denen, für den Fall ebener Wellen, die Schwingungen nahezu transversal sind, welche also als Lichtwellen zu deuten sind. Das dritte Wellensystem ist ein nahezu longitudinales, und es lag zunächst nahe, dieses einfach unberücksichtigt zu lassen unter der Annahme, dass dasselbe keine Lichtempfindung erzeuge.

CAUCHY zeigte, dass die Reduction des allgemeinen Fortpflanzungsgesetzes auf das FRESNEL'sche möglich sei, sowohl wenn die Lichtschwingungen in der Polarisationsebene, als auch wenn sie senkrecht zu ihr stattfänden. Er hielt aber die letztere Annahme für die wahrscheinlichere.

Eine grosse Schwierigkeit bereitet nun in dieser Theorie das Auftreten der longitudinalen Welle. Schon in einem isotropen elastischen Körper tritt eine solche auf.

Die Hauptgleichungen für einen solchen lauten:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + B \Delta u,$$
$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + B \Delta v,$$
$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (A - B) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + B \Delta w,$$

---

[1]) M. RÉTHY, WIED. Ann. 11, pag. 121. 1880.

[2]) Mém. de l'Acad. des scienc. 9, pag. 114; 10, pag. 293 u. 549; 18, pag. 153. 1829. — Exerc. de Math. 3, pag. 188; 4, pag. 129; 5, pag. 19. — Man sehe auch MOTH, Theorie des Lichtes von CAUCHY.

wobei u, v, w die Componenten der Verrückungen der Theilchen aus ihrer Gleichgewichtslage nach den Coordinaten x, y, z bedeuten, ρ die Dichtigkeit des Mittels, A und B gewisse, seine elastischen Eigenschaften definirenden Constanten, t die Zeit, und wobei Δ eine Abkürzung für die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, θ die räumliche Dilatation bezeichnet, d. h. es ist $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Die Constante B drückt den Widerstand aus, welchen das Medium einer tangentialen Verschiebung zweier benachbarter Flächenelemente entgegensetzt, während die Constante A sich in einfacher Weise durch B und den Compressionswiderstand des Mediums ausdrückt. Bezeichnet man letzteren durch k, so ist nämlich

$$k = A - \tfrac{4}{3}B.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt, bei Annahme ebener Wellen, durch einfache Rechnung, dass zwei Wellensysteme möglich sind, ein transversales, dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{B}{\rho}}$ beträgt, und ein longitudinales mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{A}{\rho}}$. Ersteres muss als Lichtwelle gedeutet werden.

Es muss hier zunächst der Einwand erledigt werden, welchen man zum Theil der Erklärungsart transversaler Lichtwellen aus der elastischen Natur des Aethers gemacht hat, indem man sagte, dass transversale Wellen nur in festen elastischen Körpern auftreten könnten, dagegen in Flüssigkeiten nur longitudinale, da in ihnen der Widerstand B gegen tangentiale Verschiebung Null ist. Gegen die Natur des Lichtäthers als eines festen Körpers spreche aber die Unmerklichkeit des Widerstandes, welchen ponderable Körper bei der Bewegung durch den Aether hindurch erfahren; aus letzterem Umstande müsse man schliessen, dass der Aether die Constitution einer ausserordentlich wenig dichten Flüssigkeit besitze.

Eine solche Constitution schliesst aber trotzdem nicht das Auftreten transversaler Lichtwellen aus[1]). Denn selbst bei einer vollkommenen Flüssigkeit werden die Moleküle, wenn die tangentielle Verschiebung einen gewissen, wenn auch sehr kleinen Betrag nicht überschreitet, noch nicht neue Gleichgewichtslagen angenommen haben. Wenn also bei der Lichtbewegung die Dilatationen unter jenem Betrage bleiben, so sind dadurch transversale Wellen und die Berechtigung der Auffassung des Lichtäthers als eines starren Körpers erklärt, wogegen der Aether bei Auftreten bedeutender relativer Dilatationen, wie bei Bewegungen ponderabler Körper im Aether, als Flüssigkeit zu behandeln ist.

Bietet sonach die Erklärung einer transversalen Lichtwelle keine Schwierigkeit, so handelt es sich nun noch darum, die Bedeutung der longitudinalen Wellen zu finden. Dieselbe einfach zu ignoriren auf Grund der Annahme, dass sie der Träger der Energie einer anderen als der Lichtbewegung, z. B. der Wärme sei, geht deshalb nicht, weil, auch wenn ursprünglich in einem Medium nur ein transversales Wellensystem existiren sollte, doch bei jeder Reflexion oder Brechung an der Grenze anderer Medien auch longitudinale Wellen entstehen würden, welche einen merklichen Antheil der Energie der einfallenden transversalen Wellenbewegung in Anspruch nehmen würden. Dieser Umstand würde mit der Thatsache in Widerspruch gerathen, dass beim Passiren einer Grenze zweier Medien Energie der Lichtbewegung nicht merklich verloren geht, indem die In-

[1]) Diese Betrachtungen sind STOKES, Trans. Cambr. Phil. Soc. 8, pag. 287 entnommen.

tensität des einfallenden Lichtes gleich der Summe der Intensitäten des reflektirten und gebrochenen Lichtes ist. Es muss also jedenfalls so über die Constante A verfügt werden, dass beim Passiren einer Grenze die longitudinalen Wellen keinen merklichen Betrag von Energie der einfallenden transversalen Wellen erhalten. Es findet dies statt, sowohl wenn $A = \infty$, als wenn $A = 0$ ist. Im ersten Falle würde ein unendlich grosser Compressionswiderstand folgen, d. h. das Medium würde einer Deformation, welche mit einer Aenderung seines Volumens verbunden ist, einen sehr viel stärkeren Widerstand entgegensetzen, als einer solchen, welche das Volumen nicht ändert, wie z. B. Torsion. Man kann diesem Umstand auch dadurch Rechnung tragen, dass man das Medium als incompressibel annimmt, d. h. dass man die räumliche Dilatation ϑ gleich Null setzt. Die Hauptgleichungen nehmen in diesem Falle, da das erste Glied ihrer rechten Seiten unbestimmt wird, indem die unendlich grosse Zahl A mit der unendlich kleinen Zahl ϑ multiplicirt ist, die Gestalt an:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B \Delta u + \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = B \Delta v + \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B \Delta w + \frac{\partial \sigma}{\partial z},$$

worin σ eine, dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeiten analoge, vorläufig noch unbestimmte Grösse ist, welche aber zu berechnen ist mit Hinzuziehung der Incompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Bedingung $A = 0$ hat gerade die entgegengesetzte physikalische Bedeutung, indem das Medium einer Volumenänderung gar keinen Widerstand entgegensetzt, wohl aber einer Gestaltsänderung.

Indess sind alle beide Verfügungen nach dem ursprünglichen Ansatz CAUCHY's deshalb unstatthaft, weil die Constanten A und B nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation $B = \frac{1}{3} A$ mit einander verknüpft sind. Nach der CAUCHY'schen Theorie ergiebt sich also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle $\sqrt{3}$ mal grösser, als die der transversalen, sodass beide oben gemachten Annahmen für die erstere zu denselben Folgerungen für die letztere führen, was aber unstatthaft ist.

Dieser Uebelstand ist dadurch herbeigeführt, dass CAUCHY die Elasticitätstheorie auf nicht genügend allgemeinen Annahmen aufbaute, indem er die zwischen zwei Molekülen wirkenden Kräfte als nur von ihrer gegenseitigen Entfernung, nicht von der gegenseitigen Lage der Moleküle, abhängig einführte. Durch den Ausschluss dieser polaren Kräfte wird jene Relation $B = \frac{1}{3} A$ herbeigeführt, welche für ponderable isotrope elastische Körper sicher im Allgemeinen nicht gültig ist, wie neuere Versuche von VOIGT[1]) zur Evidenz beweisen.

Man kann indessen diesem Uebelstand durch die erwähnte Verallgemeinerung, d. h. Einführung polarwirkender Molekularkräfte, abhelfen, oder auch dadurch, dass man überhaupt nicht auf diese zurückgeht, sondern für die elastischen Kräfte gewisse Relationen gewinnt nur aus der Annahme, dass man dieselben als dem Energieprincip unterworfen betrachtet, d. h. dass man für sie ein Potential annimmt. Diesen Ansatz hat zuerst GREEN[2]) gemacht. Setzt man voraus, dass im Ruhezustande, d. h. für $u = v = w = 0$, das Medium keinerlei Druckkräften unterliege, so besitzt nach GREEN ein krystallinisches Medium im allgemeinsten Falle 21 Elasticitätsconstanten, nach CAUCHY nur deren 15 — ein isotropes Medium

---

[1]) W. VOIGT u. P. DRUDE, Gött. Nachr. No. 16, pag. 541. 1890.

[2]) G. GREEN, Camb. Phil. Trans. 7, pag. 120. 1838.

besitzt nach GREEN zwei von einander unabhängige Constanten, nach CAUCHY nur eine.

Es bildet sonach die Annahme von gewissen Festsetzungen des Werthes der Constanten A nichts Anstössiges, zumal da man auch von den Molekularwirkungen ausgehend, nur allerdings unter Berücksichtigung polarwirkender Kräfte, den allgemeinen GREEN'schen Ausdruck für das Potential eines elastischen Körpers erhalten kann, wie VOIGT[1]) gezeigt hat. — Indess ist von jenen beiden Verfügungen über A zunächst nur die erstere statthaft, indem $A = 0$ einen negativen Compressionswiderstand, d. h. ein labiles Gleichgewicht des Mediums zur Folge hat. Für stabiles Gleichgewicht musste $A > \frac{4}{3}B$ sein.

Die beiden Theorien von CAUCHY und GREEN unterscheiden sich nun gerade hinsichtlich der Verfügungen über A, indem ersterer A gleich Null (ja sogar, um besseren Anschluss an die späteren JAMIN'schen Beobachtungen zu gewinnen, gleich einer kleinen negativen Grösse) setzt, letzterer $A = \infty$ annimmt.

Erscheint schon aus diesem Grunde die GREEN'sche Theorie als theoretisch widerspruchsfreier, so ist dies noch mehr der Fall hinsichtlich der Aufstellung der Grenzbedingungen. GREEN stellte als solche die Gleichheit der Verrückungen der Aethertheilchen zu beiden Seiten der Grenze zweier Medien und die Gleichheit der normal zur Grenze wirkenden Druckkräfte in beiden Medien auf. Diese Grenzbedingungen werden noch heute als die bei einer einheitlichen elastischen Natur des lichtfortpflanzenden Mediums einzig möglichen anerkannt.

CAUCHY stellte dagegen als Grenzbedingungen[2]) sein sogenanntes Continuitätsprincip auf, nach welchem nicht nur die Verrückungen u, v, w zu beiden Seiten der Grenze einander gleich sein sollten, sondern auch deren nach der Normale genommene Differentialquotienten. CAUCHY ist es, trotz mannigfacher Bestrebungen, nicht gelungen, eine zwingende theoretische Herleitung dieser Grenzbedingungen zu geben[3]).

Die CAUCHY'schen Grenzbedingungen mit den GREEN'schen zu vereinigen und daher theoretisch zu rechtfertigen, ist allerdings möglich, falls man annimmt, dass die Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien die gleiche, dagegen seine Dichtigkeit eine verschiedene sei. Diese Annahme macht GREEN in der That, indess ist er dadurch auf die Betrachtung der Reflexion an isotropen Körpern beschränkt, da bei Krystallen eine mit der Richtung variabele Dichtigkeit zunächst nicht denkbar ist, insofern als die Dichtigkeit keine Vectorgrösse ist.

Der Erfolg ist nun aber entschieden auf Seiten der CAUCHY'schen Theorie, indem dieselbe für $A = 0$ die von FRESNEL[4]) zuerst für die Reflexion des Lichtes an isotropen Medien aufgestellten Formeln, welche mehrfach durch Beobachtungen nahezu bestätigt sind, zu liefern im Stande ist. Ja durch die

---

[1]) W. VOIGT, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, pag. 34. 1887.

[2]) CAUCHY hat in seiner Reflexionstheorie nur die Resultate der Rechnung angegeben. Eine analytische Herleitung derselben aus den CAUCHY'schen Grenzbedingungen gab F. EISENLOHR in POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858 und A. BEER in POGG. Ann. 91, pag. 467. 1854.

[3]) Es soll im vierten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt werden, dass man vom elektromagnetischen Standpunkt aus die Grenzbedingungen CAUCHY's und seine Verfügung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen rechttertigen kann. — Vom rein elastischen Standpunkt aus ist mit Zuhülfenahme des Principes, dass die in einer Grenzschicht, d. h. Uebergangsschicht, auftretenden longitudinalen Wellen jenseit derselben stets verschwinden, das Problem der Reflexion von WEHNER (GRUNERT's Arch. (2) 9, pag. 337. 1890, vergl. auch VON DER MÜHLL, Math. Ann. 27, pag. 506. 1886) behandelt.

[4]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 190 u. 312. 1821; 46, pag. 225. 1823.

Annahme, dass A einen negativen kleinen Betrag habe, ergiebt die CAUCHY'sche Theorie auch die Modifikationen der FRESNEL'schen Formeln, welche nach den Beobachtungen JAMIN's[1]) an ihnen anzubringen sind, während die GREEN'sche Theorie Formeln ergiebt, welche gegenüber den FRESNEL'schen Abweichungen zeigen, die die Beobachtungsfehler weit überschreiten. — Zwar suchte HAUGHTON[2]) die GREEN'sche Theorie so zu modificiren, dass sie sich besser den Beobachtungen anpasste, indem er für die Grenzschicht zweier Mittel einen Brechungsexponenten annahm, welcher von dem im Innern derselben vorhandenen abweicht, und besonders nur auf das Verhalten der longitudinalen Wellen von Einfluss ist. Indess hat EISENLOHR[3]) und VON DER MÜHLL[4]) auf die Unhaltbarkeit der HAUGHTON'schen Annahmen hingewiesen.

Von den beiden genannten Theorien ist sonach die CAUCHY'sche jedenfalls die vorzuziehende, ihr haftet noch der Mangel an, dass die von CAUCHY getroffene Verfügung über diesen Werth der Grösse A zu einem labilen Gleichgewicht des elastischen Aethers führt. Diese Schwierigkeit ist in neuerer Zeit durch eine Untersuchung THOMSON's[5]) vermindert, indem er zeigte, dass für ein elastisches Medium A den Werth Null annehmen kann, ohne dass es instabil wird, wenn dasselbe nämlich von einem starren Gefäss begrenzt ist. So würde z. B. homogener luftloser Schaum, welcher durch Adhäsion an den Wänden des ihn einschliessenden Gefässes vor dem Zusammenfallen bewahrt ist, ein Medium von der Beschaffenheit darstellen, dass in ihm A gleich Null ist, während die Constante B einen positiven, von Null verschiedenen Werth besitzt. — Das Potential W der Volumeneinheit der elastischen Kräfte eines isotropen Körpers ist nämlich durch die Formel gegeben:

$$2W = A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + B\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$-4B\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Volumenelement und integrirt sie über das ganze, vom starren Gefäss begrenzte Volumen, so kann man das letzte Glied der rechten Seite obiger Gleichung durch partielle Integration transformiren in ein Flächenintegral, welches über die Oberfläche des betrachteten Volumens zu erstrecken ist und dessen Elemente sämmtlich einen der drei Ausdrücke u, v, w als Faktoren enthalten und in ein Raumintegral, welches die Form hat

$$-4B\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Weil wegen der als starr angenommenen Grenzen des Volumens u, v, w an der Oberfläche verschwinden, so bleibt nur der letzte Term übrig und das Gesammtpotential W' erhält die Form

$$2W' = \iiint dx\,dy\,dz\left\{A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.+B\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right..$$

Hierdurch ist erwiesen, dass das Potential W' positiv bei jeder Art von

---

[1]) JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 29, pag. 263. 1850.

[2]) HAUGHTON, Phil. Mag. (4) 6, pag. 81. 1853.

[3]) F. EISENLOHR, POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858.

[4]) VON DER MÜHLL, Math. Ann. 27, pag. 506. 1886.

[5]) W. THOMSON, Phil. Mag. (5) 26, pag. 414. 1888.

Deformation bleibt, d. h. der Zustand des Mediums ein stabiler ist, wenn nur B positiv, und A keine negative Grösse ist. — Wenn also auch die Annahme CAUCHY's, dass A einen kleinen negativen Betrag besitze, nicht gerechtfertigt erscheint, so ist doch die Annahme des Werthes Null für A unanstössig. Diese liefert dann die FRESNEL'schen Reflexionsformeln, und auch die nach den JAMIN'schen Beobachtungen an ihnen anzubringenden Correctionen können von einer anderen Vorstellung aus durch Beibehaltung des Werthes $A = 0$ erhalten werden, wie unten gezeigt werden soll.

Ausserdem folgert THOMSON (nach einer ihm von GLAZEBROOK gemachten Mittheilung), dass eine weitere Bedingung der Stabilität des Gleichgewichts die Gleichheit des Werthes von B für alle Medien sei, d. h., dass sich der Aether in verschiedenen Medien nur hinsichtlich seiner Dichtigkeit unterscheiden könne. Hierdurch ist dann zugleich die Benutzung der CAUCHY'schen Continuitätsgleichungen als Grenzbedingungen theoretisch gerechtfertigt (s. oben pag. 650).

Man könnte noch die Frage aufwerfen, ob der Aether wirklich als von einem starren Gefäss umkleidet, d. h. in der Unendlichkeit als ruhend, anzunehmen sei. Indess hat die Beantwortung dieser Frage hier deshalb keine grosse Bedeutung, weil bei den bei der Lichtbewegung stattfindenden Deformationen das Gleichgewicht auch ohne diese Eigenschaft ein stabiles für positives B und verschwindendes A sein würde. Denn, wie GLAZEBROOK[1]) bemerkt hat, transformirt sich schon das Potential W der Volumeneinheit in die Summe zweier Quadrate, deren Coëfficienten A resp. B sind, bei jeder Wellenbewegung, bei welcher u, v, w Functionen derselben Function von x, y, z und t sind, da in diesem Falle die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

wie unmittelbar zu ersehen ist.

Zeigen diese Untersuchungen, dass die CAUCHY'sche Behandlung des Problems der Reflexion des Lichtes an isotropen Körpern theoretisch zu rechtfertigen ist bei gewissen Annahmen, zu denen nothwendig die Gleichheit der elastischen Kräfte des Aethers in allen Medien gehört, so sind die Continuitätsbedingungen nicht mehr statthaft für das Problem der Reflexion des Lichtes an einem Krystall. Denn für diesen muss man, falls man sich auf den Boden der hier genannten Klasse von Theorien stellt, welche den Aether als ein homogenes Medium behandeln, Verschiedenheit der elastischen, auf den Aether wirkenden Kräfte annehmen, falls man überhaupt eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgesetze des Lichtes von der Richtung im Krystall erhalten will. Die Rechnungen BRIOT's[2]), welcher durch Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen auf krystallinische Reflexion zu denselben Formeln, wie MAC CULLAGH (vergl. weiter unten) gelangte, jedoch unter Beibehaltung der FRESNEL'schen Annahme hinsichtlich der Lage der Lichtschwingungen zur Polarisationsebene, sind also vom Standpunkt der Elasticitätstheorie aus nicht als theoretisch streng begründet anzusehen; dass sie jedoch trotzdem mit dem Experiment in Uebereinstimmung sein können, soll im 4. Abschnitt dieses Capitels gezeigt werden.

---

[1]) R. T. GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) 26, pag. 521. 1888.

[2]) CH. BRIOT, Compt. rend. 64, pag. 956. 1867. — Liouv. Journ. (2) 12, pag. 185. 1867. — In Compt. rend. 31, pag. 422. 1850 findet sich eine Notiz, nach der CAUCHY schon vor BRIOT dieses Problem behandelt hat, jedoch habe ich das betreffende Mémoire nicht abgedruckt gefunden.

Betrachten wir jetzt eine andere Gruppe von Theorien, welche sich von der vorigen hauptsächlich hinsichtlich der Grenzbedingungen unterscheidet. Es war schon oben erwähnt, dass vom rein elastischen Standpunkt die Gleichheit der Elongationen und Druckcomponenten zu beiden Seiten der Grenze die einzig möglichen Grenzbedingungen sind. Wenn die hier zu nennenden Theorien andere Grenzbedingungen bilden, so bedeutet dieses ein Abweichen von der Auffassung des Aethers als eines homogenen elastischen Mittels; nur durch Berücksichtigung des Einflusses der ponderabeln Moleküle ist eine Begründung abweichender Grenzbedingungen zu erreichen. Da indess in Behandlung der Hauptgleichungen der genannte Einfluss unberücksichtigt bleibt, so mögen diese Theorien schon an dieser Stelle ihren Platz finden.

Die Benutzung der bisherigen Grenzbedingungen hat den Uebelstand, dass die Amplituden der longitudinalen Wellen an der Grenze zunächst immer mit zu berücksichtigen sind, auch wenn man ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit Null setzt. Es liegt dies daran, dass die früheren Grenzbedingungen 6 Gleichungen liefern, welche gleichzeitig zu erfüllen nicht möglich ist, falls man nur die transversalen Wellen in Rechnung zieht, da diese nur vier Unbekannte liefern, nämlich die Amplituden von zwei reflektirten und zwei gebrochenen Wellen. Diese Schwierigkeit umgehen[1]) die hier zu besprechenden Theorien, indem sie nur vier Grenzbedingungen bilden, und daher die longitudinalen Wellen ausser Betracht lassen.

FRESNEL, welcher die ersten Formeln für die Reflexion des Lichtes an isotropen Körpern gegeben hat[2]), hat dieselben in der genannten Weise erhalten. Er stellte als Grenzbedingungen die Gleichheit der der Grenze parallelen Verrückungen der Aethertheilchen zu beiden Seiten derselben auf. Dadurch sind zwei Gleichungen gewonnen. Zwei weitere erhielt er durch die Annahme, dass die lebendige Kraft der einfallenden Lichtbewegung gleich der Summe der lebendigen Kräfte der reflektirten und gebrochenen Lichtbewegung sei. Diese Annahme involvirt zwei Gleichungen, da sie sowohl anzuwenden ist, falls das einfallende Licht parallel, als auch falls es senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Er nahm ferner an, dass der Aether in allen Medien gleiche Elasticität, aber verschiedene Dichte besässe, womit seine Annahme, dass die Polarisationsebene senkrecht zur Schwingungsrichtung läge, nothwendig verknüpft ist, um Uebereinstimmung mit der Beobachtung zu erhalten (s. oben pag. 647).

FRESNEL hat seine Anschauung über die Constitution des Aethers nicht consequent durchgeführt, da er in seiner Doppelbrechungstheorie die Elasticität des Aethers als von der Richtung abhängig voraussetzte.

Unter Annahme der gleichen Grenzbedingungen, nur mit dem Unterschiede gegen FRESNEL, dass die Dichtigkeit des Aethers in allen Medien als gleich, die Elasticität aber als verschieden gesetzt wurde, wodurch also auch die der vorigen entgegengesetzte Definition der Polarisationsebene nothwendig wurde, haben fast

---

[1]) Auch in andrer Weise ist es allerdings leicht, die Amplituden der longitudinalen Wellen aus den Grenzbedingungen zu eliminiren, wie im vierten Abschnitt gezeigt werden soll.

[2]) FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 190 u. 312. 1821; 46, pag. 225. 1823. Es ist zu bemerken, dass YOUNG schon im Jahre 1817 in dem Artikel Chromatics der Encyclopädia Britannica eine Reflexionsformel bei senkrechter Incidenz nach Analogie des Stosses elastischer Kugeln aufgestellt hatte. Die von ihm benutzte Idee des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft findet sich bei FRESNEL wieder.

gleichzeitig Mac Cullagh[1]) und F. Neumann[2]) das Reflexionsproblem behandelt, und zwar dehnten sie ihre Untersuchungen auch auf Reflexion an Krystallen aus, was nur bei der Annahme der variablen Elasticität möglich gemacht war.

Hinsichtlich der Verrückungscomponente senkrecht zur Grenze ergiebt sich nach diesen Theorien Gleichheit zu beiden Seiten derselben, eine Beziehung, die vom Standpunkte der Elasticitätstheorie nothwendig ist. Als Grenzbedingungen lassen sich also hier auch die Gleichheit sämmtlicher (nicht nur zur Grenze paralleler) Verrückungscomponenten zu beiden Seiten derselben und die Erhaltung der lebendigen Kräfte aufstellen, da durch die getroffene Verfügung über die Dichtigkeit des Aethers die so gewonnenen 5 Gleichungen nur 4 von einander unabhängigen äquivalent sind.

Nach dem Fresnel'schen Ansatz folgt, dass die senkrecht zur Grenze stattfindenden Verrückungscomponenten in beiden Medien sich umgekehrt wie ihre Dichtigkeiten verhalten, eine Beziehung, welche ebenfalls vom Standpunkte der reinen Elasticitätstheorie nicht haltbar ist[3]). Cornu[4]) suchte jene Beziehung durch das Princip der Erhaltung der Bewegungsquantität zu beiden Seiten der Grenze zu rechtfertigen. Er benutzte dieses Princip in Verbindung mit dem der Erhaltung der lebendigen Kraft, um die Fresnel'schen Ideen auch auf das Problem der krystallinischen Reflexion anzuwenden, und gelangte auf diese Weise zu Formeln, welche sich ebenso wie die von Mac Cullagh und F. Neumann gegebenen der Erfahrung anschliessen. Cornu führt die Dichtigkeit als mit der Richtung im Krystall variabel ein. Damit wird der Standpunkt rein elastischer Theorien vollkommen verlassen und es ergeben sich gewisse Schwierigkeiten, welche weiter unten bei Besprechung der Sarrau'schen Theorie im Capitel: »Erweiterte Theorien« erörtert sind.

Mac Cullagh verdankt man nicht nur eine elegante geometrische Darstellung der von Fresnel bei der Reflexion an isotropen Körpern erhaltenen Gesetze, sondern auch eine Vereinfachung der für Krystalle gültigen Reflexionsgesetze durch Einführung der sogen. uniradialen Azimuthe, d. h. derjenigen Azimuthe der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, bei welcher nur ein gebrochener Lichtstrahl auftritt. — Die Anwendung der genannten Grenzbedingungen rechtfertigt Mac Cullagh zunächst nur durch den Erfolg, indem sie zu Resultaten führen, welche mit den am Kalkspath angestellten Reflexionsbeobachtungen im Einklang stehen, gegen die später[5]) versuchte theoretische Begründung sind Einwände zu erheben, wie Stokes[6]) nachgewiesen hat. — In geometrischer Weise hat Cornu[7]) die Resultate Mac Cullagh's noch weiter verfolgt.

In der genannten Arbeit hat F. Neumann in sehr vollständiger Weise das Problem der krystallinischen Reflexion behandelt und mannigfaltige, der Beobachtung direkt zugängliche Fälle untersucht, welche durch die damals vorliegenden Experimente durchaus bestätigt wurden, wie weiter unten des Näheren gezeigt werden soll. — Neumann behandelt den Aether als einen einheitlichen

[1]) Mac Cullagh, Trans. of the Irish Acad. 13. 1837.

[2]) F. Neumann, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

[3]) Ueber die Berechtigung dieser Beziehung vom Standpunkte der »erweiterten« Theorien vergl. W. Voigt, Wied. Ann. 19, pag. 900. 1883.

[4]) A. Cornu, Compt. rend. 63, pag. 1058. 1866. — Ann. de chim. et de phys. (4) 11, pag. 283. 1867.

[5]) Mac Cullagh, Trans. of Roy. Irish Acad. 21. 1839.

[6]) Stokes, Rep. of the Brit. Assoc. 1862, pag. 253.

[7]) A. Cornu, Compt. rend. 60, pag. 47. 1865.

elastischen Körper, die Anwendung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte als Grenzbedingung erklärt er demnach nicht für theoretisch gerechtfertigt, da in seiner Betrachtungsweise longitudinale Wellen nicht ausgeschlossen sind, und demnach von vornherein nicht einzusehen wäre, warum solche bei der Reflexion nicht ebenfalls entstehen sollten. Er rechtfertigt jene Grenzbedingung durch die Erfahrung, nach der es Körper wirklich giebt, für welche bei der an ihnen stattfindenden Reflexion die Intensität des einfallenden Lichtes gleich ist der Summe der Intensitäten des reflektirten und gebrochenen. — Auch in der schon früher von NEUMANN[1]) gegebenen Theorie der Doppelbrechung, welche zu ähnlichen Resultaten wie die CAUCHY'sche Theorie führte, nur unter der entgegengesetzten Annahme über die Lage der Polarisationsebene, treten noch drei Wellensysteme auf, von denen zwei nahezu transversal[2]) und eines nahezu longitudinal ist.

Die Resultate F. NEUMANN's sind in eleganter Weise von G. KIRCHHOFF[3]) abgeleitet, aber mit der Abänderung, dass vorausgesetzt wird, dass bei der Lichtbewegung Dichtigkeitsänderungen des Aethers nicht vorkommen. Hierdurch wird das Zustandekommen von longitudinalen Wellen ausgeschlossen und es können nur rein transversale existiren.

Die Incompressibilitätsbedingung ist als eine vierte Hauptgleichung in die Rechnung von C. NEUMANN[4]) zuerst eingeführt.

Wie C. NEUMANN hervorgehoben hat, ist durch die Incompressibilitätsbedingung noch nicht die Gleichheit der Dichte des Lichtäthers in allen Medien bedingt. Denn durch jene Bedingung ist nur ausgesprochen, dass der Aether so schwachen Kräften gegenüber, wie sie bei der Lichtbewegung wirken, als merklich incompressibel anzusehen ist, während wohl die von den ponderabeln Körpern auf den Aether ausgeübten Kräfte eine solche Grösse besitzen können, dass sie den Aether je nach Massgabe derselben verdichten. — C. NEUMANN erhielt nach seinem Ansatz zunächst ein Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Krystall, welches viel complicirter war, als das FRESNEL'sche. Die Reduction auf dasselbe nahm er aber nicht, wie CAUCHY und F. NEUMANN thaten, rein mathematisch vor, sondern er gewann dieselbe auf Grund zweier physikalischer Annahmen, nämlich

1) Dass die Anordnung der Aethertheilchen innerhalb eines Krystalls nur wenig von der innerhalb eines isotropen Körpers stattfindenden verschieden sei.

2) Dass das Gesetz, nach welchem die Aethertheilchen auf einander wirken, aus zwei Gliedern bestehe, von denen das eine der 4., das andere der 6. Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sei.

Die Reduction auf das FRESNEL'sche Gesetz lässt sich nach LAME[5]) noch einfacher erreichen.

Derselbe ging aus von den Hauptgleichungen eines krystallinischen Körpers, welche im allgemeinsten Falle 21 Coëfficienten enthalten. Unter Zugrundelegung der Annahme, dass im Medium ebene transversale Wellen möglich sind, und dasselbe incompressibel ist, reduciren sich jene Coëfficienten auf sechs und durch

---

[1]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 25, pag. 418. 1832.

[2]) Die Schwingungsrichtung ergiebt sich senkrecht zum Strahl, nicht zur Wellennormale.

[3]) G. KIRCHHOFF, Abhandl. der Berl. Acad. 1876.

[4]) C. NEUMANN, Math. Annal. 1, pag. 325. 1869. — 2, pag. 182. 1870. Vergl. auch die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle 1863, pag. 34, § 8.

[5]) LAMÉ, Leçons sur la théorie de l'élasticité. Paris 1866.

passende Wahl des Coordinatensystems auf nur drei, sodass die Hauptgleichungen schliesslich die Gestalt annehmen:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Das Medium zeigt hinsichtlich seines optischen Verhaltens Symmetrie nach den drei Coordinatenebenen. Es ist bemerkenswerth, dass diese Symmetrie lediglich aus den gemachten Annahmen folgt, ohne Voraussetzung irgend welcher schon existirender Symmetrieebenen, sodass die Krystalle also hinsichtlich ihres optischen Verhaltens eine höhere Symmetrie zeigen, als z. B. hinsichtlich ihres elastischen oder geometrischen.

Aus den Gleichungen folgt direkt das FRESNEL'sche Gesetz, es muss dabei die NEUMANN'sche Definition der Polarisationsebene angenommen werden.

Zu derselben Gestalt der Differentialgleichungen führt der von GREEN[1]) gegebene Ausdruck für das Pontential des Lichtäthers. Es ist zu bemerken, dass die Incompressibilitätsbedingung völlig hinreichen muss, um die GREEN'schen und LAMÉ'schen Resultate abzuleiten, denn aus derselben folgt die Existenz rein transversaler Wellen von selbst. Diese Ableitung ist auch leicht auf einem von P. VOLKMANN[2]) eingeschlagenen Wege möglich.

In der citirten Abhandlung benutzt KIRCHHOFF die erwähnten LAMÉ'schen Gleichungen. Die NEUMANN'sche Grenzbedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft der Lichtbewegung ersetzt er durch das später nach ihm benannte KIRCHHOFF'sche Princip, welches aussagt, dass die an der Grenze zweier Medien geleistete Arbeit der auf den Aether wirkenden Kräfte verschwindet. KIRCHHOFF begründet sein Princip mit dem Hinweis darauf, dass die ponderabeln Theilchen auf den Aether an der Grenze unbekannte Druckkräfte ausübten. Diese verhindern daher die in der reinen Elasticitätstheorie angewandten Grenzbedingungen aufzustellen, da man die sämmtlichen in der Grenze wirkenden Drucke nicht kennt. Die KIRCHHOFF'sche Grenzbedingung ist dann ein Ausdruck dafür, dass beim Acte der Reflexion kein Energieverlust eintritt, jedoch ist jene Bedingung hierfür noch nicht der allgemeinste Ausdruck, wie VOIGT[3]) gezeigt hat. Das KIRCHHOFF'sche Princip ist der FRESNEL-NEUMANN'schen vierten Grenzbedingung äquivalent, hat aber vor letzterer den Vortheil voraus, dass es auch für den Fall der Totalreflexion angewandt werden kann, während dort die NEUMANN'sche Grenzbedingung durch eine andere ersetzt werden muss[4]). — Eine mathematische Schwierigkeit, welche die NEUMANN-KIRCHHOFF'sche Theorie zunächst bietet, ist die Reduction der Grenzbedingungen auf lineare Gleichungen im Falle der Reflexion an Krystallflächen. Es gelingt dies jedoch durchaus.

---

[1]) G. GREEN, Cambr. Philos. Trans. 7, pag. 120. 1839.

[2]) P. VOLKMANN, WIED. Ann. 35, pag. 354. 1888. Wegen der mangelnden Strenge der dort angewandten Schlussweise, vergl. P. VOLKMANN, physikal. ökonom. Ges. in Königsbg. 31. Jahrg. 1890, pag. 7 Anmerkg. Die dort gemachte Verbesserung der Schlussweise ist ebenfalls nicht zwingend, durch eine kleine Abänderung kann jedoch das Verfahren leicht einwandsfrei gemacht werden. Vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 43, pag. 421. 1891.

[3]) W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 701. 1883.

[4]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 40, pag. 510. 1837.

Genannte Reduction ist ohne weiteres auszuführen bei der Reflexion an isotropen Körpern. Für diese ergeben sich die FRESNEL'schen Formeln, aber unter Zugrundelegung der der FRESNEL'schen entgegengesetzten Definition der Polarisationsebene.

b) Erweiterte Theorien.

Unter diesem Namen sollen diejenigen Theorien verstanden werden, welche eine Erweiterung der bisher genannten Vorstellungen vornehmen, um ein grösseres Gebiet optischer Erscheinungen in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen zu können. — Diese Erweiterung wird meist[1]) dadurch gewonnen, dass der Einfluss der ponderabeln Theile des Mediums auf die Lichtbewegung mit berücksichtigt wird, sei es nun, dass derselbe ein direkter, irgend welchen unmittelbar zwischen Aether und Materie wirkenden Kräften entsprechender ist, sei es, dass er indirekt durch Veränderung der Constitution des Aethers, welche durch die Anwesenheit der ponderabeln Moleküle veranlasst ist, herbeigeführt wird.

CAUCHY bemerkte, dass er in seiner Lichttheorie vom rein elastischen Standpunkte aus die Erscheinungen der Dispersion, sowie diejenigen, welche die sogen. optisch activen Medien, wie Quarz und Zuckerlösungen, zeigen, nicht erklären konnte. Letztere Medien sind dadurch charakterisirt, dass die Polarisationsebene von linear polarisirtem Lichte, welches senkrecht auf eine Platte jener Substanzen auffällt, nach dem Austritt gegen die ursprüngliche Lage gedreht erscheint.

Die Erweiterung seiner Theorie nahm CAUCHY[2]) dadurch vor, dass er in der Entwickelung der relativen Entfernung zweier Aethertheilchen sich nicht nur auf erste Differentialquotienten der Elongationen nach den Coordinaten beschränkte. Dies Verfahren begründete er mit der Annahme, dass der Radius der Wirkungssphäre der Aethertheilchen mit der Länge der Lichtwelle vergleichbar sei. Dadurch wird in der That eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge gewonnen.

Bedeutet n den Brechungsexponenten eines Mediums gegen den leeren Raum, λ die Wellenlänge des Lichtes in dem Medium, so folgt nach CAUCHY

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

Diese Formel ist insofern noch nicht direkt auf Beobachtungen anwendbar, als λ von n abhängt. Nennt man die Wellenlänge des angewandten Lichtes im leeren Raum λ_0, so kann man unter der Annahme, dass sämmtliche Coëfficienten der obigen unendlichen Reihe klein gegen ihre vorangehenden seien, also z. B. dass B klein gegen A, C klein gegen B sei etc., leicht die Formel ableiten

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4} + \dots$$

Zur angenäherten Darstellung der Thatsachen genügen oft die beiden ersten Glieder dieser Reihe. — Man gelangt indess zu einer besseren Darstellung der Beobachtungen, wenn man in der ursprünglichen CAUCHY'schen Formel nicht die Kleinheit von B gegen A voraussetzt, dagegen die übrigen Coëfficienten C etc.

---

[1]) Hiervon macht eine Ausnahme die oben genannte Dispersionstheorie von CAUCHY, sowie eine Theorie von K. PEARSON (Proc. Lond. Math. Soc. 20, pag. 297. 1889), in welcher die erweiternde Annahme eingeführt wird, dass die elastischen Kräfte auch von der Geschwindigkeit der Moleküle abhängen. — Ebenso basirt die Theorie von DE COLNET-D'HUART (Publ. de l'Inst. de Luxembourg, 1890) auf einer anderen Erweiterung. Nach ihr sollen die Aethertheilchen nicht als ausdehnungslose Punkte aufzufassen sein.

[2]) CAUCHY, Mém. sur la dispersion de la lumière. Prague 1835.

gleich Null setzt. — Man kann dann nach CHRISTOFFEL[1]) n leicht aus einer quadratischen Gleichung berechnen.

Nach CAUCHY's Auffassung von der Ursache der Dispersion müsste der freie Aether ebenfalls Dispersion zeigen. Dagegen sprechen ganz entschieden einige astronomische Beobachtungen, z. B. die Farbenfolge variabler Sterne[2]). — Daher gab F. NEUMANN[3]) die Erklärung der Dispersion durch die Einwirkung der ponderablen Theile auf den Aether, indem er erstere als unbewegt annahm, was bei der im Vergleich zur Aetherdichte ausserordentlich hohen Körperdichte zunächst plausibel ist, und zwischen ponderablen und Aethertheilchen ein dem elastischen (zwischen zwei Aethertheilchen wirkenden) Kraftgesetze analoges annahm.

In anderer Weise erklärte BRIOT[4]) die Dispersion. Er nahm an, dass die ponderablen Theile dadurch von Einfluss auf die optischen Erscheinungen seien, dass sie den Lichtäther in ihrer Umgebung verdichteten, sodass derselbe nicht eine überall constante Dichtigkeit und Elasticität besitzt, sondern eine bei regelmässiger Anordnung der ponderablen Moleküle periodisch wechselnde. Die Hauptgleichungen enthalten in Folge dessen Coëfficienten, welche periodische Functionen des Orts sind. Aus diesen Hauptgleichungen können, wie schon CAUCHY[5]) angegeben hat, Hilfsgleichungen mit constanten Coëfficienten abgeleitet werden, welche die Mittelwerthe der Verrückungen u, v, w angeben. Diese nehmen dann eine Gestalt an, welche in der That die Dispersion zur Folge hat.

Die von BRIOT erhaltenen Resultate hinsichtlich der Kraftgesetze, welche zwischen den Aethermolekülen, resp. zwischen den Aether- und Körpermolekülen wirken sollen, dass nämlich erstere sich mit einer der 6. Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen, letztere mit einer der 2. Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft sich anziehen, sind deshalb nicht einwandsfrei, weil zu ihrer Herleitung die zu speciell gefasste POISSON'schen Elasticitätstheorie (cf. pag. 649) benutzt wird. Ausserdem führt BRIOT diese Anschauungen nicht consequent durch, indem er bei der Erklärung der Reflexion die von CAUCHY getroffene Festsetzung adoptirt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ausserordentlich klein sei (cf. pag. 650). Dies tritt aber mit den obigen Kraftgesetzen in Widerspruch, wie GLAZEBROOK[6]) bemerkt hat. — Auch bei der Behandlung der Reflexion an Krystallflächen benutzt BRIOT[7]) die CAUCHY'schen Grenzbedingungen und erhält die MAC CULLAGH'schen Formeln (vergl. oben pag. 654).

Wie wir aber oben (pag. 650) sahen, ist die Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen vom elastischen Standpunkt aus nur gestattet, wenn die Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien sowohl, als auch in verschiedenen Richtungen ein und desselben Krystalls dieselbe ist. Diese Annahme, mit Bei-

---

1) CHRISTOFFEL, POGG. Ann. 117, pag. 27. 1862.

2) Vergl. dazu VERDET, Wellentheorie, deutsch von K. EXNER, Braunschw. 1884, 2. Bd., pag. 11.

3) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1841.

4) BRIOT, Essai sur la théorie mathématique de la lumière. Paris 1864.

5) CAUCHY, Compt. rend. 30, pag. 17. 1850. Derselbe hat die hier dargelegte Auffassung einer periodisch wechselnden Struktur des Aethers zuerst ausgesprochen, hat sie aber nicht zur Dispersionserklärung verwandt, sondern vielmehr an Stelle der periodisch wechselnden Dichte des Aethers eine mittlere gleichmässige gesetzt.

6) R. T. GLAZEBROOK, Rep. of the Brit. Assoc. 1886, pag. 165.

7) BRIOT, Liouv. Journ. (2) 11, pag. 305. 1866. — 12, pag. 185. 1867.

behaltung der Grundanschauungen CAUCHY's und BRIOT's hat SARRAU[1]) gemacht, indem er allein die Dichte des Aethers als eine periodische Function einführte, die Elasticität aber überall als constant annahm. Dies hat zur Folge, dass in den Hilfsgleichungen eine mit der Richtung im Krystall variable Dichtigkeit auftritt, und für dieses vom rein elastischen Standpunkte schwer verständliche Verhalten ist also hierdurch eine physikalische Erklärung gegeben. — Indess hat die bei periodisch wechselnder Dichtigkeit constante Elasticität wenig Wahrscheinlichkeit für sich[2]). SARRAU hat das Reflexionsproblem nicht behandelt. Die Anwendung der CAUCHY'schen Continuitätsbedingung als Grenzbedingung würde, selbst wenn die Constitution des Aethers die angenommene wäre, ohne weiteres nicht evident sein, da wir es bei dieser Vorstellung keineswegs mit einem rein elastischen Problem zu thun haben[3]).

In anderer, wie in der bisher erörterten Weise, hat v. LANG[4]) den Einfluss der ponderablen Körper in seiner Theorie der Doppelbrechung berücksichtigt, indem er die auf den Aether wirkenden Kräfte als lediglich von der relativen Entfernung der Aether- von den Körpertheilchen abhängig einführt. Dieser Standpunkt ist indess nicht streng zu rechtfertigen, da auf den Aether jedenfalls auch Kräfte wirken, welche von den Dilatationen im Aether abhängen.

Die Theorie von CHALLIS[5]) mag hier unerörtert bleiben, da sie nicht zum FRESNEL'schen Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Krystall führt. Dagegen ist die Theorie von RAYLEIGH[6]) bemerkenswerth, da sie den Einfluss der ponderablen Theilchen in einer einfachen Weise zu deuten sucht. Der Aether wird als ein in allen Körpern gleich beschaffener homogener Körper angenommen, in welchem die ponderablen Theilchen gleichsam schwimmen. Der bei der Bewegung des umgebenden Aethers hervorgerufene hydrodynamische Widerstand derselben hängt von den Beschleunigungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ etc. ab, und kann in einem krystallinischen Mittel mit der Richtung variiren, da er nicht nur von der Grösse des einzelnen ponderablen Moleküls, sondern auch von der Anordnung der benachbarten Moleküle im Aether abhängt. Jener hydrodynamische Widerstand vergrössert also in den Hauptgleichungen den Coëfficienten der Differentialquotienten der Verrückungen nach der Zeit, d. h. scheinbar die Dichte des Aethers, und zwar in verschiedenen Richtungen verschieden.

Nimmt man an, dass die Gesetze jenes Widerstandes eine Symmetrie nach

---

1) SARRAU, Compt. rend. 60, pag. 1174. 1865. Liouv. Journ. (2), 12, pag. 1. 1867; 13, pag. 59. 1868.

2) Wegen weiterer Bedenken hinsichtlich der SARRAU'schen Theorie vergl. DE ST. VÉNANT, Ann. de chim. et de phys. (4) 25, pag. 335. 1872, und SARRAU, Ann. de chim. et de phys. (4) 28, pag. 266. 1873.

3) Betreffs weiterer Untersuchungen über die BRIOT'sche und SARRAU'sche Dispersionstheorie vergl. E. CARVALLO, Ann. de l'éc. norm. (3) 7, Suppl., pag. 3. 1890. — Compt. rend. 112, pag. 431, 521. 1891. — Journ. de Phys. (2) 10, pag. 53. 1891. Eine Darstellung auch noch anderer Theorien der normalen Dispersion (von BORCH, REDTENBACHER, EISENLOHR) hat A. BREUER (Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Hannover 1890) gegeben. — RÉNARD hat ferner in Compt. rend. 64. 1867 die Grundzüge einer besonderen Dispersionstheorie gegeben.

4) v. LANG, POGG. Ann. 159, pag. 168. 1876.

5) CHALLIS, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 524. 1862.

6) RAYLEIGH, Phil. Mag. (4) 41, pag. 519. 1871.

drei zu einander rechtwinkligen Ebenen besitzen, so nehmen, unter Benutzung derselben als Coordinatenebenen, die Hauptgleichungen die Gestalt an:

$$\rho_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A - B)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + B\Delta u,$$
$$\rho_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (A - B)\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + B\Delta v,$$
$$\rho_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (A - B)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + B\Delta w,$$

Rayleigh nimmt den Aether als incompressibel an, d. h. er setzt $A = \infty$, $\vartheta = 0$, $(A - B)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ etc. (cf. pag. 649). Dadurch wird er auf ein vom Fresnel'schen abweichendes Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geführt. Durch die Modifikation, die Glazebrook[1]) an obigem Ansatz vorgenommen hat, indem er nämlich $A = 0$ setzte, führt indess obige Theorie zum Fresnel'schen Gesetze für zwei quasi transversale Wellen, d. h. solche, deren Schwingungen senkrecht zum Strahl stehen, und auf diese Weise zu keinem Widerspruch mit der Erfahrung.

Es lässt sich indess nicht verkennen, dass der hier gemachte Ansatz für den Einfluss der ponderablen Körper, wenn er auch gewisse Anschaulichkeit besitzt, doch zu specieller Natur ist, als dass man ihn als einzig möglichen hinstellen könnte. Und in der That muss er verallgemeinert werden, wenn man noch andere Gebiete der Optik in den Kreis der Betrachtungen hineinziehen will, wie wir an der Boussinesq'schen Theorie sehen werden, von der die hier erörterte nur ein specieller Fall ist.

Die bisher besprochenen Theorien bilden nur ein System von Hauptgleichungen, welches für die Elongationen der Aethertheilchen aufgestellt wird. — In vollständigerer Weise berücksichtigt eine andere Gruppe von Theorien den Einfluss der ponderablen Theile auf die Bewegung des Aethers, indem auch für die ponderablen Moleküle ein System von Hauptgleichungen aufgestellt wird. Dieses Verfahren wird nothwendig, wenn man die Annahme fallen lässt, dass die ponderablen Theile bei der Lichtbewegung in Ruhe verbleiben. Der Hauptvortheil, welcher durch diesen allgemeineren Ansatz erreicht wird, ist, dass auch die anomale Dispersion dadurch eine Erklärung findet. Da dieselbe aber stets mit Absorption verknüpft ist, sollen diese Theorien an späterer Stelle (Theorie der anomalen Dispersion) näher behandelt werden. — Es mag hier nur kurz erwähnt werden, dass Lommel[2]) und Ketteler[3]) auch Anwendungen ihrer Formeln auf krystallinische Medien mit nicht starker Absorption, d. h. normaler Dispersion gemacht haben. — Letzterer passt dabei seine Theorie dem Fresnel'schen Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Krystallen an, dagegen führt die Theorie Lommel's zu einem vom Fresnel'schen abweichenden Gesetze. — Diese Abweichung führt derartige Differenzen herbei, dass sie, wie Hollefreund[4]) zeigte, die Beobachtungsfehler der von W. Kohlrausch[5]) am Natronsalpeter an-

---

[1]) R. T. Glazebrook, Phil. Mag. (5) 26, pag. 521. 1888.

[2]) E. Lommel, Wied. Ann. 4, pag. 55. 1878; 14, pag. 523. 1881; 15, pag. 378. 1882.

[3]) E. Ketteler, Wied. Ann. 7, pag. 94 u. 107. 1879; 12, pag. 363. 1881; 16, pag. 86. 1882; 18, pag. 631. 1883; 21, pag. 199. 1884; 22, pag. 204 u. 590. 1884. — Theoretische Optik. Braunschw. 1885.

[4]) K. Hollefreund, Nova Acta Acad. Leopold. 46, No. 1. 1883.

[5]) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6, pag. 86. 1879

gestellten Messungen überschreiten. Daher ist die LOMMEL'sche Theorie als nicht mit der Erfahrung im Einklang stehend anzusehen[1]).

III. Theorien der resultirenden Wirkungen.

Die Theorien dieser Gattung unterscheiden sich von den vorhin beschriebenen dadurch, dass sie hinsichtlich des Einflusses, welchen die ponderablen Moleküle auf die Bewegung der Aethermoleküle ausüben, keine speciellen, aus anderen Gebieten der Physik bekannten Vorstellungen zu Grunde legen, sondern denselben nach allgemeinen Gesichtspunkten zu bestimmen suchen. Die sich dabei ergebenden Formen für die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie bieten, auch wenn dergestaltete Kraftgesetze bei anderen einfacheren physikalischen Erscheinungen bisher noch nicht auftreten, deshalb nichts an sich Unwahrscheinliches, weil dieselben als Resultanten von irgend welchen Einzelwirkungen anzusehen sind, deren Gesetze aber unbekannt und für das Wahrnehmbare der Erscheinungen unwesentlich sind.

Bezeichnen, wie vorhin, u, v, w die Elongationen der Aethertheilchen aus der Ruhelage, U, V, W die der ponderablen Theilchen, ferner m, resp. μ die Dichtigkeit des Aethers, resp. der Materie, so sind die Bewegungsgleichungen, falls keinerlei äussere Kräfte wirken:

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X_1 + X_2, & m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y_1 + Y_2, & m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z_1 + Z_2, \\ \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \Xi_1 + \Xi_2, & \mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2, & \mu\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bezeichnen X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der auf den Aether von den umgebenden Aethertheilchen, Ξ_1, H_1, Z_1 diejenigen der auf die ponderablen Theile von den umgebenden ponderablen Theilen ausgeübten inneren Kräfte X_2, Y_2, Z_2, Ξ_2, H_2, Z_2 die Componenten der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether. Sämmtliche Kräfte sind auf die Volumeneinheit bezogen und aufzufassen als die Differenz der im ursprünglichen und im verschobenen Zustande wirkenden Kräfte. Wenn man annimmt, dass die Wechselwirkungen nur als von Theilen desselben Volumenelementes herrührend anzusehen sind, was der Fall ist, wenn die Wirkungssphäre der zwischen Aether und Materie wirkenden Kräfte klein gegen die Dimensionen des Volumenelementes ist, so finden die Beziehungen statt:

$$X_2 = -\Xi_2, \quad Y_2 = -\mathrm{H}_2, \quad Z_2 = -\mathrm{Z}_2. \tag{2}$$

In den hier zu betrachtenden Theorien wird nun der Aether als isotrop und in allen Körpern von gleicher Beschaffenheit angenommen. Demnach werden allgemein für X_1, Y_1, Z_1 die aus der Elasticitätstheorie sich ergebenden Formeln angenommen, nämlich (cf. pag. 647).

$$\begin{aligned} X_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + B\Delta u, \\ Y_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + B\Delta v, \\ Z_1 &= (A-B)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + B\Delta w, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{wobei } \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

---

[1]) Betreffs theoretischer Discussionen vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 17, pag. 468. 1882; 20, pag. 444. 1883. — E. LOMMEL, WIED. Ann. 19, pag. 908. 1883. — Ferner bezüglich der KETTELER'schen Theorie: W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 691. 1883; 21, pag. 534; 23, pag. 159. 1884. — E. KETTELER, WIED. Ann. 21, pag. 178; 22, pag. 217. 1884.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der X_2, Y_2, Z_2. Da μ ausserordentlich viel grösser ist als m, und da, wie aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleiche Grössenordnung mit $\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ hat, so ist U neben u zu vernachlässigen, falls es eben nicht mit dem Faktor μ multiplicirt auftritt. In der Theorie von BOUSSINESQ[1]) wird nun angenommen, dass die Elongationen U, V, W der ponderablen Theile aus der Ruhelage überhaupt so klein seien, dass dadurch merkliche elastische Kräfte Ξ_1, H_1, Z_1, nicht geweckt werden. Durch Addiren der beiden Gleichungssysteme (1) kann man daher die Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether eleminiren und erhält:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=X_1,\quad m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=Y_1,\quad m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=Z_1. \tag{4}$$

Von den ponderablen Theilen wird angenommen, dass ihre Schwingungsdauer gleich der der Aethertheilchen sei, und dass ihre Elongationen sich bestimmen durch die Elongationen u, v, w an der Stelle x, y, z, sowie durch die der benachbarten Stellen, d. h. es müssen die U, V, W Functionen der u, v, w und deren Differentialquotienten nach den Coordinaten sein. Es ist von vornherein plausibel, anzunehmen, dass die Coëfficienten der Entwickelung der U, V, W nach den Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten mit wachsender Ordnungszahl der Differentialquotienten abnehmen, da ja für die U, V, W in erster Annäherung nur das Verhalten der unmittelbar anliegenden Aethertheilchen massgebend sein wird, und erst in weiterer Annäherung das der entfernteren. BOUSSINESQ geht nun in der Entwickelung bis auf zweite Differentialquotienten und bestimmt die Coëfficienten derselben lediglich nach Symmetrierücksichten.

Für isotrope Medien, d. h. solche, für welche bei beliebiger Drehung des Coordinatensystems um den Anfangspunkt die Kräfte denselben Werth behalten, ergiebt sich die Form

$$\begin{aligned} U&=au+b\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+c\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+d\Delta u,\\ V&=av+b\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+c\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+d\Delta v,\\ W&=aw+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+d\Delta w, \end{aligned}\tag{5}$$

Es giebt isotrope Medien, welche noch eine höhere Symmetrie als die bisher benutzte aufweisen, bei denen nämlich auch jede Coordinatenaxe in die entgegengesetzte Richtung gelegt werden darf, ohne dass sich dadurch die Kräfte ändern. Diese Medien werden isotrop-symmetrisch genannt, im Gegensatz zu den vorhin betrachteten, isotrop-dissymetrischen, bei welchen nur das Coordinatensystem als ganzes gedreht werden darf. Bei ersteren müssen die Gleichungen (5) unverändert bestehen bleiben, wenn man z. B. x mit $-x$, u mit $-u$, U mit $-U$ vertauscht. In Folge dessen müssen dort die b verschwinden, und es bleibt für die U, V, W die Form:

$$\begin{aligned} U&=au+c\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+d\Delta u,\\ V&=av+c\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+d\Delta v,\\ W&=aw+c\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+d\Delta w, \end{aligned}\tag{5'}$$

[1]) U. BOUSSINESQ, Compt. rend. 65, pag. 235 u. 672. 1867. — Liouville Journ. (2) 13, pag. 313, 340 u. 425. 1868; 17, pag. 167. 1872; 18, pag. 361. 1873. — Ann. de chim. et de phys. (4) 30, pag. 539. 1873.

Die Gleichungen (5) resp. (5') in die Gleichungen (4) mit Rücksicht auf (3) eingesetzt, ergeben die Hauptgleichungen der Theorie. Es ergeben sich für isotrop-symmetrische Mittel eine transversale und eine longitudinale Welle, deren Geschwindigkeit gerade wie in den vorhin betrachteten Theorien die Grösse $\sqrt{A}$ [cf. Formeln (3)] im Zähler enthält, deren Einfluss auf die optischen Erscheinungen, d. h. bei den transversalen Wellen, man also durch die Annahmen $A = \infty$, oder $A = 0$ vernichten kann.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen ergiebt sich eine Abhängigkeit von der Schwingungsdauer, wie sie den von anderen Theorien, z. B. der CAUCHY'schen, aufgestellten Dispersionsformeln in erster Annäherung entspricht. Es wird Identität mit jenen Formeln erreicht, wenn die Entwickelung der U, V, W nach Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten auf weitere, als zweite, ausgedehnt wird.

Für die isotrop dissymmetrischen Medien ergiebt sich in völliger Uebereinstimmung mit der Erfahrung die für sie charakteristische Drehung der Polarisationsebene. In der bisherigen Annäherung ist dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge, und dies war die von BIOT[1]) experimentell zuerst aufgestellte Formel, in weiterer Annäherung wird sie mit der BOLTZMANN'schen Formel[2]) identisch, welche bisher als sehr gut sich den Beobachtungen anschliessend erkannt ist.

Nach den einfachen Vorstellungen der BOUSSINESQ'schen Theorie lässt sich das optische Verhalten von Mischungen in gewissen Fällen leicht berechnen[3]). In solchen müssen an Stelle der Ausdrücke $\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ etc. in den Formeln (4) die Summen:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} + \ldots$$

treten, wo die verschiedenen Indices sich auf die verschiedenen in der Mischung enthaltenen ponderablen Substanzen beziehen. Unter der Voraussetzung nun, dass eine jede derselben auf die Aetherbewegung so wirkt, als ob sie allein vorhanden wäre, erhält man sofort die Gesetze:

1) Abgesehen von der Dispersion ist das Brechungsvermögen eines Gemisches gleich der Summe der Brechungsvermögen seiner Bestandtheile, und jedes derselben ist proportional der Dichtigkeit derselben. Hierin ist das Brechungsvermögen einer Substanz definirt als das Quadrat ihres Brechungsexponenten gegen den leeren Raum (freien Aether) vermindert um 1. Dies Gesetz ist bei Gasen bestätigt und wird vermuthlich ebenso bei stark verdünnten Lösungen Gültigkeit besitzen,

2) Abgesehen von der Dispersion ist das Drehungsvermögen[4]) eines Gemisches gleich der Summe der Drehungsvermögen seiner Bestandtheile, und jedes derselben ist proportional der Dichtigkeit derselben. Auch dieses Gesetz ist annähernd bei Lösungen bestätigt.

Für die Krystalle nimmt BOUSSINESQ an, dass für sie die Abweichung vom isotropen Verhalten nur eine geringe sei. Dies hat zur Folge, dass nur die Coëfficienten der Anfangsglieder (d. h. der u, v, w) der Entwickelung der U, V, W

[1]) BIOT, Mém. de l'Acad. des scienc. 2, pag. 41. 1818.

[2]) L. BOLTZMANN, POGG. Ann. Jubelbd., pag. 129. 1874.

[3]) M. BOUSSINESQ, Liouv. Journ. (2) 13, pag. 425. 1868.

[4]) d. h. der Betrag der Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang linear polarisirten Lichtes durch eine Schicht der Dicke 1.

als mit der Richtung variabel anzusehen sind, während die Coëfficienten der in der Entwickelung auftretenden Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten, da sie ohnehin schon klein sind, dieselbe Form besitzen, wie in isotropen Medien. Dies führt, falls der Krystall drei zu einander rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, und diese zu Coordinatenebenen gewählt werden, unmittelbar zu folgenden Formeln:

$$U = a(1+\alpha)u + c\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + d\Delta u,$$
$$V = a(1+\beta)v + c\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + d\Delta v,$$
$$W = a(1+\gamma)w + c\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + d\Delta w,$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (4) ein und berücksichtigt, dass bei periodischen Schwingungen der u, v, w mit der Periode T die Beziehung stattfindet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}w,$$

so werden die Hauptgleichungen:

$$\begin{aligned}
[m+\mu a(1+\alpha)]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta u,\\
[m+\mu a(1+\beta)]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta v, \qquad (7)\\
[m+\mu a(1+\gamma)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(A - B + \frac{4\pi^2\mu c}{T^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \left(B + \frac{4\pi^2\mu d}{T^2}\right)\Delta w.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Gestalt, wie die RAYLEIGH'schen und GLAZEBROOK'schen (cf. pag. 660). Man erkennt, dass letztere nur ein specieller Fall der BOUSSINESQ'schen Theorie sind, der sich für $c = d = 0$ ergiebt. Wie schon oben bemerkt, ergiebt sich das FRESNEL'sche Fortpflanzungsgeschwindigkeitsgesetz, falls man die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen, d. h. den Ausdruck

$$A + \frac{4\pi^2\mu(c+d)}{T^2}$$

gleich Null setzt.

Diese Bedingung würde, da A von der Schwingungsdauer unabhängig sein muss, die zwei Gleichungen zur Folge haben:

$$A = 0, \qquad c + d = 0.$$

Falls die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit wachsender Schwingungsdauer wächst, wie es bei der sogenannten normalen Dispersion der Fall ist, muss d einen negativen, daher c einen positiven Werth haben.

Die Wellen sind nicht streng transversal, da ihre Schwingungen nicht senkrecht zur Wellennormale, sondern zum Strahl stehen. Die Incompressibilitätsbedingung ist in der That nicht erfüllt.

Lässt man die Bedingung der Symmetrie nach drei zu einander rechtwinkligen Ebenen fallen, so ergeben sich noch unverändert dieselben Gesetze für alle Krystalle, bei welchen eine krystallographische Axe senkrecht auf der Ebene der zwei anderen steht, also für alle Krystalle der ersten fünf Systeme. Für trikline Krystalle indessen folgt zwar auch noch die Existenz von nur zwei optischen Axen (vergl. unten im Capitel »Doppelbrechung«), indessen für Wellen, welche sich in einer Richtung fortpflanzen, die stark von der Ebene dieser Axen abweicht, ein vom FRESNEL'schen verschiedenes Gesetz für ihre Geschwindigkeit.

Dem Experiment bleibt es noch vorbehalten, über die Zulässigkeit dieser Folgerung zn entscheiden.

Durch Beibehaltung derjenigen Terme in den Hauptgleichungen, welche die Erscheinungen der Rotationspolarisation isotroper Medien erklären, ergeben sich die am Quarz und anderen optisch aktiven Krystallen beobachteten Erscheinungen.

In besonders einfacher Weise lässt sich nach der dargelegten Theorie das Verhalten bewegter Medien erklären. Wird für diese angenommen, dass der Aether ruhe und nur die ponderablen Theile sich bewegen, so werden dadurch die Werthe der Componenten U, V, W in leicht zu berechnender Weise geändert und damit auch die Zusatzglieder in den für die u, v, w gültigen Hauptgleichungen. Es ergiebt sich dadurch ohne Schwierigkeit das FRESNEL'sche Gesetz der scheinbaren theilweisen Mitführung des Aethers in bewegten Medien, sowie die Erklärung der FIZEAU'schen Experimente über die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers durch Strömung (vergl. pag. 12 dieses Bandes).

Als Grenzbedingungen nimmt BOUSSINESQ die CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen an. Wenn diese auch die Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an isotropen und krystallinischen Medien mit genügender Uebereinstimmung mit der Erfahrung liefern, so sind hier doch die theoretischen Grundlagen derselben sehr unsicher, da wir es mit einem complicirteren als einem rein elastischen Problem zu thun haben. Hinsichtlich der Grenzbedingungen verfährt die jetzt auseinanderzusetzende Theorie von W. VOIGT in rationellerer Weise.

In der VOIGT'schen[1]) Theorie werden ebenfalls die Excursionen der ponderablen Theile gegen die der Aethertheilchen vernachlässigt. Wie schon früher bemerkt, müssen bei dieser Vorstellung Erscheinungen, wie sie die Fluorescenz und anomale Dispersion bieten, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. — VOIGT stellt sich nun die Aufgabe, für durchsichtige Medien, d. h. solche, welche die Energie der Lichtbewegung ohne Schwächung fortzupflanzen im Stande sind, diejenigen Arten von Kräften zu finden, für welche das Princip der Erhaltung der Energie Gültigkeit besitzt, welches aussagt, dass der in der Zeit dt gewonnene Zuwachs an kinetischer Energie gleich ist der in derselben Zeit erfolgenden Abnahme einer gewissen Function Φ, welche von der Configuration und dem Zustand des Aethers abhängt und seine potentielle Energie genannt wird. Dadurch, dass dieses Energieprincip nicht nur als gültig angenommen wird bei der besonderen Art von Bewegung, wie sie bei den Lichtschwingungen stattfindet, sondern auch bei jeder, überhaupt denkbaren, ergeben sich gewisse Arten von Kräften, durch welche das optische Verhalten von Krystallen erklärt wird[2]), welche nicht, wie z. B. Quarz, die Polarisationsebene drehen.

Zerlegt man die auf den Aether wirkende Kräfte in die Gestalt:

$$\begin{aligned} mu'' &= A + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y} + \dots\right) \\ mv'' &= B + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 B_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{xy}}{\partial x \partial y} + \dots\right) \\ mw'' &= C + \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 C_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_{xy}}{\partial x \partial y} + \dots\right), \end{aligned} \tag{8}$$

[1]) W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 873. 1883; 21, pag. 522. 1884; 23, pag. 493. 1884; 24, pag. 156. 1885; 43, pag. 410. 1891.

[2]) Betreffs der Ausdehnung dieser Theorie auf bewegte Medien vergl. W. VOIGT, Gött. Nachr. 8. 1887. — WIED. Ann. 35, pag. 370, 524. 1888. — 43, pag. 418. 1891.

wobei u'' für $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gesetzt ist, analog v'' für $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ etc., so liefert die Anwendung des Energieprincipes als mögliche Formen der Kräfte:

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_{11}^{(0)} u + \alpha_{12}^{(0)} v + \alpha_{13}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{11}^{(1)} u' + \alpha_{12}^{(1)} v' + \alpha_{13}^{(1)} w' \\
&+ \alpha_{11}^{(2)} u'' + \alpha_{12}^{(2)} v'' + \alpha_{13}^{(2)} w'' \\
&+ \dots \\
B &= \alpha_{21}^{(0)} u + \alpha_{22}^{(0)} v + \alpha_{23}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{21}^{(1)} u' + \alpha_{22}^{(1)} v' + \alpha_{23}^{(1)} w' \\
&+ \alpha_{21}^{(2)} u'' + \alpha_{22}^{(2)} v'' + \alpha_{23}^{(2)} w'' \\
&+ \dots \\
C &= \alpha_{31}^{(0)} u + \alpha_{32}^{(0)} v + \alpha_{33}^{(0)} w \\
&+ \alpha_{31}^{(1)} u' + \alpha_{32}^{(1)} v' + \alpha_{33}^{(0)} w' \\
&+ \alpha_{31}^{(2)} u'' + \alpha_{32}^{(2)} v'' + \alpha_{33}^{(2)} w'' \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

Dabei muss sein

$$\alpha_{hk}^{(2n)} = \alpha_{kh}^{(2n)}, \qquad \alpha_{hk}^{(2n+1)} = -\alpha_{kh}^{(2n+1)}.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
A_x &= a_{11}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{19}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&+ a_{11}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial x} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial y} + \dots + a_{19}^{(1)} \frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ a_{11}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial x} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial y} + \dots + a_{19}^{(2)} \frac{\partial w''}{\partial z} \\
&\dots \\
A_y &= a_{21}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \\
&\dots \\
C_z &= a_{91}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + a_{99}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&+ a_{91}^{(1)} \frac{\partial u'}{\partial x} + \dots + a_{99}^{(1)} \frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ a_{91}^{(2)} \frac{\partial u''}{\partial x} + \dots + a_{99}^{(2)} \frac{\partial w''}{\partial z} \\
&+ \dots,
\end{aligned} \tag{10}$$

wobei sein muss

$$a_{hk}^{(2n)} = a_{kh}^{(2n)}, \qquad a_{hk}^{(2n+1)} = -a_{kh}^{(2n+1)}.$$

Die Kräfte höherer Ordnung, nämlich A_{xx} etc. werden Null gesetzt, da ihr Vorhandensein in Krystallen mehr wie zwei Lichtwellen ergeben würde[1]).

Für die weitere Bestimmung der α_{hk} und a_{hk} nimmt VOIGT an, dass die Kräfte keine räumliche Dilatation zu Stande kommen lassen sollen, d. h. dass ihre Form eine derartige ist, dass die Gleichung

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

durch die Hauptgleichungen identisch erfüllt ist. Es ist für den Erfolg gleichgültig, ob man dem Aether die Eigenschaft der Incompressibilität beilegt oder den Kräften die oben genannte Eigenschaft.

---

[1]) Dieser Uebelstand trifft übrigens die Dispersionstheorien von CAUCHY, BRIOT und SARRAU, falls man ihre Hauptgleichungen nicht als convergente Reihenentwicklungen auffasst.

Durch diese neue Bedingung werden die Kräfte *A*, *B*, *C* ganz allgemein, d. h. auch in Krystallen, von der Richtung unabhängig. Deshalb hält VOIGT dieselben für unwahrscheinlich, und da sie bei der Aufstellung der Grenzbedingungen ausserdem gewisse Schwierigkeiten bereiten [1]), so lässt er sie überhaupt fort.

Da bei den optischen Erscheinungen die u, v, w periodische Functionen der Zeit sind, so kann man die Gleichungen (10) schreiben:

$$A_x = A_x^I + A_x^{II}, \quad A_y = A_y^I + A_y^{II}, \text{ etc.}$$

$$A_x^I = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{19}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$A_y^I = a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + \dots + a_{29}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A_x^{II} = b_{12}\frac{\partial u'}{\partial y} + b_{13}\frac{\partial u'}{\partial z} + \dots + b_{19}\frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$A_y^{II} = b_{21}\frac{\partial u'}{\partial x} + b_{23}\frac{\partial u}{\partial z} + \dots + b_{29}\frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

wobei

$$a_{hk} = a_{kh}, \quad b_{hk} = -b_{kh},$$

und die Coëfficienten Reihen sind, welche nach Potenzen des reciproken Quadrats der Schwingungsdauer des Lichtes fortschreiten. Dadurch ist die Möglichkeit der (normalen) Dispersion ausgesprochen. Das Dispersionsgesetz besitzt eine ähnliche Gestalt, wie in den Theorien von CAUCHY, BRIOT, SARRAU (cf. oben).

Die Kräfte A_x^{II} etc., welche ungerade Differentialquotienten der u, v, w nach der Zeit enthalten, ergeben bei Anwendung der Incompressibilitätsbedingung, dass sie sich rings um eine Axe gleich verhalten. Sie stellen die Erscheinung der Drehung der Polarisationsebene dar, welche in durchsichtigen Körpern unter dem Einfluss des Magnetismus hervorgerufen wird. Da dieses Gebiet in dem III. Bande dieses Handbuches behandelt wird, so mag es hier unerörtert bleiben.

Wendet man auf die allein übrig bleibenden Kräfte A_x^I etc. die Incompressibilitätsbedingung an, so erscheinen die rechten Seiten der Hauptgleichungen (8) als Superposition zweier Kräftesysteme, von denen jedes allein eine Symmetrie nach drei zu einander rechtwinkligen Axen aufweist und das FRESNEL'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Krystallen ergiebt, und zwar das eine in der Weise, dass in Uebereinstimmung mit NEUMANN der Lichtvector in der Polarisationsebene liegt, während nach dem andern Kräftesystem der Lichtvector in Uebereinstimmung mit FRESNEL senkrecht zur Polarisationsebene liegt. Diese beiden Kräftesysteme sollen daher kurz das NEUMANN'sche und das FRESNEL'sche Kräftesystem genannt werden.

Als Grenzbedingungen verwendet VOIGT das Princip der Gleichheit der Elongation der Aethertheilchen zu beiden Seiten der Grenze, sowie das Energieprincip, welches aussagt, dass auch beim Uebergang der Lichtbewegung über die Grenze zweier verschiedener Medien kein Energieverlust stattfinden soll. — Mit Hilfe dieser beiden Principe lassen sich dann aus dem NEUMANN'schen Kräftesystem vier lineare Grenzbedingungen ableiten. Die gewonnenen Resultate unterscheiden sich dann von der KIRCHHOFF'schen Modifikation der F. NEUMANN-schen Theorie der Doppelbrechung und Reflexion an Krystallen (cf. pag. 655)

[1]) Vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 43, pag. 433. 1891.

nur dadurch, dass die auftretenden Constanten von der Schwingungsdauer des Lichtes abhängen, d. h. sie geben eine vollständigere Theorie durch Mitberücksichtigung der Dispersion. — Aus dem FRESNEL'schen Kräftesystem lassen sich nach dem genannten Verfahren nicht vier lineare Grenzbedingungen erhalten. Deshalb ist dasselbe mit der VOIGT'schen Theorie unvereinbar.

IV. Vergleichung der Resultate der verschiedenen Theorien untereinander und mit denen der elektromagnetischen Lichttheorie.

Aus den bisherigen Erörterungen geht zur Genüge die grosse Mannigfaltigkeit der Grundhypothesen der verschiedenen Lichttheorien hervor. Diese Mannigfaltigkeit wird noch um ein grosses Stück vermehrt durch die Hinzunahme der elektromagnetischen Lichttheorie, und doch hat gerade das Auftreten der letzteren ganz bedeutend zur Klärung beigetragen hinsichtlich der Frage, in welchem Verhältniss die aus den verschiedenen Theorien für die beobachtbaren Erscheinungen sich ergebenden Resultate zu einander stehen.

Diese Resultate knüpfen nur an die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen der Theorie an, nicht an die Art der mathematischen Deduction dieser Gleichungen, oder die Hypothesen über die Constitution des Aethers. Das Hauptinteresse vom Standpunkte des beobachtenden Physikers aus liegt daher in den Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, im »Erklärungssystem« einer Theorie, da dieses mit der Erfahrung zu vergleichen ist und werthvolle numerische Beziehungen für die Beobachtungen liefern kann.

Die mathematische Herleitung des Erklärungssystems wird nie frei von willkürlichen Hypothesen sein, sodass durchaus nicht zu schliessen ist, dass eine Form von Hauptgleichungen oder Grenzbedingungen überhaupt unmöglich sei, wenn sie sich mit den mathematischen Deductionen einer bestimmten Theorie nicht verträgt. Selbst z. B. in der VOIGT'schen Theorie, welche unter den mechanischen Theorien wohl mit am meisten in zwingender Weise vorgeht, ist die Anwendung des Energieprincips insofern mit einer gewissen Willkür verknüpft, als die kinetische Energie des Aethers in einer bestimmten Form, nämlich als $\frac{1}{2}m(u'^2 + v'^2 + w'^2)$, angenommen ist. Hierin ist begründet, dass einerseits das optische Verhalten sogen. aktiver Körper, wie Zuckerlösungen oder Quarz, von dem Erklärungssystem nicht umfasst wird, andererseits rührt daher eine gewisse Einseitigkeit der Theorie, indem das FRESNEL'sche Kräftesystem als unmöglich erscheint.

Eine derartige Einseitigkeit zeigen alle mechanischen Theorien, so z. B. ergiebt die BOUSSINESQ'sche Theorie die Unmöglichkeit des NEUMANN'schen Kräftesystems. Nur die elektromagnetische Theorie ist von dieser Einseitigkeit frei. Sie fasst ferner nicht nur die Erklärungssysteme vieler mechanischer Theorien in sich, sondern lässt auch ohne Rechnung erkennen, dass letztere von ganz verschiedenen Standpunkten aus zu gleichen Resultaten für die Beobachtung gelangen müssen. Nach diesen Betrachtungen ergiebt sich auch, dass alle Theorien, welche von den CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen als Grenzbedingungen Gebrauch machen, die Polarisationsebene mit FRESNEL definiren müssen, um mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bleiben. — Ferner ergiebt sich[1], dass man für jedes beliebige Medium (krystallinisch, aktiv und absorbirend) ein

[1]) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. No. 10, pag. 366; pag. 392. 1892. Für magnetisch-aktive Körper ist dies gezeigt von P. DRUDE in WIED. Ann. 46, pag. 384. 1892 (Formeln 61'', 62'').

richtiges Erklärungssystem mit Benutzung der CAUCHY'schen Grenzbedingungen aufstellen kann.

Das Erklärungssystem der elektromagnetischen Theorie für nicht aktive durchsichtige Krystalle schreibt sich[1])

$$\begin{gathered}
A\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad A\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\quad A\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.\\
A\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},\\
A\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},\\
A\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.
\end{gathered}\tag{11}$$

Hierin bedeuten L, M, N die Componenten der magnetischen, X, Y, Z die der elektrischen Kraft. A ist das Verhältniss der Einheit der Elektricitätsmenge, wenn man sie nach elektromagnetischem Maasse misst, zu der nach elektrostatischem Maasse gemessenen, ferner sind ε_{hk} die Dielektricitätsconstanten des Krystalls und es ist $\varepsilon_{hk}=\varepsilon_{kh}$. Die Grenzbedingungen lauten: Die der Grenze parallelen Componenten der elektrischen sowohl, wie der magnetischen Kraft sind beim Durchgang durch die Grenze stetig. — Ist daher die Grenze die xy-Ebene, und bezeichnet man die Zugehörigkeit zu den zwei verschiedenen Medien durch untere Indices, so lauten die Grenzbedingungen:

$$L_1=L_2,\quad M_1=M_2,\quad X_1=X_2,\quad Y_1=Y_2\quad \text{für}\quad z=0.\tag{12}$$

Die elektromagnetische Theorie liefert zunächst allgemeinere Gleichungen als das System (11), indem auch die Magnetisirungsconstante eines Krystalls mit der Richtung variiren kann. Um aber das FRESNEL'sche Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bekommen, muss man diese Annahme fallen lassen. Um ferner bei dem Reflexionsproblem Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten, muss man die Magnetisirungsconstanten aller Medien gleich annehmen (= 1). Diese Verfügungen kann man durch die Vorstellung unterstützen, dass der Vorgang, welcher bei langsamen Veränderungen zum Theil so erhebliche Verschiedenheiten der Magnetisirungsconstanten in den verschiedenen Körpern hervorruft, den schnellen Wechseln der Kräfte, wie sie bei Lichtschwingungen eintreten, nicht zu folgen im Stande ist.

Interpretirt man die magnetische Kraft als den Lichtvector, d. h. setzt man

$$L=u,\qquad M=v,\qquad N=w,$$

führt man ferner die Componenten ξ, η, ζ eines aus dem Lichtvector nach folgenden Operationen ableitbaren Vectors ein:

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\tag{13}$$

so erhält man[2]) aus (11) und (12) das Erklärungssystem:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}\right),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right),
\end{gathered}\tag{14}$$

wobei $2G$ gesetzt ist für

[1]) Vergl. H. HERTZ, Gött. Nachr. 4, pag. 114. 1890. — Für die Begründung dieser elektromagnetischen Gleichungen mag auf den III. Band dieses Handbuches verwiesen sein.

[2]) Betreffs ausführlicherer Herleitung vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr., l. c., pag. 393.

$$2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta, \qquad (15)$$

und die a_{hk} aus den ε_{hk} leicht ableitbar sind. Als Grenzbedingungen folgen

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_2 \text{ für } z = 0. \qquad (16)$$

Die Formeln (14, 15, 16) sind identisch mit der KIRCHHOFF'schen Form der NEUMANN'schen Theorie und dem VOIGT'schen Erklärungssystem, falls die a_{hk} als von der Schwingungsdauer abhängig angesehen werden. — Die Wellen sind streng transversal, da $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ist.

Interpretirt man die elektrische Kraft als Lichtvector, d. h. setzt man

$$X = u, \quad Y = v, \quad Z = w,$$

so ergiebt sich das Erklärungssystem:

$$A^2\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varepsilon_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad (17)$$

. . . .

$\left(\text{wobei } \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$, und als Grenzbedingungen:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \quad \text{für } z = 0. \qquad (18)$$

Legt man die Coordinatenebenen in die optischen Symmetrieebenen, so gehen die Gleichungen (17) in die Formeln der BOUSSINESQ'schen (vergl. Formel (7), pag. 664), RAYLEIGH'schen, GLAZEBROOK'schen, SARRAU'schen und KETTELER'schen [1]) Theorie für rhombische Krystalle über, falls man in ihnen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen gleich Null setzt. Die Formeln (18) sind mit den von jenen Theorien adoptirten [2]) CAUCHY'schen Grenzbedingungen identisch. In der That trennt man nach CAUCHY die Componenten der gesammten Verrückung, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in zwei Theile, nämlich in die Componenten u, v, w der Verrückung der Lichtwelle, und in die Componenten einer Longitudinal-Welle, welche sich stets in die Form $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ setzen lassen, so ist zu schreiben:

$$\mathfrak{u} = u + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v} = v + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{w} = w + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (19)$$

Aus der Stetigkeit der Differentialquotienten der $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nach den Coordinaten in der Grenzschicht folgt nach (19) sofort die Stetigkeit der ξ, η, ζ, da in $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}$ etc. die Function φ eleminirt wird. Da ferner sowohl u, v, w, als φ in beiden Medien Functionen derselben Function der Coordinaten x, y sein müssen, falls für $z = 0$ gewisse Grenzbedingungen für alle Werthe der Coordinaten x, y bestehen sollen, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetig beim Hindurchgang durch die Grenze, da φ selber stetig ist. Aus der Stetigkeit von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ folgt daher auch die Stetigkeit von u und v. — Die Gleichungen (18) sind daher identisch mit den CAUCHY'schen Grenzbedingungen, wenn man in ihnen die Longitudinal-Wellen eleminirt [3]).

Der Lichtvector u, v, w liegt nicht senkrecht zur Wellennormale, da nach

---

[1]) Vergl. KETTELER, Theoret. Optik, pag. 297, Formel (V).

[2]) KETTELER giebt seine Grenzbedingungen direkt in derselben Form wie (18), vergl. KETTELER, theor. Optik, pag. 343, Formel 22.

[3]) Auf diesen Punkt hat wohl zuerst POINCARÉ aufmerksam gemacht in seiner Théorie math. de la lum. Paris 1889, pag. 356.

den Formeln (11) der Werth von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ nicht streng Null ist. Man erhält daher nur quasi-transversale Wellen.

Interpretirt man als Componenten des Lichtvectors die Componenten der elektrischen Polarisation, nämlich:

$\varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z = u, \quad \varepsilon_{21}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z = v, \quad \varepsilon_{31}X + \varepsilon_{32}Y + \varepsilon_{33}Z = w,$

so erhält man wiederum streng transversale Wellen und die Hauptgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Delta \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right\}, \end{aligned} \tag{20}$$

wobei

$$2H = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv. \tag{21}$$

Diese Formeln repräsentiren das FRESNEL'sche Kräftesystem[1]) (s. oben pag. 653). — Aus den Formeln (12) erhält man Grenzbedingungen, wie sie von CORNU bei Behandlung der Reflexion an Krystallen benutzt sind.

Aus den letzten drei Formeln des Systems (11) folgt

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = -\xi', \quad A\frac{\partial v}{\partial t} = -\eta', \quad A\frac{\partial w}{\partial t} = -\zeta', \tag{21'}$$

wobei u, v, w die Componenten des FRESNEL'schen Lichtvectors bedeuten, ξ', η', ζ' dagegen die Vectorcomponenten, welche nach den Formeln (13) aus dem NEUMANN'schen Lichtvector, der mit u', v', w' bezeichnet werden möge, abzuleiten sind. Nun ist nach (13)

$$\frac{\partial u'}{\partial t}\xi' + \frac{\partial v'}{\partial t}\eta' + \frac{\partial w'}{\partial t}\zeta' = \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial w'}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial v'}{\partial z} + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet aber, falls u', v', w' Functionen ein und derselben Function von x, y, z, t sind, was bei Wellenbewegungen stets der Fall ist. Es ist daher mit Berücksichtigung von (21')

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w'}{\partial t} = 0,$$

d. h. da $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u'}{\partial t}$ proportional zu u, u' sind, so liegt der FRESNEL'sche Lichtvector (u, v, w) senkrecht zum NEUMANN'schen (u', v', w'). — Ebenso folgt aus den ersten drei Formeln des Systems (11), dass der NEUMANN'sche Vector u', v', w' senkrecht liegt zu dem Vector u'', v'', w'' (der elektrischen Kraft), welcher sich in quasi-transversalen Wellen fortpflanzt, dass dieser Vector daher bei ebenen Wellen in der durch die Wellennormale und den FRESNEL'schen Vector hindurchgehenden Ebene liegt.

Aus dem Erörterten erhellt, dass die oben genannten Theorien, welche quasi-transversale Wellen in Krystallen annehmen, in übereinstimmender Weise

[1]) Dass nach den Gleichungen (20) in einem einaxigen Krystall der Lichtvector der ordinären Welle senkrecht zu seinem Hauptschnitt liegt, sowie nach den Gleichungen (14) in demselben, ist unten im Kapitel »Doppelbrechung« gezeigt. — In dem Kapitel »Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier Medien« ist gezeigt, dass auch die Reflexionserscheinungen (schon an isotropen Körpern) bei Anwendung des Erklärungssystemes (14, 16) zu NEUMANN's Ansicht über die Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene, das Erklärungssystem (17, 18) zur FRESNEL'schen Ansicht führen.

die Beobachtungen beschreiben müssen, da sie zu demselben Erklärungssystem führen, so folgt aber auch, dass die zuletzt erörterte Theorie streng transversaler Wellen in Krystallen zu den gleichen beobachtbaren Resultaten führen muss. Beobachtbar sind nämlich nur die optischen Erscheinungen in dem die Krystalle umgebenden isotropen Medium (Luft). Es kann nun, sofern wenigstens das grundlegende Formelsystem ungeändert bleibt und alle Rechnungen in voller Strenge, d. h. mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, durchgeführt werden, keinen Unterschied machen, ob man die elektrische Kraft oder die elektrische Polarisation als Lichtvector interpretirt, da diese Grössen in isotropen Medien zusammenfallen (der Richtung nach), ja im leeren Raum identisch sind.

Werden nun auch die Erscheinungen in derselben Weise, wie durch die vorigen Verfügungen, beschrieben, wenn man die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt? Die Beantwortung der Frage ist insofern von Bedeutung, als damit zugleich gezeigt wird, ob man durch die Beobachtung zwischen de NEUMANN'schen und FRESNEL'schen Ansicht von der Lage des Lichtvectors zu Polarisationsebene entscheiden kann.

Nach den obigen Erläuterungen handelt es sich nur um Untersuchung dieser Frage für isotrope Medien, da in ihnen allein Beobachtungen anzustellen möglich ist. — Man erhält nun aus dem Formelsystem (11) sofort, dass in isotropen Medien bei ebenen fortschreitenden Wellen die magnetische Kraft numerisch gleich der elektrischen Kraft multiplicirt mit der Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstante des Mediums ist, dass aber die magnetische Kraft senkrecht zur elektrischen Kraft (und zur Wellennormale) liegt, und zwar so, dass die positive Richtung der elektrischen Kraft, der magnetischen Kraft und der Fortschreitung der Wellen ein rechtwinkliges Axensystem bilden, welches mit den positiven Coordinatenaxen zur Deckung gebracht werden kann. Da wir nun durch optische Erscheinungen stets nur Kenntniss von den relativen Grössen des Lichtvectors erhalten, so folgt, dass in fortschreitenden Wellen die Erscheinungen, wie sie durch die elektrische oder durch die magnetische Kraft hervorgerufen werden, dieselben sein müssen, da die Grösse der einen Kraft der der anderen stets proportional ist (im leeren Raum sogar gleich).

Also auch das NEUMANN'sche Kräftesystem stellt die Beobachtungen in fortschreitenden Wellen in derselben Weise dar, wie die anderen Theorien. Damit ist denn auch ausgesprochen, dass man aus diesen Beobachtungen nicht über die Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene entscheiden kann.

Anders dagegen gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Wirkung stehender Wellen untersucht wird[1]). Diese kann man ansehen als hervorgebracht durch Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude und Schwingungsdauer, jedoch von entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtungen. Aus dem obigen erhellt daher, dass in beiden Einzelwellen die magnetische Kraft entgegengesetzte Lage hat, falls die elektrische Kraft in beiden Einzelwellen die gleiche Lage hat und umgekehrt, mit anderen Worten: In der stehenden Welle fallen die Schwingungsbäuche der elektrischen Kraft auf die Schwingungsknoten der magnetischen Kraft und umgekehrt. — Man kann daher bei stehenden Wellen diese beiden Arten von Kräften gesondert auf ihre Wirkung untersuchen. WIENER[2]) zeigte, dass photographische Wirkung in dem Schwingungsbauche einer Vectorgrösse

---

[1]) Dies ist durch die Untersuchungen WIENER's möglich geworden. Das Nähere dazu vergl. unten im Kapitel »Uebergang des Lichtes etc.«

[2]) O. WIENER, WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

stattfindet, welcher die FRESNEL'schen Reflexionsgesetze befolgt, d. h. in der elektromagnetischen Sprache: in dem Schwingungsbauche der elektrischen Kraft.

Dadurch ist trotzdem nicht entschieden, dass nothwendig der Lichtvector mit FRESNEL senkrecht zur Polarisationsebene liegt, und dass daher die NEUMANN-schen Formeln falsch sind. In den mechanischen Theorien ist nämlich dem Quadrat des Lichtvectors, dessen Componenten u, v, w sind, die kinetische Energie des Aethers proportional. Verallgemeinert man nun die Formeln der mechanischen Theorien, indem man auch für denjenigen Vector[1]), dessen Quadrat die potentielle Energie des Aethers proportional ist, Differentialgleichungen und Uebergangsbedingungen aufstellt, gerade wie auch in der elektromagnetischen Theorie beiderlei Arten von Vectoren auftreten, so gelangt man[2]) zu dem Resultat, dass in jeder Theorie bei der Lichtbewegung diese beiden Vectoren zwei verschiedene Gesetze befolgen, nämlich der eine in isotropen Medien den NEUMANN'schen Reflexionsformeln, der andere den FRESNEL'schen unterworfen ist. Der eine Vector liegt daher in der Polarisationsebene, der andere senkrecht zu ihr. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich nur darin, dass die Bedeutung dieser Vectoren — ob kinetisch oder ob potentiell — gegenseitig vertauscht erscheint. Nach MAXWELL ist z. B. die elektrische Kraft der potentielle Vector, die magnetische Kraft der kinetische. Daher liegt sowohl nach MAXWELL, wie nach NEUMANN der kinetische Vector in der Polarisationsebene, dagegen nach FRESNEL senkrecht zu ihr. — Es ist nun nicht zu entscheiden, ob die photographische Wirkung an den potentiellen oder kinetischen Vector geknüpft ist[3]), und darum ist auch nicht über die Zulässigkeit der verschiedenen Theorien und die Lage der Lichtschwingungen, d. h. des kinetischen Vectors, zur Polarisationsebene zu entscheiden. Diese Frage hat demnach aber auch keine Bedeutung für die richtige Berechnung optischer Erscheinungen, — für die praktische Physik ist sie gegenstandslos.

Wie oben auseinandergesetzt, müssen in (11) die ε_{hk} von der Schwingungsdauer T des Lichtes abhängen, um die Erscheinungen der normalen Dispersion mit zu umfassen. In dem ursprünglichen Ansatz der elektromagnetischen Theorie sind ε_{hk} dagegen von T unabhängig. Wie nun derselbe so erweitert gedacht werden kann, dass man zu einer Abhängigkeit der ε_{hk} von T und überhaupt zu anderen[4]) Werthen derselben geführt wird, als wie sie aus elektrostatischen oder langsam veränderlichen elektrischen Erscheinungen hergeleitet werden, soll im nächsten Kapitel »Theorie der anomalen Dispersion« näher beleuchtet werden.

Noch mag kurz erwähnt werden, dass auch die CAUCHY'sche Annahme, dass in der Grenzschicht zwischen zwei verschiedenen Medien longitudinale Wellen existiren, deren Geschwindigkeit Null ist, von der elektromagnetischen Theorie aus gerechtfertigt erscheint. Die Gleichungen (11) gelten nämlich auch für inhomogene Medien, d. h. für solche, in welchen ε_{hk} eine Function von x, y, z ist. Wendet man diese Gleichungen daher auf die Grenzschicht zwischen zwei

---

[1]) Es zeigt sich, dass dieser Vector die nach (13) definirten Componenten ξ, η, ζ besitzt.

[2]) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. l. c.

[3]) Wollte man letztere Annahme aus Gründen der Plausibilität machen, so würde dies die üblichen Anschauungen der elektro-magnetischen Theorie ändern, indem dann die elektrische Kraft als kinetischer Vector erschiene.

[4]) Aus (11) ergiebt sich der Brechungsexponent eines isotropen Mittels gegen den leeren Raum gleich $\sqrt{\varepsilon}$. Da diese Beziehung in der Natur oft nicht besteht (eclatant z. B. bei Wasser, wo ε nahe gleich 80 ist), so ist auch in dieser Beziehung eine Erweiterung des ursprünglichen Ansatzes der elektromagnetischen Theorie nothwendig.

Medien an, in welcher sich ε unendlich schnell ändert, so erhält man bei Elimination der magnetischen Kräfte ausser Transversalwellen auch Longitudinalwellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist zu dem Differentialquotienten der Dielectricitätsconstanten nach der Grenznormale. Bei unendlich dünner Grenz- oder Uebergangsschicht wird also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu Null.

Da die Hauptgleichungen (11) der elektromagnetischen Theorie insofern sehr vollständig sind, als sie auch für inhomogene Medien gelten, so müssen sich nach der oben pag. 642 gemachten Bemerkung die Grenzbedingungen (12) direkt aus den Hauptgleichungen (11) ergeben. Dies ist nun in der That auch der Fall, denn, falls die z-Axe normal zur Grenze steht, müssen auch in der Uebergangsschicht $\frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z}$ endliche Werthe behalten, falls die linken Seiten der Gleichungen (11) endlich bleiben sollen. Daraus folgt direkt die Stetigkeit von X, Y, L, M beim Durchgang durch die Grenze. — Es mag schliesslich hervorgehoben werden, dass die Grenzbedingungen (12) mit dem Energieprincip im Einklang stehen, sodass der Uebergang einer elektromagnetischen Störung, d. h. auch einer Lichtbewegung, über die Grenze zweier verschiedener Medien nie von einem Energieverlust begleitet ist[1]).

Theorie der anomalen Dispersion.

I. Die mechanischen Theorien.

In dem vorigen Kapitel sind einige Versuche erwähnt, die Erscheinung der Dispersion theoretisch zu erklären und Formeln aufzustellen, welche zu jedem Werthe der Schwingungsdauer T den zugehörigen Brechungsexponenten n eines Mediums gegen den leeren Raum zu berechnen erlauben. Die allgemeinste Formel (z. B. nach Briot) ist:

$$n^2 = -AT^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4} + \ldots,$$

wobei die A, B, C, D . . . Constanten des betreffenden Mediums sind. Wenn auch durch diese Formel, wie Ketteler[2]) zeigte, bei normaler Dispersion stets gute Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erzielen ist, wobei zu bemerken ist, dass sämmtliche Coëfficienten $A, B,$ . . sich als positiv herausstellen, so versagt dieselbe doch durchaus für gewisse Medien, bei welchen n mit abnehmendem T nicht beständig wächst. Diese Medien pflegt man anomal dispergirende zu nennen.

Da die Erfahrung lehrt, dass die anomale Dispersion stets von Absorbtion begleitet ist, so machte O. E. Meyer[3]) einen Versuch, durch Einführung von Reibungsgliedern in den Hauptgleichungen eine Formel für n zu gewinnen, welche sich besser der Erfahrung anschliesst. Er erhielt das Resultat, dass n mit abnehmendem T abnimmt. Wenn dieses auch dem Verhalten der Metalle zu entsprechen scheint, so widerstreitet doch das andere Resultat Meyer's der Erfahrung, dass die Absorption mit abnehmendem T wächst. Denn demnach müssten alle Metalle im durchgehenden Lichte roth gefärbt erscheinen, was durchaus nicht der Fall ist.

Meyer's Theorie unterscheidet sich insofern noch wenig von den meisten

---

[1]) Vergl. H. Hertz, pag. 4, l. c.

[2]) E. Ketteler, Theoret. Optik, pag. 547. Braunschw. 1885

[3]) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 145, pag. 80. 1872.

der oben besprochenen, als auch sie nur ein System Hauptgleichungen, gültig für die Elongationen der Aethertheilchen, aufstellt. Wie schon oben erwähnt wurde, wird man ja mit einem einzigen System von Hauptgleichungen auskommen, selbst wenn das Vorhandensein ponderabler Moleküle die Eigenschaften der Aetherbewegungen ändert, so lange man die Elongationen der Moleküle gegen die des Aethers vernachlässigt.

Es ist das Verdienst SELLMEIER's[1]), durch das Aufgeben dieser beschränkenden Annahme die Grundlage für Theorien der anomalen Dispersion und der Dispersionserscheinungen überhaupt geschaffen zu haben, deren Resultate in Einklang mit der Erfahrung stehen.

Indem SELLMEIER annahm, dass die ponderabeln Moleküle gewisser Eigenschwingungen fähig seien, zeigte er, dass, falls die Schwingungsdauer des Aethers, d. h. des Lichtes, nahe mit der Dauer einer Eigenschwingung der Moleküle zusammenfällt, diese in lebhaftes Mitschwingen gerathen müssen und dass dadurch das merkwürdige Verhalten des Brechungsexponenten, welches anomal dispergirende Substanzen in der Nähe einer Absorbtionsbande aufweisen, erklärt wird. Da jedoch nach SELLMEIER die Schwingungen der ponderabeln Moleküle ohne Energieverlust stattfinden, so fehlt noch eine richtige Erklärung der bei diesen Vorgängen stattfindenden Absorbtion des Lichtes, da man annehmen muss, dass die Bewegung der Moleküle auch auf den Aether übergehen kann, wenn das Umgekehrte möglich ist.

Hinsichtlich der Absorbtionsvorgänge hilft sich SELLMEYER mit Betrachtungen, welche das Wesen derselben vielleicht richtig beschreiben, die jedoch keine analytische Fassung haben.

Diese ist durch v. HELMHOLTZ[2]) gegeben. Indem er annimmt, dass die ponderabeln Moleküle hinreichend dicht liegen, um alle Theile der zwischen ihnen liegenden Aethermassen gleichmässig zu afficiren, und indem er die Wechselwirkung zwischen Aethertheilchen und Molekülen ihrer relativen Entfernung proportional setzt, gelangt er, falls die Bewegung nur in ebenen Wellen besteht, welche sich nach der z-Axe fortpflanzen, zu der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \beta (u - U). \tag{1}$$

Hierin bezeichnet u die Elongation der Aethertheile aus der Ruhelage, U die der ponderabeln Moleküle.

Hinsichtlich der ponderabeln Theile nimmt v. HELMHOLTZ an, dass sie nach festen Ruhelagen angezogen werden und dass die Bewegung der ponderabeln Theile mit Reibung, d. h. Energieverlust, stattfinde. Da nun ausserdem auf die ponderabeln Theile die entgegengesetzte Kraft wirken muss, als die, welche sie auf den Aether ausüben, so wird die Bewegungsgleichung der Moleküle:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\gamma U - \delta \frac{\partial U}{\partial t} + \beta' (u - U), \tag{2}$$

wobei

$$M\beta' = m\beta.$$

Hierin bezeichnet M die Dichtigkeit des Antheils der Materie, welcher durch die Lichtschwingungen mit in Bewegung versetzt wird[3]), m die Dichte des Aethers.

---

[1]) SELLMEIER, POGG. Ann. 145, pag. 399 u. 520; 147, pag. 386 u. 525. 1872.

[2]) H. v. HELMHOLTZ, Berl. Ber. 1874, pag. 667.

[3]) M kann wesentlich kleiner sein als die Dichte des Körpers, sodass $M:m$ einen durchaus endlichen Werth besitzen kann.

Da die Moleküle aufeinander nicht einwirken sollen, so enthält die Gleichung (2) keinen Differentialquotienten von U nach z. — Nach obigen Annahmen ergiebt sich, dass m, M, a, δ positive Grössen sein müssen. Ferner muss β positiv sein, falls ein stabiles Gleichgewicht zwischen Aether und Molekülen möglich sein soll, und ebenso $\beta' + \gamma > 0$, falls die Moleküle bei Fehlen von Aetherschwingungen in stabiler Weise um ihre Ruhelagen schwingen können.

Man setze zur Integration:

$$u = A e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) = \Re\left[A \cdot e^{\frac{i}{\tau}(t - \pi z)}\right], \tag{3}$$

$$U = A' e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta\right) = \Re\left[\mathrm{A} \cdot e^{\frac{i}{\tau}(t - \pi z)}\right], \tag{4}$$

wobei das vorgesetzte $\Re$ bedeuten soll, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll, und wobei A und $\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}$ reell sind, während für die complexen Grössen π und A die Beziehungen bestehen:

$$\pi = p - ip', \quad p = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{V}, \quad p' = \tau k, \tag{5}$$
$$\mathrm{A} = \mathfrak{A} + i\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A} = A' \cos 2\pi\Delta, \quad \mathfrak{A}' = A' \sin 2\pi\Delta.$$

V bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Medium.

Da die Gleichungen (1) und (2) lineare Differentialgleichungen sind, so kann man auch u und U den complexen Grössen selber gleich setzen. Um den physikalischen Sinn zu wahren, muss man nur zum Schluss der Rechnung wieder zu den reellen Theilen für u und U übergehen. — Da $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{i}{\tau} U$ ist, so nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$U\left(-\frac{1}{\tau^2} + \beta' + \gamma = \frac{i\delta}{\tau}\right) = \beta' u.$$

Bezeichnet man die Dauer der Eigenschwingung der Moleküle, falls dieselben sich ohne Reibung bewegen könnten ($\delta = 0$), und der Aether in Ruhe verbliebe ($u = 0$) mit T_1 und ebenso $\tau_1 = T_1/2\pi$, so ist offenbar

$$\beta' + \gamma = \frac{1}{\tau_1^2}.$$

Mit Benutzung dieser Beziehung schreibt sich daher obige Gleichung

$$U = u \frac{\beta'}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + i\frac{\delta}{\tau}}. \tag{6}$$

Hieraus und aus (5) ist sofort herzuleiten das Verhältniss der Schwingungsamplitude der Moleküle zu der des Aethers, sowie ihre gegenseitige Phasendifferenz. Es ergiebt sich nämlich:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\beta'}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}}, \quad tg\, 2\pi\Delta = \frac{\delta/\tau}{\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_1^2}}.$$

Für sehr langsame Schwingungen ($\tau = \infty$), ist daher $A'/A = \beta' \tau_1^2$, $\Delta = 0$, d. h. Moleküle und Aether schwingen in gleicher Phase. Für $\tau = \tau_1$ wird $A'/A = \beta' \cdot \tau_1/\delta$, $\Delta = -1/4$, für sehr schnelle Schwingungen ($\tau = 0$) wird $A' = 0$, $\Delta = -\frac{1}{2}$. Je kleiner die Reibung (δ) ist, um so heftiger gelangen die Moleküle für $\tau = \tau_1$ ins Mitschwingen und um so plötzlicher vollzieht sich der Wechsel in der Phasendifferenz von Null auf $-\frac{1}{2}$.

Mit Benutzung von (6) schreibt sich (1) zu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left\{1 - \beta\tau^2 + \frac{\beta\beta'\tau^2}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + i\frac{\delta}{\tau}}\right\} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Die Gleichung hat also dieselbe Form, wie sie sich früher ohne Berücksichtigung der Dispersion ergab, nur mit dem Unterschiede, dass die frühere optische Constante a des Aethers jetzt auch von τ abhängt.

Aus (7) und (5) folgt sofort:

$$a(p^2 - p'^2) = 1 - \beta\tau^2 + \beta\beta'\tau^2\frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}},$$

$$2app' = \frac{\beta\beta'\delta\tau}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}. \tag{8}$$

Bezeichnet man die optische Constante a des leeren Raumes mit a_0, so ist a_0 gleich dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_0 des Lichtes in ihm, daher nach (5):

$$a_0 p^2 = n^2$$

wo n den Brechungsindex des Mediums gegen den leeren Raum bedeutet. Führt man ausserdem die Wellenlänge λ_0 des Lichtes im leeren Raum ein nach der Beziehung:

$$\lambda_0 = V_0 T = T\sqrt{a_0},$$

so werden die Gleichungen (8)

$$\frac{a}{a_0}\left(n^2 - k^2\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\right) = 1 - \beta\tau^2 + \beta\beta'\tau^2\frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}, \tag{9}$$

$$2\frac{a}{a_0}nkV_0 = \frac{\beta\beta'\delta}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}. \tag{9'}$$

$1/\delta$ hat die physikalische Bedeutung, dass die Zeit, innerhalb welcher die Eigenschwingungen der Moleküle auf einen bestimmten Bruchtheil ihres Anfangswerthes ohne Einwirkung der Aetherschwingungen herabsinken, der Grösse von $1/\delta$ proportional ist. Macht man die Annahme, dass diese Zeit gross ist im Vergleich zur Schwingungsdauer T, d. h. dass die Reibung der Moleküle gering ist, so erkennt man aus (9'), dass nk ein scharf ausgeprägtes Maximum für $T = T_1$ besitzt, nämlich

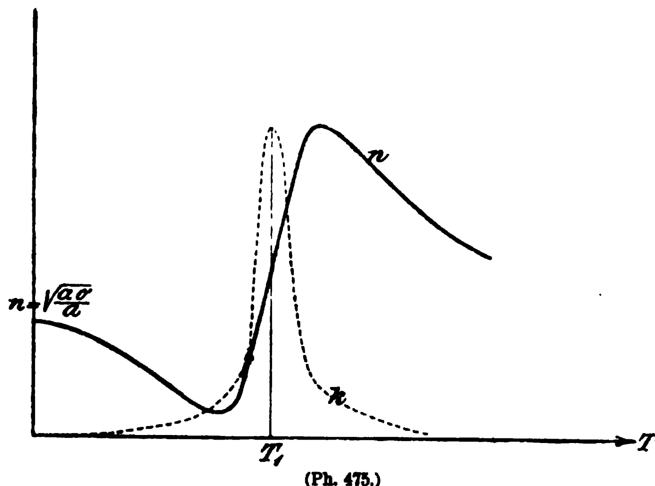
$$nk_{Max.} = \frac{\beta\beta'\tau_1^2 a_0}{2V_0\delta a}.$$

Nahezu symmetrisch zu diesem Maximum fällt für grössere und kleinere Werthe von T der Werth von nk schnell ab, und zwar um so schneller, je kleiner δ ist. Da sich innerhalb enger Grenzen von T n nicht so stark ändert, wie k, so gilt das Gesagte mit einer gewissen Annäherung für k allein. Je kleiner also die Reibung δ ist, um so schmaler ist der Absorbtionsstreifen und um so ausgeprägter. Es wird so das Verhalten von gewissen Gasen dargestellt. — Je grösser dagegen δ ist, um so breiter ist der Absorbtionsstreifen und um so weniger tritt in ihm ein deutliches Maximum der Absorption auf. Man kann daher das optische Verhalten der Metalle in gewisser Annäherung durch ein grosses δ erklären.

Wie die Gleichung (9) lehrt, nimmt der Werth von $n^2 - k^2 \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}$ in der Nähe von $\tau = \tau_1$ stark zu mit wachsendem τ, falls δ klein ist. Da k nahezu gleichen Werth besitzt für zwei verschiedene Schwingungsdauern, welche um gleich viel von der Eigenschwingungsdauer T_1 der Moleküle sich unterscheiden, so muss also auch der Brechungsindex n für diese Schwingungsdauern stark mit wachsendem T zunehmen. Dadurch ist die Haupteigenthümlichkeit anomal dispergirender Substanzen erklärt. — Für Werthe von τ, die beträchtlich kleiner oder grösser als τ_1 sind, lässt sich bei geringem Werthe der Reibung δ k^2 gegen n^2 vernachlässigen, und ebenso δ/τ gegen $1/\tau_1^2 - 1/\tau^2$. Die Gleichung (9) wird daher zu

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 - \beta\tau^2 + \beta\beta' \frac{\tau_1^2\tau^4}{\tau^2 - \tau_1^2}\right\}. \qquad (9'')$$

Für $\tau = 0$ wird $n = \sqrt{a_0/a}$ (und $k = 0$). Da für kleine Werthe von τ das zweite Glied der rechten Seite von (9'') über das dritte überwiegt, so wird anfangs n mit wachsendem τ abnehmen. In der Nähe des Absorbtionsstreifens überwiegt aber das dritte Glied von (9'') über das zweite, und da jenseit des Absorbtionsmaximums ($\tau > \tau_1$) das dritte Glied mit wachsendem τ zunächst abnimmt, so erhält man den in der beistehenden Figur angedeuteten Verlauf des Brechungsindex. Die gestrichelte Curve bezieht sich auf den Werth von k.



(Ph. 475.)

Dieses Verhalten von n und k, wie es in der Figur zum Ausdruck kommt, steht qualitativ im Einklang mit Beobachtungen an Körpern, welche einen Absorbtionsstreifen besitzen. Auf Körper, welche im Spectrum mehrere Maxima der Absorbtion aufweisen, ist die Theorie dadurch leicht auszudehnen, dass man verschiedene Arten von schwingungsfähigen Molekülen, die je besonderer Eigenschwingungen fähig sind, in die Hauptgleichungen einführt, nämlich in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \sum_k \beta_k(u - U_k), \\ \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} &= -\gamma_k U_k - \delta_k \frac{\partial U_k}{\partial t} + \beta_k'(u - U_k). \end{aligned} \qquad (10)$$

Man erhält dann das Resultat, dass so viele Maxima der Absorbtion auftreten, wie Molekülarten vorhanden sind, und dass in der Nähe jedes derselben n mit wachsendem T zunimmt. Auf diese Weise erklärt sich das optische Verhalten von anomal dispergirenden Körpern mit mehreren Absorbtionsbanden.

Es soll jetzt untersucht werden, welche Werthe n und k für unendlich langsame Schwingungen nach der v. HELMHOLTZ'schen Theorie annehmen. Nach den Anschauungen der elektromagnetischen Theorie muss sich bei Isolatoren

n^2 einem endlichen Grenzwerth (der Dielektricitätsconstanten) und k einem sehr kleinen Werth oder Null nähern.

Die Gleichungen (8) ergeben, wenn man die erste derselben nach Potenzen von τ entwickelt und die Entwickelung mit dem zweiten Gliede abbricht:

$$a(p^2 - p'^2) = \tau^2 \beta(\tau_1^2 \beta' - 1) + 1 + \beta\beta'\tau_1^4(1 + \delta^2\tau_1^2), \quad 2app' = \tau\beta\beta'\delta\tau_1^4.$$

Hieraus folgt für p^2 die Gleichung:

$$ap^2 - \frac{\tau^2}{p^2}\frac{\beta^2\beta'^2\delta^2\tau_1^8}{4a} = 1 + \beta\beta'\tau_1^4(1 + \delta^2\tau_1^2) + \tau^2\beta(\tau_1^2\beta' - 1).$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung bieten sich zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt die Faktoren von τ^2 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich. Dann würde p^2, also auch n^2, unendlich klein werden, falls die Reibung δ zu Null abnimmt. Dieses Verhalten ist unwahrscheinlich. Oder man bestimmt p^2 dadurch, dass man die von τ unabhängigen Glieder obiger Gleichung einander gleichsetzt. Es muss dann eine bestimmte Relation zwischen den Constanten β, β', δ, τ_1, a stattfinden, damit auch die Glieder der Gleichung, welche mit τ^2 multiplicirt sind, einander gleich werden. Dies Verfahren liefert, falls man $\delta\tau_1^2$ gegen 1 vernachlässigt, was bei kleiner Reibung gestattet ist:

$$a_0 p^2 = n_\infty^2 = \frac{a_0}{a}(1 + \beta\beta'\tau_1^4), \quad 1 - \tau_1^2\beta' = \frac{\beta\beta'^2\delta^2\tau_1^8}{4(1 + \beta\beta'\tau_1^4)}.$$

Setzt man für $1/\tau_1^2$ seinen Werth $\beta' + \gamma$, so erkennt man, dass γ klein wird von der Ordnung δ^2. Geht man bis auf erste Ordnung in δ^2 und berücksichtigt die Beziehung $m\beta = M\beta'$, so folgt

$$\gamma = \frac{\delta^2}{4}\frac{M}{M+m}. \tag{11}$$

Der Grenzwerth von n^2 geht dadurch über in

$$n_\infty^2 = \frac{a_0}{a}\frac{M+m}{m}, \tag{12}$$

der von k in

$$k_\infty = \frac{1}{2}\frac{\delta}{V_0}\cdot\frac{M}{\sqrt{m(M+m)}}. \tag{13}$$

Es ist also, der Wirklichkeit entsprechend, k_∞ sehr klein. — Da γ, wie Formel (11) lehrt, sehr klein ist, so werden nach Gleichung (2) die Moleküle wesentlich nur durch ihre relativen Verschiebungen gegen den Aether in ihre Ruhelage getrieben und für sehr langsame Bewegungen würden Aether und Materie nahezu relativ ruhen, d. h. letztere würde ersteren so zu sagen mitführen. Diese Anschauung wird durch neuere Untersuchungen[1]) unterstützt, welche direkt dazu angestellt sind, um von der relativen Bewegung des Aethers gegen die Materie, z. B. die Erde, Kenntniss zu erhalten.

Verallgemeinert man die Formel (12) auf den Fall, dass mehrere Arten schwingungsfähiger Moleküle im Körper vorhanden sind, was nach den Gleichungen (10) leicht geschehen kann, so würde man erhalten

$$n_\infty^2 = \frac{a_0}{a}\frac{m + \Sigma M_k}{m}. \tag{12'}$$

Macht man die Annahme, dass der Werth von a nur in Folge einer Verdichtung des Aethers in den Zwischenräumen zwischen den Molekülen von dem Werthe von a_0 verschieden ist, so ist $a_0 : a = m : m_0$, falls m_0 die Dichtigkeit des Aethers im leeren Raum bezeichnet. Es wird dann

[1]) Vergl. des Coudres, Wied. Ann. 38, pag. 71. 1889.

$$n_\infty^2 = \frac{m + \Sigma M_k}{m_0}, \tag{12''}$$

d. h. der Grenzwerth des Quadrates des Brechungsindex für sehr langsame Schwingungen ist gleich dem Verhältniss der gesammten an den Schwingungen theilnehmenden Masse eines bestimmten Körpervolumens zu der Masse des Aethers, welche in dem gleichen Volumen des leeren Raumes enthalten ist.

Es liegt kein Grund vor, die Ursachen der normalen Dispersion in wesentlich anderen Punkten zu suchen, als die der anomalen. Der einzige Unterschied zwischen beiden Erscheinungen ist der, dass bei der normalen Dispersion die Dauer der Eigenschwingungen der Moleküle nicht mit den Schwingungsdauern optisch wirksamer Aetherschwingungen zusammenfallen. Es muss daher, falls nur eine Art schwingungsfähiger Moleküle vorhanden ist, die Formel (9″) die normalen Dispersionserscheinungen darstellen können. Dies ist auch in der That der Fall, wie WÜLLNER[1]) zeigte. Er erhielt auch das Resultat, dass, entsprechend unseren obigen theoretischen Ueberlegungen, $\beta' \tau_1^2$ nahezu gleich 1, d. h. γ nahezu gleich Null ist. In diesem Falle geht die Formel (9″) über in

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \beta \frac{\tau^2 \tau_1^2}{\tau^2 - \tau_1^2}\right\}. \tag{14}$$

Da für die meisten Körper das Absorbtionsgebiet weit jenseit des Ultravioletten liegt, so dass τ_1/τ ein kleiner Bruch ist, so geht bei Entwickelung nach Potenzen von τ_1/τ diese Formel über in

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \beta\tau_1^2 + \frac{\beta\tau_1^4}{\tau^2} + \frac{\beta\tau_1^6}{\tau^4} + \ldots\right\}.$$

Bei kleinen τ_1/τ erhält man daher annähernd gleiche Resultate, wie sie sich aus der zweiconstantigen CAUCHY'schen Dispersionsformel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

ergeben.

Man erhält für die meisten durchsichtigen Körper eine noch genauere Dispersionsformel als (14), wenn man diese Formel für den Fall verallgemeinert, dass der Körper mehrere Absorbtionsstreifen besitzt. Sondert man die Absorbtionsgebiete im Ultravioletten (Index v, $\tau_v < \tau$) von den Absorbtionsgebieten im Ultrarothen (Index r, $\tau_r > \tau$), so nimmt (14) die Form an:

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \sum_v \frac{\beta_v \tau_v^2}{1 - \frac{\tau_v^2}{\tau^2}} - \sum_r \frac{\beta_r \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_r^2}}\right\}, \tag{14'}$$

oder mit Entwickelung nach Potenzen von τ_v/τ resp. τ/τ_r und mit Weglassung von kleineren Gliedern

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{- \tau^2 \sum_r \beta_r + 1 + \sum_v \beta_v \tau_v^2 + \frac{\sum^v \beta_v \tau_v^4}{\tau^2} + \frac{\sum^v \beta_v \tau_v^6}{\tau^4}\right\}. \tag{14''}$$

Diese Formel ist mit der anfangs (pag. 674) erwähnten Dispersionsformel

$$n^2 = - AT^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4} \tag{15}$$

identisch. Es ist daher nach der v. HELMHOLTZ'schen Theorie erklärlich, weshalb sämmtliche Coëfficienten A, B, C, D der Formel (15) positiv sein müssen.

---

[1]) A. WÜLLNER, WIED. Ann. 17, pag. 580. 1882. — WÜLLNER wandte die Formel (9″) für $a_0/a = 1$ an. v. HELMHOTLZ lässt den Werth von a_0/a unentschieden.

Wie ein Vergleich von (14″) und (15) zeigt, kann man durch Berechnung der Constanten B, C, D für einen Körper mit normaler Dispersion nur dann einen Schluss auf die Lage ultravioletter Absorbtionsstreifen machen, wenn man annimmt, dass es deren nur einen giebt. — In diesem Falle ergiebt sich nach den KETTELER'schen Rechnungen[1]), dass a_0/a grösser als 1 anzunehmen ist, d. h. dass der Aether in den ponderabeln Medien entweder verdichtet ist, oder geringere Elasticität besitzt, als im leeren Raum. Man kann dagegen auch für $a_0/a = 1$ die Formel (14″) in Uebereinstimmung mit den KETTELER'schen Rechnungen bringen, sobald man mehrere τ_v annimmt.

Die Auffassung, dass das Glied $- AT^2$ durch Absorption im Ultrarothen verursacht ist, wird noch besonders dadurch gestützt, dass, wie KETTELER[2]) zeigte, der Werth von A im Allgemeinen um so grösser ist, je undurchlässiger der Körper für strahlende Wärme ist. (Vergl. oben pag. 328.) So erreicht er z. B. für das stark undiathermane Wasser den höchsten Werth im Vergleich zu anderen beobachteten Körpern. Auch nach der elektromagnetischen Lichttheorie ergiebt sich, dass Wasser im Ultrarothen ein Absorbtionsgebiet besitzen muss, wie sogleich gezeigt werden soll. Da nämlich γ_v nahezu Null ist [nach Formel (11)] und daher $\tau_v^2 = 1/\beta_v'$, ferner $\beta_v/\beta_v' = M_v/m$ (cf. oben pag. 675), so wird das von τ unabhängige Glied von n^2 in Formel (14″), d. h. die Grösse B in (15):

$$(n^2) = B = \frac{a_0}{a} \frac{m + \Sigma M_v}{m}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit n_∞^2, so lehrt Formel (12′), dass letzterer stets grösser als (n^2) ist, und zwar ist

$$n_\infty^2 - (n^2) = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{\Sigma M_r}{m},$$

oder falls $a_0/a = m/m_0$ (cf. pag. 679), so ist

$$n_\infty^2 - (n^2) = \frac{\Sigma M_r}{m_0}.$$

Sind die Schlussweisen der elektromagnetischen Lichttheorie richtig, nach der n_∞^2 gleich der Dielectricitätsconstante des Körpers ist, so gelangt man daher zu dem Satz:

Die Differenz zwischen der Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsindex eines Körpers [genauer dem von T unabhängigen Gliede der Formel (15)] ist gleich dem Verhältniss der in einem Körpervolum enthaltenen Massen, welche durch Schwingungen im Ultrarothen in lebhafte Bewegung gesetzt werden, zu der Masse des Aethers, welche sich in dem gleichen Volumen des leeren Raumes befindet. — Das Gebiet des Ultrarothen ist dabei von $T = \infty$ bis zu solchem Werthe von T definirt, welche rothes Licht erzeugen.

Nach diesem Satze ergiebt sich, dass der optische Brechungsindex durchsichtiger Körper nie grösser sein kann, als die Quadratwurzel aus der Dielectricitätsconstanten, was auch sämmtliche bisher angestellten Versuche bestätigen. — Ferner müssen diejenigen Körper, für welche $n_\infty^2 - (n^2)$ gleich Null ist, wie z. B. Petroleum, keine wesentliche Absorbtion im Ultrarothen zeigen; für Wasser erreicht dagegen diese Differenz den höchsten Werth, den man sonst beobachtet hat, nämlich etwa 77. Wasser muss daher ein starkes Absorptionsgebiet im

[1]) KETTELER, theoret. Optik, pag. 540 u. ff. In der KETTELER'schen Bezeichnung ist dann nämlich $a^2 - D$ gleich unserem a_0/a. Es ist nun stets $a^2 - D > 1$.

[2]) E. KETTELER, WIED. Ann. 31, pag. 327. 1887.

Ultrarothen besitzen und zwar ist die Masse, welche hier liegende Eigenschwingungen besitzt, 77 mal grösser als die Masse des Aethers in gleichem Volumen.

Fällt die Fortpflanzungsrichtung der Wellen nicht in die z-Axe, so ist die Hauptgleichung (1) nur darin zu ändern, dass Δu an die Stelle von $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ tritt. Man erhält dadurch ohne Schwierigkeit die Theorie der Absorbtion und Brechung für schiefen Durchgang des Lichtes durch eine anomal dispergirende Platte. Es ergiebt sich dabei, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, d. h. auch der Brechungsindex, vom Einfallswinkel φ abhängt. Nennt man n_0, resp. n den Werth des Brechungsindex für $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \varphi$, entsprechend k_0, resp. k den Werth des Schwächungscoëfficienten, so folgt

$$n_0^2 = -k^2 \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} + \sin^2\varphi \frac{k^2}{k^2 - k_0^2}. \tag{16}$$

Diese Formel enthält die Theorie des von WERNICKE[1]) angewandten Verfahrens, um aus beobachteter Absorbtion, d. h. k_0 und k, den Brechungsindex n_0 (oder auch n) zu bestimmen.

Nach v. HELMHOLTZ haben noch LOMMEL[2]) und KETTELER[3]) Theorien der anomalen Dispersion aufgestellt, indem sie ebenfalls von zwei Systemen simultaner Differentialgleichungen für u und U ausgingen, die jedoch in ihrer Form etwas von den v. HELMHOLTZ'schen Gleichungen (1) und (2) abweichen. — Ohne auf gewisse theoretische Schwierigkeiten (vergl. oben pag. 661, Anm. 1) bei der Herleitung der LOMMEL'schen Gleichungen eingehen zu wollen, sei hier nur hinsichtlich ihrer Resultate bemerkt, dass sich aus den LOMMEL'schen Gleichungen für $\tau = \infty$ der Brechungsindex ebenfalls unendlich gross ergiebt. Da dieses Resultat den in vieler Hinsicht bewährten Anschauungen der elektromagnetischen Lichttheorie widerspricht, so erscheint es bedenklich.

Die Theorie KETTELER's führt für $\tau = \infty$ auch ohne Specialisirung der Constanten auf einen endlichen Grenzwerth n_∞ des Brechungsindex, und bietet also insofern einen gewissen Vortheil gegenüber der v. HELMHOLTZ'schen Theorie, bei der nur durch die Beziehung (11) n_∞ endlich blieb, einen Nachtheil jedoch insofern, als sich k_∞ zu Null ergiebt für jeden endlichen Werth von δ. Daher können die Eigenschaften der Metalle nicht in der KETTELER'schen Theorie enthalten sein, wenigstens nicht ihr sogenanntes elektrisches Leitungsvermögen. Ferner folgt nach KETTELER für $\tau = \infty$ ein verschwindend kleines Verhältniss $A' : A$. In dieser Hinsicht ergiebt sich also das entgegengesetzte Resultat zu der v. HELMHOLTZ'schen Theorie, welch' letzteres jedoch nach der oben pag. 679

---

[1]) W. WERNICKE, POGG. Ann. 155, pag. 17. 1875; Berl. Ber. 1874. — WERNICKE berechnete den Brechungsindex unter der Annahme, dass $n_0 = n$ sei. Man würde dann die Formel (16) ohne das erste Glied der rechten Seite erhalten; dieses giebt also die Correction an, nach der die WERNICKE'schen Werthe für n_0 zu ändern, d. h. zu verkleinern sind. Aus den WERNICKE'schen Beobachtungen selbst ist diese Correction nicht zu entnehmen, da dort die Dicke der angewandten Platten nicht angegeben ist, d. h. die absoluten Werthe von k fehlen. Benutzt man bei Fuchsin für k die von anderen Beobachtern erhaltenen Werthe (z. B. von MERKEL, WIED. Ann. 19, pag. 1. 1883), so ergeben sich für kleine Wellenlängen Werthe von n_0, welche kleiner als 1 sind.

[2]) E. LOMMEL, WIED. Ann. 3, pag. 339. 1878.

[3]) Literaturnachweis vergl. pag. 660, Anm. 3. Ferner ist noch zu nennen die Dispersionstheorie von W. THOMSON (Lectures on Molecular Dynamics, Baltimore 1885), welche von GOLDHAMMER (Journ. de russ. phys. chem. Ges. (7) 18, pag. 239. 1886. Referirt in WIED. Beibl. 1887) auf Krystalle ausgedehnt ist.

gemachten Bemerkung wahrscheinlicher ist, als das entgegenstehende Resultat KETTELER's. — Bezüglich des Einflusses des Aethers auf die Schwingungen der Moleküle macht KETTELER die Annahme, dass er ein ähnlicher sei, wie der Einfluss der Luft auf die Bewegung des Pendels. Daher ist die eine der KETTELER'schen Hauptgleichungen eine Umformung der BESSEL'schen Formel für die Pendelschwingungen in der Luft. Die zweite Hauptgleichung will KETTELER mit Hilfe der ersten aus dem Energieprincip ableiten, jedoch mangelt es dabei an Strenge. Würde man die v. HELMHOLTZ'schen Gleichungen (1) und (2) darin umändern, dass die Wechselwirkung zwischen Aether und Materie proportional zu $\frac{\partial^2(u-U)}{\partial t^2}$ gesetzt wird, anstatt zu $(u-U)$, so hätte man einen Specialfall der KETTELER'schen Gleichungen[1]) und würde dieselben Resultate für n_∞, k_∞ und A_∞' erhalten, wie KETTELER. — Wenn sich die Beobachtungen immer noch auf ein verhältnissmässig eng begrenztes Gebiet von Schwingungsdauern beziehen, wird es nicht möglich sein, durch Experimente mit Sicherheit zwischen verschiedenen Formen der Dispersionsgleichung zu entscheiden, so lange sie nur das Gemeinsame besitzen, dass π^2 [vergl. oben Formel (5)] ein Glied enthält, dessen Nenner die Form $\tau^2 - \tau_1^2 + i\delta\tau$ besitzt, zieht man jedoch elektrische Experimente mit hinzu, so sind die KETTELER'schen Gleichungen zu eng, weil sie die Metalle nicht umfassen.

KETTELER dehnt seine Theorie auch auf Krystalle aus und stellt auch Grenzbedingungen auf. Es ist schon oben pag. 670 erwähnt, dass seine Resultate mit den von vielen anderen Theorien (und auch der elektromagnetischen) gelieferten identisch sind, falls man die Abhängigkeit der Constanten der Hauptgleichungen von der Schwingungsdauer T unentschieden lässt.

II. Die elektromagnetische Theorie.

Auch die elektromagnetische Lichttheorie ist auf die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion erweitert worden, und zwar von KOLÁCEK[2]), GOLDHAMMER[3]), v. HELMHOLTZ[4]) und EBERT[5]). Indem ersterer die Möglichkeit gewisser elektrischer Eigenschwingungen in den Molekülen annahm, erhielt er Hauptgleichungen, welche ähnlich den von KETTELER aufgestellten sind. Die Eigenschaften der Metalle bei sehr langsamen oder stationären Bewegungen bleiben ebenfalls bei KOLÁCEK von der Betrachtung ausgeschlossen, nicht dagegen bei GOLDHAMMER. Dieser stellt seine Differentialgleichungen hypothetisch auf, während v. HELMHOLTZ dieselben aus dem Princip der kleinsten Wirkung, EBERT aus den LAGRANGE'schen Grundgleichungen der Mechanik durch Erweiterung des Weges herleitet, den MAXWELL für die Bestimmung der elektromotorischen und ponderomotorischen Kräfte gegangen ist. Letztere Arten der Herleitung sind natürlich ebenfalls nicht frei von Hypothesen, die Vergleichung der gewonnenen theoretischen Resultate mit denen der Beobachtung ist auch hier, wie bei jeder Lichttheorie, der nothwendige Prüfstein für die Brauchbarkeit des Erklärungssystems. — EBERT gelangt zu denselben Gleichungen, wie GOLDHAMMER, und auch das v. HELMHOLTZ'sche Erklärungssystem liefert für Lichtschwingungen die gleichen Resultate.

---

[1]) Vergl. E. KETTELER, WIED. Ann. 46, pag. 582, Anm. 1. 1892.
[2]) KOLÁCEK, WIED. Ann. 32, pag. 224 u. 429 1887; 34, pag. 673. 1888.
[3]) D. A. GOLDHAMMER, WIED. Ann. 47, pag. 93. 1892.
[4]) H. v. HELMHOLTZ, Berl. Ber. Dez. 1892.
[5]) H. EBERT, WIED. Ann. 48, pag. 1. 1893.

In der folgenden Darstellung[1]) findet im Ausgangspunkte eine Abweichung von den genannten Theorien statt, jedoch die Erklärungssysteme lassen sich leicht einander überführen.

Man kann in einfacher Weise eine elektromagnetische Theorie der Dispersion erhalten, wenn man an den Gleichungen, welche zwischen der elektrischen bezw. magnetischen Polarisation und den magnetischen bezw. elektrischen Kräften besteht, festhält. Dieselben lauten für Isolatoren:

$$
\begin{aligned}
A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, & A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},\\
A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, & A\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad (17)\\
A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, & A\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnen X, Y, Z die Componenten der elektrischen, L, M, N die der magnetischen Kraft, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der elektrischen, $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die der magnetischen Polarisation, A das Verhältniss der elektro-magnetischen Einheit der Elektricitätsmenge zu der elektrostatischen.

Dagegen muss man die Beziehungen, welche zwischen den Polarisationen und ihren bezw. Kräften stattfinden, und welche für isotrope Körper bei langsamen Bewegungen lauten:

$$\mathfrak{L} = \mu L, \text{ etc.}, \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X, \text{ etc.} \qquad (18)$$

für schnelle Schwingungen erweitern. Für den leeren Raum ist $X = \mathfrak{X}$, man kann daher die Differenz $X - \mathfrak{X}$ als durch die Wirksamkeit der ponderabeln Moleküle herbeigeführt ansehen, z. B. sie als die Polarisation der Moleküle selbst definiren. Setzt man daher, falls mehrere Molekülearten vorhanden sind

$$\mathfrak{X} = X + \Sigma \mathfrak{X}_k, \qquad \mathfrak{L} = L + \Sigma \mathfrak{L}_k, \qquad (18')$$

so kann man annehmen, dass die X_k und $\mathfrak{L}_k$ gewisser Eigenschwingungen fähig sein sollen, sei es nun deshalb, weil sie so zu sagen an der ponderabeln Materie haften, sodass ihre Eigenschwingungen mit denen der $\mathfrak{X}_k$ und $\mathfrak{L}_k$ identisch sind, sei es deshalb, weil jeder Körper gewisse Eigenschwingungen seines elektrischen Zustandes besitzt, deren Dauer aus seiner Selbstinduction und Capacität zu berechnen ist. — Nach beiden Anschauungen müssen zwischen den $\mathfrak{X}_k$ und X, $\mathfrak{L}_k$ und L gewisse lineare Differentialgleichungen mit Differentialquotienten nach t bestehen, die in die Form gebracht seien

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_k + a_k \frac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial t} + b_k \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_k}{\partial t^2} + \,.\,. &= \varepsilon_k X + \alpha_k \frac{\partial X}{\partial t} + \beta_k \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \,.\,.\\
\mathfrak{L}_k + a_k' \frac{\partial \mathfrak{L}_k}{\partial t} + b_k' \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_k}{\partial t^2} + \,.\,. &= \mu_k L + \alpha_k' \frac{\partial L}{\partial t} + \,.\,.
\end{aligned} \qquad (19)
$$

Für langsame Bewegungen gehen die Formeln (18') in (18) über, falls gesetzt wird

$$\varepsilon = 1 + \Sigma \varepsilon_k, \qquad \mu = 1 + \Sigma \mu_k. \qquad (20)$$

Für periodische Bewegungen mit der Periode $T = \tau/2\pi$ werden die Formeln (19) zu

$$\mathfrak{X}_k = X \frac{\varepsilon_k + i\frac{\alpha_k}{\tau} - \frac{\beta_k}{\tau^2} + \,.\,.}{1 + i\frac{a_k}{\tau} - \frac{b_k}{\tau^2} + \,.\,.}, \qquad \mathfrak{L}_k = L \frac{\mu_k + i\frac{\alpha_k'}{\tau} + \,.\,.}{1 + i\frac{a_k'}{\tau} - \frac{b_k'}{\tau^2} + \,.\,.}$$

oder

$$\mathfrak{X}_k = X \varepsilon_k(\tau), \qquad \mathfrak{L}_k = L \mu_k(\tau), \qquad (19')$$

---

1) Vergl. dazu auch P. Drude, Gött. Nachr. 1893.

wo $\varepsilon_k(\tau)$ und $\mu_k(\tau)$ die Quotienten zweier nach Potenzen von $1/\tau$ fortschreitender Reihen sind. Da die Erfahrung fordert, dass für schnelle Schwingungen μ zu 1, d. h. $\mu_k(\tau)$ zu Null wird, so muss der Nenner von $\mu_k(\tau)$ eine höhere Potenz von $1/\tau$ enthalten, als der Zähler und die Coëfficienten α_k', a_k', b_k' müssen gross sein gegen μ_k.

Durch den hier getroffenen Ansatz (18') und (19), der der Vorstellung elektrisch und magnetisch polarisirbarer Moleküle, welche Eigenschwingungen besitzen, entspricht, werden die Resultate der elektromagnetischen Lichttheorie nur insofern geändert, als an Stelle der von T unabhängigen Grösse ε und μ, die von T abhängigen $1 + \Sigma\varepsilon_k(\tau)$, $1 + \Sigma\,\mu_k(\tau)$ treten. Dies gilt nicht nur mit gewisser Erweiterung für Krystalle, sondern auch für das Problem der Brechung. Die Grenzbedingungen müssen wiederum nach den oben pag. 674 genannten Ueberlegungen in der Form der Gleichungen (12) der pag. 669 enthalten sein. Dieselben ergeben keinen Energieverlust bei der Brechung, falls man auch jetzt noch an der aus elektrischen Experimenten abgeleiteten Formel festhält, dass die Grösse

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z + \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)$$

mindestens ein Theil der Energie der Volumeinheit ist.

Wendet man die Formeln (17) auf den Fall ebener Wellen an, welche sich nach der z-Axe fortpflanzen, d. h. setzt man [vergl. Formel (3)]

$$\mathrm{X} = e^{\frac{i}{\tau}(t - nz)},$$

so erhält man

$$n^2 = A^2[1 + \Sigma\varepsilon_k(\tau)]\,[1 + \Sigma\mu_k(\tau)]. \tag{21}$$

Für Lichtschwingungen ist $\mu_k(\tau) = 0$. Um die Erscheinungen der anomalen Dispersion zu erklären, ist daher nothwendig, dass der Nenner wenigstens von einem $\varepsilon_k(\tau)$ die Gestalt $1 + i\frac{a_k}{\tau} - \frac{b_k}{\tau^2}$ besitze, und dass b_k positiv ist. Man würde daher schon mit dem Ansatz auskommen

$$\mathfrak{X}_k + a_k\frac{\partial\mathfrak{X}_k}{\partial t} + b_k\frac{\partial^2\mathfrak{X}_k}{\partial t^2} = \varepsilon_k \mathrm{X}.$$

Ob die Coëfficienten α_k, β_k etc. der Formel (19) thatsächlich Null sind, könnte man experimentell entscheiden, wenn man den Brechungsindex des Körpers für Schwingungen, die weit schneller als die Dauern seiner Eigenschwingungen sind, bestimmen würde.

Für Gebiete, welche weit abliegen von Eigenschwingungen, wird n^2 reell und zwar gleich $A^2 n^2$, falls die Reibung, d. h. die Coëfficienten a_k klein sind. Daher ist nach (21) für kleine τ, wo $\mu_k(\tau) = 0$ ist:

$$n^2 = 1 + \Sigma\,\varepsilon_k(\tau). \tag{22}$$

Man erhält hieraus wiederum leicht die 4-constantige Dispersionsformel (15) mit positiven Coëfficienten A, B, C, D. Es folgt

$$B = 1 + \Sigma\,\varepsilon_v, \tag{23}$$

falls $\Sigma\,\varepsilon_v$ die elektrische Polarisationen (für langsame Zustandsänderungen) derjenigen Molekülarten sind, welche Eigenschwingungen im Ultravioletten besitzen.

Falls ε_r die elektrische Polarisation einer Molekülart bezeichnet, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegt, ist daher nach (20):

$$\varepsilon - B = \Sigma\,\varepsilon_r, \tag{24}$$

d. h. die Differenz zwischen der Dielektricitätsconstante und dem Quadrat des optischen Brechungsindex [genauer dem von τ^2 unabhängigen Gliede von n^2 in der Formel (15)] ist gleich der Summe der Polarisationen der Molekülarten, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen. —

Für Wasser muss man also derartige annehmen und zwar mit bedeutenden Polarisationen für langsam veränderliche elektrische Kräfte.

Man sieht, dass man die Resultate der mechanischen Theorie in die der elcktro-magnetischen überführen kann, wenn man das dort auftretende Massenverhältniss $M_k : m_0$ als Polarisation ε_k der bestimmten Molekülart definirt. Auch geht dadurch der Werth von n_∞^2 nach (12') in die Dielectricitätsconstante ε [Formel (20)] über, falls man noch $m = m_0$ annimmt[1]) und die Körpermoleküle als unmagnetisirbar. Ebenso wird dadurch die Dispersionsformel (14") in die aus (22) sich ergebende übergeführt.

Da für $\tau = \infty$ die Absorbtion für jeden endlichen Werth der Coëfficienten a_k unendlich klein wird, so muss der bisherige Ansatz noch vervollständigt werden, wenn auch die Eigenschaften der Metalle mit in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden sollen.

Ausgehend von der Vorstellung, dass für sehr langsame Bewegungen ($\tau = \infty$) die elektrische Polarisation (d. h. eventuell der Aether selbst) keine Gleichgewichtslage annimmt, sondern der elektrischen Kraft unbegrenzt folgen kann, sodass ein Strömen der Polarisation (des Aethers) stattfindet, würde man statt (18') erhalten:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = 4\pi\lambda X + \frac{\partial}{\partial t}(X + \Sigma \mathfrak{X}_k).$$

λ ist die specifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Körpers. Man würde dann anstatt (21) erhalten:

$$\pi^2 = A^2 [- i 4\pi\lambda\tau + 1 + \Sigma \varepsilon_k(\tau)] [1 + \Sigma \mu_k(\tau)], \tag{21'}$$

d. h. für sehr langsame Schwingungen:

$$(p^2 - p'^2) = A^2 \varepsilon\mu, \qquad 2pp' = A^2 \cdot 4\pi\lambda\tau, \tag{25}$$

wo ε und μ nach (20) als Dielektricitäts- resp. Magnetisirungsconstante des Metalls definirt sind. Für sehr schnelle Schwingungen dagegen würde (21') ergeben, falls man $\varepsilon_k(\tau)$ in der einfachsten Form:

$$\frac{\varepsilon_k}{1 + i\frac{a_k}{\tau} - \frac{b_k}{\tau^2}}$$

annimmt

$$\left.\begin{aligned} p^2 - p^{2\prime} &= A^2 \left[1 + \Sigma \varepsilon_k \frac{1 - \frac{b_k}{\tau^2}}{\left(1 - \frac{b_k}{\tau^2}\right)^2 + \frac{a_k^2}{\tau^2}} \right] \\ 2pp' &= A^2 \left[4\pi\lambda\tau + \Sigma \frac{\varepsilon_k a_k/\tau}{\left(1 - \frac{b_k}{\tau^2}\right)^2 + \frac{a_k}{\tau^2}} \right] \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Man erkennt, dass, falls $p^2 < p'^2$ ist, dann die Schwingungsdauer τ kleiner sein muss als mindestens eine Eigenschwingungsdauer $\tau_1 = \sqrt{b_k}$ des Metalls. Da in der That für Lichtschwingungen in Metallen p^2 stets kleiner als p'^2 gefunden ist (cf. weiter unten, Abschnitt: Absorbirende Medien), so muss man nach dieser Theorie[2]) annehmen, dass die Metalle Eigenschwingungen im Ultrarothen besitzen.

P. Drude.

---

[1]) Der Anschauung, dass m_0 von m verschieden ist, würde hier entsprechen, dass die Dielectricitätsconstante ε_0 des Aethers innerhalb eines Körpers von der des freien Aethers verschieden ist. Man würde dann statt (18') setzen $\mathfrak{X} = \varepsilon_0 X + \Sigma \mathfrak{X}_k$.

[2]) Weiter unten wird auch noch ein anderer Ansatz besprochen werden, welcher die optischen Eigenschaften der Metalle nach der elektromagnetischen Theorie zu erklären bezweckt.

Doppelbrechung.

I. Allgemeine Gesetze.

Wie oben pag. 669—671 erörtert ist, giebt es bei jeder Lichtbewegung in einem durchsichtigen (nicht aktiven) Krystall mehrere (drei) periodisch mit der Zeit sich ändernde Vectoren, welche verschiedene Gesetze befolgen. Wie dort hervorgehoben wurde, ist es für die Darstellung der optischen Erscheinungen gleichgültig, für welchen der drei Vectoren man die definitiven Formeln aufstellt. Untersuchen wir zunächst nur die Gesetze derjenigen Vectoren genauer, welche sich in streng transversalen, ebenen Wellen fortpflanzen können, so handelt es sich um weitere Verfolgung der Gleichungen (14), (15) der pag. 669, 670, welchen die magnetische Kraft der elektrischen Theorie oder der Lichtvector der mechanischen Theorie NEUMANN's, gehorcht, und der Gleichungen (20), (21) der pag. 671, welchen die elektrische Kraft oder der Lichtvector der mechanischen Theorie FRESNEL's unterworfen ist. Die Componenten des letzteren mögen im Folgenden mit u, v, w, die des ersteren (des NEUMANN'schen Vectors) mit u', v', w' bezeichnet werden.

Da nach pag. 671 der NEUMANN'sche Lichtvector senkrecht zum FRESNEL'schen (und zur Wellennormale) liegt, so können die Gesetze des ersteren leicht aus denen des letzteren Vectors abgeleitet werden. Die folgende Rechnung knüpft daher an die Gleichungen (20), (21) des FRESNEL'schen Vectors an. — Es wird sich weiter unten herausstellen, dass auch die Gesetze, denen der dritte der genannten Vectoren unterworfen ist, aus den angestellten Betrachtungen sofort abzuleiten sind, da dieser senkrecht zum NEUMANN'schen Vector und zum Lichtstrahl liegt.

Durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems lässt sich die Gleichung (21) auf die Form bringen:

$$2H = au^2 + bv^2 + cw^2, \tag{1}$$

wobei sich die u, v, w auf das neue Coordinatensystem beziehen und die a, b, c gewisse, dem Krystall individuelle Constanten bedeuten, deren Werth mit der Lichtfarbe variirt.

Die Coordinatenaxen haben die Lage der Hauptaxen des in der Gleichung (21) der pag. 671 durch $2H$ definirten dreiaxigen Ellipsoides, wenn man dort u, v, w als Coordinaten eines Punktes ansieht.

Aus den früheren Gleichungen (20) folgt, dass für den Krystall die drei neuen Coordinatenebenen Symmetrieebenen hinsichtlich seiner optischen Eigenschaften sind, da die Gleichungen unverändert gelten, wenn man die Richtung einer Coordinatenaxe in die entgegengesetzte verwandelt.

Bei denjenigen Krystallen, welche auch hinsichtlich ihres krystallographischen Verhaltens Symmetrieebenen besitzen, müssen diese zugleich optische Symmetrieebenen sein. Daher ist bei Krystallen des rhombischen Systems die Lage der letzteren durch die krystallographische Orientirung sofort bestimmt, bei Krystallen des monoklinen Systems hingegen nur eine der optischen Symmetrieebenen, und bei Krystallen des triklinen Systems gar keine. Letztere besitzen also 6 ihnen individuelle optische Constanten, von denen drei die Werthe der nach (1) definirten Constanten a, b, c angeben und die drei anderen die Lage der optischen Symmetrieebenen gegen die krystallographischen Axen. Die Krystalle des monoklinen Systems besitzen 4 optische Constanten, die des rhombischen Systems nur 3. Die Zahl dieser Constanten reducirt sich noch weiter, wenn der Krystall gleichwerthige Symmetrieebenen besitzt, d. h. wenn er eine Symmetrieaxe besitzt, die mehr als zweizählig ist.

Dieser Fall tritt für Krystalle des hexagonalen und tetragonalen Systems ein. Wählt man jene Symmetrieaxe zur z-Axe, so müssen die in (1) auftretenden Constanten a und b einander gleich sein. Diese Krystalle besitzen daher nur zwei optische Constanten. Die Krystalle des regulären Systems besitzen mehr als eine vierzählige Symmetrieaxe, daher sind für diese alle drei Coëfficienten a, b, c einander gleich zu setzen, und jene Krystalle unterscheiden sich optisch nicht von isotropen Medien, indem sie nur eine optische Constante besitzen. — Diese Sätze werden durch die Erfahrung bestätigt. DUFAY[1]) hatte erkannt, dass Krystalle des regulären Systems keine Doppelbrechung zeigen, HAUY[2]) fand, dass alle anderen Systemen angehörigen Krystalle Doppelbrechung aufweisen. Schliesslich beobachtete BREWSTER[3]) an 150 krystallisirten Mineralen, dass die Krystalle des hexagonalen und tetragonalen Systems ein wesentlich anderes optisches Verhalten zeigten, als die der Systeme niederer Symmetrie, und diese Thatsache wird durch die oben genannten Beziehungen zwischen den a, b, c vollständig erklärt, wie wir weiter sehen werden.

Die Hauptgleichungen (20) der pag. 671 nehmen unter Zugrundelegung der optischen Symmetrieebenen als Coordinatenebenen die Gestalt an

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a\Delta v - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\Delta w - \frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Man kann diesen Differentialgleichungen genügen durch die Annahme linearpolarisirter ebener Wellen, d. h. durch die Integrale

$$\begin{aligned}u &= A\mathfrak{M}\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega}\right),\\ v &= A\mathfrak{N}\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega}\right),\\ w &= A\mathfrak{P}\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

wobei

$$m^2 + n^2 + p^2 = \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 + 1, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

angenommen ist.

T bedeutet die Schwingungsdauer des Lichtes, m, n, p die Richtungscosinus der Wellennormalen, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ des Lichtvectors, A seine Amplitude.

Bezeichnen M, N, P die Richtungscosinus des NEUMANN'schen Lichtvectors, so bilden der letztere, ferner der FRESNEL'sche und die Wellennormale ein rechtwinkliges Axenkreuz. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned}m\mathfrak{M} + n\mathfrak{N} + p\mathfrak{P} &= 0,\\ M\mathfrak{M} + N\mathfrak{N} + P\mathfrak{P} &= 0,\\ mM + nN + pP &= 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned}\omega^2\mathfrak{M} &= a\mathfrak{M} - m(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\\ \omega^2\mathfrak{N} &= b\mathfrak{N} - n(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\\ \omega^2\mathfrak{P} &= c\mathfrak{P} - p(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p).\end{aligned} \tag{6}$$

---

[1]) DUFAY, Mém. de l'anc. Acad. des sc., pag. 81. 1739.

[2]) HAUY, Traité de minéralogie. I, pag. 159. 1801. — Mém. de l'anc. Acad. des sc., pag. 34. 1788.

[3]) BREWSTER, Phil. Trans., pag. 199. 1818.

Indem man diese Gleichungen in der Form schreibt

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \frac{m}{a-\omega^2}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\\ \mathfrak{N} &= \frac{n}{b-\omega^2}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\\ \mathfrak{P} &= \frac{p}{c-\omega}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),\end{aligned} \tag{7}$$

erhält man durch Multiplication dieser Gleichungen mit resp. m, n, p und Addition

$$\frac{m^2}{a-\omega^2} + \frac{n^2}{b-\omega^2} + \frac{p^2}{c-\omega^2} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung spricht das FRESNEL'sche Gesetz für die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen von der Richtung ihrer Normalen aus. Da die Gleichung (8) eine quadratische Gleichung für ω^2 ist, die stets reelle Wurzeln hat, so pflanzen sich also in jeder Richtung zwei Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort.

Die zu jeder Welle zugehörigen Schwingungsrichtungen des FRESNEL'schen Lichtvectors ergeben sich nach den Gleichungen (7), welche man in der Form schreiben kann

$$\mathfrak{M}:\mathfrak{N}:\mathfrak{P} = \frac{m}{a-\omega^2} : \frac{n}{b-\omega^2} : \frac{p}{c-\omega^2}, \tag{9}$$

worin für ω ein bestimmter, der Gleichung (8) genügender Werth von ω einzusetzen ist. Die Schwingungsrichtungen des NEUMANN'schen Lichtvectors sind zu der durch (9) definirten Richtung senkrecht.

Bezeichnet man die beiden Wurzeln von ω^2 der Gleichung (8) durch o^2 und e^2, und drückt durch angehängte Indices an $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Wellen aus, deren Geschwindigkeiten resp. o und e sind, so ist also nach (9):

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_o:\mathfrak{N}_o:\mathfrak{P}_o &= \frac{m}{a-o^2} : \frac{n}{b-o^2} : \frac{p}{c-o^2},\\ \mathfrak{M}_e:\mathfrak{N}_e:\mathfrak{P}_e &= \frac{m}{a-e^2} : \frac{n}{b-e^2} : \frac{p}{c-e^2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die Schwingungsrichtungen der beiden zu der gleichen Normale gehörigen Wellen senkrecht aufeinander stehen, indem die Beziehung besteht:

$$\mathfrak{M}_o\mathfrak{M}_e + \mathfrak{N}_o\mathfrak{N}_e + \mathfrak{P}_o\mathfrak{P}_e = 0.$$

In der That kann man die linke Seite der letzten Gleichung nach (10) schreiben

$$\frac{1}{o^2-e^2}\left(\frac{m^2}{a-o^2} + \frac{n^2}{b-o^2} + \frac{p^2}{c-o^2} - \frac{m^2}{a-e^2} - \frac{n^2}{b-e^2} - \frac{p^2}{c-e^2}\right).$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber nach der Gleichung (8). Nach der 2ten der Gleichungen (5) folgt daher für die Schwingungsrichtung des NEUMANN-schen Lichtvectors

$$\begin{aligned}M_o:N_o:P_o &= \frac{m}{a-e^2} : \frac{n}{b-e^2} : \frac{p}{c-e^2},\\ M_e:N_e:P_e &= \frac{m}{a-o^2} : \frac{n}{b-o^2} : \frac{p}{c-o^2}.\end{aligned} \tag{10'}$$

Die durch die Gleichungen (8) und (9) ausgesprochenen Gesetze für Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsrichtung kann man durch eine geometrische Construction sehr anschaulich erhalten[1]).

Es sei eine Fläche gegeben, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten die Gestalt haben möge

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^i. \tag{11}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung m, n, p sind gleich der $(i - 1)$ten Potenz des grössten, resp. kleinsten Radiusvectors derjenigen Curve, in welcher jene Fläche von der Wellenebene geschnitten wird, die zugehörigen (FRESNEL'schen) Schwingungen sind parallel den Richtungen der entsprechenden Radienvectoren. Setzt man $i = 0$, so geht die Oberfläche (11) in ein Ellipsoid über, dessen Halbaxen die Werthe $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}}$ besitzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind also die reciproken Werthe der Hauptaxen der Schnittellipse des Ellipsoides mit der Wellenebene. Dieses Ellipsoid ist von CAUCHY[2]) das Polarisationsellipsoid genannt. — In dem Falle $i = 1$ wird die Oberfläche (11) zur geometrischen Construction untauglich, da sie in diesem Falle keine geschlossene Fläche, sondern einen Kegel darstellt. — Für $i = 2$ geht die Oberfläche in eine von FRESNEL Elasticitätsfläche, von SENFF[3]) Ovaloid genannte Fläche über, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind gleich den Hauptaxen der Schnittcurve.

Verhält sich das Medium rings um eine (die z-) Axe optisch gleich, wie die Krystalle des tetragonalen und hexagonalen Systems, so werden zwei jener Coëfficienten a, b, c einander gleich $(a = b)$, und die Fläche (11) wird zu einer Rotationsfläche. Aus obiger geometrischen Construction folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen Welle von der Richtung der Wellennormale unabhängig ist (ordinäre Welle) und dass ihre Schwingung (im FRESNEL'schen Sinne) senkrecht zum Hauptschnitt, d. h. der durch die Wellennormale und die Rotationsaxe gelegten Ebene ist. Da der Hauptschnitt als Polarisationsebene der ordinären Welle definirt ist, so folgt, dass nach FRESNEL die Schwingung des Lichtvectors senkrecht zur Polarisationsebene stattfindet, nach NEUMANN daher in derselben. Dies Resultat musste aus der FRESNEL'schen Annahme, dass die Schwingungsrichtung allein für das Verhalten einer Lichtwelle, d. h. auch für ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, maassgebend sei, nothwendig folgen, auch ohne die speciellere Kenntniss der Geschwindigkeitsgesetze. Denn falls die Wellennormale verschiedene Lagen im Hauptschnitt des Krystalls annimmt, muss nach obiger Annahme die Geschwindigkeit für diejenige Welle constant bleiben, deren Schwingungsrichtung constant bleibt, und das ist daher diejenige Welle, welche senkrecht zum Hauptschnitt schwingt.

Trägt man in jeder Richtung m, n, p die beiden zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auf, so erhält man eine zweischalige Fläche, deren Gleichung in Polarcoordinaten durch (8) dargestellt wird. Diese Fläche wird die Normalenfläche genannt, da sie die Geschwindigkeiten der Wellennormalen angiebt. Löst man (8) nach ω^2 auf, so entsteht

$$\omega^4 - \omega^2 [m^2(b + c) + n^2(c + a) + p^2(a + b)] + m^2 bc + n^2 ca + p^2 ab = 0.$$

[1]) cf. V. v. LANG, Wien. Ber. 43, pag. 627. 1861. — Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, 1873, pag. 334.

[2]) CAUCHY, Mém. de l'Acad. des sciens. 8, pag. 361. 1843.

[3]) SENFF, Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und Polarisation des Lichtes in den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systems. Dorpart 1837.

Setzt man

$$A = m^2(b-c), \quad B = n^2(c-a), \quad C = p^2(a-b),$$

so folgt unter Rücksicht auf $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ für ω^2

$$\begin{aligned} 2\omega^2 &= m^2(b+c) + n^2(c+a) + p^2(a+b) \\ &\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB}. \end{aligned} \tag{12}$$

Es sei nun

$$a > b > c.$$

Dann sind A und C positiv, B negativ. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen kann man in die Form bringen

$$(A + B - C)^2 - 4AB.$$

Dies ist eine stets positive Grösse, welche nur dann zu Null wird, wenn

$$A + B - C = 0, \quad AB = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind, da B und C entgegengesetztes Vorzeichen haben, nnr durch

$$B = 0, \quad A = C$$

zu erfüllen. Die Gleichung (12) ergiebt daher stets zwei reelle Wurzeln für ω, welche für

$$n = 0, \quad m^2(b-c) = p^2(a-b), \quad \text{d. h.} \quad m^2 = \frac{a-b}{a-c}, \quad p^2 = \frac{b-c}{a-c} \tag{13}$$

zu einer einzigen zusammenfallen.

Durch die Gleichungen (13) sind zwei Richtungen der Wellennormalen ermittelt, in welchen keine Doppelbrechung stattfindet. Diese Richtungen werden die optischen Axen genannt. Dieselben haben offenbar die Eigenschaft, dass eine zu ihnen senkrechte Ebene das Polarisationsellipsoid und das Ovaloid in einem Kreise schneidet. Die Schwingungsrichtung ist daher in diesem Falle unbestimmt.

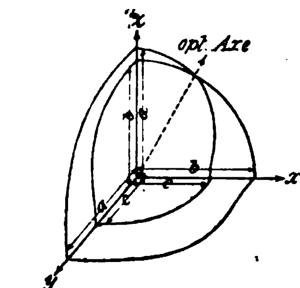
Da die Werthe von a, b, c von der Wellenlänge (und Temperatur) abhängen, so ist die Lage der optischen Axen mit der Farbe variabel. Man bezeichnet diese Erscheinung als Dispersion der optischen Axen. Bei den triklinen Krystallen ist nicht nur der Winkel, sondern auch die Ebene der optischen Axen und die Halbirungslinien ihrer Winkel mit der Farbe variabel, bei monoklinen Krystallen, bei welchen die Ebene der optischen Axen entweder in der krystallographischen Symmetrieebene oder senkrecht zu ihr liegt, sind im ersten Falle nur der Winkel der optischen Axen und ihre Halbirungslinien variabel, im zweiten Falle nur ihr Winkel und ihre Ebene. Bei rhombischen Krystallen hängt nur der Winkel der optischen Axen von der Farbe ab, jedoch kann auch ihre Ebene bei einigen Farben um 90° von der für andere Farben gültigen abweichen, wenn die Reihenfolge der Werthe a, b, c für verschiedene Farben wechselt. Letztere Erscheinung tritt z. B. ein bei Brookit, Manganpikrat, Eisenpikrat[1]).

Die Krystalle, bei welchen alle drei Constanten a, b, c von einander verschiedene Werthe besitzen, d. h. die Krystalle des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems, werden wegen der Eigenschaft, zwei optische Axen zu besitzen, zweiaxige Krystalle genannt, im Gegensatz zu den Krystallen des tetragonalen und hexagonalen Systems, bei welchen zwei jener Constanten einander gleich sind und bei welchen nach (13) die optischen Axen in eine einzige zusammenfallen. Diese Krystalle werden daher einaxige genannt.

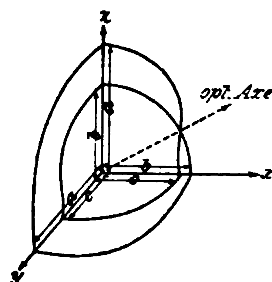
Man bezeichnet diejenige optische Symmetrieaxe, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, als erste Mittellinie, diejenige, welche den stumpfen

[1]) cf. TH. LIEBISCH, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891, pag. 358.

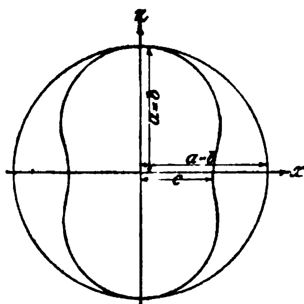
Winkel halbirt, als zweite Mittellinie. Man nennt einen zweiaxigen Krystall positiv oder negativ, je nachdem die erste Mittellinie die Richtung der kleinsten oder der grössten Ovaloidaxe besitzt, d. h. je nachdem der Werth der mittleren Ovaloidaxe (b) sich mehr dem der grössten Axe (a), als dem der kleinsten (c) nähert, oder je nachdem das Umgekehrte der Fall ist. Dementsprechend nennt man auch einaxige Krystalle positiv oder negativ, je nachdem ihr Ovaloid eine Rotationsfläche ist, welche in der Richtung der Rotationsaxe abgeplattet oder verlängert ist. Für einaxige Krystalle zerfällt nach der Gleichung (8) dieNormalenfläche in eine Kugel und ein dasselbe in Richtung der Axe berührendes Rotationsovaloid. Der Krystall ist gemäss der vorigen Festsetzung positiv oder



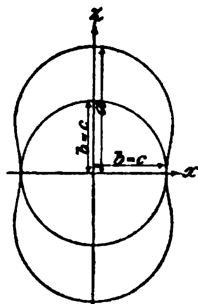
a) Positiv zweiaxiger Krystall.



b) Negativ zweiaxiger Krystall.



c) Positiv einaxiger Krystall



d) Negativ einaxiger Krystall.

(Ph. 476.)

negativ, je nachdem die Kugel das Ovaloid umschliesst oder das Ovaloid die Kugel, d. h. je nachdem die ordinäre Welle die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt als die extraordinäre, oder umgekehrt.

Diese Unterscheidung des Charakters der Doppelbrechung bei einaxigen Krystallen rührt von Biot[1]) her. Quarz ist positiv einaxig, Kalkspath negativ. In den obigen Figuren sind die Durchschnitte der Normalenfläche durch die Symmetrieebenen (Hauptebenen) der zweiaxigen und durch den Hauptschnitt der einaxigen Krystalle gezeichnet (Fig. 476). Wie aus der Gleichung (8) unmittelbar

[1]) Biot, Mém. de la classe des sc. math. et phys. de l'Inst. 13 (2), pag. 19. 1816. — Gilbert, Ann. d. Phys. 65, pag. 1. 1820. Biot nannte (im Sinne der Emissionstheorie) die einaxigen Krystalle attractiv oder repulsiv, je nachdem der extraordinäre Strahl von der Axe angezogen oder abgestossen wurde. Ersteres ist der Fall bei den positiven, letzteres bei den negativen Krystallen. Diese Bezeichnung rührt von Fresnel her; sie ist daran leicht zu merken, dass bei den positiven Krystallen die Differenz zwischen der ordinären und extraordinären Fortpflanzungsgeschwindigkeit positiv ist, bei den negativen negativ. Die Bezeichnung des Charakters der Doppelbrechung zweiaxiger Krystalle ist so gewählt, dass sie für Zusammenfallen der Axen in die Bezeichnung bei den einaxigen Krystallen übergeht, wie oben gezeigt ist.

hervorgeht, pflanzt sich in jeder Hauptebene eine Welle mit constanter Geschwindigkeit fort.

Führt man die Winkel g und g' ein, welche die Wellennormale mit den beiden optischen Axen bildet, und zwar mit denjenigen Richtungen derselben, welche einen spitzen Winkel einschliessen, so lassen sich die beiden Wurzeln (o und e) der Gleichung (8) getrennt und ohne Wurzelzeichen angeben[1]). Aus den Werthen, welche die Richtungscosinus der optischen Axen nach (13) besitzen, folgt nämlich

$$\cos g = m\sqrt{\frac{a-b}{a-c}} - p\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}, \qquad \cos g' = m\sqrt{\frac{a-b}{a-c}} + p\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$$

und hieraus

$$\begin{gathered} m^2(b+c) + n^2(c+a) + p^2(a+b) = (a+c) - (a-c)\cos g \cos g', \\ A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB = (a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g'; \end{gathered} \tag{13'}$$

Die Wurzeln von ω^2 sind daher nach (12)

$$\begin{aligned} o^2 &= \frac{a+c}{2} \pm \frac{a-c}{2}\cos(g-g'), \\ e^2 &= \frac{a-c}{2} \pm \frac{a-c}{2}\cos(g+g'). \end{aligned} \tag{12'}$$

Die Bezeichnung ist so gewählt, dass, falls das Medium in ein einaxiges übergeht, d. h. $g = g'$ wird, o die Geschwindigkeit der ordinären Welle, e die der extraordinären bedeutet. Das obere Zeichen in (12') gilt für positive Krystalle, das untere für negative.

Unter Zuhilfenahme der optischen Axen lassen sich auch die Schwingungsrichtungen leicht construiren. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der Richtung der Hauptaxen des Ovals, in welchem das Ovaloïd von der Wellenebene geschnitten wird. Dieses Oval wird nun von den Kreisschnitten des Ovaloïds in gleichen Radienvectoren r und r' geschnitten, die Halbirungslinien der von denselben gebildeten Winkel sind also die Hauptaxen des Ovals. — Weiter sind jene Radienvectoren r und r' gegen die durch die Wellennormale N und je eine optische Axe gelegte Ebene senkrecht, denn sie gehören ja dem Ovalschnitt und je einem (zur optischen Axe senkrechten) Kreisschnitt gleichzeitig an. Diese Ebenen schneiden daher das Oval in zwei Radienvectoren r_1 und r'_1, welche zu den r und r' senkrecht sind. Die Hauptaxen des Ovals halbiren daher auch die von den Vectoren r_1 und r'_1 gebildeten Winkel, und da die Schwingungsrichtungen mit jenen Hauptaxen coincidiren, so liegen folglich die Schwingungsrichtungen in denjenigen Ebenen, welche die Winkel der durch die Wellennormale und die optischen Axen gelegten Ebenen halbiren[2]). Da die Schwingungsrichtungen zur Wellennormale senkrecht sind, so sind sie durch diese Betrachtung völlig bestimmt.

Die FRESNEL'sche Schwingung $\mathfrak{A}_o$, welche zu der mit der Geschwindigkeit o fortschreitenden Welle gehört, muss in der Ebene liegen, welche denjenigen Winkelraum jener beiden Ebenen halbirt, welcher die zweite Mittellinie enthält, wie ersichtlich ist für den Fall, dass beide optische Axen coincidiren, da dann $\mathfrak{A}_o$ senkrecht zur optischen Axe steht. — In der folgenden Figur ist eine Darstellung auf der Kugelfläche gegeben. N bezeichnet die Wellennormale, a, b, c

---

[1]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 33, pag. 257. 1834.

[2]) Dieser Satz ist von MAC CULLAGH gefunden (Trans. of the Irish Acad. 16. 1830, part 2, pag. 65.)

die Ovaloïdaxen, D, D' die optischen Axen, $\mathfrak{A}_o$, $\mathfrak{A}_e$ die Schwingungsrichtung des FRESNEL'schen, A_o, A_e die des NEUMANN'schen Lichtvectors (Fig. 477.)

War bisher die Fortpflanzung einer Gesammtheit von Erschütterungen betrachtet, welche alle in einer Ebene lagen, so wollen wir nun die Fortpflanzung einer einzelnen Erschütterung näher ins Auge fassen. — Diejenige Fläche, bis zu welcher sich eine einzelne Erschütterung nach Ablauf einer gewissen Zeit fortgepflanzt hat, wird Wellenfläche oder Strahlenfläche genannt. Mit Hilfe derselben kann man sich leicht diejenige Fläche Σ_t construiren, bis zu welcher sich eine Lichtbewegung nach Ablauf einer Zeit t fortgepflanzt hat, die sich zur Zeit 0 auf einer Fläche Σ_o befand. Zu dem Zwecke muss man nämlich nach dem HUYGENS'schen Princip um jeden Punkt P der Fläche Σ_o die Wellenfläche S_t construiren. Die Enveloppe sämmtlicher zu den verschiedenen Punkten P gehöriger Wellenflächen ist die gesuchte Fläche Σ_t. Es möge die um einen bestimmten Punkt P von Σ_o construirte Wellenfläche die Enveloppe Σ_t' in dem Punkte S berühren. Irgend welche zwischen Σ_o und Σ_t befindlichen undurchsichtigen Schirme verhindern nur dann, dass sich eine Erschütterung von Σ_o nach S fortpflanzt, wenn sie von der Geraden PS geschnitten werden, wie aus der Construction und gemäss den früher pag. 624 angestellten Ueberlegungen folgt. Man sagt daher, dass sich das Licht nach S in der Richtung von PS fortpflanze und nennt diese Richtung die des Lichtstrahles im Punkte S. Ist die Fläche Σ_o eine Ebene, so ist Σ_t auch eine solche. Diejenige Ebene, bis zu welcher sich eine Lichtbewegung nach Ablauf einer Zeit t fortgepflanzt hat, die zur Zeit 0 sich auf einer Ebene befand, welche durch den Punkt P geht und deren Normale mit N bezeichnet sein möge, wird daher dadurch erhalten, dass man an die um P construirte Wellenfläche S_t eine Tangentialebene legt, deren Normale mit der Normalen N zusammenfällt.

(Ph. 477.)

Berührt diese Ebene die Strahlenfläche S_t im Punkte S, so giebt PS die Richtung des Strahles und zugleich den vom Lichtstrahl in der Zeit t zurückgelegten Weg an (Fig. 478). Ist PN die Länge des von P auf die Wellenebene gefällten Lothes, so ist daher PN proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω der ebenen Welle. Dagegen ist PS proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit σ des Lichtstrahles, und wegen der auseinandergesetzten geometrischen Beziehungen findet die Relation statt:

$$\omega = \sigma \cdot cos\,(NS), \tag{14}$$

wobei (NS) den Winkel zwischen Strahl und Wellennormale bedeutet. Es ist also die Normalenfläche die Fusspunktfläche der Strahlenfläche.

(Ph. 478.)

Da die Strahlenfläche S_t sämmtliche von P aus nach der Zeit t in beliebigen Richtungen fortgepflanzten Wellenebenen berührt, so heisst das, dass die Strahlenfläche die Enveloppe jener Ebenen ist. Hierdurch kann man die Strahlenfläche aus der Normalenfläche bestimmen[1]). Nennt man die Richtungscosinus des Strahles $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ und setzt man

[1]) AMPÈRE, Ann. de chim. et de phys. (2) 39, pag. 113. 1828. — A. SMITH, Trans. Cambr. Phil. Soc. (1) 6, pag. 85. 1836. — Phil. Mag. 12, pag. 335. 1838. — C. E. SENFF, l. c. (cf. pag. 690), pag. 101.

$$G^2 = \left(\frac{m}{a-\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{b-\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{c-\omega^2}\right)^2, \tag{15}$$

so sind die Bestimmungsstücke des Lichtstrahles mit denen der zugehörigen Wellennormale durch die Relationen verknüpft:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}\sigma &= m\omega\left[1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - a)}\right], \\ \mathfrak{n}\sigma &= n\omega\left[1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - b)}\right], \\ \mathfrak{p}\sigma &= p\omega\left[1 + \frac{1}{G^2\omega^2(\omega^2 - c)}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Durch Quadriren und Addiren dieser drei Gleichungen folgt:

$$\sigma^2 = \omega^2 + \frac{1}{G^2\omega^2}. \tag{16'}$$

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die hier gegebene Definition des Strahles sich mit einer anderen von G. KIRCHHOFF gegebenen Definition deckt, welche nicht das HUYGENS'sche Princip benutzt und daher direkter ist, da letzteres zu seiner strengen theoretischen Begründung noch einiger Erörterungen bedarf.

Wenn die Grenzfläche zweier Medien parallel zur Richtung der Lichtstrahlen in dem einen Medium verläuft, so hat das Vorhandensein und die Natur des zweiten Mediums keinerlei Einfluss auf die Lichtbewegung im ersten Medium. Denn der Lichtstrahl ist ja dadurch charakterisirt, dass er nur durch direkt in seinem Wege liegende Hindernisse modificirt, d. h. entweder vernichtet (Schatten) oder gebrochen wird. — Wenn daher die Grenzfläche zweier Medien parallel zu einem im ersteren derselben verlaufenden Lichtstrahl liegt, so kann keine Energieübertragung aus dem ersteren Medium in das zweite hinein stattfinden, da letzteres auf die Lichtbewegung im ersteren keinerlei Einfluss hat. Die Richtung des Lichtstrahles kann also auch dadurch definirt werden, dass durch jede zu ihm parallel gelegte Ebene kein Energiefluss stattfindet.

Nun lässt sich aus den Formeln (11) der pag. 669 nach der elektromagnetischen Theorie leicht ableiten, dass der Energiefluss durch die Flächen-Einheit einer Ebene, deren Normale die Richtungscosinus $\cos(nx)$ etc. besitzt, dem Ausdruck proportional ist:

$$(NY - MZ)\cos(nx) + (LZ - NX)\cos(ny) + (MX - LY)\cos(nz).$$

Hierin bedeuten L, M, N die Componenten der magnetischen Kraft, d. h. des NEUMANN'schen Vectors u', v', w', und ferner bedeuten X, Y, Z die Componenten der elektrischen Kraft, d. h. desjenigen dritten Lichtvectors $\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'' \mathfrak{w}''$, welcher sich in quasi-transversalen Wellen fortpflanzt. Letzterer ist aber mit dem FRESNEL'schen Vector durch die Beziehungen verknüpft

$$X = \mathfrak{u}'' = au, \qquad Y = \mathfrak{v}'' = bv, \qquad Z = \mathfrak{w}'' = cw. \tag{17}$$

Es muss daher die Relation stattfinden:

$$(bw'v - cv'w)\cos(nx) + (cu'w - aw'u)\cos(ny) + (av'u - bu'v)\cos(nz) = 0,$$

für jede Richtung n, welche normal zum Lichtstrahl liegt. Bezeichnet man daher die Richtungscosinus des Strahles durch $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$, so muss die aufgestellte Gleichung für alle Richtungen n gelten, welche der Relation genügen:

$$\mathfrak{m}\cos(nx) + \mathfrak{n}\cos(ny) + \mathfrak{p}\cos(nz) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für die Richtungscosinus des Strahles, wenn man noch u, v, w durch die ihnen proportionalen Werthe $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ ersetzt, und ebenso u', v', w' durch M, N, P:

$$\mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = c\mathfrak{P}N - b\mathfrak{N}P : a\mathfrak{M}P - c\mathfrak{P}M : b\mathfrak{N}M - a\mathfrak{M}N. \tag{17'}$$

Durch Multiplication der zweiten der Gleichungen (6) mit P und der dritten mit N und Subtraction erhält man, da nach (5) $m = \mathfrak{N}P - N\mathfrak{P}$ etc.,

$$\omega^2 m = c\mathfrak{P}N - b\mathfrak{N}P + \mathfrak{M}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p),$$

und zwei analoge Gleichungen kann man aus dieser durch cyklische Vertauschung der Buchstaben ableiten. Man kann daher setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \rho\,[\omega^2 m - \mathfrak{M}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \\ \mathfrak{n} &= \rho\,[\omega^2 n - \mathfrak{N}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \\ \mathfrak{p} &= \rho\,[\omega^2 p - \mathfrak{P}(a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p)], \end{aligned} \tag{18}$$

wo ρ ein gewisser Proportionalitätsfactor ist, dessen Grösse durch Quadriren und Addiren der letzten drei Gleichungen unter Rücksicht auf die Beziehung

$$a\mathfrak{M}m + b\mathfrak{N}n + c\mathfrak{P}p = \frac{1}{G}, \tag{19}$$

welche durch Quadriren und Addiren der Gleichungen (7) folgt, bestimmt wird zu

$$\rho = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 + \dfrac{1}{G^2\omega^2}}} = \frac{1}{\omega\sigma} \text{ nach (16').} \tag{20}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes von ρ und der aus (7) folgenden Werthe $\mathfrak{M} = \dfrac{m}{(a-\omega^2)G}$, $\mathfrak{N} =$ etc. in die Gleichungen (18) erhält man die Gleichungen (16), sodass die Identität der beiden Definitionen des Strahles erwiesen ist.

Setzt man in den Gleichungen (16) für $\dfrac{1}{G^2\omega^2}$ den Werth $\sigma^2 - \omega^2$, welcher aus (16') folgt, so nehmen sie die Gestalt an:

$$\frac{\mathfrak{m}\sigma}{a-\sigma^2} = \frac{m\omega}{a-\omega^2}, \quad \frac{\mathfrak{n}\sigma}{b-\sigma^2} = \frac{n\omega}{b-\omega^2}, \quad \frac{\mathfrak{p}\sigma}{c-\sigma^2} = \frac{p\omega}{c-\omega^2}. \tag{21}$$

Diese Gleichungen kann man auch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} m\omega &= \mathfrak{m}\sigma\left(1 + \frac{\sigma^2-\omega^2}{a-\sigma^2}\right), \\ n\omega &= \mathfrak{n}\sigma\left(1 + \frac{\sigma^2-\omega^2}{b-\sigma^2}\right), \\ p\omega &= \mathfrak{p}\sigma\left(1 + \frac{\sigma^2-\omega^2}{c-\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\mathfrak{m}\sigma$, $\mathfrak{n}\sigma$, $\mathfrak{p}\sigma$ und addirt sie, so kann man unter Rücksicht auf die Relation (14) den Faktor $\omega^2 - \sigma^2$ fortheben und es resultirt

$$\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\mathfrak{m}^2}{a-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{n}^2}{b-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{p}^2}{c-\sigma^2} = 0. \tag{23}$$

Addirt man zu dieser Gleichung die Identität

$$\frac{\mathfrak{m}^2}{\sigma^2} + \frac{\mathfrak{n}^2}{\sigma^2} + \frac{\mathfrak{p}^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} = 0,$$

so entsteht

$$\frac{\mathfrak{m}^2 a}{a-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{n}^2 b}{b-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{p}^2 c}{c-\sigma^2} = 0, \tag{23'}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{m}^2}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{\sigma^2}} + \frac{\mathfrak{n}^2}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{\sigma^2}} + \frac{\mathfrak{p}^2}{\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{\sigma^2}} = 0. \tag{23''}$$

Die drei Gleichungen (23, 23', 23'') sind Polargleichungen der Strahlenfläche. In der letzten Form erhellt nach Erläuterungen der pag. 690 unmittelbar,

dass die Punkte der Strahlenfläche geometrisch dadurch zu erhalten sind, dass auf dem Radiusvector ($\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$) die Hauptaxen derjenigen Ellipse aufgetragen werden, in welcher eine zum Radiusvector ($\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$) senkrechte Ebene das Ellipsoïd schneidet, dessen Hauptaxen resp, a, b, c sind.

Da aus der Formel (23″) folgt, dass durch Ersetzung sämmtlicher bei der Normalenfläche auftretenden Linien durch ihre reciproken Werthe die Strahlenfläche erhalten wird, so resultirt unmittelbar nach den Erörterungen der pag. 691, dass für jede Richtung, deren *cos* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ sind, zwei reelle Radien σ sich ergeben, dass dagegen für zwei Richtungen, welche durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{n} = 0,\ \mathfrak{m}^2 = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a-b}{a-c},\ \mathfrak{p}^2 = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b-c}{a-c}, \tag{24}$$

definirt sind, die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Strahles zusammenfallen. Diese Richtungen heissen die Strahlenaxen. Da $a > b > c$ vorausgesetzt ist, so folgt aus (24) und (13), dass die Strahlenaxen näher der kleinsten Axe des Ovaloïds liegen (der z-Axe), als die optischen Axen. Bei den positiv zweiaxigen Krystallen liegen also die Strahlenaxen innerhalb der von der ersten Mittellinie und den optischen Axen gebildeten Winkel, bei den negativen ausserhalb derselben.

Die Gestalt der Durchschnitte der Strahlenfläche mit den Hauptebenen ist den in Fig. 476 der pag. 692 dargestellten der Normalenfläche mit jenen Ebenen ähnlich, nur treten Ellipsen an Stelle der Ovale.

Der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale, dessen *cos* durch $\omega : \sigma$ gegeben ist, erreicht in 6 Richtungen, von denen je zwei in einer Hauptebene liegen, relative Maxima[1]. Bei Kalkspath erreicht dieser Maximalwinkel den Betrag von 6° 16′[2].

Die Gleichungen (16) und (16′) dienen zur Bestimmung des Strahles aus der Wellennormale. Aus den Gleichungen (22) kann man durch Transformation solche ab.eiten, welche die Wellennormale aus dem Strahl bestimmen. Nach (16′) ist nämlich

$$\sigma^2 - \omega^2 = \frac{1}{G^2 \omega^2},$$

und da durch Quadrirung und Addirung der Gleichungen (21) folgt:

$$\omega^2 G^2 = \left(\frac{\mathfrak{m}\sigma}{a - \sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{n}\sigma}{b - \sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{p}\sigma}{c - \sigma^2}\right)^2 = F^2, \tag{25}$$

so ist nach (22)

$$\begin{aligned} m\omega &= \mathfrak{m}\sigma\left[1 + \frac{1}{F^2(a - \sigma^2)}\right], \\ n\omega &= \mathfrak{n}\sigma\left[1 + \frac{1}{F^2(b - \sigma^2)}\right], \\ p\omega &= \mathfrak{p}\sigma\left[1 + \frac{1}{F^2(c - \sigma^2)}\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

$$\omega^2 = \sigma^2 - \frac{1}{F^2}. \tag{26'}$$

Diese Gleichungen (26) und (26′) bestimmen zu jedem Strahl die zugehörige

[1] W. Walton, Quart. Journ. 4, pag. 1. 1861.

[2] Weitere numerische Angaben bei anderen Krystallen, cf. Liebisch, physikal. Krystallogr. pag. 309 u. 339.

Wellennormale. Diese Bestimmungen gestalten sich einfacher durch Zuhilfenahme der optischen Axen und Strahlenaxen.

Es folgt aus den Gleichungen (16), welche zunächst für denjenigen Strahl σ_0 ($\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{p}_0$) betrachtet werden mögen, welcher zu der mit der Geschwindigkeit o sich fortpflanzenden Welle gehört, durch Multiplication mit resp. $\mathfrak{M}_e$, $\mathfrak{N}_e$, $\mathfrak{P}_e$ und Addition nach der zweiten der Gleichungen (10):

$$\sigma_o \cos(\sigma_o \mathfrak{A}_e) = \frac{1}{G_o{}^2 o}\left[\frac{m^2}{(a-o^2)(a-e^2)} + \frac{n^2}{(b-o^2)(b-e^2)} + \frac{p^2}{(c-o^2)(c-e^2)}\right];$$

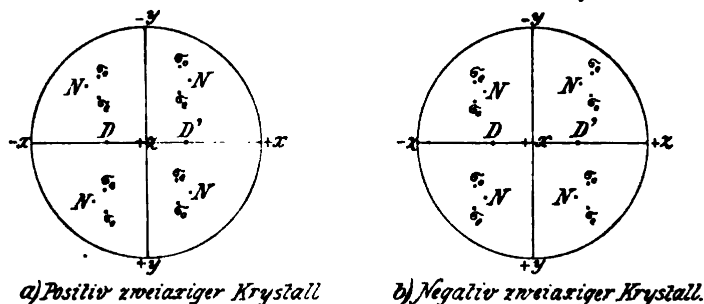
Dieser Ausdruck verschwindet aber, wie wir schon oben, pag. 689, sahen. Es ist daher

$$\cos(\sigma_o \mathfrak{A}_e) = o \quad \text{und ebenso} \quad \cos(\sigma_e \mathfrak{A}_o) = o, \tag{27}$$

d. h. der Strahl σ_o ist senkrecht zu der Schwingungsrichtung $\mathfrak{A}_e$, und σ_e senkrecht zu $\mathfrak{A}_o$. Da nun die Wellennormale N, sowie $\mathfrak{A}_o$ und $\mathfrak{A}_e$ drei zu einander rechtwinklige Richtungen sind, so liegt σ_o in der N und $\mathfrak{A}_o$ verbindenden Ebene, und σ_e in der N und $\mathfrak{A}_e$ verbindenden Ebene d. h. die Strahlen liegen (nach pag. 693) auf den Halbirungsebenen derjenigen Winkel, welche die durch die Wellennormale und die optischen Axen gelegten Ebenen mit einander bilden. Die Polarisationsebene, d. h. die durch die Wellennormale und den NEUMANN'schen Lichtvector gelegte Ebene, steht also senkrecht zu der durch den zugehörigen Strahl und die zugehörige Wellennormale gelegten Ebene. Die Lage des Strahles in dieser Ebene wird durch die Relationen gefunden:

$$\sigma_o \cos(\sigma_o \mathfrak{A}_o) = \frac{1}{G_o o}, \quad \sigma_e \cos(\sigma_e \mathfrak{A}_e) = \frac{1}{G_e e}, \tag{28}$$

welche Beziehungen durch Multiplication der drei Gleichungen (16) mit resp. $\mathfrak{M}_o$, $\mathfrak{N}_o$, $\mathfrak{P}_o$, oder $\mathfrak{M}_e$, $\mathfrak{N}_e$, $\mathfrak{P}_e$ und Addition sofort abgeleitet werden. Der Sinn,



a) Positiv zweiaxiger Krystall b) Negativ zweiaxiger Krystall.

(Ph. 479.)

in welchem σ zu N liegt, ergiebt sich durch Betrachtung der Fälle, in welchen N in eine Hauptebene fällt. Die Lage von σ zu N wird durch die beifolgenden schematischen Figuren geliefert, in welchen D, D' die optischen Axen bedeuten (Fig. 479).

Ausser den Richtungen $\mathfrak{A}_o$ und $\mathfrak{A}_e$, welche in die Hauptaxen des von der Wellenebene aus dem Ovaloïd ausgeschnittenen Ovals liegen, mögen nun noch die zwei Richtungen $\mathfrak{A}_o'$ und $\mathfrak{A}_e'$ eingeführt werden, welche in die Hauptaxen derjenigen Ellipse fallen, in welcher eine zum Strahl normale Ebene das zur Construction der Strahlenfläche dienende Ellipsoïd schneidet. Da wir früher (pag. 697) sahen, dass durch Uebergang zu den reciproken Längen sämmtliche Constructionen am Ovaloïd in die entsprechenden an dem genannten Ellipsoïd übergehen, so gelten auch die am ersteren erhaltenen geometrischen Beziehungen unmittelbar am letzteren, speciell halbiren also die durch σ und $\mathfrak{A}_o'$ resp. $\mathfrak{A}_e'$

gelegten Ebenen diejenigen Winkel, welche die durch σ und die Strahlenaxen gelegten Ebenen mit einander bilden. Die Richtungscosinus der Richtungen $\mathfrak{A}'_o$ und $\mathfrak{A}'_e$ werden erhalten, wenn man in den Gleichungen (10) m, n, p durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, ferner a, b, c durch $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, schliesslich o und e durch $\frac{1}{\sigma_o}$ und $\frac{1}{\sigma_e}$ ersetzt. Bezeichnet man jene Richtungscosinus durch $\mathfrak{M}'_o$, $\mathfrak{N}'_o$, $\mathfrak{P}'_o$ und $\mathfrak{M}'_e$, $\mathfrak{N}'_e$, $\mathfrak{P}'_e$, so ist also

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_o':\mathfrak{N}_o':\mathfrak{P}_o' &= \frac{a\mathfrak{m}}{a-\sigma_o^2}:\frac{b\mathfrak{n}}{b-\sigma_o^2}:\frac{c\mathfrak{p}}{c-\sigma_o^2},\\ \mathfrak{M}_e':\mathfrak{N}_e':\mathfrak{P}_e' &= \frac{a\mathfrak{m}}{a-\sigma_e^2}:\frac{b\mathfrak{n}}{b-\sigma_e^2}:\frac{c\mathfrak{p}}{c-\sigma_e^2}.\end{aligned} \tag{29}$$

In Folge der Gleichungen (21) und (10) folgt hieraus:

$$\mathfrak{M}':\mathfrak{N}':\mathfrak{P}' = a\mathfrak{M}:b\mathfrak{N}:c\mathfrak{P},$$

d. h. nach (17) fällt der Vector $\mathfrak{A}'$ zusammen mit der elektrischen Kraft, d. h. demjenigen Vector, dessen Componenten mit u'', v'', w'' bezeichnet sind. Dass dieser Vector senkrecht zum Strahl liegt, folgt aus (29) und (23'). Nach pag. 671 liegt er auch senkrecht zum NEUMANN'schen Vector u', v', w'.

Durch Multiplication der Gleichungen (26), welche zunächst für diejenige Welle aufgestellt werden mögen, die sich auf den Strahl σ_o bezieht, mit den Grössen $\mathfrak{M}_e'$, $\mathfrak{N}_e'$, $\mathfrak{P}_e'$, und Addition folgt:

$$o\cos(N_o\mathfrak{A}_e') = \frac{\sigma_o}{F_o^2}\left[\frac{\mathfrak{m}^2 a}{(a-\sigma_o^2)(a-\sigma_e^2)}+\frac{\mathfrak{n}^2 b}{(b-\sigma_o^2)(b-\sigma_e^2)}+\frac{\mathfrak{p}^2 c}{(c-\sigma_o^2)(c-\sigma_e^2)}\right],$$

und da

$$\frac{1}{(a-\sigma_o^2)(a-\sigma_e^2)} = \frac{1}{\sigma_o^2-\sigma_e^2}\left(\frac{1}{a-\sigma_o^2}-\frac{1}{a-\sigma_e^2}\right),$$

so folgt, vermöge der Gleichung (23') der Strahlenfläche, dass

$$\cos(N_o\mathfrak{A}_e') = o \quad \text{und ebenso} \quad \cos(N_e\mathfrak{A}_o') = o\,[1]. \tag{30}$$

Durch Anwendung derselben Schlussweise, wie sie zur Ermittelung der Lage der beiden zu einer Wellennormale gehörigen Strahlen angewandt ist, gelangt man hier zu dem Resultat, dass die beiden zu einem Strahl gehörigen Wellennormalen auf den Halbirungsebenen derjenigen Winkel liegen, welche die durch den Strahl und die Strahlenaxen gelegten Ebenen mit einander bilden.

Dieser Satz spricht also in Verbindung mit dem über die Lage der beiden zu einer Normale gehörigen Strahlen gefundenen, aus, dass die Verbindungsebene einer Wellennormale mit einem der zugehörigen Strahlen gleichzeitig die beiden Winkel halbirt, welche man erhält, indem man die Wellennormale mit den optischen Axen und den Strahl mit den Strahlenaxen durch Ebene verbindet. Es ist dadurch eine einfache geometrische Construction[2]) der Strahlen ermöglicht. Wir wollen sie uns auf der Kugelfläche ausgeführt denken.

Es sei die Wellennormale N, die optischen Axen D, D' und die Strahlenaxen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ gegeben. Man halbire den Winkel (DND') durch den grössten Kreis NE und seinen Nebenwinkel durch NO, lege durch $\mathfrak{D}'$ zwei zu NE und NO senkrecht grösste Kreise, welche NE und NO in P_1 und P_2 schneiden mögen, wähle zwei Punkte P_1' und P_2' derart auf $\mathfrak{D}'P_1$ und $\mathfrak{D}'P_2$, dass die Bögen (P_1P_1'), (P_2P_2') resp. gleich den Bögen $(\mathfrak{D}P_1)$, $(\mathfrak{D}'P_2)$ sind, und ziehe durch

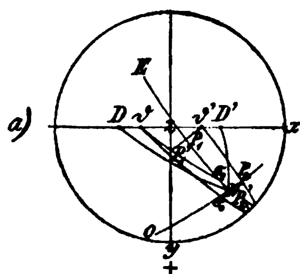
---

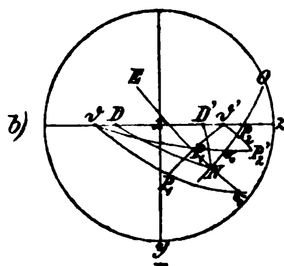
[1]) Ebenso folgt, dass $\cos(\mathfrak{A}_o\mathfrak{A}_e') = o$, $\cos(\mathfrak{A}_e\mathfrak{A}_o') = o$, d. h. die zu N_e gehörige Richtung $\mathfrak{A}_o$ fällt mit $\mathfrak{A}_o'$ zusammen, die zu N_o gehörige Richtung $\mathfrak{A}_e$ mit $\mathfrak{A}_e'$.

[2]) J. J. SYLVESTER, Phil. Mag. 12, pag. 81. 1883.

$\mathfrak{D}$ und P_1', P_2' zwei grösste Kreise. Ihre Schnittpunkte mit den Kreisen NE und NO ergeben die zu N gehörigen Strahlen σ_e und σ_o (Fig. 480)

Von Fig. 480 bezieht sich die erste (a) auf einen positiven Krystall, die weite (b) auf einen negativen. Die Construction erläutert unmittelbar die in beiden Fällen verschiedenen Lagen der Strahlen zur Wellennormale, wie sie in Fig. 479, pag. 698 angedeutet ist.





(Ph. 480.)

Durch eine ganz analoge Construction kann man zu jedem Strahl die beiden zugehörigen Wellennormalen erhalten[1]).

Diese Constructionen versagen, wenn die Wellennormale in eine optische Axe, oder der Strahl in eine Strahlenaxe fällt.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Multiplicirt man die Gleichungen (21) resp. mit m, n, p und addirt sie, so entsteht:

$$\frac{\mathfrak{m}m}{a-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{n}n}{b-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{p}p}{c-\sigma^2} = 0. \tag{31}$$

Fällt die Wellennormale in eine optische Axe, so ist nach (13)

$$n = 0, \quad m = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \quad p = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}, \quad \omega^2 = b. \tag{32}$$

Die Gleichung (31) wird daher, weil σ^2 von b verschieden ist, zu

$$\frac{\mathfrak{m}m}{a-\sigma^2} + \frac{\mathfrak{p}p}{c-\sigma^2} = 0. \tag{33}$$

Ferner ist nach (14)

$$\sigma \cos(NS) = \sigma(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = \sqrt{b}. \tag{34}$$

Eliminirt man nun σ aus (33) und (34), so entsteht:

$$(\mathfrak{m}mc + \mathfrak{p}pa)(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = b. \tag{35}$$

Nennt man die Coordinaten der Endpunkte des Strahles x, y, z, wobei also ist

$$x = \mathfrak{m}\sigma, \quad y = \mathfrak{n}\sigma, \quad z = \mathfrak{p}\sigma,$$

so entsteht aus (35) durch Multiplikation mit σ^2:

$$(xmc + zpa)(xm + zp) = b(x^2 + y^2 + z^2). \tag{36}$$

Dies ist die Gleichung eines durch den Coordinatenanfang gehenden Kegels. Es gehören also zur optischen Axe als Wellennormale unendlich viel auf einem durch die Gleichung (36) definirten Kegel liegende Strahlen. Derselbe schneidet auf der Wellenebene

$$xm + zp = \text{const.} \tag{37}$$

einen Kreis aus, da durch Einsetzen der Gleichung (37) in die Gleichung (36) letztere in

$$(xmc + zpa)\cdot \text{const.} = b(x^2 + y^2 + z^2), \tag{38}$$

d. h. in die Gleichung einer Kugel übergeht. Nach dem in pag. 694 Erörterten folgt daher, dass die Strahlenfläche zwei zu den optischen Axen senkrechte Tangentialebenen besitzt, welche dieselbe in einem Kreise berühren. Eine Erzeugende des Strahlenkegels fällt in die optische Axe selber und steht daher auf der Ebene des Kreises senkrecht. — Der Oeffnungswinkel ε des Strahlen-

[1]) Wegen weiterer Consequenzen des FRESNEL'schen Gesetzes cf. V. v. LANG, Wien. Ber. (2) 43, pag. 627. 1861.

kegels wird erhalten, wenn man in (36) $y = 0$ setzt und den Winkel zwischen den beiden, dann durch (36) dargestellten, in der xz-Ebene liegenden Linien berechnet. Es ergiebt sich

$$tang\, \varepsilon = \frac{\sqrt{(a-b)(b-c)}}{b}. \tag{39}$$

Die Polarisationsebenen der Strahlen des Kegels stehen nach pag. 690 senkrecht auf der die Strahlen und die optische Axe verbindenden Ebene. Die Polarisationsebene des Strahles, welcher mit der optischen Axe zusammenfällt, liegt daher in der Ebene der optischen Axen, die des zweiten in dieser Ebene liegenden Strahles senkrecht zu derselben.

Die beschriebene Erscheinung wird innere konische Refraction genannt aus dem Grunde, weil, wenn ein Lichtstrahl auf eine Krystallplatte in einer solchen Richtung einfällt, dass die gebrochene Wellennormale die Richtung einer optischen Axe des Krystalls besitzt, die im Innern desselben gebrochenen Lichtstrahlen auf einem Kegelmantel liegen; die aus der Krystallplatte austretenden Lichtstrahlen liegen daher auf einem elliptischen Cylinder, dessen Erzeugende dem einfallenden Lichtstrahl parallel sind, falls die Krystallplatte planparallel ist.

Diese Erscheinung ist FRESNEL bei seinen Untersuchungen entgangen. Sie wurde erst von HAMILTON[1]) bei seinen theoretischen Forschungen über die Strahlenfläche entdeckt, und auf seine Veranlassung von LLOYD[2]) einer experimentellen Prüfung unterzogen. Dieser wählte zu seinen Versuchen den Aragonit, weil sich aus den von RUDBERG[3]) mit grosser Sorgfalt gemessenen Werthen ein relativ grosser Oeffnungswinkel ε (zu 1° 52') ergab. LLOYD liess ein dünnes, durch Diaphragmen begrenztes Strahlenbündel auf eine parallel zur (krystallographischen) Basis geschnittene Aragonitplatte fallen. Im Allgemeinen treten nur zwei Strahlen aus, welche auf einem hinter der Platte aufgestellten Schirme zwei helle Lichtpunkte erzeugen. Durch Variation der Richtung des einfallenden Strahlenbündels konnte es erreicht werden, dass sich die Lichtpunkte zu einem Ringe erweiterten, dessen Oeffnung sich mit der Entfernung des Schirmes von der Platte nicht änderte. Die Prüfung der austretenden Strahlen mit Hilfe einer Turmalinplatte bestätigte die oben beschriebenen Polarisationseigenschaften[4]).

NODOT[5]) hat empfohlen, zum Nachweis der konischen Refraction an Stelle von Aragonitkrystallen solche von Zucker, doppeltchromsaurem Kali oder Weinsteinsäure zu nehmen, da beim ersten eine natürliche, bei letzteren eine Spaltungsfläche senkrecht zur optischen Axe ist.

Multiplicirt man die drei Gleichungen (21) resp. mit $a\mathfrak{m}$, $b\mathfrak{n}$, $c\mathfrak{p}$ und addirt sie, so entsteht

$$\frac{a\mathfrak{m}m}{a-\omega^2} + \frac{b\mathfrak{n}n}{b-\omega^2} + \frac{c\mathfrak{p}p}{c-\omega^2} = 0. \tag{31'}$$

Fällt der Strahl mit einer Strahlenaxe zusammen, so war nach (24)

$$\mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{m}^2 = \frac{c}{b} \cdot \frac{a-b}{a-c}, \quad \mathfrak{p}^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b-c}{a-c}, \quad \sigma^2 = b. \tag{32'}$$

---

1) W. HAMILTON, Trans. Irish Acad. 17, pag. 132. 1837 (gelesen 1832).

2) LLOYD, Trans. Irish Acad. 17, pag. 145. 1833. — Phil. Mag, (3) 2, pag. 112, 207 1833. — POGG. Ann. 28, pag. 91, 104. 1833.

3) J. RUDBERG, POGG. Ann. 17, pag. 1. 1828.

4) Die Vertheilung der Lichtintensität in dem Strahlenkegel ist von F. NEUMANN (Abhandl. d. Berl. Acad. 1835, pag. 112) eingehend untersucht. Vergl. A. BEER, POGG. Ann. 83, pag. 194. 1851; 85, pag. 67. 1852. — Ueber Complikationen, die eintreten, falls der Strahlenkegel nicht ganz im Krystall liegt, vergl. G. CESÀRO, Bull. de l'Acad. R. de Belg. (3) 22, pag. 503. 1891.

5) NODOT, POGG. Ann. 156, pag. 656. 1875.

Die Gleichung (31') wird daher, weil ω^2 von b verschieden ist, zu

$$\frac{a\mathfrak{m}m}{a-\omega^2}+\frac{c\mathfrak{p}p}{c-\omega^2}=0. \tag{33'}$$

Ferner ist nach (14)

$$\sigma \cos(NS)=\sqrt{b}\,(\mathfrak{m}m+\mathfrak{p}p)=\omega. \tag{34'}$$

Eleminirt man nun ω aus (33') und (34'), so entsteht

$$b\,(\mathfrak{m}ma+\mathfrak{p}pc)(\mathfrak{m}m+\mathfrak{p}p)=ac. \tag{35'}$$

Nennt man die Coordinaten der Endpunkte der Wellennormalen x', y', z', wobei also ist

$$x'=m\omega,\quad y'=n\omega,\quad z'=p\omega,$$

so entsteht aus (35') durch Multiplication mit ω^2

$$b\,(x'\mathfrak{m}a+z'\mathfrak{p}c)\,(x'\mathfrak{m}+z'\mathfrak{p})=ac\,(x'^2+y'^2+z'^2). \tag{36'}$$

Die zu einer Strahlenaxe gehörigen Wellennormalen liegen also auf einem Kegel, welcher von einer zur Strahlenaxe senkrechten Ebene ($x'\mathfrak{m}+z'\mathfrak{p}=const$) in einem Kreise geschnitten wird. Die Strahlenfläche besitzt also in den Austrittspunkten der Strahlenaxen einen Tangentenebenen-Kegel. Die Gleichung des Kegels wird aus der Gleichung (36) erhalten, wenn man die dort auftretenden Grössen a, b, c durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Daher ergiebt sich der Oeffnungswinkel ε' des Normalenkegels aus (39) unmittelbar zu

$$tang\,\varepsilon'=\frac{\sqrt{(a-b)(b-c)}}{\sqrt{ac}}. \tag{39'}$$

Die Polarisationsebenen der Wellennormalen des Kegels stehen nach pag. 690 senkrecht auf der dieselben und die Strahlenaxe verbindenden Ebene.

Das soeben beschriebene Verhalten wird **äussere konische Refraction** genannt, aus dem Grunde, weil ein Lichtstrahl, welcher im Innern eines Krystalls in der Richtung einer seiner Strahlenaxen fällt, beim Austritt aus demselben einen Kegel von äusseren Lichtsrahlen entstehen lässt.

LLOYD konnte diese Erscheinung ebenfalls am Aragonit beobachten, indem er mittelst einer Sammellinse Sonnenlicht in einem Punkte A der ersten Begrenzungsfläche einer Aragonitplatte concentrirte, deren zweite Begrenzungsfläche durch ein Diaphragma mit einer kleinen Oeffnung B bedeckt war. Durch Verschieben von B konnte man es erreichen (wenn nämlich AB die Richtung einer Strahlenaxe hatte), dass aus B ein Strahlenkegel austrat, der sich auf einem auffangenden Schirm als Lichtring projicirt. Der Durchmesser desselben erweitert sich mit Entfernung des Schirmes von der Platte, im Gegensatz zu der bei der inneren konischen Refraction beobachteten Erscheinung. Später sind einige von der LLOYD'schen etwas abweichende, bequemere Versuchsanordnungen beschrieben[1]).

Zur Demonstration der beschriebenen Erscheinungen eignet sich weit besser als der Aragonit der rhombische Schwefel, da bei letzterem die Winkel ε und ε' weit grösser sind (ungefähr 7°), als bei ersterem. Die optischen Constanten des Schwefels sind von BOLTZMANN[2]) bestimmt. SCHRAUF[3]) verwendet zur Demonstration der Erscheinungen den Schwefel in Kugelgestalt.

---

[1]) F. BILLET, Traité d'optique physique. Paris 1859; 2, pag. 571. — LAURENT, Journ. de phys. 3, pag. 23. 1874. — Lissajous, ib. pab. 25. — TH. LIEBISCH beschrieb eine Vorrichtung zur Beobachtung der äusseren konischen Refraction unter dem Mikroskop; s. Gött. Nachr. 1888, pag. 124. — Physik. Krystallogr., pag. 348.

[2]) L. BOLTZMANN, Wien. Ber. (2) 70, pag. 342. 1874. — POGG. Ann. 153, pag. 531. 1874.

[3]) A. SCHRAUF, WIED. Ann. 37, pag. 127. 1889.

II. Durchgang des Lichtes durch doppelbrechende Medien.

Die Gesetze der Lichtbrechung sind in den Grenzbedingungen der Theorie enthalten. Diese ergeben nicht nur die Richtung der Normalen der reflektirten und gebrochenen Wellen, sondern auch ihre Intensitäten. Lassen wir aber die Untersuchung der letzteren vorläufig bei Seite, so kann man die Richtung der gebrochenen Wellennormalen und die der Strahlen auch ohne Eingehen auf die Grenzbedingungen aus dem HUYGENS'schen Princip finden, wenn man die Strahlenfläche in den betreffenden Medien, in welchen die Lichtbewegung stattfindet, kennt.

Es bedeute G die ebene Grenzfläche zweier Medien (1) und (2). Das Licht möge im Medium (1) einfallen und es möge eine einfallende Wellenebene zur Zeit t die Grenze G in der Geraden P, zur Zeit $t + t'$ in der Geraden P' schneiden. Die aus dieser einfallenden Wellenebene hervorgehenden gebrochenen Wellen müssen zur Zeit $t + t'$ die Gerade P' enthalten und gleichzeitig die um die Punkte der Geraden P als Mittelpunkte beschriebenen Strahlenflächen $\Sigma^{(2)}$ des zweiten Mediums, in welcher sich eine in P erregte Erschütterung nach Ablauf der Zeit t' befindet, berühren. Sie sind daher gegeben durch die in dasselbe fallenden Tangentialebenen, welche man durch P' an $\Sigma^{(2)}$ legen kann. — Ebenso sind die reflektirten Wellenebenen die in das erste Medium fallenden Tangentialebenen, welche man durch P' an diejenige um die Punkte der Geraden P als Mittelpunkte beschriebenen Strahlenflächen $\Sigma^{(1)}$ des ersten Mediums legen kann, welche ebenfalls der Zeit t' angehört.

Beachtet man noch, dass durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der construirten Tangentialebenen mit den Mittelpunkten der zugehörigen Strahlenflächen die Richtung der Lichtstrahlen gegeben wird, so gelangt man zu folgender Construction:

Um einen beliebigen Punkt O der Geraden P, in welcher zur Zeit t die einfallende Wellenebene W die Grenze G schneidet, construire man die zu gleichen, aber beliebigen Zeiten gehörigen Strahlenflächen $\Sigma^{(1)}$ und $\Sigma^{(2)}$. Man verlängere den durch den Einfallspunkt O gehenden, zu W gehörigen Strahl über O hinaus bis zum Schnitt H mit der correspondirenden Schale von $\Sigma^{(1)}$ und lege in H an diese Schale eine Tangentialebene W'. Durch die Schnittgerade P' von W' mit G lege man nun die in das zweite Medium fallenden Tangentialebenen an $\Sigma^{(2)}$ und die in das erste Medium fallenden Tangentialebenen an $\Sigma^{(1)}$; jene liefern die Richtungen der gebrochenen, diese die Richtungen der reflektirten Wellenebenen. Die Radien von O nach den Berührungspunkten dieser Wellenebenen mit ihren Strahlenflächen bezeichnen die Richtungen der gebrochenen und der reflektirten Strahlen.

Aus dieser Construction geht hervor, dass die Normalen der reflektirten und gebrochenen Wellen in der Einfallsebene, d. h. in der die Normale der Grenzfläche G und die der einfallenden Welle W verbindenden Ebene liegen, und dass sie dem Sinus-Gesetz unterworfen sind, demzufolge der Quotient aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit jeder einzelnen Welle und dem Sinus des Winkels zwischen der Normale der Welle und der der Grenzebene einen constanten Werth besitzt, (weil nämlich jener Quotient gleich dem gegenseitigen Abstand der Geraden P und P' ist).

a) Erscheinungen, für welche das Verhalten der Lichtstrahlen maassgebend ist. Durchgang des Lichtes durch eine doppelbrechende Platte.

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, dass die Richtung einer ebenen Welle nach irgend einer Anzahl von Brechungen und Reflexionen an ebenen

Grenzflächen homogener Medien nur abhängt von den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Richtungen der Normalen; sie bleibt dagegen unabhängig von den Elementen, welche die zugehörigen Strahlen bestimmen.

Letztere sind dagegen maassgebend, wenn es sich um den scheinbaren Ort von im Endlichen gelegenen Gegenständen handelt, z. B. eines auf Papier gezeichneten Punktes, auf welches man eine doppelbrechende Platte legt. Da die gebrochenen Lichtstrahlen nicht das Sinus-Gesetz befolgen und auch im Allgemeinen nicht in der Einfallsebene liegen, so erscheinen auch bei senkrechtem Anvisiren des Punktes zwei Bilder von demselben. Bei einaxigen Krystallen erscheint in diesem Falle das eine Bild desselben nicht abgelenkt, es rührt vom ordinären Strahl her, das zweite, vom extraordinären Strahl herrührende, liegt im Hauptschnitt, dreht sich also bei drehender Krystallplatte mit.

Die Abhängigkeit der optischen Constanten von der Farbe kann dabei zu eigenthümlichen Dispersionserscheinungen Anlass geben. Beim Kalkspath nimmt die Excentricität des ellipsoidischen Theiles der Strahlenfläche von violett gegen roth ab. Dies erklärt völlig folgende von Malus[1]) bei seinen Untersuchungen über die Doppelbrechung beobachteten Erscheinungen:

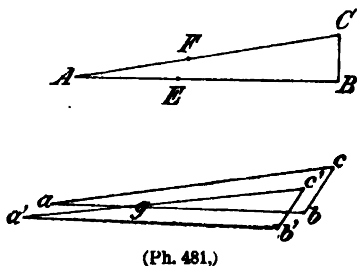
1) Fällt ein Strahl senkrecht auf eine der natürlichen Begrenzungsflächen eines Kalkspathrhomboëders, so erfährt der ordinäre Strahl weder Brechung noch Dispersion. Der extraordinäre Strahl jedoch erscheint abgelenkt, und zwar der violette Theil mehr als der rothe.

2) Bei kleinen Incidenzwinkeln erscheinen beide Strahlen abgelenkt, und zwar liegt beim ordinären Strahl der violette Theil dem Einfallslothe näher, beim extraordinären der rothe.

3) Bei einer Incidenz von ungefähr 40° erscheinen beide Strahlen abgelenkt, doch zeigt der extraordinäre Strahl keine merkliche Dispersion.

4) Bei noch grösserer Incidenz erscheint sowohl beim ausserordentlichen als beim ordentlichen Strahl violett näher am Einfallslothe als roth.

Auf der Messung der Ablenkung der Lichtstrahlen beruht eine von Malus[2]) angewendete Methode zur Prüfung der Huygens'schen Construction der gebrochenen Lichtstrahlen in einaxigen Krystallen.



(Ph. 481.)

Auf einer Kupferplatte wird ein sehr schmales rechtwinkliges Dreieck ABC (cf. Fig. 481) eingerissen, dessen Hypothenuse AC und grosse Kathete AB in Millimeter getheilt ist. Die Kupferplatte wird horizontal gestellt und auf dieselbe ein dicker Kalkspathkrystall mit parallelenBegrenzungsflächen gelegt. Richtet man das Fernrohr eines Theodolithen nach einem Punkte G der oberen Fläche des Krystalls, so nimmt man zwei Bilder abc, $a'b'c'$ des Dreiecks wahr. Die Hypothenuse $a'c'$ des einen der beiden Bilder schneidet die Seite ab des anderen in einem Punkte g. Die an den Seiten des Dreiecks laufenden Theilungen lassen die Längen ag und $a'g$ unmittelbar ablesen. Trägt man auf der Seite AB des Dreiecks ABC eine Länge AE gleich ag ab, und auf der Hypothenuse AC eine Länge AF gleich $a'g$, so liegen die beiden Punkte E und F so, dass ein von ihnen ausgehender ordinärer und extraordinärer Strahl, welche sich in

---

[1]) Malus, Théorie de la double réfraction, pag. 201. 1810.

[2]) Malus, l. c.

G treffen, in der Luft einen einzigen Strahl bilden. Da man den Austrittswinkel desselben am Theodolithen ablesen kann, so kann man, falls man noch die Dicke des Krystalls und die Lage des Punktes G zum Dreieck ABC kennt, sowohl die Brechungswinkel wie die Azimuthe der Brechungsebenen der beiden im Krystall verlaufenden Strahlen berechnen und hat daher alle nöthigen Elemente, um die Resultate der HUYGENS'schen Construction experimentell zu prüfen. Nach einer ähnlichen von BILLET[1]) vorgeschlagenen Methode ist das HUYGENS'sche Gesetz von PICHOT[2]) experimentell bestätigt.

Die MALUS'sche Methode misst nur die Richtungsunterschiede des scheinbaren Ortes der beiden Bilder, welche eine doppelbrechende Platte von einem Gegenstande entwirft, aber nicht die Entfernungsunterschiede des scheinbaren Ortes der beiden Bilder vom Auge. Solche sind aber in der That vorhanden und wenn MALUS anstatt eines weit entfernten Theodolithen ein dicht über der Kalkspathplatte aufgestelltes Mikroskop angewandt hätte, so würde er bemerkt haben, dass die beiden Bilder abc und $a'b'c'$ des Dreiecks ABC nicht zu gleicher Zeit deutlich im Mikroskop erschienen.

Der scheinbare Ort eines Licht aussendenden Gegenstandes P ist durch den Durchschnitt der Strahlen der von ihm ausgehenden Strahlenfläche bestimmt, d. h. derjenigen Fläche, bis zu welcher sich die Lichtbewegung nach Ablauf einer gewissen Zeit von P aus fortgepflanzt hat. Man kann daher die Strahlenfläche auch als diejenige Fläche definiren, auf welcher die von P ausgehende Lichtbewegung zu einer bestimmten Zeit sich in gleicher Phase befindet. — In einfach brechenden Mitteln sind die Strahlen senkrecht zur Strahlenfläche gerichtet. Der scheinbare Ort eines deutlichen Bildes, welches wir von P in einem Mikroskop wahrnehmen, ist also, da die Objektivlinse desselben stets von einem einfach brechenden Mittel, nämlich Luft oder Flüssigkeiten, umgeben ist, dadurch theoretisch zu ermitteln, dass wir die Durchschnitte der Normalen eines kleinen Stückes der auf P bezüglichen Strahlenfläche bestimmen, die der Richtung der optischen Axe des Mikroskops nahe liegen. Diese Strahlenfläche kann durch den Durchgang durch irgend welche durchsichtigen Körper mannigfach deformirt sein, sie braucht jedenfalls keine Kugelgestalt zu besitzen. Daher schneiden sich auch die Normalen des betrachteten Stückes der Strahlenfläche nicht in einem Punkte, sodass im Allgemeinen überhaupt kein deutliches Bild von P wahrzunehmen ist; aber stets schneiden sich dieselben in zwei zu einander senkrechten Brennlinien, welche in den Hauptkrümmungsebenen des betrachteten Flächenstücks liegen. Man wird daher von P im Allgemeinen zwei in verschiedenen Entfernungen liegende Bilder wahrnehmen, und zwar ist jedes derselben nur in einer Richtung scharf; diese Richtungen sind bei beiden Bildern auf einander senkrecht. Dieses erklärt völlig die Erscheinungen, welche man wahrnimmt, falls man auf ein Objekt P, auf welches man ein Mikroskop eingestellt hat, eine planparallele Platte eines homogenen Körpers legt. Ist dieselbe nicht doppelbrechend, so ist die Strahlenfläche in der Platte eine Kugel. Wir wollen uns diejenige Strahlenfläche Σ_1 construirt denken, welche die obere Plattenseite berührt. Die Gestalt der Strahlenflächen Σ_2 ausserhalb der Platte ist dann dadurch zu erhalten, dass man die Strahlen über Σ_1 hinaus verlängert und auf ihnen Strecken abträgt, welche in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Da diese rings um die Plattennormale gleich sind, so ist das betrachtete Stück der Strahlen-

1) BILLET, Ann. de chim. et de phys. (3) 4, pag. 250. 1859.

2) PISCHOT, Comp. rend. 52, pag. 356. 1860.

fläche Σ_2 bei senkrechter Mikroskop-Einstellung das Stück einer Rotationsfläche, d. h. man nimmt ein deutliches über P liegendes Bild P' von P wahr. Das Mikroskop muss also um eine Strecke x gehoben werden und zwar ist, falls d die Plattendicke, n ihren Brechungsexponenten gegen die Umgebung bedeutet:

$$x = d\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Hierauf beruht die von DE CHAULNESS[1]) vorgeschagene Methode zur Bestimmung von Brechungsexponenten.

Ist die über P gelegte Platte doppelbrechend, so nimmt man im Allgemeinen drei in verschiedenen Entfernungen liegende Bilder wahr, falls dieselbe einem einaxigen Krystall angehört, und zwar ist eines derselben unverzerrt, dagegen vier, falls die Platte einem zweiaxigen Krystall angehört, und jedes dieser Bilder ist verzerrt. Diese Erscheinungen sind zuerst von SORBY[2]) beobachtet, und in demselben Jahre von STOCKES[3]) theoretisch erklärt. Die Erscheinungen sind nach den obigen Erörterungen leicht verständlich: Die geometrische Gestalt des betrachteten Stückes der Strahlenfläche Σ_2 in der Luft hängt wesentlich von der Fläche Σ_1 im Krystall ab, da wir, falls wir Σ_1 construirt haben, bis auf verschwindend kleine Fehler die Construction von Σ_2 gerade so vollziehen können, wie vorhin, wo die Platte nicht doppelbrechend war. Σ_1 besteht nun aus zwei Schalen mit zwei verschiedenen Krümmungsmittelpunkten, daher auch Σ_2. Die vier zu Σ_2 gehörigen Brennlinien ergeben die Bilder von P_2. Dieselben sind verzerrt in Richtungen parallel zu den zugehörigen Brennlinien. Auf der theilweisen Verzerrung beruht es, dass, falls P_2 aus feinen, sich kreuzenden Linien besteht, nur ein Theil derselben deutlich wahrgenommen wird, nämlich derjenige, dessen Linien in der Verzerrungsrichtung verlaufen. Die verschiedenen Bilder besitzen verschiedene Polarisationsrichtungen[4]).

Die Bedeutung dieser Beobachtungsmethode liegt weniger in einer genauen Bestimmung der Brechungsexponenten[5]), als vielmehr in der Unterscheidung einfachbrechender und doppelbrechender, und zwar einaxiger und zweiaxiger Substanzen.

b) Erscheinungen, für welche das Verhalten der Wellennormalen maassgebend ist. Durchgang des Lichtes durch ein doppelbrechendes Prisma.

Wir wollen uns der Aufgabe zuwenden, die Richtung der gebrochenen Wellennormalen beim Durchgang des Lichtes durch ein doppelbrechendes Prisma zu bestimmen, welches von einem einfachbrechenden Mittel umgeben ist. Nennt man den brechenden Winkel des Prismas A, die Winkel der eintretenden

---

1) Duc DE CHAULNESS, Hist. de l'acad. roy. des sc. Année 1767. Paris 1770, pag. 162 u. 423. — Vergl. D. BREWSTER, Treatise on new Phil. Instrum. Edinburgh 1813, pag. 247. — L. MOSER, in DOVE's Repertor. der Physik 5, pag. 395. 1844. — A. BERTIN, Comp. rend. 28, pag. 447. 1849. — Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 288. 1849. — POGG. Ann. 76, pag. 611. 1849. — H. WILD, POGG. Ann. 99, pag. 258. 1856. — L. BLEEKRODE, Proc. Roy. Soc. 37, pag. 339. 1884. — Journ. de phys. (2), 4, pag. 109, 1885.

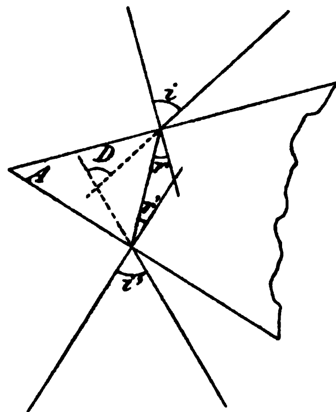
2) H. C. SORBY, Proc. Roy. Soc. of London 26, pag. 384. 1877.

3) G. G. STOKES, ibid., pag. 386.

4) Betreffs der detaillirteren Beschreibung vergl. TH. LIEBISCH, physik. Krystallogr. pag. 359 bis 373.

5) Eine Kritik der von M. BAUER und K. SCHARIZER an Glimmer ausgeführten Messungen gab B. HECHT, N. Jahrb. für Mineral. Beil. Bd. 6, pag 271. 1889.

und austretenden Wellennormalen gegen die Normalen der Prismenflächen i und i', ferner die Winkel derselben gegen die Normalen einer gebrochenen Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω sei, r und r', bezeichnet ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im umgebenden Medium und schliesslich D die durch das Prisma hervorgerufene Ablenkung der Lichtstrahlen, so ergeben sich, falls die Prismenkante senkrecht zur Einfallsebene steht, aus dem pag. 703 erläuterten Brechungsgesetz der Wellennormalen, welche sämmtlich in der Einfallsebene, d. h. im Querschnitt des Prismas liegen, folgende Relationen zwischen den genannten Grössen (Fig. 482):



(Fig. 482.)

$$\begin{aligned} \omega \sin i &= \omega_0 \sin r, \\ \omega \sin i' &= \omega_0 \sin r', \\ r + r' &= A, \\ i + i' &= A + D. \end{aligned} \qquad (40)$$

In diesen Gleichungen sind i, i', A und D als bekannte Grössen anzusehen, da sie durch die Beobachtung direkt gemessen werden können, dagegen r, r' und ω als unbekannte. Man kann[1]) aus ihnen durch Elimination von ω leicht die Gleichung ableiten:

$$tang\left(r - \frac{A}{2}\right) = tang\,\frac{A}{2}\,tang\left(i - \frac{A+D}{2}\right) cotg\,\frac{A+D}{2} = tang\left(\frac{A}{2} - r'\right), \quad (41)$$

eine Relation, welche r und r' und daher nach (40) auch $\omega : \omega_0$ aus den Beobachtungen abzuleiten gestattet. Es ist also möglich, aus Prismenbeobachtungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω der Wellennormale für eine gewisse Richtung derselben zu berechnen. Zweckmässig bezieht man diese Richtung auf die Halbirungsebene des Prismenwinkels A. Nennt man den Winkel dieser Ebene mit der gebrochenen Wellennormale ψ, so ist

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \frac{\pi}{2} + r - \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{A}{2}. \quad (42)$$

Mit Hilfe dieses Winkels ψ und unter Benutzung der Abkürzungen

$$C = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad S = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}, \quad (43)$$

wird

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\cos^2\psi}{C^2} + \frac{\sin^2\psi}{S^2}, \quad (44)$$

$$tang\,\psi = \frac{S}{C}\,cotg\,\frac{i'-i}{2}. \quad (45)$$

Durch Variation des Einfallswinkels i kann man daher für beliebig viel Richtungen ψ die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω berechnen, d. h. man kann experimentell die Gestalt eines Querschnittes der Normalenfläche ermitteln. Dieses Resultat gestattet eine experimentelle Prüfung des FRESNEL'schen Gesetzes.

[1]) Betreffs der ausführlicheren Herleitung dieser und der folgenden Gleichungen vergl. TH. LIEBISCH, physikal. Krystallographie, pag 296—297.

Eine Prüfung der Gesetze der Doppelbrechung einaxiger Krystalle mit Hilfe der Prismenmethode hat SWAN[1]) ausgeführt, welcher constastirte, dass ein beliebig orientirtes Kalkspathprisma für den Brechungsexponenten der ordinären Welle einen constanten, um höchstens zwei Einheiten der fünften Decimale variirenden Werth ergab. — Auf dem oben angedeuteten Weg (mit Benutzung mehrerer an einem Krystall angeschliffener Kanten) haben STOKES[2]), ABRIA[3]), GLAZEBROOK[4]) und HASTINGS[5]) die HUYGENS'sche Construction am Kalkspath (ABRIA auch am Quarz) bestätigt gefunden. HASTINGS schliesst aus seinen Versuchen, dass die Bestätigung bis zu einer Genauigkeit von 1 auf 500000 erwiesen ist.

Eine Verifikation der FRESNEL'schen Gesetze für zweiaxige Krystalle ist von RUDBERG[6]) ausgeführt, welcher an Prismen von Aragonit und Topas, deren Kanten einer Symmetrieaxe parallel lagen, die Constanz des Brechungsexponenten der senkrecht zur Prismenkante polarisirten gebrochenen Welle für alle Einfallswinkel beobachtete. Was das Verhalten der zweiten, senkrecht zu der ersteren polarisirten Welle anbelangt, so fand GLAZEBROOK[7]) an Aragonitprismen das FRESNEL'sche Gesetz sehr nahe erfüllt, die geringen Abweichungen davon sind durch andere Beobachtungen (Totalreflexion und Axenwinkelmessung) nicht bestätigt, sodass sie vielmehr durch ungenügend genaue Orientirung der Prismen zu erklären sind.

Die Beobachtung der Ablenkung der Lichtstrahlen durch ein doppelbrechendes Prisma lässt sich ferner zu einer genauen Bestimmung der optischen Constanten eines Krystalls benutzen, falls man das FRESNEL'sche resp. HUYGENS'sche Gesetz als gültig annimmt.

Betrachten wir zunächst die Fälle, in welchen die Lage der optischen Symmetrieaxen zum Prisma bekannt ist und es sich nur um die Bestimmung von (im allgemeinsten Falle) drei Constanten, z. B. der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Symmetrieaxen, handelt. Wir wollen diese Geschwindigkeiten die Hauptlichtgeschwindigkeiten nennen. Die Quadrate derselben sind durch die in der Gleichung (8) auf pag. 689 der Normalenfläche auftretenden Constanten a, b, c gegeben.

Handelt es sich zunächst um einaxige Krystalle, so sind zwei jener Constanten, z. B. a und b, einander gleich. Ihr Wert ist gleich dem Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ordinären Welle. Man erhält dieselbe nach den Formeln (40) und (41) dieses Abschnittes, wenn man drei der vier Winkel i, i', A, D beobachtet. — Nach denselben Formeln erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit e der extraordinären Welle. Nach der Gleichung (8) auf pag. 689 der Normalenfläche ist nun

$$e^2 = a \cos\vartheta + c \sin^2\vartheta, \qquad (46)$$

wo ϑ die Neigung der Wellennormale gegen die optische Axe bedeutet. Zur

---

1) W, SWAN, Trans. Edinb. Roy. Soc 16, pag. 375. 1847.

2) G. G. STOKES, Rep. of the Brit. Assocc. 1862, pag. 272; Compt. rend. 77, pag. 1150. 1872; Phil. Mag. (4) 44, pag. 311. 1872.

3) ABRIA, Comp. rend. 77, pag. 814. 1873; 79, pag. 1253. 1874; 80, pag. 826. 1875; Ann. d. chim. et de phys. (5) 1, pag. 289. 1874.

4) R. T. GLAZEBROOK, Lond. Philos. Trans. 2, pag. 421. 1880.

5) Ch. S. HASTINGS, Amer. Journ. of Science (3) 35, pag. 60. 1888.

6) J. RUDBERG, POGG. Ann. 17, pag. 1. 1828.

7) R. T. GLAZEBROOK, Proc. Roy. Soc. 27, pag. 496. 1878; Philos. Trans. 1879, 1, pag. 287.

Bestimmung der Constante c muss man also ϑ zuvor berechnen. Bezeichnet τ die Neigung der optischen Axe zum Querschnitt des Prismas und ρ den Winkel, welchen die durch Prismenkante und optische Axe gelegte Ebene mit der Halbirungsebene des inneren Prismenwinkels einschliesst, so ist

$$\cos\vartheta = -\cos\tau\cos(\rho - \psi), \tag{47}$$

wo ψ den oben (pag. 707) definirten Winkel der gebrochenen Wellennormale gegen die Halbirungsebene des inneren Prismenwinkels bedeutet, der also ebenfalls nach der Gleichung (45) durch die beobachteten Grössen zu berechnen ist. — Die optischen Constanten eines einaxigen Krystalls sind also durch Messung der Richtung der ordinären und extraordinären Welle an einem einzigen Prisma und bei einem einzigen Einfallswinkel zu berechnen.

Diese Berechnung vereinfacht sich, wenn die Halbirungsgrade des inneren oder des äusseren Prismenwinkels eine optische Symmetrieaxe ist, oder wenn beides gleichzeitig stattfindet. Die Berechnung wird am bequemsten, falls die optische Axe parallel zur Prismenkante liegt; dann ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und man erhält c direkt als Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Welle, welche in diesem Fall auch das gewöhnliche Brechungsgesetz befolgt. Dieser einfachste Fall ist zugleich dadurch ausgezeichnet, dass eine kleine Abweichung in der Orientirung des Prismas den geringsten Einfluss auf das Resultat ausübt[1]).

Von besonderem Werth für die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten doppelt brechender Krystalle durch Prismenbeobachtungen sind diejenigen Fälle, in welchen durch Messung des Minimums der Ablenkung unmittelbar eine oder zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten gefunden werden.

Da ein einaxiger Krystall für die ordentliche Welle sich wie ein isotroper Körper verhält, so gelten für diese auch unverändert die für letztere gültigen Resultate, d. h. es ist die Geschwindigkeit o der ordinären Welle durch die Beziehung gegeben,

$$\left(\frac{o}{\omega_o}\right)^2 = \frac{a}{\omega_o^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(A + D_o)}, \tag{48}$$

wobei D_o das Minimum der Ablenkung der ordinären Welle bedeutet. Dieselbe liegt symmetrisch zu den Prismenseiten, d. h. es ist $r = r'$. Diese Beziehungen gelten im Allgemeinen nicht mehr für die extraordinäre Welle.

Um zu einer Relation zu gelangen[2]), welche das Minimum D_e der Ablenkung der extraordinären Welle mit den Hauptlichtgeschwindigkeiten verknüpft, hat man zunächst eine Gleichung zu bilden, welche die Ablenkung D durch die optischen Constanten (a, b, c) und die Richtung ψ der gebrochenen Welle ausdrückt. Es geschieht dies unmittelbar, wenn man in der linken Seite der Gleichung (44) ω mit Hilfe der Gleichung (8) (pag. 689) der Normalenfläche eliminirt. Es resultirt dadurch eine Gleichung

$$f(D, \psi) = 0, \tag{49}$$

welche ausser den Constanten a, b, c nur noch die Grössen, welche die Orientirung des

---

1) Vergl. M. BORN, N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. 5, pag. 13. 1887.

2) Vergl. G. G. STOKES, Cambr. and Dublin. Math. Journ. 1, pag. 183. 1846; Math. and Phys. Papers, 1, pag. 148. Cambridge 1880; H. DE SÉNARMONT. Nouv. Ann. de Math. 16, pag. 273, 1857. — V. v. LANG, Wien. Ber. 33, pag. 155 u. 577. 1858. — H. TOPSOE og C. CHRISTIANSEN, Ann. de chim. et de phys. (5) 1, pag. 5. 1874. — POGG. Ann. Egbd. 6, pag. 499. 1874. — A. CORNU, Ann. scient. de l'Ecole Norm. (2), 1, pag. 231. 1872; 3, pag. 25. 1874. — M. BORN, N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. 5, pag. 16. 1887.

Prismas gegen die optischen Symmetrieaxen bestimmen, und den Prismenwinkel A enthalten. Das Minimum der Ablenkung ist dadurch charakterisirt, dass $\frac{dD}{d\psi} = 0$ ist. Die gesuchte Beziehung des Minimums D_e der Ablenkung zu den Constanten a, b, c erhält man daher durch Differentiation der Gleichung (49) nach D und ψ, und durch nachfolgende Elimination der letzten Grösse mit Hilfe der Gleichung (45).

Für einaxige Krystalle erhält man[1]) mit Benutzung der bisher angewandten Bezeichnungen:

$$A_0 c^2 + 2A_1 c + A_2 = 0,$$

worin bedeutet

$$A_0 = \sin^2\tau,$$

$$2A_1 = \left(a + \frac{\sin^2\rho}{C^2} + \frac{\cos^2\rho}{S^2}\right)\cos^2\tau - \frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2}, \tag{50}$$

$$A_2 = -a\left(\frac{\sin^2\rho}{C^2} + \frac{\cos^2\rho}{S^2}\right)\cos^2\tau + \frac{1}{C^2 S^2},$$

$$\frac{1}{C} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_e}{2}}, \quad \frac{1}{S} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D_e}{2}}.$$

Hierbei ist bemerkenswerth, dass auch für die ausserordentliche Welle der zum Minimum der Ablenkung D_e gehörige Einfallswinkel nicht gemessen zu werden braucht.

Wie die Gleichungen (50) lehren, ergiebt sich zur Bestimmung von c eine quadratische Gleichung; allein von den beiden Wurzeln kann mit Rücksicht auf die schwache Doppelbrechung der bekannten krystallisirten Körper nur diejenige in Betracht gezogen werden, für welche die zugehörige ausserordentliche Welle annähernd parallel zur Halbirungsebene des Prismenwinkels A liegt, also Einfallswinkel und Austrittswinkel nahezu einander gleich sind.

Aus den Formeln (50) folgt, dass die Berechnung von c aus D_e am einfachsten wird, wenn der Hauptschnitt der Prismenkante, d. h. die durch letztere und die optische Axe gelegte Ebene, den inneren Prismenwinkel A halbirt. Specielle Fälle hiervon sind die, dass die optische Axe den Winkel A halbirt, oder dass sie in die Prismenkante fällt.

Bei allen diesen Orientirungen des Prismas ergiebt sich für c eine der für a gültigen Formel (48) ganz analoge, nämlich

$$\frac{c}{\omega_0^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(A + D_e)}. \tag{51}$$

Es möge nun ein Prisma aus einem zweiaxigen Krystall betrachtet werden. Wie wir oben, pag. 707, sahen, kann man die Gestalt eines Centralschnittes der Normalfläche ermitteln. Da dieselbe bei bekannter Orientirung des Prismas noch drei unbekannte Constanten (a, b, c) enthält, so genügt die Beobachtung dreier Werthepaare (ω, ψ) zur Bestimmung derselben, indess ist die Lösung im Allgemeinen fünfdeutig[2]), und muss man, um Eindeutigkeit zu erzielen, zunächst Näherungswerthe jener Constanten ermitteln.

Liebisch[3]) hat untersucht, in welchen Fällen die Beobachtung des Minimums

---

[1]) Vergl. z. B. Th. Liebisch, physikal. Krystallogr., pag. 389.

[2]) Th. Libisch, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 23. 1886.

[3]) Th. Libisch, Gött. Nachr. 1888, pag. 197.

der Ablenkungen zur Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ausreicht, derart, dass die zugehörigen Einfallswinkel nicht gemessen zu werden brauchen. Ein beliebig orientirtes Prisma eines zweiaxigen Krystalls liefert keine praktisch verwerthbaren Resultate[1]). Zweckmässiger legt man die Querschnittsebene des Prismas in eine optische Symmetrieebene. Der Centralschnitt der Normalenfläche zerfällt dann in einen Kreis und ein Oval. Die nach der Querschnittsebene polarisirte Welle von constanter Geschwindigkeit liefert eine Hauptlichtgeschwindigkeit und die Bestimmung des Minimums der Ablenkung der parallel zur Prismenkante polarisirten Welle von veränderlicher Geschwindigkeit ergiebt eine zuerst von STOKES[2]) aufgestellte Relation zwischen den beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten. Zur vollständigen Bestimmung der letzteren muss man zwei Werthepaare (ω, ψ) für zwei parallel zur Prismenkante polarisirte Wellen kennen, man wird jedoch, um den Einfluss der Beobachtungsfehler zu verkleinern, eine grössere Reihe von Messungen anstellen, aus jeder die zugehörigen Werthe von ω, ψ und dann nach der Methode der kleinsten Quadrate die Hauptlichtgeschwindigkeiten berechnen. Dies Verfahren ist von v. LANG[3]) am Gyps und von BORN[4]) am Anglasit durchgeführt.

Fällt ausserdem die Halbirungsebene des Prismenwinkels in eine optische Symmetrieebene, so erhält man durch Beobachtung der Minimalablenkungen zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten direkt nach analogen Formeln, wie sie für isotrope Medien gültig sind. Zur Berechnung der dritten Hauptlichtgeschwindigkeit muss man an demselben Prisma noch ein zusammengehöriges Werthepaar (ω, ψ) ermitteln.

Lassen wir die Voraussetzung fallen, dass die Lage der Prismenflächen gegen die optischen Symmetrieaxen bekannt sei, so erhebt sich die Frage, ob an einem einzigen beliebig orientirten Prisma eines optisch zweiaxigen Krystalls sowohl die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten, als die Lage der optischen Symmetrieaxen aus dem Prismenwinkel A und mehreren zu einem Centralschnitt der Normalenfläche zugehörigen Werthepaaren ω, ψ berechnet werden können.

Sechs solcher Werthepaare genügen in der That zu dem Zweck, da es sich um die Bestimmung von sechs unbekannten Constanten handelt, indess lassen sich durch einen auf diese Weise durch die Beobachtung bestimmten Centralschnitt der Normalenfläche, wie BRILL[5]) gezeigt hat, im Allgemeinen zwei reelle, verschiedene Normalenflächen legen, sodass also die Lösung der vorliegenden Aufgabe im Allgemeinen zweideutig ist. Die beiden Normalenflächen unterscheiden sich lediglich hinsichtlich der mittleren Hauptlichtgeschwindigkeit, während die Werthe der kleinsten und grössten Hauptlichtgeschwindigkeit übereinstimmen. Sie fallen nur dann zusammen, wenn die Prismenkante anf einer optischen Axe senkrecht steht[6]).

Durch die hier besprochenen Beobachtungsmethoden werden die auf die gebrochene Wellennormale bezüglichen Bestimmungsstücke ω und ψ ermittelt.

---

[1]) Betreffs gewisser Näherungsformeln vergl. Vorlesungen über theoretische Optik von F. NEUMANN, herausgeg. von E. DORN. Leipzig 1885, pag. 211.

[2]) G. G. STOKES, Math. and. Phys. Paper. 1, pag. 148. Cambridge 1880.

[3]) V. v. LANG, Wien. Ber. (2) 76, pag. 793. 1877.

[4]) M. BORN, l. c.

[5]) A. BRILL, Sitz.-Ber. der bayr. Acad. 1883. pag, 423, Math. Ann. 34, pag. 297. 1889.

[6]) H. DUFET gab in J. de Phys. (2) 10, pag. 171. 1891 ein Verfahren an, um die optische Orientirung eines triklinen Krystalls aus den Winkeln zu bestimmen, welche die Normale zweier Flächen desselben mit den optischen Axen einschliesst.

Durch Zuhilfenahme der Messung noch einer anderen Erscheinung kann man auch die Bestimmungsstücke des gebrochenen Lichtstrahles ermitteln, wie CORNU[1]) gezeigt hat. Die Bilder, welche man von einem geradlinigen Spalte im Collimatorrohr eines Spectrometers, welcher zur Kante eines doppelbrechenden Prismas parallel ist, nach dem Durchgang durch dasselbe wahrnimmt, sind im Allgemeinen unter einem Winkel φ gegen die Spaltrichtung geneigt. Dies tritt stets ein, wenn der gebrochene Strahl nicht in die Querschnittsebene des Prismas fällt, d. h. wenn die Berührungspunkte S der gebrochenen Wellenebene mit der Strahlenfläche nicht in den Prismenquerschnitt fallen. Dem Abstande der Berührungspunkte S von letzterem sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel φ proportional. Ein von R. FUESS[2]) construirtes Oculargoniometer erlaubt, dieselben zu messen, und so auch Bestimmungsstücke der Strahlenfläche durch Beobachtungen zu ermitteln.

Die folgende Tabelle enthält die Verhältnisse der Hauptlichtgeschwindigkeiten $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ einiger Krystalle zu der Lichtgeschwindigkeit in der Luft, welche theils nach Prismenbeobachtungen, theils nach der Methode der Totalreflexion, welche weiter unten besprochen werden soll, ermittelt sind. Bei den einaxigen Krystallen bezieht sich $\sqrt{a}$ auf die Geschwindigkeit der ordinären, $\sqrt{c}$ auf die Hauptlichtgeschwindigkeit der extraordinären Welle. Die zweite Columne giebt den Charakter der Doppelbrechung an. Die an die Krystallnamen gesetzten Indices bezeichnen die unter der Tabelle angegebenen Beobachter, welche die bezüglichen Constanten ermittelt haben. Die letzte Columne giebt an, für welche Wellenlänge die Zahlen gelten, und zwar bedeutet *r* rothes, *g* gelbes (Natrium-) Licht.

Einaxige Krystalle.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{c}$	
Hg_2Cl_2 [5])	+	0·510	0·385	*r*
Natriumnitrat [3]) . .	—	0·63084	0·74917	*g*
Dolomit [6])	—	0·59462	0·66552	*g*
Kalkspath [12]) . . .	—	0·60295	0·67279	*g*
Rutil [2])	+	0·38229	0·34448	*g*
Proustit [6])	—	0·32386	0·35812	*g*
Zirkon [14])	+	0·521	0·508	*r*
Turmalin [11]) . . .	—	0·61193	0·61754	*g*
Phenakit [5])	+	0·60459	0·59891	*g*
Anatas [13])	—	0·39442	0·40066	*g*
Beryll [13])	—	0·63207	0·63466	*g*
Korund [5])	—	0·56577	0·56844	*r*
Apatit [7])	—	0·60750	0·60912	*g*

[1]) A. CORNU, Ann. de l'école norm. (2) 1, pag. 231. 1872; 3, pag. 1. 1874.

[2]) TH. LIEBISCH, N. Jahrb. für Mineral. 2, pag. 51. 1886; Physikal. Krystallogr., pag. 383, Abbildung 201.

[1]) ARZRUNI, [2]) BAERWALD, [3]) CORNU, [4]) DANKER, [5]) DES CLOIZEAUX, [6]) FIZEAU, [7]) HEUSSER, [8]) F. KOHLRAUSCH, [9]) W. KOHLRAUSCH, [10]) v. LANG, [11]) MILLER, [12]) RUDBERG, [13]) SCHRAUF, [14]) SENARMONT, [15]) TSCHERMAK.

Betreffs der Dispersion des Kalkspaths und Quarzes, sowie der Abhängigkeit ihrer optischen Eigenschaften von der Temperatur vergl. die Arbeiten von RUDBERG (POGG. Ann. 14, pag. 45. 1828; 26, pag. 291. 1832), MASCART (Ann. de l'écol. norm. 1, pag. 238. 1864); VAN DER WILLIGEN (2. Mém. Arch. Musée Teyler, 3, pag. 34, Harlem 1870), FIZEAU (Ann. de chim. et de phys. (3) 66, pag. 429. 1862. — Compt. rend. 58, pag. 923. 1864. — POGG. Ann. 119,

Zweiaxige Krystalle.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{c}$	
Andalusit[5]	—	0·6127	0·6105	0·6086	*r*
Anglesit[1]	+	0·53275	0·53128	0·52808	*g*
Anhydrit[4]	+	0·63710	0·63471	0·61972	*g*
Aragonit[12]	—	0·65354	0·59468	0·59316	*g*
Axinit[5]	—	0·59809	0·59599	0·59489	*r*
Borax[15]	—	0·69119	0·68093	0·67959	*g*
Cerussit[13]	—	0·55442	0·48168	0·48122	*g*
Chrysoberyll[5] . . .	+	0·57241	0·57195	0·56931	*g*
Cölestin[1]	+	0·61653	0·61587	0·61315	*g*
Cordierit[5]	—	0·6515	0·6489	0·6468	*g*
Datolith[5]	—	0·61500	0·60477	0·59880	*g*
Diopsid[5]	+	0·59783	0·59531	0·58734	*g*
Euklas[5]	+	0·60533	0·60411	0·59844	*g*
Glimmer	—	0·64067	0·62730	0·62511	*g*
Gyps[10]	+	0·65758	0·65670	0·65339	*g*
Kieselzinkerz[5] . . .	+	0·6192	0·6180	0·6116	*g*
Natrolith[5]	+	0·67714	0·67582	0·67172	*r*
Olivin[5]	+	0·6020	0·5960	0·5893	*g*
Orthoklas (Adular)[8] .	—	0·65823	0·65660	0·65591	*g*
Orthoklas (Sanidin)[8] .	—	0·65764	0·65573	0·65561	*g*
Schwefel[13]	+	0·51270	0·49060	0·44632	*g*
Schwerspath[7] . . .	+	0·61113	0·61071	0·60681	*g*
Topas[12]	+	0·62050	0·61967	0·61687	*g*
Weinsäure[9]	+	0·66900	0·65160	0·62302	*g*

---

pag. 297. 1863; 123, pag. 515. 1864); ESSELBACH (POGG. Ann. 98, pag. 513. 1856); SARASIN (Compt. rend. 85, pag. 1230. 1877); MOUTON (Compt. rend. 88, pag. 1087, 1189. 1879); J. MACÉ DE LÉPINAY (Compt. rend. 101, pag. 874. 1885; Journ. de phys. (2) 4, pag. 159 u. 261. 1885; 6, pag. 190. 1887; (3) 1, pag. 23. 1892).

Gyps ist untersucht von F. NEUMANN (POGG. Ann. 27, pag. 240. 1833—35, pag. 81. 1835), E. MITSCHERLICH (POGG. Ann. 8, pag. 519. 1826), A. DES CLOIZEAUX (Mém. des sav. étr. 18, pag. 511. 1867), v. LANG (Wien. Ber. (II) 76, pag. 793. 1877), J. ANGSTRÖM (POGG. Ann. 86, pag. 206. 1852), G. QUINCKE (Festschr. der naturf. Ges. in Halle, 1879), H. DUFET (Journ. de phys. 10, pag. 513. 1881; (2) 8, pag. 292. 1888).

Betreffs des Einflusses der Temperatur auf die optischen Eigenschaften anderer Mineralien vergl. die Arbeiten von J. STEFAN (Wien. Ber. II, 63, pag. 223. 1871. — Rep. de Exp. Phys. 8, pag. 97. 1872), N. LAGERBORG (Bihang. Sv. Vet.-Acad. Handl. Stockholm, 1887, 13, 1. No. 10), H. DUFET (l. c. und Bull. soc. min. de France 8, pag. 257. 1885), A. DES CLOIZEAUX (Nouv. recherch. sur les propr. opt. des cristeaux etc. — Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, 18, pag. 511. 1867. — POGG. Ann. 129, pag. 345. 1866), F. RUDBERG (POGG. Ann. 17, pag. 1. 1829; 26, pag. 291. 1832), A. ARZRUNI (Ztschr. f. Kryst. 1, pag. 165. 1877), A. MÜTTRICH (POGG. Ann. 121, pag. 193 u. 398. 1864), D. BREWSTER (Edinb. Phil. Trans. 11, pag. 273. 1831. — Phil. Mag. (3) 1, pag. 417. 1832. — POGG. Ann. 21, pag. 607. 1831. — 27, pag 480. 1833), H. LASPEYRES (Ztschr. f. Kryst. 1, pag. 529. 1877), A. OFFRET (Bull. de la Soc. Franc. de Minéral. 13, pag. 405. 1890), A. SCHRAUF (Ztschr. f. Kryst. 18, pag. 113. 1890), A. SELLA (Rend. R. Acc. dei Lincei, Roma 7, 2. sem., pag. 300. 1891).

Isomorphe Reihen von Krystallen sind optisch untersucht von F. L. PERROT (Compt. rend. 111, pag. 967. 1890. — Arch. de Gen. 25, pag. 26. 1891).

Ueber die Berechnung der optischen Eigenschaften isomorpher Mischungen aus denjenigen der gemischten reinen Substanzen vergl. F. POCKELS (Neues Jahrb. f. Mineral., Beilagebd. 8, pag. 117. 1892).

III. Interferenzerscheinungen im polarisirten Licht.

Die Interferenzerscheinungen, welche planparallele Platten doppelbrechender Krystalle in senkrecht einfallendem polarisirten Lichte zeigen, wurden von ARAGO[1]) entdeckt und bald darauf von BIOT[2]) auf experimentellem Wege eingehend untersucht. Nach missglückten Versuchen von ihm, die Erscheinungen nach den Vorstellungen der Emissionstheorie zu erklären, versuchte YOUNG[3]) dasselbe nach der Undulationstheorie. Indem er BIOT's numerische Resultate benutzte, fand er die bemerkenswerthe Thatsache, dass, falls ein Krystallblättchen im polarisirten Lichte und eine dünne Luftlamelle im durchgehenden Lichte dieselbe Farbe zeigen, ihre Dicken in solcher Beziehung stehen, dass der Gangunterschied des ordinären und extraordinären Strahles beim Austritt aus dem Krystallblättchen gleich ist dem Gangunterschied der beiden interferirenden Strahlen der Luftlamelle, von welchen der eine direkt durch die Lamelle gegangen ist, während der andere im Innern derselben zwei Reflexionen erlitten hat. YOUNG suchte so die Erscheinungen der chromatischen Polarisation auf die der Interferenz zurückzuführen, doch erkannte er selbst das Unvollkommene seiner Theorie, da sie nicht zu erklären vermochte, warum die Farbenerscheinungen dünner Krystallplatten nur im polarisirten Lichte und bei Zurückführung auf eine Polarisationsebene eintreten. Die vollständige Erklärung hierfür gab FRESNEL[4]) auf Grund der von ihm in Gemeinschaft mit ARAGO entdeckten Gesetze der Interferenz polarisirten Lichtes (cf. oben pag. 633).

Einen Theil der überaus mannigfachen Interferenzerscheinungen, welchen Platten doppelbrechender Krystalle im convergenten polarisirten Lichte zeigen, hat BREWSTER[5]) entdeckt. Nachdem es AIRY[6]) gelungen war, diese Erscheinungen für Platten einaxiger Krystalle, welche senkrecht zur optischen Axe geschliffen sind, zu erklären, entwickelte F. NEUMANN[7]) eine allgemein gültige Theorie dieser Interferenzerscheinungen. Speciell für einaxige Krystalle sind dieselben von OHM[8]), FREYSS und SCHLAGDENHAUFFEN[9]), FRIESS[10]), für zweiaxige Krystalle von ZECH[11]) und LOMMEL[12]) mit gewissen Annäherungen berechnet.

Einheitliche Gesichtspunkte für eine übersichtliche geometrische Deutung der NEUMANN'schen Formeln wurden von BERTIN[13]) durch Einführung der Ober-

1) F. ARAGO, Mém. de la Cl. des scienc. math. et phys. de l'inst. Année 1811, 12, pag. 93. 1812; Oeuvr. compl. 10, pag. 36. — GILBERT's Ann. de Phys. 40, pag. 145. 1812.

2) Eine Zusammenstellung der Ergebnisse dieser Untersuchungen findet sich in J. B. BIOT, Traité de phys. 4, 1816.

3) YOUNG, Quaterly Review 11, pag. 42. 1814; Miscell. Works 1, pag. 269.

4) A. FRESNEL, Ann. de chim. u. de phys. (2) 17, pag. 102, 167. 1821; Oeuvr. compl. 1, pag. 609; POGG. Ann. 12, pag. 336. 1828.

5) D. BREWSTER, Treatise on New Philosophical Instruments, Edinb. 1813, pag. 336. — Phil. Trans. 1814, pag. 187; 1818, pag. 199.

6) G. B. AIRY, Trans. Cambr. Phil. Soc. 4, pag. 79, 198. 1833; POGG. Ann. 23, pag. 204. 1831.

7) F. NEUMANN, POGG. Ann. 33, pag. 257. 1834.

8) G. S. OHM, Münch. Abh. 7, pag. 43, 265. 1853.

9) FREYSS und SHLAGDENHAUFEN, POGG. Ann. 112, pag. 15. 1861.

10) J. FRIESS, Progr. d. k. k. Staatsoberrealschule zu Olmütz 1876/77; WIED. Ann. 31, pag. 90. 1884.

11) ZECH, POGG. Ann. 102, pag. 354. 1857.

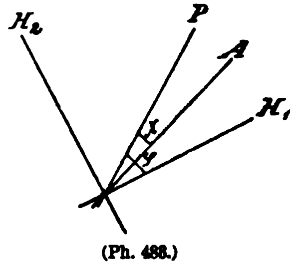
12) E. LOMMEL, POGG. Ann. 120, pag. 69. 1863.

13) A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 63, pag. 57. 1861; (6) 2, pag. 485. 1884.

flächen gleichen Gangunterschiedes und von LOMMEL[1]) durch Construction der Flächen gleicher Polarisationsrichtung (Isogyren-Flächen) gewonnen.

a) Intenferenzerscheinungen im senkrecht einfallenden Lichte.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass linear polarisirtes Licht senkrecht auf eine doppelbrechende Krystallplatte fällt und dann eine zweite polarisirende Vorrichtung durchsetzt; dieser Fall wird z. B. realisirt, wenn man die Platte auf das Tischchen des pag. 628 erwähnten NÖRRENBERG'schen Polarisationsapparates legt, oder zwischen zwei Polarisationsprismen bringt. Das erste der Prismen wird der Polarisator, das letzte der Analysator genannt. Ihre Polarisationsebenen (sie sind in Fig. 483 durch die Linien P und A bezeichnet) mögen den Winkel χ mit einander einschliessen, die Polarisationsebenen H_1 und H_2 der beiden in der Krystallplatte fortgepflanzten Wellen W_1 und W_2 mögen mit der Polarisationsebene (P) des Polarisators die Winkel φ und $\frac{\pi}{2} - \varphi$ einschliessen.



(Ph. 483.)

Ist a die Amplitude der einfallenden, längs P polarisirten Welle, so ist, falls man von der durch Reflexion herbeigeführten Schwächung absieht, $a\cos\varphi$ die Amplitude der Welle W_1, $a\sin\varphi$ die der Welle W_2. Diese beiden Wellen werden nach dem Austritt aus dem Krystall auf die gemeinsame Polarisationsebene A zurückgeführt, besitzen daher nach dem Durchtritt durch den Analysator die Amplituden $a\cos\varphi\cos(\varphi-\chi)$ und $a\sin\varphi\sin(\varphi-\chi)$. Nach der Gleichung (4) der pag. 634, welche die Amplitude gleichgerichteter Wellenzüge aus den Einzelamplituden zu berechnen gestattet, ist daher, falls δ die Phasendifferenz der Wellen W_1 und W_2 bedeutet, welche durch die Durchsetzung der Krystallplatte herbeigeführt ist, die resultirende Lichtintensität proportional zu J^2, wo J^2 gegeben ist durch die Formel

$$J^2 = a^2[\cos^2\varphi\cos^2(\varphi-\chi) + \sin^2\varphi\sin^2(\varphi-\chi) + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi-\chi) \\ \cos(\varphi-\chi)\cos\delta].$$

Ersetzt man hierin $\cos\delta$ durch $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta$, so wird die Formel zu

$$J^2 = a^2[\cos^2\chi - \sin2\varphi\sin2(\varphi-\chi)\sin^2\tfrac{1}{2}\delta]. \tag{52}$$

Die Phasendifferenz δ ergiebt sich unmittelbar zu

$$\delta = l\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right) = 2\pi\frac{l}{\lambda_0}\left(\frac{\omega_0}{o} - \frac{\omega_0}{e}\right), \tag{53}$$

wobei l die Dicke der Krystallplatte bedeutet, o und e die Geschwindigkeiten der beiden in ihr sich fortpflanzenden Wellen, T ihre Schwingungsdauer, ω_0 die Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium (Luft), λ_0 die in ihm stattfindende Wellenlänge. In der Formel (52) ist zu bemerken, dass das erste Glied $a^2\cos^2\chi$ den Werth der Lichtintensität angiebt, wie er ohne Einschaltung der Krystallplatte in dem Polarisationsapparat stattfinden würde. Diese Intensität soll im Folgenden die ursprüngliche genannt werden.

Dreht man die Krystallplatte in ihrer Ebene, während Polarisator und Analysator dieselben Stellungen behalten, so bleibt im Ausdruck (52) χ constant,

---

[1]) E. LOMMEL, WIED. Ann. 18, pag. 56. 1883. — Die Isogyrenfläche ist von H. PITSCH allgemein discutirt (Wien. Ber. (II) 91, pag. 527. 1885) und mit einer gewissen Annäherung in einfacher Weise abgeleitet von MACÉ DE LÉPINAY (Journ. de phys. (2) 2, pag. 162. 1883).

während φ von o bis 2π variirt. Aus jenem Ausdrucke folgt, dass in 8 Lagen der Krystallplatte die ursprüngliche Intensität beobachtet wird, nämlich für:

$$\varphi = 0,\ \chi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\chi,\ \pi,\ \pi+\chi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}+\chi,$$

d. h. wenn eine der Polarisationsebenen H_1, H_2 des Krystalls entweder mit der des Polarisators oder der des Analysators zusammenfällt. Zwischen diesen 8 Stellungen der Platte erreicht die Intensität viermal ein Maximum und viermal ein Minimum.

In dem besonderen Falle, wo die Polarisationsebenen P und A dieselbe Richtung haben ($\chi = 0$) ist

$$J^2 = a^2(1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta). \tag{54}$$

Demnach tritt das Maximum der Intensität ein, wenn H_1 oder H_2 parallel zu P liegt, das Minimum, wenn H_1 oder H_2 mit P den Winkel $\pi/4$ einschliesst. Ist gleichzeitig $\delta = (2h + 1)\pi$, wobei h eine ganze Zahl bedeutet, so erscheint die Platte in den letzten Stellungen vollkommen dunkel.

Stehen die Polarisationsebenen P und A senkrecht aufeinander ($\chi = \pi/2$), so ist

$$J^2 = a^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{55}$$

Folglich erscheint die Platte, falls nicht zugleich $\delta = (2h)\pi$ ist, nur dunkel, wenn die Polarisationsebenen H_1 und H_2 mit P und A zusammenfallen. Hierauf gründet sich eine Methode, um die Lage der Polarisationsebenen in einer doppelbrechenden Platte zu ermitteln. Die Methode ist aber nicht sehr empfindlich, wir werden weiter unten eine bessere kennen lernen, die auf der Combination zweier Platten beruht.

Ist $\delta = 2h\pi$, so erscheint die Platte bei einer vollen Umdrehung in ihrer Ebene stets dunkel. Hierdurch erklärt sich das Verhalten einer keilförmigen Platte, welche im homogenen Lichte zwischen gekreuzten NICOL'schen Prismen $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$ betrachtet wird. Dieselbe erscheint von schwarzen, der Keilkante parallelen Streifen durchzogen, welche nach der Gleichung (53) an denjenigen Stellen auftreten, für welche die Dicke l gegeben ist durch:

$$l = \frac{h\lambda_0}{\omega_0\left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e}\right)}.$$

Fällt weisses Licht ein, so muss man, um die resultirende Intensität zu erhalten, die Summe aller Ausdrücke (52) bilden, welche sich auf die verschiedenen Wellenlängen beziehen. Im Allgemeinen ist ausser der Amplitude a auch die Phasendifferenz δ und die Polarisationsrichtungen H_1 und H_2, d. h. der Winkel φ, von der Farbe (d. h. λ_0) abhängig. Letztere Abhängigkeit werden wir dagegen vernachlässigen, da sie bei der Kleinheit der Dispersion der optischen Axen,' wie sie sich bei den in der Natur vorkommenden Körpern darbietet, nur sehr gering ist. Wir schreiben also:

$$J^2 = \cos^2\chi\,\Sigma a^2 - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi)\,\Sigma a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{52'}$$

Der erste Ausdruck der rechten Seite dieser Gleichung stellt die ursprüngliche Intensität dar, d. h. die weisse Farbe ist durch Σa^2 definirt. In dieser erscheint die Krystallplatte in den vorhin erwähnten 8 Stellungen, in welchen eine der Polarisationsebenen H_1 oder H_2 mit P oder A zusammenfällt, in den Zwischenstellungen erscheint jedoch die Platte gefärbt und zwar derartig, dass in zwei zu einer der obigen 8 Stellungen symmetrischen Lagen complementäre

Färbungen auftreten, da in diesem Falle die zweiten Glieder der Formel (52') gleich, doch von entgegengesetzten Vorzeichen werden.

Das Gesichtsfeld zeigt bei einer vollen Umdrehung der Platte nur eine einzige Färbung, wenn $\chi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ ist (d. h. bei parallelen oder gekreuzten Nicols). Im ersten Falle ist

$$J^2 = \Sigma a^2 - \sin^2 2\varphi\, \Sigma a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta, \tag{54'}$$

im zweiten Falle

$$J^2 = \sin^2 2\varphi\, \Sigma a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{55'}$$

In correspondirenden Lagen der Platte (für gleiche φ) sind die Färbungen derselben in beiden Fällen complementär. Die letzten beiden Formeln stimmen überein mit denjenigen, welche die Intensität des durch eine dünne, einfachbrechende Platte hindurchgehenden, resp. von ihr reflektirten, Lichtes darstellen. Im ersten Falle erhält man daher bei variirendem δ, d. h. variirender Dicke l der Krystallplatte (realisirbar durch Betrachtung einer keilförmigen Platte) die NEWTON'schen Farben des durchgehenden, im zweiten Falle die des reflektirten Lichtes. Aus dem durch (53) gegebenen Ausdruck für die Phasendifferenz δ erhält man sofort das oben (pag. 714) erwähnte, von YOUNG aufgefundene Gesetz, welches die Dicke einer Krystallplatte verknüpft mit der Dicke der die gleiche Farbe gebenden Luftschicht.

Durch Vergleichung correspondirender Dicken erhält man daher eine Messungsmethode für die Differenz $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$. Am bequemsten vergleicht man indessen die Krystallplatte nicht mit einer die gleiche Farbe zeigenden Luftschicht, sondern mit einer anderen Krystallplatte, von der man jene Differenz schon kennt. Hierauf beruht die Anwendung des von MICHEL-LEVY[1]) beschriebenen Quarzkeil-Compensators. Wir werden indess unten eine bessere Methode zur Messung von δ, d. h. der Differenz $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$ kennen lernen[2]).

Eine Krystallplatte zeigt nur dann eine ausgesprochene Färbung, wenn die Phasendifferenz δ für Licht mittlerer Wellenlänge weder einen zu kleinen noch einen zu grossen Betrag besitzt. Im ersten Falle, der bei einer sehr kleinen Dicke der Platte eintritt, variirt δ mit der Wellenlänge so wenig, dass die resultirende Intensität für verschiedene Farben nicht merklich verschieden ist, im letzteren Falle, der bei grosser Dicke der Platte eintritt, variirt δ so schnell mit der Wellenlänge, dass innerhalb eines sehr kleinen Farbengebietes die Intensität von ihren Minimal (Null)-Werthen bis zu ihren Maximalwerthen übergeht. Es wird in Folge dessen eine gleichmässige weisse Farbe resultiren, jedoch ist dieselbe nicht identisch mit derjenigen des einfallenden Lichtes, sondern es fehlen darin sehr viele Farben, welche aber einander so benachbart sind, dass kein ausgedehnteres, für das Auge wahrnehmbares Farbengebiet gegenüber einem anderen merklich geschwächt ist. Von dem Fehlen zahlreicher Farben überzeugt man sich durch spectrale Zerlegung des durch eine dicke

---

[1]) A. MICHEL-LÉVY, Bull. Soc. min. de France 6, pag. 143. 1883. — Les minéraux des roches, Paris 1888, pag 54.

[2]) Ausser den unten angeführten giebt es auch noch eine gute Methode zur Messung von δ, welche RIGHI angewandt hat, vergl. RIGHI, Rend. R. Acc. dei Lincei Roma (5) 1, 1. sem. pag. 189. 1892. — Refer. in WIED. Beibl. 16, pag. 538. 1892.

Krystallplatte hindurchgehenden weissen Lichtes[1]). Diese Methode ist von FIZEAU und FOUCAULT angewandt, um die Interferenzfähigkeit zweier Lichtwellen mit grossem Gangunterschied nachzuweisen (cf. oben pag. 639).

Die Grenzen der Dicke einer Krystallplatte, innerhalb welcher dieselbe intensive Polarisationsfarben zeigt, schwanken nach Obigem sehr je nach der Grösse der Differenz $\frac{1}{o} - \frac{1}{e}$, d. h. je nach der Orientirung der Platte und der Stärke der Doppelbrechung. Je grösser die letztere ist, um so dünner wird man die Platte wählen müssen, um deutliche Färbung zu erhalten[2]).

Betrachtet man den Fall, dass die Platten eine feste Lage gegen den Polarisator besitzt, dagegen der Analysator eine volle Umdrehung beschreibt, so erhellt aus der Formel (52'), in welcher nun φ als fest und χ als variabel zu betrachten ist, dass das Gesichtsfeld in denjenigen vier Lagen des Analysators ungefärbt erscheint, in welchen seine Polarisationsebene mit einer der beiden des Krystalls zusammenfällt. Ueberschreitet man beim Drehen des Analysators eine dieser vier Lagen, so geht die Färbung des Gesichtsfeldes in die complementäre über.

Wie DITSCHEINER[3]) beobachtet hat, zeigt ein Gypsblättchen auch ohne Anwendung eines Analysators eine matte Färbung, falls partiell polarisirtes Licht einfällt, wie es z. B. der Fall ist, wenn man die Platte auf eine mattschwarze Unterlage legt, nach welcher man in schiefer Richtung hinsieht.

Die Erklärung der Farben ist in diesem Falle in den mehrfachen Reflexionen des Lichtes im Innern der Platte zu finden.

Schaltet man zwei über einander liegende Platten K und K' der Dicken l und l' in den Polarisationsapparat und bildet die Polarisationsebene H_1 der schnelleren Welle in der ersten Platte den Winkel φ mit der Polarisationsebene P des Polarisators, die Polarisationsebene H_1' der schnelleren Welle in der zweiten Platte den Winkel φ' mit P, während P mit der Polarisationsebene des Analysators den Winkel χ bildet, so ist[4]) die Intensität des austretenden Lichtes

$$\begin{aligned} J^2 = a^2 [\cos^2\chi &+ \cos 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta \\ &- \sin 2(\varphi' - \chi) \cos 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta' \\ &- \sin 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \cos^2 (\varphi' - \varphi) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \\ &+ \sin 2(\varphi' - \chi) \sin 2\varphi \sin^2 (\varphi' - \varphi) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')], \end{aligned}$$

falls δ und δ' die in jeder einzelnen Platte hervorgerufenen Phasendifferenzen der beiden in ihnen fortgepflanzten Wellen bedeuten.

Liegt die Polarisationsebene H_1 parallel oder senkrecht zu P

$$\left(\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}\right),$$

so ist

$$J^2 = a^2 [\cos^2\chi - \sin 2\varphi' \sin 2(\varphi' - \chi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta'],$$

---

[1]) J. MÜLLER, POGG. Ann. 69, pag. 98. 1846; 71, pag. 91. 1847. — H. FIZEAU et L. FOUCAULT, Ann. de chim. et de phys. (3) 26, pag. 138, 1849; 30, pag. 146. 1850. — J. STEFAN, Wien. Ber. (2) 50, pag. 481. 1864. — L. DITSCHEINER, ibid. 57, pag 15. 1868. — E. MACH, optisch-akustische Versuche. Prag 1873. — DEAS, Trans. Roy. Soc. Edinb. 26, pag. 69, 177. 1872. — MAXWELL, ibid. pag. 185.

[2]) Eine Tabelle für die Werthe der Dicken, welche Platten von verschiedenen Krystallen, aber übereinstimmender Orientirung, besitzen müssen, um ein und dieselbe Interferenzfarbe (roth erster Ordnung) hervorzurufen, gab TH. LIEBISCH, physikal. Krystallogr., pag. 471.

[3]) L. DITSCHEINER, Wien. Ber. (2) 73, pag. 180. 1876.

[4]) A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 167. 1821.

d. h. die Combination der beiden Platten wirkt so, als ob K gar nicht vorhanden wäre. Aus der Formel (56) ergiebt sich ebenso direkt, dass, falls H_1' parallel oder senkrecht zu A liegt $\left(\varphi' = \chi,\ \frac{\pi}{2} + \chi\right)$, die Combination so wirkt, als ob die Platte K' nicht vorhanden wäre. Da man die Reihenfolge der Platten K und K' beliebig vertauschen kann, so folgt allgemein, dass eine Platte nicht wirkt, falls eine ihrer Polarisationsebenen mit der des Polarisators oder Analysators zusammenfällt.

Je nachdem die Polarisationsebenen der beiden schnelleren Wellen zusammenfallen, ($\varphi' = \varphi$), oder aufeinander senkrecht stehen $\left(\varphi' = \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ ist

$$J^2 = a^2 [cos^2 \chi - sin 2\varphi \, sin 2(\varphi - \chi) \, sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta + \delta')], \quad (57)$$

resp.

$$J^2 = a^2 [cos^2 \chi - sin 2\varphi \, sin 2(\varphi - \chi) \, sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')]; \quad (57')$$

die Combination wirkt also im ersten Falle wie eine einzige Platte von vergrösserter, im zweiten Falle wie eine einzige von geringerer Dicke, als die einer einzigen Platte beträgt. Hierauf kann man ein Verfahren gründen, um δ an einer Platte K mit Hilfe einer keilförmigen Platte K' zu ermitteln, von welcher man δ' an jeder Stelle kennt. Man hat zu dem Zweck nur nöthig, diese Platte mit zu der ersten Platte K gekreuzten Polarisationsebenen so lange auf K zu verschieben, dass das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols schwarz und ungefärbt erscheint. Die zu messende Grösse δ ist dann gleich der an der Stelle des schwarzen Streifens auftretenden bekannten Grösse δ' der Platte K'.

Die Combination einer Platte K mit einer zweiten K' kann man ferner dazu benutzen, um sehr schwache Spuren von Doppelbrechung in K zu entdecken. Aus der NEWTON'schen Farbenscala[1]) ist nämlich ersichtlich, dass für gewisse Phasen-Differenzen Färbungen auftreten, welche stark variiren, falls die Phasendifferenz nur wenig schwankt. Diese Färbungen werden »empfindliche Farben« genannt. Eine solche ist z. B. ein violett erster Ordnung, welches eintritt, falls die Phasendifferenz für Licht mittlerer Wellenlänge ungefähr den Werth π besitzt. Die Farbe schlägt für eine geringe Vergrösserung von δ in blau, für eine geringe Verminderung in roth um.

Legt man nun in einen Polarisationsapparat eine Platte K', welche diese empfindliche Farbe zeigt, über eine andere K, so machen sich Spuren von Doppelbrechung in letzterer durch eine Farbenänderung in K' bemerkbar. Noch empfindlicher wird die Vorrichtung, wenn man die Platte K' in der Richtung der Halbirungslinie ihrer Polarisationsebenen zerschneidet und dann die beiden Hälften in ihrer Schnittlinie wieder vereinigt, nachdem man zuvor eine derselben um die Normale der Schnittfläche um 180° umgeklappt hat. Da dann die Polarisationsebenen H_1' der beiden Hälften senkrecht aufeinander stehen, so bewirkt eine geringe Doppelbrechung in K eine Farbenänderung der beiden Hälften von K' in entgegengesetztem Sinne. — Diese Vorrichtung wird nach ihrem Erfinder[2]) die BRAVAIS'sche Doppelplatte genannt. Man kann mit ihrer Hilfe leicht z. B. nachweisen, dass der Druck der Finger genügt, um in einem Glaswürfel Doppelbrechung zu erzeugen.

Eine weitere Anwendung der Combination zweier Platten hat BABINET bei

---

[1]) cf. E. BRÜCKE, POGG. Ann. 74, pag. 582. 1848. — G. QUINCKE, ibid. 129, pag. 180. 1866. — A. ROLLET, Wien. Ber. 77, pag. 117. 1878.

[2]) A. BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 129. 1855.

der Construction seines Compensators gemacht, welcher das empfindlichste Instrument ist, um Phasendifferenzen zu messen.

In diesem Instrument sind zwei Quarzkeile P_1 und P_2 von gleichem Winkel zu einer planparallelen Platte vereinigt. Die optische Axe liegt in P_1 parallel zur Kante, in P_2 senkrecht zur Kante und parallel zur Austrittsfläche. Da demnach die Polarisationsebenen H_1 und H_1' der beiden Platten senkrecht zu einander stehen, so giebt die Formel (57') die Intensität des Lichtes an, wenn man es durch einen Polarisationsapparat, in welchen der Compensator eingeschaltet ist, gehen lässt. $\delta - \delta'$ ist nun in diesem Falle proportional der Dickendifferenz der Quarzkeile an der betrachteten Stelle, das Gesichtsfeld erscheint daher bei gekreuzten Nicols ($\chi = \pi/2$), falls φ von Null verschieden ist, im homogenen Lichte von schwarzen, in weissem Lichte von farbigen Streifen durchzogen, welche den Keilkanten parallel verlaufen. Von den letzteren Streifen ist einer nicht farbig, sondern schwarz. Er entspricht der Stelle, an welcher die Quarkkeile gleiche Dicke besitzen, für welche also für alle Wellenlängen $\delta = \delta'$ ist. Der eine Quarzkeil ist mikrometrisch über dem anderen verschiebbar. Man notirt zunächst eine Stellung der Mikrometerschraube, für welche bei linearpolasirtem einfallenden homogenen Lichte ein schwarzer Streifen an einer bestimmten Stelle des Gesichtsfeldes erscheint; sodann dreht man die Schraube, bis dass ein zweiter schwarzer Streifen an jener Stelle auftritt. Die Anzahl der Umdrehungen der Schraube von der ersten Stellung zur zweiten möge g genannt werden. Sie entspricht einer Zu- resp. Abnahme der Dickendifferenz beider Quarzkeile an der betrachteten Stelle, welche eine Zu- resp. Abnahme der Phasendifferenz der beiden im Compensator sich fortpflanzenden Lichtwellen um 2π zur Folge hat. Fällt nun nicht linearpolarisirtes Licht in den Compensator ein, sondern elliptisch polarisirtes, in welchem die Phasendifferenz der zwei parallel zu den Polaritationsebenen H_1' und H_2' genommenen Componenten den Betrag ε besitzt, so erscheint der schwarze Streifen im Compensator verschoben und man muss die Mikrometerschraube drehen, damit er wieder an der alten Stelle erscheint. Nennt man die Anzahl der hierzu nothwendigen Umdrehungen g', so ergiebt sich ε aus

$$\varepsilon : 2\pi = g' : g,$$

denn die Lichtintensität wird in diesem Falle erhalten, wenn man in der Formel (57') zu $\delta - \delta'$ die Grösse ε subtractiv oder additiv hinzufügt.

Die Zahl g hängt, da sie umgekehrt proportional der Differenz der beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten des Quarzes ist, von der Farbe des einfallenden Lichtes ab, kann aber, falls man sie für eine Lichtsorte bestimmt hat, für jede andere berechnet werden, falls man die Dispersionsconstanten des Quarzes kennt[1]).

Bei der beschriebenen Einrichtung zeigt der Compensator in den verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes verschiedene Lichtintensität. Man kann ihn auch so construiren, dass dieselbe überall die gleiche ist, und in diesem Falle ist er dann geeignet, die Verzögerung ε eines einfallenden Lichtstrahl zu ermitteln, falls man durch den Analysator nicht mit freiem Auge, oder einer Lupe, sondern mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr sieht, während die aus dem Polarisator austretenden Strahlen durch ein Collimatorrohr parallel gemacht sind. Man

---

[1]) Eine Berechnung der durch den Compensator herbeigeführten Phasendifferenz mit Rücksicht auf die Reflexion des Lichtes an den Grenzflächen der Keile gab W. VOIGT, WIED. Ann. 22, pag. 234. 1884. — Die Orte des deutlichsten Auftretens der Interferenzstreifen sind discutirt von K. E. F. SCHMIDT, ibid. 35, pag. 360. 1888, und J. MACÉ DE LÉPINAY, Journ. de phys. (2) 10, pag. 204. 1891.

braucht zu diesem Zwecke nur den Compensator zu construiren aus einer planparallelen Platte der Orientirung, wie sie vorhin der Keil P_1 besass, und aus zwei keilförmigen Platten, welche gleiche Orientirung (wie vorhin der Keil P_2) besitzen und bei gegenseitiger mikrometrischer Verschiebung eine planparallele Platte von variabeler Dicke darstellen[1]). Die Verzögerung wird dann genau wie vorhin gemessen, indem man den Compensator auf Dunkelheit einstellt. Diese Anordnung bietet bei alle den Versuchen, bei welchen man ein grösseres optisch homogenes Feld zur Verfügung hat (z. B. bei Messung der durch Reflexion von einem Spiegel hervorgerufenen Verzögerung) grosse Vortheile dar wegen der grösseren zum Auge des Beobachters gelangenden Lichtmenge.

Mit Hilfe des BABINET'schen Compensators in Verbindung mit einem unter ihm befindlichen drehbaren Polarisationsprisma (Analysator) kann man die Natur eines beliebig elliptisch polarisirten Lichtstrahles bestimmen, d, h. nicht nur die Phasendifferenz zweier rechtwinkliger Componenten desselben, sondern auch ihr Amplitudenverhältniss. Zu dem Zweck hat man zu beachten, dass Dunkelheit des Gesichtsfeldes nur eintreten kann, falls das aus dem Compensator austretende Licht linear polarisirt ist in einer zur Polarisationsebene des Analysators senkrechten Ebene. Dreht man daher an dem Theilkreis des letzteren und zugleich an der Mikrometerschraube des Compensators so lange, bis völlige Dunkelheit eintritt, so giebt die Stellung des letzteren die Phasendiffenz der beiden parallel den Polarisationsebenen des Compensators genommenen Componenten des einfallenden Lichtes an, die Stellung des Analysators hingegen die Polarisationsebene des linear polarisirt gemachten einfallenden Lichtes, d. h. das Amplitudenverhältniss jener beiden Componenten des einfallenden Lichtes.

Dieselben Ziele kann man erreichen, wenn man nach einem von SÉNARMONT[2]) vorgeschlagenen Verfahren anstatt des BABINET'schen Compensators ein in seiner Ebene drehbares Glimmerblättchen verwendet, für welches die Phasendifferenz der beiden normal zur Begrenzung sich fortpflanzenden Wellen $\frac{\pi}{2}$ beträgt (sogenanntes $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen). Nach den Gleichungen (8) (pag. 634) des Abschnittes »Natur der Lichtbewegung« ist, falls A und B die rechtwinkligen Componenten eines elliptisch polarisirten Lichtstrahls sind, nach zwei Coordinatenrichtungen x und y, ε die Phasendifferenz der beiden Componenten, das Axenverhältniss der Hauptaxen der Schwingungsellipse durch den Ausdruck $tang\, i$ gegeben, wo

$$sin\, 2i = \frac{2AB}{A^2 + B^2}\, sin\, \varepsilon \tag{58}$$

ist, während diese Hauptaxen mit den Coordinatenrichtungen einen Winkel ϑ einschliessen, der definirt ist durch:

$$tang\, 2\vartheta = \frac{2AB}{A^2 + B^2}\, cos\, \varepsilon. \tag{58'}$$

Wenn man daher die Coordinantenrichtungen in die Hauptaxen der Ellipse

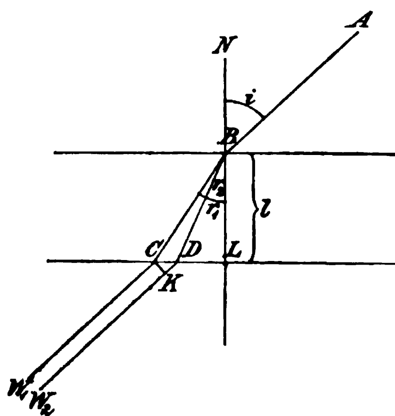
[1]) Diese Anordnung ist zuerst von BIOT benützt, nachdem BRAVAIS (Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 139. 1855) zuvor eine etwas complicirtere Vorrichtung beschrieben hatte, indem er vier Quarzprismen benützte. SOLEIL hat die hier beschriebenen Vortheile schon mit den beiden Prismen des BABINET'schen Compensators erreicht, welche jedoch mit ihren Keilwinkeln nach derselben Seite liegen, sodass das Licht nach dem Durchgang durch das Plattensystem etwas abgelenkt ist. (Vergl. MASCART, Traite d'Optique, 2. Bd., pag. 61, Paris 1890.

[2]) SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (2) 73, pag. 337. 1840; POGG. Ann. Ergzbd. 1, pag. 451. 1842. — Vergl. auch E. WIEDEMANN, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. für 1872; POGG. Ann. 151, pag. 1. 1874.

legt, so haben die beiden rechtwinkligen Componenten eine Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$. Das Glimmerblättchen macht daher das Licht zu linear polarisirtem, falls seine Polarisationsebenen mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen. Die Polarisationsebene des so linear polarisirt gemachten Lichtes, d. h. das Verhältnis *tang i* der Hauptaxen der Schwingungsellipse ergiebt sich unmittelbar aus der Stellung des analysirenden, hinter dem Glimmer befindlichen NICOL'schen Prismas. Wenn man also durch Drehen beider Dunkelheit erzeugt hat, so werden die Componenten AB des einfallenden Lichtes nach zwei beliebigen rechtwinkligen Richtungen x und y, sowie ihre Phasendifferenz ϵ aus den beiden Gleichungen (58), (58') berechnet, indem man für i, resp. ϑ die von den Polarisationsebenen des Nicols, resp. des Glimmers mit jenen Coordinatenrichtungen gebildeten Winkel einsetzt.

b) Interferenzerscheinungen im convergent einfallenden Lichte.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass ein Kegel von geradlinig polarisirten Lichtstrahlen auf eine doppelbrechende Krystallplatte fällt. Man kann diesen Fall dadurch realisiren, dass man vor und hinter der Krystallplatte je ein System Sammellinsen anbringt[1]). Lichtstrahlen, welche von einem Punkte der vorderen Brennebene des ersten Systems ausgehen, durchsetzen die Krystallplatte in paralleler Richtung und vereinigen sich in einem Punkte der hinteren Brennebene des zweiten Systems. Auf letztere stellen wir mit dem Auge oder einer Lupe ein. Wir nehmen eine nicht gleichförmige Lichtintensität des Gesichtsfeldes wahr, da die verschiedenen Punkte desselben verschiedenen Richtungen der durch den Krystall hindurchgegangenen Lichtstrahlen und daher verschiedenen Polarisationsrichtungen und Phasendifferenzen δ der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellensysteme entsprechen.



(Ph. 484.)

Wir wollen zunächst δ für eine schief auf die Krystallplatte auftreffende linearpolarisirte Welle berechnen. Die Plattennormale schliesse mit der Normale der einfallenden Welle den Winkel i, mit der der gebrochenen Wellen die Winkel r_1 und r_2 ein (Fig. 484).

Die Phasendifterenz δ der beiden aus der Platte (in der Richtung i mit der

[1]) Die Apparate sind etwas verschieden construirt, je nachdem sie zur Beobachtung grösserer Krystallpräparate oder kleinerer dienen sollen. Im letzteren Falle ist ein Mikroskop mit ihnen verbunden. Die Apparate der ersten Art sind im Wesentlichen von NÖRRENBERG angegeben (cf. J. GRAILICH, Krystall-optische Untersuchungungen. Wien 1858, pag. 42. — E. REUSCH, Ueber Linsen und Linsensysteme zur Beobachtung der Farbenringe im polarisirten Lichte. Bericht der 34. Naturf. Vers. Karlsruhe 1858. — A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 69, pag. 87, 1863), die der letzteren von G. B. AMICI [Ann. de chim. et de phys. (3) 12, pag. 114. 1844. POGG. Ann. 64, pag. 472. 1845]. Wegen der ausführlicheren Beschreibung und technischen Ausführung dieser Apparate vergl. TH. LIEBISCH, physikalische Krystallographie, Leipzig 1891, pag. 450—455, und Bericht über die wiss. Instr. auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, pag. 342 u. ff. — C. KLEIN (Ber. d. Berl. Acad. 24, pag. 435. 1891), construirte ein Polarisationsmikroskop, welches ermöglicht, die Krystalle bei freier Drehung in Medien von ähnlicher Brechbarkeit zu untersuchen, was mancherlei Vortheile bietet.

Normale) austretenden Wellen W_1 und W_2 ist offenbar, falls o resp. e die Geschwindigkeit der Wellen im Krystall, ω_0 die derselben im umgebenden Medium (der Luft) bedeutet:

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{BD}{e} + \frac{DK}{\omega_0} - \frac{BC}{o}\right)$$

(betreffs der Bedeutung der Buchstaben vergl. die Figur. CK ist rechtwinklig zu DK angenommen). Nun ist $BD = l/\cos r_2$, $BC = l/\cos r_1$, wobei l die Dicke der Krystallplatte bezeichnet, ferner ist $DK = DC \sin i = (BC \sin r_1 - BD \sin r_2) \sin i$, daher

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\, l \left[\left(\frac{\sin i \sin r_1}{\omega_0} - \frac{1}{o}\right)\frac{1}{\cos r_1} - \left(\frac{\sin i \sin r_2}{\omega_0} - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{\cos r_2}\right].$$

Da nun nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin i}{\omega_0} = \frac{\sin r_1}{o} = \frac{\sin r_2}{e},$$

so ist

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\, l \left(\frac{\cos r_2}{e} - \frac{\cos r_1}{o}\right). \tag{59}$$

Führt man nun die Winkel ein, welche die Wellennormalen im Krystall mit den optischen Axen desselben bilden, so lassen sich nach den Gleichungen (12′) dieses Abschnittes die Grössen o und e rational durch $a + c$, $a - c$ und jene Winkel ausdrücken. Beschränkt man sich auf erste Ordnung in $a - c$, was bei der Kleinheit der Doppelbrechung bei den in der Natur vorkommenden Mineralien stets zulässig ist, so wird für $\rho = l/\cos r_1$,

$$\delta = \frac{2\pi}{T} \frac{\frac{a-c}{2}}{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \rho \sin g \sin g', \tag{60}$$

wobei nun g und g' die Winkel bedeuten, welchen eine, gleichgültig welche, der beiden gebrochenen Wellennormalen mit den optischen Axen einschliesst. Erstere sind also in der hier angewandten Näherung als gleichgerichtet anzusehen, und ρ bedeutet daher den von den gebrochenen Wellennormalen im Krystall zurückgelegten Weg ($BD = BC$).

Setzt man nun ausserdem noch voraus, dass der Winkel r nur klein sei, d. h. das Licht nicht sehr schief einfalle, so wird die Intensität des Lichtes, wie wir dieselbe im Polarisationsapparate an einem Punkte M der Brennebene des nach dem Analysator zuliegenden Linsensystems beobachten, nach welchem Lichtstrahlen gelangen, deren Winkel mit der Plattennormale i ist, durch die Formel (52) gerade so, wie bei senkrecht einfallendem Lichte gegeben. Denkt man sich sämmtliche die Krystallplatte durchsetzende Lichtstrahlen durch einen einzigen Punkt O der ersten Begrenzungsfläche der Platte hindurchgehend, so gelangt nur ein Lichtstrahl zum Punkte M. Derselbe schneidet die zweite Begrenzungsfläche der Platte in dem Punkte M' (Spur des Punktes M). Wenn wir auf diese Weise jedem Punkte M der Brennebene einen Punkt M' der Plattengrenze zuordnen, so sind Figuren, deren Punkte zugeordnete sind, einander ähnlich. Wir werden daher uns jetzt immer auf die Punkte M' der zweiten Krystallgrenze beziehen. Bezieht man ferner die Lage der Polarisationsebenen des Polarisators (P), Analysators (A) und des Krystalls (H_1 und H_2) auf eine feste Gerade $\mathfrak{H}$ in der Krystallfläche, indem man setzt $\angle (P\mathfrak{H}) = \beta$, $\angle P(A\mathfrak{H}) = \alpha$, $\angle (H_1 \mathfrak{H}) = \eta$, so ist die Intensität im Punkte M':

$$J^2 = a^2 \left[\cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2(\beta - \eta) \sin 2(\alpha - \eta) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta\right]. \tag{61}$$

Gehen wir von einem Punkte M' zu einem anderen M'' über, so ändert sich damit δ und η. Hieraus ergiebt sich, dass zwei Curvenschaaren für die Interferenzerscheinung charakteristisch sind: die Curven gleichen Gangunterschiedes, $\delta = const$, und die Curven gleicher Polarisationsrichtung oder Isogyren, $\eta = const$.

Erstere Curvenschaar wird durch den Schnitt der zweiten Grenzfläche des Krystalls mit einer um O beschriebenen Fläche gleichen Gangunterschiedes ($\delta = const$) geliefert. Falls man M' auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z um O als Coordinatenanfang bezieht und die Richtungcosinus der Plattennormalen p_1, p_2, p_3 nennt, so wird die zweite Grenzfläche des Krystalls durch die Gleichung

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = l \tag{62}$$

dargestellt, dagegen ist die Polargleichung der Fläche gleichen Gangunterschiedes

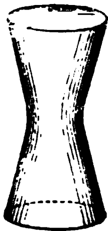
$$\rho \sin g \sin g' = C, \tag{63}$$

worin C eine Constante und ρ den von O ausgehenden Radiusvector der Fläche bedeutet, was sich sofort aus der Gleichung (60) ergiebt.

Wie die Gleichung (63) lehrt, ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes von der Orientirung der Krystallplatte unabhängig. Die Schnittcurven der Ebene (62) mit der Fläche

$$\rho \sin g \sin g' = kC,$$

ist derjenigen Curve ähnlich, welche man als Schnitt der Fläche (63) mit einer nur um l/k vom Coordinatenanfang entfernten, jedoch dieselbe Richtung (p_1, p_2, p_3) besitzenden Ebene erhält, die linearen Dimensionen der letzteren Curve sind nur k mal kleiner, als die der ersteren. Deshalb erhält man alle Curven gleichen Gangunterschiedes auf der Krystallfläche, wenn man eine einzige Fläche gleichen Gangunterschiedes durch ein System von zu jener Grenze parallelen Ebenen schneidet und die Schnittcurven dann in dem umgekehrten Verhältniss des Abstandes der Ebenen vom Coordinatenanfangspunkte vergrössert.


(Ph. 485.)

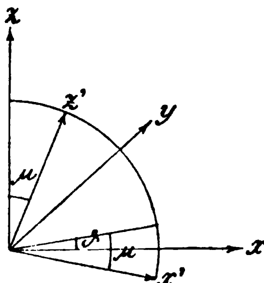
Für einaxige Krystalle ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin^2 g = C, \tag{64}$$

wo g den Winkel bedeutet, welchen der Radiusvector ρ mit der optischen Axe bildet. Die Fläche ist nicht geschlossen, sondern hat die optische Axe zu einer Asymptote. Die Fläche ist eine Rotationsfläche und hat ungefähr die in der beistehenden Figur angegebene Gestalt (Fig. 485).

Die Gleichung dieser Fläche in rechtwinkligen Coordinaten lautet, da $\sin^2 g = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, falls man die z-Axe in die optische Axe legt:

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C. \tag{65}$$



(Ph. 486.)

Um die Gleichung der Schnittcurven dieser Fläche mit der Ebene (62) zu finden, wollen wir nun ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem einführen (x', y', z'), dessen z'-Axe in die Plattennormale, dessen x'-Axe in den Hauptschnitt fällt. Bildet erstere mit der optischen Axe den Winkel μ und ist ϑ der Winkel, unter welchem die x-Axe gegen den Hauptschnitt geneigt ist (cf. Fig. 486), so ist zu setzen:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\mu \cos\vartheta - y' \sin\vartheta + z' \sin\mu \cos\vartheta, \\ y &= x' \cos\mu \sin\vartheta + y' \cos\vartheta + z' \sin\mu \sin\vartheta, \\ z &= -x' \sin\mu \qquad\qquad\qquad + z' \cos\mu. \end{aligned} \tag{66}$$

Die Gleichung (65) wird daher unter Rücksicht darauf, dass für die gesuchte Schnittcurve $z' = l$ ist:

$$\frac{x'^2 \cos^2\mu + y'^2 + l^2 \sin^2\mu + x' l \sin 2\mu}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + l^2}} = C. \tag{67}$$

Nun haben wir stets vorausgesetzt, dass die gebrochenen Wellennormalen nur kleine Winkel mit der Plattennormalen einschliessen sollen. Es ist daher $x'^2 + y'^2$ klein gegen l^2. Beschränkt man sich auf erste Ordnung, so wird die Gleichung (67):

$$x'^2(\cos^2\mu - \tfrac{1}{2}\sin^2\mu) + y'^2(\cos^2\mu + \tfrac{1}{2}\sin^2\mu) + x'l \sin 2\mu = Cl - l^2 \sin^2\mu. \tag{68}$$

Die Curven gleichen Gangunterschiedes sind also für alle Werthe der Phasendifferenz, d. h. alle Werthe von C, concentrische Kegelschnitte, deren Centrum im Hauptschnitt liegt.

Für $\mu = 0$ (Platte senkrecht zur optischen Axe) sind dieselben:

$$x'^2 + y'^2 = Cl, \tag{69}$$

d. h. concentrische Kreise um die optische Axe als Mittelpunkt.

Für

$$0 < \mu < arc\ tang \sqrt{2}$$

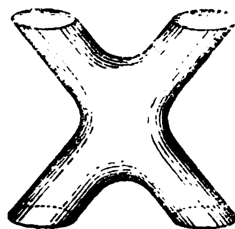
sind die Curven Ellipsen, für

$$\mu = arc\ tang \sqrt{2} = 54^\circ\ 44'$$

sind sie Parabeln, für

$$arc\ tang \sqrt{2} < \mu < \frac{\pi}{2}$$

sind die Curven Hyperbeln.


(Ph. 487.)

Für zweiaxige Krystalle ist die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin g \sin g' = C. \tag{64'}$$

Dieselbe besitzt die in der beistehenden Figur angedeutete Gestalt. In Richtung der beiden optischen Axen erstreckt sie sich ins Unendliche (Fig. 487).

Diese Fläche wird durch Ebenen, welche zu einer der beiden Mittellinien senkrecht stehen, in lemniscatenförmigen Curven geschnitten. Durch Ebenen, welche zur Ebene der optischen Axe parallel sind, in hyperbolischen Curven. In der Mitte des Gesichtsfeldes haben letztere unabhängig von der Grösse des Winkels der optischen Axen die Gestalt von zwei Schaaren gleichseitiger Hyperbeln.

Liegt die gebrochene Wellennormale sehr nahe an einer optischen Axe (D), so ist g' nahezu gleich dem doppelten Winkel $2V$ der optischen Axen. Daher ist in der Nähe von D die Fläche gleichen Gangunterschiedes gegeben durch

$$\rho \sin g = \frac{C}{\sin 2V}.$$

Diese Fläche wird durch Ebenen, welche senkrecht zur Axe D stehen, in Kreisen geschnitten. Führt man gerade wie vorhin bei den einaxigen Krystallen ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen $x'y'$-Ebene in die Plattengrenze fällt, so ist

$$\rho \sin g = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

daher die Gleichung der Curven gleichen Gangunterschiedes

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{C}{\sin 2V}. \tag{69'}$$

Es soll jetzt die Gleichung der Isogyren abgeleitet werden, für welche also $\eta = const$ ist. Auch diese können als Schnittcurven der zweiten Grenz-

fläche G_2 der Krystallplatte mit einer gewissen Fläche, der **Isogyrenfläche**, angesehen werden, zu der wir durch folgende Ueberlegung gelangen: die Polarisationsebenen, deren Schnittgraden mit G_2 eine vorgeschriebene Richtung η haben sollen, liegen parallel η; ihre Normalen sind also auf η senkreckt. Diese fallen nun aber, sowohl im FRESNEL'schen, wie im NEUMANN'schen System, mit der Schwingungsrichtung einer der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen zusammen, falls man, wie wir es immer gethan haben, den Richtungsunterschied der beiden gebrochenen Wellennormalen vernachlässigt. Daher kann man die Isogyrenfläche definiren als den geometrischen Ort aller vom Einfallspunkte O in der Eintrittsfläche G_1 der Krystallplatte ausgehenden Wellennormalen, für welche eine der zugehörigen Schwingungsrichtungen senkrecht auf der gegebenen Geraden η steht.

Wir denken uns durch O ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen Axen mit den optischen Symmetrieaxen des Krystalls zusammenfallen. Nennt man, wie wir es früher gethan, m, n, p die Richtungscosinus der Wellennormalen in Bezug auf dieses Coordinatensystem, $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_o$ resp. $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_e, \mathfrak{P}_e$ die der (FRESNEL'schen) Schwingungsrichtungen, so ist

$$m\mathfrak{M}_o + n\mathfrak{N}_o + p\mathfrak{P}_o = 0, \tag{70}$$

$$m\mathfrak{M}_e + n\mathfrak{N}_e + p\mathfrak{P}_e = 0, \tag{71}$$

$$\mathfrak{M}_o\mathfrak{M}_e + \mathfrak{N}_o\mathfrak{N}_e + \mathfrak{P}_o\mathfrak{P}_e = 0. \tag{72}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (6) dieses Abschnittes (pag. 688), welche man sich für die Grössen $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_o$ gebildet denken mag, mit den bezüglichen Faktoren $\mathfrak{M}_e, \mathfrak{N}_o, \mathfrak{P}_e$ und Addition folgt nun unter Rücksicht auf (70) nnd (72):

$$a\mathfrak{M}_o\mathfrak{M}_e + b\mathfrak{N}_o\mathfrak{N}_e + c\mathfrak{P}_o\mathfrak{P}_e = 0. \tag{73}$$

Aus dieser und der Gleichung (72) folgt:

$$\mathfrak{M}_o\mathfrak{M}_e : \mathfrak{N}_o\mathfrak{N}_e : \mathfrak{P}_o\mathfrak{P}_e = b - c : c - a : a - b. \tag{74}$$

Sind nun $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Richtungscosinus von η, so soll auch nach der Eigenschaft der Isogyrenfläche sein:

$$\mathfrak{M}_o\sigma_1 + \mathfrak{N}_o\sigma_2 + \mathfrak{P}_o\sigma_3 = 0. \tag{75}$$

Die Gleichungen (70), (71), (74), (75) gestatten eine Elimination der Grössen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$.

Zunächst folgt aus (71) und (74):

$$\frac{m(b-c)}{\mathfrak{M}_0} + \frac{n(c-a)}{\mathfrak{N}_0} + \frac{p(a-b)}{\mathfrak{P}_0} = 0, \tag{76}$$

und aus (70) und (75):

$$\mathfrak{M}_o : \mathfrak{N}_o : \mathfrak{P}_o = n\sigma_3 - p\sigma_2 : p\sigma_1 - m\sigma_3 : m\sigma_2 - n\sigma_1. \tag{77}$$

Setzt man diese Werthe in (76) ein, so entsteht die Gleichung der Isogyrenfläche in Polarcoordinaten:

$$\frac{m(b-c)}{n\sigma_3 - p\sigma_2} + \frac{n(c-a)}{p\sigma_1 - m\sigma^3} + \frac{p(a-b)}{m\sigma_2 - n\sigma_1} = 0. \tag{78}$$

Führt man rechtwinklige Coordinaten ein und nennt V den Winkel zwischen den optischen Axen und der z-Axe (Mittellinie), so wird unter Rücksicht auf die Gleichungen (13) die Gleichung (78) zu:

$$\frac{x\cos^2 V}{y\sigma_3 - z\sigma_2} - \frac{y}{z\sigma_1 - x\sigma_3} + \frac{z\sin^2 V}{x\sigma_2 - y\sigma_1} = 0. \tag{79}$$

Die Isogyrenfläche ist also eine Kegelfläche dritter Ordnung, welche durch die beiden optischen Axen ($y = 0$, $x = \pm z \tan V$) hindurchgeht. Sie ist kein festes, nur von den optischen Constanten des Krystalls abhängendes Gebilde,

wie die Oberfläche gleichen Gangunterschiedes, sondern sie ist vielmehr von der Orientirung der Krystallplatte abhängig, da die Richtung, deren Cosinus σ_1, σ_2, σ_3 sind, senkrecht zur Plattennormale (mit den Richtungscosinus p_1, p_2, p_3) sein muss, d. h. die Beziehung besteht:

$$\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 = 0. \tag{80}$$

Die Gleichungen (79) und (80) stellen in Verbindung mit der Gleichung (62), welche die Grenzebene G_2 der Krystallplatte repräsentirt, die Gleichungen der auf letzterer verlaufenden Curven gleicher Polarisationsrichtung, oder Isogyren, dar.

Für einaxige Krystalle ist $V = 0$, falls die z-Axe zur optischen Axe gewählt wird. Die Isogyrenfläche (79) zerfällt daher in die Ebene

$$x\sigma_2 - y\sigma_1 = 0 \tag{79'}$$

und den Kegel zweiten Grades:

$$(x^2 + y^2)\sigma_3 - z(x\sigma_1 + y\sigma_2) = 0. \tag{79''}$$

Führt man wie oben (pag. 724) ein neues Coordinatensystem x', y', z' ein, dessen z'-Axe in die Plattennormale fällt, während die x'-Axe im Hauptschnitt liegt, haben μ und ϑ die früheren Bedeutungen (μ gleich dem Winkel zwischen Plattennormale und optischer Axe) und ist ν der Winkel zwischen der Richtung η und dem Hauptschnitt, so gelten für σ_1, σ_2, σ_3 die Relationen:

$$-\sigma_1 \sin\vartheta + \sigma_2 \cos\vartheta = \sin\nu, \tag{80'}$$
$$\sigma_1 \cos\vartheta + \sigma_2 \sin\vartheta + \sigma_3 \operatorname{cotg}\mu = 0,$$

von denen die erste aussagt, dass der Winkel zwischen der Richtung η und y' gleich dem Complementwinkel von ν ist, während die letzte Gleichung aus (80) folgt, d. h. die Rechtwinkligkeit von η und z' ausspricht. Aus den Gleichungen (80') ergiebt sich durch Quadriren und Addiren:

$$\sigma_3 = \sin\mu \cos\nu.$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (66) in (79') und (79'') ergiebt sich, wenn man $z' = l$ setzt, die Gleichung der aus (79') folgenden Isogyre zu:

$$(x' \cos\mu + l \sin\mu) \sin\nu + y' \cos\mu \cos\nu = 0, \tag{79'''}$$

welche eine Schaar von Graden darstellt, welche durch den Austrittspunkt der optischen Axe

$$(y' = 0, \quad x' = -l \operatorname{tang}\mu)$$

gehen, während die Gleichung der aus (79'') hervorgehenden Isogyren die Gestalt annimmt.

$$y'^2 \sin\mu \cos\nu + x'y' \sin\mu \sin\nu - y' l \cos\mu \sin\nu + l \cos\nu (x' \cos\mu + l \sin\mu) = 0. \tag{79''''}$$

Diese Gleichung stellt eine ebenfalls durch den Austrittspunkt der optischen Axe gehende hyperbolische Curvenschaar dar, deren Asymptoten der Hauptschnitt ($y' = 0$) und die Grade $y' + x' \operatorname{tang}\nu = 0$ sind.

Die allgemeine Discussion der Isogyren für zweiaxige Krystalle möge unterbleiben, da sie complicirtere Resultate liefert.

Wenden wir uns jetzt zurück zur Betrachtung der durch die Platte hervorgerufenen Interferenzfigur. Die Lichtintensität in einem beliebigen Punkte derselben wird durch den Ausdruck (61) dargestellt. Die ursprüngliche Lichtstärke, wie sie ohne Zwischenschaltung der Platte beobachtet würde, tritt ein an denjenigen Stellen, für welche ist

$$\sin 2(\beta - \eta) \sin 2(\alpha - \eta) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta = 0.$$

Hierdurch sind definirt: 1) die Curvenschaar gleichen Gangunterschiedes, für welche $\delta = 2h\pi$ beträgt, 2) die beiden Isogyren, für welche $\eta = \beta$ oder $\eta = \alpha$ ist, d. h. die Verbindungscurven derjenigen Punkte, in denen die Polari-

sationsrichtungen parallel oder senkrecht zu denen des Polarisators oder Analysators liegen. Die erstere Curvenschaar wird die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes genannt, die letztere die Hauptisogyren. Erstere sind in ihrer Lage unabhängig von der Orientirung der Platte gegen Polarisator (P) und Analysator (A), in ihrer Lichtstärke dagegen abhängig von dem Winkel (PA). Die Hauptisogyren sind mit der Orientirung der Platte gegen P und A variabel, sie kreuzen sich, wie alle Isogyren, in den Spuren der optischen Axen. Sie trennen die Gebiete des Gesichtsfeldes, in denen die Intensität kleiner oder grösser als die ursprüngliche ist. Wenn die Polarisationsebenen des Polarisators und Analysators einander parallel sind ($\beta = \alpha$) oder auf einander senkrecht sind $\left(\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, fallen die beiden Hauptisogyren zusammen. Im ersteren Falle ist die Intensität in jedem Punkte des Gesichtsfeldes, der keiner der beiden betrachteten Curvenschaaren angehört, kleiner, im letzteren Falle dagegen grösser als die ursprüngliche. Die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes und die Hauptisogyren zerschneiden das Gesichtsfeld in krummlinig begrenzte Felder. Innerhalb jedes derselben giebt es eine Stelle, in welcher die Intensität ein Maximum resp. Minimum erreicht. Die Curven gleicher Lichtstärke umgeben diese Punkte als geschlossene Curven. Ihre Grenzlagen sind die Feldergrenzen, d. h. die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes und die Hauptisogyren[1]).

Die letzteren sind in ihrer Lage nur wenig von der Wellenlänge des einfallenden Lichtes abhängig, sie erscheinen daher bei einfallendem weissen Lichte ungefärbt (weiss, schwarz oder nur farbig gesäumt) und werden daher auch achromatische Linien genannt. Die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes sind dagegen stark von der Wellenlänge abhängig, jede Curve derselben weist jedoch bei einfallendem weissen Lichte innerhalb eines zwischen den Hauptisogyren liegenden Abschnittes, falls die Dispersion der optischen Axe nicht bedeutend ist, dieselbe Farbe auf. Die Farben sind die bei den NEWTON'schen Ringen beobachteten[2]). Diese Curven werden daher auch isochromatische Linien genannt. Ihre Farbe schlägt bei Ueberschreitung einer Hauptisogyre in die complementäre um, nur bei Zusammenfallen der letzteren (d. h. bei parallelen oder gekreuzten Nicols) ist die Farbe einer Hauptcurve gleichen Gangunterschiedes längs ihres ganzen Verlaufs dieselbe.

Es mögen nun die Interferenzbilder bei speciellen Lagen der Krystallplatte erläutert werden.

Bei einer Platte eines einaxigen Krystalls sind, wie oben erläutert ist, die isochromatischen Curven Kegelschnitte. Dieselben werden zu Kreisen, falls die optische Axe in die Plattennormale fällt ($\mu = 0$). Wie die Gleichung (69) lehrt,

---

[1]) Wegen weiterer geometrischer Eigenschaften der Curven gleicher Lichtstärke vergl. R. T. GLAZEBROOK (Proc. Cambr. Phil. Soc. 4, pag. 299. 1883); C. SPURGE (ibid. 5, pag. 74. 1885; Trans. Cambr. Phil. Soc. 14, pag. 63. 1885) und E. LOMMEL (POGG. Ann. 120, pag. 69. 1863. — WIED. Ann. 39, pag. 258. 1890).

[2]) Wenn die Dispersion der optischen Axen bedeutend ist, so können die Hauptcurven gleichen Gangunterschiedes für die verschiedenen Wellenlängen zum Durchschnitt gelangen. In diesem Falle haben die im weissen Licht beobachteten Isochromaten eine von den Curven gleichen Gangunterschiedes abweichende Gestalt, auch die Farben derselben gehören nicht mehr den NEWTON'schen an. Dieser Fall tritt z. B. sehr deutlich bei den oben pag. 691 erwähnten rhombischen Krystallen ein, für welche die Ebene der optischen Axen mit der Wellenlänge wechselt.

verhalten sich die Radien derselben wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen, denn aus der Bedingung $\delta = 2h\pi$, folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (60) für die nach (64) definirte Constante C:

$$C = hT \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a-c}{2}},$$

d. h. es sind nach (69) die Quadrate der Radien der isochromatischen Kreise gegeben durch:

$$x'^2 + y'^2 = hlT \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a-c}{2}}.$$

Durch Messung dieser Ringdurchmesser kann man daher $a - c$, d. h. die Differenz der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten berechnen, falls man eine derselben kennt. Die Lichtgeschwindigkeit $\sqrt{a}$ kann man z. B. nach der DE CHAULSNES'schen Methode bestimmen (cf. pag. 706). Man beobachtet diese Ringe am besten im monochromatischen Lichte bei gekreuzten Nicols, wo sie vollkommen schwarz erscheinen.

Die bisherige Ableitung setzt voraus, dass der Winkel φ der einfallenden (und austretenden) Strahlen mit der Plattennormale so klein sei, dass $\sin^2\varphi$ neben 1 zu vernachlässigen ist. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so ergiebt sich für die Winkel φ der an der Stelle der Ringe austretenden Strahlen die strengere Formel[1]):

$$\frac{l}{\lambda_0} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a}{\omega_0^2}\sin^2\varphi}} \frac{c-a}{2\omega_0\sqrt{a}} = h, \tag{81}$$
$$h = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Die Winkel φ misst man am besten, indem man die Krystallplatte um eine zur optischen Axe des Polarisationsapparates senkrechte Axe dreht. Zur Messung dieser Drehungswinkel dienen besondere Apparate (Axenwinkelapparate oder Stauroskope), die weiter unten bei Messung des Axenwinkels zweiaxiger Krystalle besprochen werden sollen.

Die Isogyren werden für eine senkrecht zur optischen Axe geschliffene einaxige Platte nach (79''') und (79'''') durch die Gleichungen dargestellt

$$x' \sin\nu + y' \cos\nu = 0, \quad x' \cos\nu - y' \sin\nu = 0;$$

Die Hauptisogyren sind also 4 Grade, welche durch das Centrum der Platte parallel und senkrecht zu den Polarisationsebenen P und A des Polarisators und Analysators verlaufen. Sind letztere parallel oder senkrecht zu einander, so reduciren sich die 4 Grade auf swei zu einander senkrechte; im ersten Falle (parallele Nicols) durchzieht also ein helles Kreuz, im letzten Falle (gekreuzte Nicols) ein schwarzes Kreuz die ringförmige Interferenzfigur[2]).

Wächst der Winkel μ der Plattennormalen mit der optischen Axe, so nehmen die isochromatischen Curven zunächst ellipsenförmige Gestalt an, während die

---

[1]) BAUER, Berl. Ber., pag. 958. 1881.

[2]) Sehr schöne Reproductionen dieser und der im Nachfolgenden beschriebenen Figuren nach photographischen Aufnahmen finden sich in den Tafeln, welche der citirten »physikalischen Krystallographie« von TH. LIEBISCH beigegeben sind. — Durch gewisse Anordnungen (Totalreflexion) kann man diese Interferenzfiguren ohne polarisirende Vorrichtungen in einem Kalkspathpräparat sichtbar machen. Vergl. S. P. THOMPSON, Chem. News 61, pag. 155. 1890.

achromatischen Linien annähernd die Gestalt von Graden besitzen, welche durch den Austrittspunkt der optischen Axe gehen. Für $\mu = arc\, tang\, \sqrt{2}$ werden die isochromatischen Linien Parabeln. Dieser Werth von μ hängt indess, falls man sich nicht nur auf erste Ordnung in $a - c$ beschränkt, etwas von den optischen Constanten des Krystalls ab. G. S. OHM[1]) hat diesen Werth von μ für Kalkspath zu 53° 16′, für Quarz zu 54° 50′ berechnet.

Für grössere Werthe von μ werden die isochromatischen Linien zu Hyperbeln (cf. pag. 725), und zwar zu gleichseitigen für $\mu = \frac{\pi}{2}$. In letzterem Falle, d. h. für eine zur optischen Axe parallel geschliffene Platte[2]), werden nach (97'''') die Isogyren zu:

$$y'^2 + x'y'\, tg\, \nu + l^2 = 0,$$

d. h. ungleichseitige Hyperbeln. Man kann dieselben dann am besten beobachten, wenn sie durch die isochromatischen Linien nicht gestört werden, was bei einer Platte der Fall ist, die entweder zu dünn oder zu dick ist, um deutliche Färbung im weissen Lichte zu zeigen (cf. pag. 717). Bei gekreuzten Nicols kennzeichnen sich die Hauptisogyren, falls der Hauptschnitt entweder zu P oder A parallel liegt, als ein schwarzes Kreuz ($x' = 0$, $y' = 0$). Bei Drehen der Platte zerbricht dasselbe in zwei hyperbolische Schatten, welche sich in diejenigen beiden gegenüberliegenden Quadranten zurückziehen, in die bei der Drehung die optische Axe des Krystalls eingetreten ist. Hierdurch hat man daher ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Lage der optischen Axe bei einer derselben parallel geschliffenen Platte[3]).

Es möge nun eine Platte eines zweiaxigen Krystalls betrachtet werden, und zwar sei sie senkrecht zur ersten Mittellinie (z-Axe) geschliffen. Wie wir oben sahen, sind die Isochromaten lemniscatenartige Curven, und zwar bestehen diejenigen unter ihnen, für welche der Gangunterschied klein ist, die also dicht an einer der optischen Axen verlaufen, aus zwei getrennten, dieselben umschliessenden Curven, da sie als Durchschnitte der auf pag. 725 dargestellten Fläche gleichen Gangunterschiedes mit einer weit vom Mittelpunkt derselben, zur z-Axe senkrechten, Ebene erhalten werden. Um die Isochromaten, für welche der Gangunterschied grösser ist, zu erhalten, können wir nach der pag. 724 angestellten Ueberlegung die schneidende Ebene allmählich an den Mittelpunkt O der Fläche gleichen Gangunterschiedes heranrücken lassen, müssen dann nur die Schnittcurve in demselben Verhältniss, wie die Entfernung der Ebene von O abnimmt, vergrössern. Mit wachsendem Gangunterschied entfernen sich daher die beiden Curvenstücke einer Isochromate von den Spuren der optischen Axen, gehen durch eine lemniscatenförmige Curve mit Doppelpunkt hindurch, und nehmen schliesslich die Gestalt von einfach geschlossenen, beide optischen Axen zugleich umfassenden Curven an.

In der Gleichung (79) der Isogyrenfläche ist $\sigma_3 = 0$ zu setzen und $\sigma_1 = cos\, \zeta$, $\sigma_2 = sin\, \zeta$, falls ζ den Winkel bedeutet, welchen die Polarisationsrichtung η mit der Ebene (xz) der optischen Axen einschliesst. Dadurch wird die Gleichung der Isogyren (es ist $z = l$ gesetzt):

$$x^2 cos^2 V - xy\,(cos^2 V cotg\, \zeta - tg\, \zeta) - y^2 = l^2 sin^2 V.$$

---

1) G. S. OHM, Münch. Abh. 7, pag. 43 u. 265. 1853.

2) SOLEIL erfand ein Verfahren, um mit grosser Genauigkeit zu prüfen, ob eine Platte parallel zur Axe geschliffen ist, cf. VERDET, Wellentheorie, Deutsch von K. EXNER, Bd. 2., pag. 141.

3) Dies Verfahren ist von E. LOMMEL angegeben in WIED. Ann. 18, pag. 56. 1883.

Demnach ist jede Isogyre eine durch die Spur der optischen Axen ($y = o$, $x = \pm l\, tg\, V$) gehende Hyperbel, deren Asymptoten durch die Gleichungen:

$$x\, cos^2\, V + y\, tg\, \zeta = 0, \quad x - y\, cotg\, \zeta = 0$$

dargestellt werden. Letztere Asymptote fällt daher mit der Polarisationsrichtung zusammen, erstere ist zu ihr bei kleinen Axenwinkeln ($cos\, V = 1$) senkrecht, d. h. die Isogyren sind in diesem Falle gleichseitige Hyperbeln.

Fällt bei gekreuzten Nicols ($P \perp A$) die Ebene der optischen Axen mit einer der Ebenen P oder A zusammen, so ist für die Hauptisogyren $\zeta = 0, \frac{\pi}{2}$. Dieselben sind daher die beiden Coordinatenrichtungen $x = 0$, $y = 0$. Die bei einfallendem weissen Lichte farbig erscheinenden Lemniscaten sind daher von einem schwarzen Kreuz durchzogen, dessen Arme in die optischen Symmetrieebenen, d. h. die Polarisationsebenen A und P fallen.

Halbirt bei gekreuzten Nicols die Ebene der optischen Axen den Winkel der Polarisationsebenen P und A (sogen. Diagonalstellung der Platte), so ist für die Hauptisogyren $\zeta = \pm \frac{\pi}{4}$ zu setzen.

Die Hauptisogyren sind in diesem Falle bei kleinem Axenwinkel ($cos\, V = 1$) eine durch die optischen Axen gehende gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten in die Ebenen A und P fallen. Bei grösserem Axenwinkel zerfällt diese eine Hyperbel in zwei. Dieselbe schneiden die Ebene der optischen Axen nahezu rechtwinklig (streng für $cos\, V = 1$); diese die Interferenzfigur durchziehenden schwarzen Linien sind sehr geeignet, den scheinbaren Winkel der optischen Axen zu messen, d. h. denjenigen Winkel $2\, V'$, welchen zwei aus der Platte austretende Wellennormalen mit einander bilden, welche im Innern derselben in den Richtungen der optischen Axen verlaufen sind, d. h. dort den Winkel $2\, V$ miteinander gebildet haben. Da die Geschwindigkeit der Wellennormalen im Krystall in Richtung einer optischen Axe $\sqrt{b}$ ist, so ergiebt sich V aus dem zu messenden V' nach dem Brechungsgesetz:

$$sin\, V = sin\, V' \cdot \frac{\sqrt{b}}{\omega_0}. \tag{82}$$

Man ermittelt V, indem man den Drehungswinkel an einem Theilkreise abliest, um welchen man die Krystallplatte um eine zur Ebene der optischen Axen senkrechte Axe (optische Symmetrieaxe y) drehen muss, damit die schwarzen Linien, welche die Spuren der optischen Axen in der Diagonalstellung der Platte kennzeichnen, mit einem Fadenkreuz zur Deckung gelangen, welches in der Brennebene des zweiten Sammellinsensystems angebracht ist. Die Instrumente, welche man zu diesen Zwecken verwendet, heissen Axenwinkelapparate oder Stauroskope[1]). Ist der Winkel $2\, V$ der optischen Axen so gross, dass Lichtwellen, welche in ihrer Richtung verlaufen, aus dem Krystall in Luft nicht austreten, so beobachtet man die Krystallplatte in einem Kästchen, in welches man

[1]) Betreffs der genaueren Beschreibung dieser Apparate vergl. LASPEYRES, Ztschrft. f. Instrumkde. 2, pag. 14 u. 54. 1882. — A. DES CLOIZEAUX, Ann. des mines (6) 6, pag. 572. 1864. — POGG. Ann. 126, pag. 403. 1865. — V. VON LANG, Wien. Ber. 45, pag. 587. 1862; 55, pag. 545. 1867. — Rep. dr. Exper. Phys. 3, pag. 201. 1867. — P. GROTH, POGG. Ann. 144, pag. 49. 1871. — TH. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 180. 1885. — Ber. üb. d. wiss. Instrum. etc., pag. 345. — Physikal. Krystallogr., pag. 489. — Ueber die dioptrischen Bedingungen der Messung von Axenwinkeln vergl. S. CZAPSKI, N. Jahrb. f. Mineral. Beil. Bd. 7, pag. 500. 1891.

Flüssigkeiten von geringerer Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit ω_0 giesst. Die feineren Instrumente besitzen ausser dem Polarisator- und Analysatorrohr noch ein seitliches Collimatorrohr, mit Hilfe dessen man den Winkel der Plattennormale gegen die (scheinbaren) optischen Axen bestimmen kann. Kennt man diese, so kann man nach einer von G. KIRCHHOFF[1]) gegebenen Formel den wahren Axenwinkel $2V$ berechnen, falls ausserdem noch b bekannt ist. B. HECHT[2]) hat näher den Einfluss studirt, welchen Orientirungsfehler der Platte, d. h. Abweichungen ihrer Normale von der Richtung der Mittellinie, auf die Bestimmung des Axenwinkels ausüben. Es erweist sich die Formel (82), in welcher $2V'$ den wirklich an der Platte gemessenen scheinbaren Axenwinkel bedeutet, unverändert gültig, so lange die Plattennormale in der durch die Mittellinie gehenden, auf der Ebene der optischen Axen senkrechten Ebene liegt. Die Orientirungsfehler haben um so geringeren Einfluss, je näher der Brechungsexponent der umgebenden Flüssigkeit gleich dem mittleren $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ des Krystalls ist. Es ist daher günstig, den scheinbaren Axenwinkel innerhalb einer die Krystallplatte umgebenden Flüssigkeit zu beobachten. Falls diese einen Brechungsexponenten von 1·6 besitzt, so liegt derselbe für die meisten Krystalle ihrem mittleren Brechungsexponenten hinreichend nahe, um kleine Orientirungsfehler der Platte vernachlässigen zu können.

Die Messung des Winkels der optischen Axen gewährt ebenfalls eine scharfe Prüfung[3]) der FRESNEL'schen Gesetze, falls die optischen Constanten des Krystalls aus Prismenbeobachtungen berechnet sind (cf. pag. 711).

Zur Bestimmung des Axenwinkels ist homogene Beleuchtung anzuwenden[4]), da derselbe von der Wellenlänge abhängig ist. Im weissen Lichte erscheinen die Hauptisogyren in Folge der Dispersion der optischen Axen farbig gesäumt. Aus der Symmetrie[5]) des Farbenbildes in der Diagonalstellung der Platte kann man direkt einen Schluss auf das Krystallsystem derselben machen. Bei rhombischen Krystallen besitzt das Interferenzbild zwei senkrechte Symmetrielinien, bei monoklinen entweder nur eine [und zwar verläuft dieselbe parallel zur Ebene der optischen Axen, falls diese mit der krystallographischen Symmetrieebene zusammenfällt (sogen. geneigte Dispersion) oder senkrecht zur Ebene der optischen Axen, falls die zweite Mittellinie senkrecht zu der krystallographischen Symmetrieebene steht (horizontale Dispersion)] oder sie besitzt nur ein Symmetriecentrum [falls nämlich die erste Mittellinie senkrecht zur krystallographischen Symmetrieebene steht (gekreuzte Dispersion)]. Bei triklinen Krystallen ist das Interferenzbild völlig unsymmetrisch.

Ist die Krystallplatte senkrecht zur zweiten Mittellinie geschliffen, so ist das Interferenzbild im Allgemeinen von demselben Charakter, wie das vorhin

---

1) G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. 108, pag. 571. 1859. — Vergl. auch TH. LIEBISCH, Ztschrft. für Krystallogr. 7, pag. 304. 1882.

2) B. HECHT, N. Jahrb. f. Mineral. 1, pag. 250. 1887.

3) Vergl. G. KIRCHHOFF, l. c. Derselbe hat diese Prüfung am Arragonit vollzogen und befriedigende Uebereinstimmung mit der Theorie erhalten.

4) KIRCHHOFF (l. c., pag. 567, Ges. Abhandl. Leipzig, 1882, pag. 577) hat seinem Apparate eine Einrichtung gegeben, vermöge welcher man den Axenwinkel für die FRAUNHOFER-schen Linien bestimmen kann. Vergl. auch V. VON LANG, Wien. Ber. (II), 76, pag. 805. 1877. Zeitschr. f. Kryst. 2, pag. 492. 1878. — H. DUFET, Bull. soc. franç. de min. 9, pag. 275. 1886. Journ. de phys. (2) 5, pag. 564. 1886.

5) Vergl. pag. 687.

betrachtete. Speciell kennzeichnen sich die Spuren der optischen Axen in der Diagonalstellung der Platte in gleicher Weise wie vorhin durch die schwarzen hyperbolischen Hauptisogyren. Gelangen daher die optischen Axen zum Austritt aus der Platte, so kann man in gleicher Weise wie bei Platten, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffen sind, ihren scheinbaren Winkel $2V''$ stauroskopisch messen. Da die optischen Axen mit der Plattennormale den Winkel $\frac{\pi}{2} - V$ einschliessen, so ergiebt sich V nach der Gleichung (82):

$$cos\, V = sin\, V'' \frac{\sqrt{b}}{\omega_0}. \tag{83}$$

Hat man an einer senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffenen Platte den scheinbaren Axenwinkel $2V'$ gemessen, so kann man mit Hilfe der letzten Gleichung und der Gleichung (82) sowohl den Axenwinkel $2V$ als b bestimmen. Denn aus (82) und (83) folgt:

$$tang\, V = sin\, V' : sin\, V'', \quad \frac{\omega_0^2}{b} = sin^2 V' + sin^2 V''. \tag{84}$$

Dieses von DES CLOIZEAUX[1]) angegebene Verfahren wird oft angewandt. Wie DE SÉNARMONT[2]) gezeigt hat, kann man überhaupt V und b durch Beobachtung des scheinbaren Winkels der optischen Axen an zwei Platten finden, deren Normalen zwei beliebige Lagen in der Ebene der optischen Axen besitzen.

Ist die Krystallplatte parallel zur Ebene der optischen Axen geschliffen, so sind nach pag. 725 die Isochromaten in der Mitte des Gesichtsfeldes gleichseitige Hyperbeln. Jede Isogyre ist eine Hyperbel. Da aber hier die Orientirung der Polarisationsrichtungen innerhalb des Gesichtsfeldes nur sehr geringe Aenderungen erfährt, so tritt bei gekreuzten Nicols die vollkommen dunkle Isogyre viel weniger deutlich hervor, als bei den vorhin betrachteten Platten.

Ist die Krystallplatte senkrecht zu einer optischen Axe geschliffen, so sind nach Gleichung (69') die Isochromaten Kreise um die optische Axe, deren Radien aber nicht, wie bei einaxigen Platten, wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen wachsen, sondern wie die ganzen Zahlen selber[3]). Auch hinsichtlich der Hauptisogyren unterscheidet sich die Platte des zweiaxigen Krystalls von der des einaxigen.

Legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen z'-Axe in die Plattennormale (optische Axe), während die y'-Axe in die alte y-Axe fällt, so ist zu setzen:

$$x = x' cos\, V + z' sin\, V, \quad y = y', \quad z = -x' sin\, V + z' cos\, V.$$

Nennt man v den Winkel der Polarisationsrichtung η mit der Ebene $(x'z')$ der optischen Axen, so ist

$$\sigma_1 = cos\, V cos\, \nu, \quad \sigma_2 = sin\, \nu, \quad \sigma_3 = -sin\, V cos\, \nu.$$

Dadurch geht die Gleichung (79) der Isogyren, falls man sich auf Punkte in der Nähe der optischen Axe beschränkt und $z' = l$ setzt, über in

$$\frac{y'}{x'} = tang\, 2\nu.$$

---

[1]) A. DES CLOIZEAUX, Compt. rend. 52, pag. 784. 1861.

[2]) H. DE SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (3) 33, pag. 412. 1851. — POGG. Ann. 86, pag. 55. 1852.

[3]) Aus der Messung der successiven Radien kann man analog wie bei einaxigen Krystallen $a - c$ berechnen, falls man a kennt.

Die Hauptisogyren sind daher zwei durch die optische Axe gehende Gerade, welche mit einander den Winkel 2 (AP) einschliessen. Für gekreuzte Nicols $\left[(AP) = \frac{\pi}{2}\right]$ fallen sie in eine einzige Gerade zusammen. Der Winkel derselben mit der Ebene der optischen Axen wird durch die Polarisationsebenen P und A des Polarisators und Analysators halbirt. Bei Drehung der Krystallplatte dreht sich daher die (schwarze) Hauptisogyre gleich schnell in entgegengesetzter Richtung. — Bei einaxigen Platten bilden, wie wir oben pag. 729 sahen, die Hauptisogyren bei gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz, dessen Lage bei Drehen der Krystallplatte unverändert bleibt[1]).

Die Interferenzerscheinungen nehmen andere Formen an, wenn das einfallende Licht cirkular oder elliptisch polarisirt ist, und das aus der Krystallplatte austretende Licht entweder linear oder elliptisch analysirt wird. Letzteres ist z. B. der Fall, wenn man die Krystallplatte im Polarisationsapparat zwischen zwei $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen einschaltet. Alle diese Erscheinungen werden allgemein behandelt, wenn man anstatt einer Krystallplatte, deren zwei oder drei übereinander gelegte voraussetzt. In der Natur kommen diese Fälle bei den Zwillingskrystallen vor. Wir greifen hier nur einige für die Praxis wichtige Fälle heraus[2]).

Es möge eine zur optischen Axe senkrecht geschliffene Platte eines einaxigen Krystalls zwischen gekreuzten Nicols im cirkular polarisirten convergenten Lichte betrachtet werden. Letzteres kann man dadurch herstellen, dass man ein $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen in den Polarisationsapparat vor der Krystallplatte einschaltet, dessen Polarisationsebenen H_1', H_2' den rechten Winkel zwischen den Polarisationsebenen A und P des Analysators und Polarisators halbiren. Es möge H_1' die Polarisationsebene der schnelleren Welle im $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen sein. (Dieselbe liegt bei Spaltblättchen von Glimmer in der Ebene der optischen Axen).

Wir setzen voraus, dass die Schwingungen des Lichtes in ihren Polarisationsebenen stattfinden (die Annahme, dass beide senkrecht zu einander stehen, führt zu denselben Resultaten). Wenn die längs P schwingende einfallende Lichtbewegung durch

$$u_P = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt wird, so sind dessen Componenten nach H_1' und H_2', falls beide als positiv nach derselben Seite von P gerechnet werden: $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{a}{\sqrt{2}}$.

---

[1]) Eine weitere Differenz einer zweiaxigen und einaxigen, senkrecht zur Axe geschliffenen Platte ergiebt sich in dem Verhalten bei senkrecht einfallendem Licht. Während letztere bei gekreuzten Nicols vollkommen dunkel erscheint, ist das bei ersterer nicht der Fall, da sie zur conischen Refraction Anlass giebt (cf. E. Kalkowski, Zeitschr. f. Krystallogr. 9, pag. 486. 1884).

[2]) Betreffs der ausführlicheren Behandlung der Interferenzerscheinungen des polarisirten Lichtes in mehreren übereinander geschalteten Platten und der Interferenzerscheinungen des cirkular polarisirten Lichtes vergl. G. S. Ohm, Münch. Abh. 7, pag. 43 u. 265. 1853. — E. Wilde, Pogg. Ann. 89, pag. 234 u. 402. 1853. — A. Bertin, Compt. rend. 48, pag. 458. 1859. — Ann. de chim. et de phys. (3) 57, pag. 257. 1859. — Ibid. (4) 13, pag. 240. 1868. — Ibid. (5) 18, pag. 495. 1879. — Ibid. (6) 2, pag. 485. 1884. — M. v. d. Willigen, Pogg. Ann. Jubelbd., pag. 491. 1874. W. Pscheidl, Pogg. Ann. Egbd. 8, pag. 497. 1878. — L. Wright, Phil. Mag. (5) 13, pag. 20. 1882. — H. G. Madan, Nature, 31, pag. 83. 1884. — Die Erscheinungen in Zwillingsplatten sind behandelt bei Ch. Langberg, Pogg. Ann. Egbd. 1, pag. 529. 1842. — Ohm, l. c. und Pogg. Ann. 90, pag. 327. 1853. — v. d. Willigen nnd A. Bertin, l. c. — Fr. Pockels, Gött. Nachr. 1890. — Th. Liebisch, physikal. Krystallogr. pag. 499. Dort finden sich auch photographische Reproductionen dieser Erscheinungen.

Nach dem Austritt aus dem $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen ist daher die nach H_1' schwingende Lichtbewegung darzustellen durch

$$u_{H_1'} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

die nach H_2' schwingende Bewegung durch

$$u_{H_2'} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Da das austretende Licht cirkular polarisirt ist, so wird dasselbe nicht in seiner Natur geändert, wenn man das $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen mit dem Polarisator gemeinschaftlich dreht. Man kann daher voraussetzen, dass die Polarisationsebenen H_1 und H_2 der Platte des einaxigen Krystalls mit H_1' und H_2' zusammenfallen.

Nach dem Austritt aus der Platte lässt sich daher die längs H_1 stattfindende Lichtbewegung darstellen durch

$$u_{H_1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{o}\right),$$

die längs H_2 stattfindende durch

$$u_{H_2} = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{e}\right) - \frac{\pi}{2}\right],$$

wo l die Dicke der Krystallplatte, o und e die Geschwindigkeit der ordinären und extraordinären Welle bedeutet.

Die längs der Ebene A des Analysators stattfindende Lichtbewegung ist daher, falls die positive Richtung von A in dem von den positiven Richtungen H_1, H_2 gebildeten Winkel liegt,

$$u_A = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\varphi - \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\varphi\right],$$

falls φ den zwischen H_1 und A gebildeten Winkel und $\delta = \frac{2\pi}{T} l\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right)$ bedeutet. Die Lichtintensität ist folglich:

$$J^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \sin 2\varphi \sin\delta).$$

Vollkommene Dunkelheit herrscht also dort, wo zugleich

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ oder } -\frac{3\pi}{4}, \quad \delta = \frac{4h+1}{2}\pi, \quad -\frac{4h-1}{2}\pi.$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ oder } +\frac{3\pi}{4}, \quad \delta = \frac{4h-1}{2}\pi, \quad -\frac{4h+1}{2}\pi.$$

Beachten wir jetzt, dass δ positive oder negative Werthe annimmt, je nachdem der Charakter der Doppelbrechung der Krystallplatte positiv oder negativ ist, so ist ersichtlich, dass im ersten Falle die dunklen Ringe in dem positiven Quadranten, d. h. demjenigen, in welchem die Ebene H_1' liegt, verengert sind gegenüber den im negativen Quadranten vorhandenen. Im zweiten Falle ist es gerade umgekehrt.

Im Mittelpunkte der Platte treten zwei schwarze Flecke auf, deren Verbindungsgerade mit der Spur H_1 bei positivem Krystall ein + Zeichen, bei negativem ein — Zeichen bildet.

Diese sehr bequeme Methode zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung ist von Dove[1]) angegeben. Man erhält dieselbe Erscheinung, wenn

[1]) H. W. Dove, Pogg. Ann. 40, pag. 457 u. 482. 1837. — Vergl. A. Bertin, Ann. de chim. et de phys. (4) 13, pag. 240. 1868.

man das $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen anstatt unter, über der Krystallplatte anbringt. Die Erscheinung ändert sich in diesem Falle nicht, wenn das $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen mit dem Analysator um die Axe des Polarisationsapparates gedreht wird.

Ganz dasselbe Kriterium der Erweiterung oder Verengerung der Isochromaten lässt bei Platten zweiaxiger Krystalle, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschnitten sind, den Charakter der Doppelbrechung erkennen, falls die Ebene der optischen Axen mit der Polarisationsebene des Analysators zusammenfällt.

Anstatt mit Hilfe der $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen kann man das Zeichen der Doppelbrechung bei Krystallplatten auch mit Hilfe von senkrecht zur Axe geschnittenen einaxigen Krystallplatten bestimmen, welche man um eine der zu untersuchenden Platte parallele Gerade dreht. Je nach der Lage, welche diejenige Drehungsaxe zu der krystallographischen Orientirung der Platte besitzt, bei welcher sich die Isochromaten erweitern, kann man den Charakter der Doppelbrechung bestimmen. Diese Methode ist für einaxige Krystalle von GRAILICH[1]), für zweiaxige von NÖRRENBERG[2]) angegeben.

Durch Combination einer doppelbrechenden Platte mit zwei $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen kann man, wie FRESNEL und AIRY gethan haben, künstlich die Erscheinungen der Rotationspolarisation nachahmen[3]).

Eine weitere Anwendung der Combination mehrerer Platten ist das SAVART'sche Polariskop, welches aus zwei gleich dicken, unter fast 45° zur Axe geschnittenen Quarzplatten besteht, deren Hauptschnitte einen rechten Winkel mit einander bilden. Dieses Instrument in Verbindung mit einem Analysator, dessen Polarisationsebene dem von den Polarisationsebenen der Quarzplatten gebildeten Winkel halbirt, lässt Spuren von Polarisation des einfallenden Lichtes scharf erkennen, indem dann ein System paralleler Streifen im Gesichtsfeld wahrzunehmen ist.

IV. Accidentelle Doppelbrechung.

Einfachbrechende Körper werden, wenn man sie in einen deformirten Zustand bringt, wie er durch einseitigen Druck[4]) oder Zug, Biegung, Torsion oder durch ungleichförmige Erwärmung hervorgebracht wird, doppelbrechend. Erscheinungen dieser Art, sowie überhaupt alle diejenigen Aenderungen schon vorhandener, natürlicher Doppelbrechung, welche durch Einwirkung äusserer, nicht den Molekülen innewohnender Kräfte entstehen, werden accidentelle Doppelbrechung genannt. Zu der genannten Gattung von Kräften gehören auch die Wirkungen der Elektricität und des Magnetismus, welche ebenfalls accidentelle Doppelbrechung hervorzurufen im Stande sind. Wir werden indess die letztere Klasse von Erscheinungen hier nicht behandeln, da dieses an späterer Stelle geschieht.

Die Thatsache, dass man in isotropen Körpern durch einseitigen Druck oder Zug Doppelbrechung hervorbringen kann, ist von BREWSTER entdeckt. Der-

---

[1]) cf. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von K. EXNER, 2. Bd., pag. 140. Die zu untersuchende Platte muss parallel zur optischen Axe geschnitten sein.

[2]) A. BERTIN, Ann. de chim. et de phys. (4) 13, pag. 240. 1868.

[3]) Wegen des Details vergl. VERDET, Wellentheorie, deutsch von EXNER, 2. Bd., pag. 166 bis 180.

[4]) Durch allseitigen Druck ändern sich ebenfalls die optischen Eigenschaften der Körper, sie werden aber nicht doppelbrechend. — Ueber Versuche vergl. W. C. RÖNTGEN u. L. ZEHNDER, WIED. Ann. 44, pag. 24. 1891. — G. QUINCKE, WIED. Ann. 44, pag. 774. 1891.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule.)

HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, PORF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. E. BRODHUN-BERLIN, DR. S. CZAPSKI-JENA, Dr. P. DRUDE-GÖTTINGEN, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, PROF. DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, DR. PULFRICH-JENA, PROF. DR. FR. STENGER (†), DR. STRAUBEL-JENA, PROF. DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT HOLZSCHNITTEN.

NEUNZEHNTE LIEFERUNG.



BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1893.

Handbuch der Physik. — Neunzehnte Lieferung.

selbe untersuchte in einer Reihe von Arbeiten[1]) zunächst weiche organische Substanzen, wie Leim, Wachs, Harz, sodann Glas, Flussspath, Steinsalz, und fand, dass sich diese Körper, wenn sie einseitigem Drucke ausgesetzt wurden, wie negative, dagegen bei Einwirkung einseitigen Zuges wie positive, optisch einaxige Krystalle verhalten, deren optische Axe mit der Druck- resp. Zugrichtung zusammenfällt[2]). Der Gangunterschied der beiden in den betreffenden Körpern sich fortpflanzenden Wellen zeigte sich als dem ausgeübten Drucke annähernd proportional. Ebenfalls erwies sich ein gebogener Glasstreifen als doppelbrechend.

Brewster wies die Doppelbrechung durch die Beobachtung der Interferenzfarben im polarisirten Lichte nach.

In direkterer Weise wies Fresnel[3]) die Doppelbrechung in gepressten Gläsern nach, indem er die Richtungsunterschiede der beiden in einem einseiti gedrückten Glasprisma senkrecht zur Druckrichtung sich fortpflanzenden Wellen direkt messen konnte. Er liess einen Lichtstrahl auf einen Satz von vier derartigen Prismen fallen, die hintereinander in paralleler Lage aufgestellt waren und zwischen welchen sich zur Aufhebung starker Ablenkungen des Lichtstrahls undeformirte Prismen derselben Glassorte mit gleichen brechenden Winkeln, wie die deformirten Prismen, doch in zu letzteren inverser Lage, befanden. Er erhielt dann eine sehr deutliche Spaltung des einfallenden Strahles in zwei, deren Richtungsunterschiede einige Minuten betrugen.

Eine allgemeine Theorie der Erscheinungen der accidentellen Doppelbrechung, wie sie durch Einwirkungen elastischer oder thermischer Kräfte in isotropen Körpern hervorgerufen wird, gab F. Neumann[4]). Er fand seine Theorie durch zahlreiche Versuche an deformirten oder ungleichförmig erwärmten Gläsern bestätigt. Den Ausgangspunkt der Theorie bilden folgende Annahmen: 1) In einem gleichförmig deformirten amorphen Körper befolgt die Doppelbrechung dieselben Gesetze, welche für homogene, optisch zweiaxige Krystalle gelten; dabei fallen die optischen Symmetrieaxen mit den Hauptdilatationsaxen zusammen. 2) Ein ungleichförmig deformirter amorpher Körper ist einem Aggregat von unendlich vielen sehr kleinen Krystallindividuen zu vergleichen, wobei die Richtungen der optischen Symmetrieaxen und die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten stetige Functionen des Ortes sind.

Nach Neumann sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten in einem deformirten amorphen Körper gegeben durch die Formeln:

$$A = G + q x_x + p y_y + p z_z,$$
$$B = G + p x_x + q y_y + p z_z,$$
$$C = G + p x_x + p y_y + q z_z,$$

wobei G die Lichtgeschwindigkeit vor der Deformation, x_x, y_y, z_z die Hauptdilatationen und p, q zwei der Substanz eigenthümliche Constanten bedeuten.

---

[1]) D. Brewster, Phil. Trans. 1815, pag. 60; 1816, pag. 156. — Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8, pag. 369. 1818. — Pogg. Ann. 19, pag. 527. 1830.

[2]) Dies Verhalten ist bisher an fast allen amorphen Körpern constatirt mit sehr wenig Ausnahmen. Zu letzteren gehört nach E. Mach (Opt.-akust. Versuche, Prag 1873, pag. 32), stark eingedickte Metaphosphorsäure, ferner nach v. Ebner (Wien. Ber. 97, pag. 39. 1888), Kirschgummi und Traganthgummi. — Vergl. Ambronn, Wied. Ann. 38, pag. 159. 1889.

[3]) A. Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 20, pag. 376. 1822.

[4]) F. Neumann, Abhandl. der Berl. Akad. 1841, Theil II., pag. 1. — Pogg. Ann. 54, pag. 449. 1841.

Durch Beobachtungen der Stärke der Doppelbrechung, wie z. B. durch Messung des Gangunterschiedes der beiden im deformirten Körper fortgepflanzten Wellen, durch Beobachtung der Interferenzfarben oder Interferenzfiguren im polarisirten Licht, erhält man Aufschluss über die Differenz $p - q$ der beiden charakteristischen Constanten, während ihre absoluten Werthe durch Messung der absoluten Aenderung des Brechungsexponenten der Substanz zu erhalten sind, welche durch die Deformation hervorgerufen wird. Diese Aenderung kann man gut mit Hilfe eines JAMIN'schen Interferentialrefractors nach der FIZEAU-schen Methode bestimmen oder durch Messung der Verschiebung der FRAUNHOFER-schen Beugungsfransen, welche durch zwei Oeffnungen hervorgerufen werden, vor deren eine man die deformirte, vor deren zweite man eine gleich dicke undeformirte Platte des zu untersuchenden Körpers stellt. – Letztere Methode hat NEUMANN beim Glase angewandt, sein Resultat ist jedoch in Folge einer falschen Berücksichtigung der durch den Druck hervorgebrachten Dickenänderung der Glasplatte nicht richtig[1]). Berechnet man die Constanten p und q aus den NEUMANN'schen Beobachtungen nach einer richtigen Formel, so ergiebt sich aus dieser Berechnung, dass der Brechungsexponent des Glases bei einer durch allseitigen Druck hervorgebrachten Compression zunimmt. Da durch Versuche nachgewiesen ist, dass dasselbe bei gleichförmiger Erwärmung der Fall ist, welche eine Dilatation zur Folge hat, so muss man daher annehmen, dass es für die Werthe der Constanten p, q nicht gleichgültig ist, ob die Deformationen durch Temperaturänderungen oder durch Einwirkung von äusseren Oberflächenkräften hervorgerufen werden.

Weitere messende Versuche über die durch Druck hervorgerufene Doppelbrechung des Glases sind nachdem von WERTHEIM[2]), BRAVAIS[3]), E. MACH[4]) und KERR[5]) ausgeführt. Das Verhalten von Kautschuk und Leimgallerten ist von BJERKÉN[6]) untersucht. — Ueber experimentelle Anordnung vergl. auch BOUASSE.[7])

Dass schon die durch Tonschwingungen hervorgebrachten Dilatationen merkliche Doppelbrechung im Glase hervorrufen, ist von BIOT[8]) gezeigt, welcher eine 2 *m* lange Glasplatte in tönende Longitudinalschwingungen versetzte. Bei jeder Reibung war in der Nähe der Knotenlinien Doppelbrechung wahrzunehmen. Dieses Experiment ist später von KUNDT[9]) wiederholt, welcher nachweisen konnte, dass an jenen Stellen die Doppelbrechung periodisch intermittirend auftritt, und zwar ist die Periode gleich der des Tones.

Dass man an isotropen Körpern durch Druck oder Zug auch Dichroismus (cf. weiter unten) erzeugen kann, wurde zuerst von KUNDT[10]) an Kautschuk, dann

---

[1]) Vergl. F. POCKELS, Ueber den Einfluss elastischer Deformationen, speciell einseitigen Druckes auf das optische Verhalten krystallinischer Körper. Inaug.-Dissert. Göttingen 1889, pag. 91.

[2]) WERTHEIM, Compt. rend. 32, pag. 289. 1851. — POGG. Ann. 86, pag. 321. 1852. — Ann. de chim. et de phys. (3) 12, pag. 136. 1854.

[3]) BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 147. 1855. — POGG. Ann. 96, pag. 395. 1855.

[4]) E. MACH, POGG. Ann. 146, pag. 1872.

[5]) J. KERR, Phil. Mag. (5) 26, pag. 321. 1888.

[6]) P. v. BJERKÉN, WIED. Ann. 43, pag. 808. 1891.

[7]) BOUASSE, Séanc. de la Soc. franc. de Phys. 1890, pag. 245.

[8]) BIOT, Ann. de chim. et de phys. (2) 13, pag. 151. 1820.

[9]) A. KUNDT, POGG. Ann. 123, pag. 541. 1864.

[10]) A. KUNDT, POGG. Ann. 151, pag. 126. 1874.

von v. SEHERR-THOSS[1]) an auf Glas gestrichenen breiartigen Farbstoffen und von v. LASAULX[2]) an Krystallen der Silberhaloide beobachtet.

Die Einwirkung elastischer Deformationen auf die optischen Eigenschaften von Krystallen ist ebenfalls zuerst von BREWSTER[3]) studirt. Er fand, dass optisch einaxige Krystalle durch eine senkrecht zur optischen Axe ausgeübte Compression zweiaxig werden. Nach den Beobachtungen von MOIGNO und SOLEIL[4]) liegt die Ebene der optischen Axen parallel oder senkrecht zur Druckrichtung je nachdem der Charakter der Doppelbrechung des einaxigen Krystalls positiv oder negativ ist. Es war dies Verhalten schon nach den an isotropen Körpern angestellten Versuchen zu erwarten. Da dieselben durch einseitigen Druck zu negativ einaxigen Krystallen werden, so spricht sich darin das Gesetz aus, dass die in die Druckrichtung fallende Axe des zur Construction der Wellenfläche dienenden Ovaloids grösser ist, als die dazu senkrechten Axen, oder mit anderen Worten, dass durch Druck die in die Richtung desselben fallende Ovaloidaxe vergrössert, dagegen durch Zug verkleinert wird. Bei einem positiv einaxigen Krystall liegt in der Richtung der optischen Axe die kleinste Ovaloidaxe. Wirkt nun ein Druck senkrecht zu derselben, so wird die in die Druckrichtung fallende grosse Ovaloidaxe noch weiter vergrössert, daher liegen die extremen Werthe der Ovaloidaxen, d. h. die Ebene der optischen Axen, in der Druckrichtung. Bei einseitigem Zuge muss dagegen die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Zugrichtung liegen, da durch Zug die in dessen Richtung fallende grösste Ovaloidaxe des positiv einaxigen Krystalls verkleinert, d. h. zur mittleren Ovaloidaxe gemacht wird.

Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei den negativ einaxigen Krystallen, da bei diesen die grösste Ovaloidaxe in die Richtung der optischen Axe fällt.

Weitere Versuche über die Aenderung der optischen Eigenschaften der Krystalle durch Druck sind von WERTHEIM[5]), BRAVAIS[6]), PFAFF[7]), VAN DER WILLIGEN[8]), MACH und MERTEN[9]), JANNETAZ[10]), BÜCKING[11]), KLOCKE[12]), BRAUNS[13]), KLEIN[14]) gemacht.

Besonderes Interesse erwecken unter diesen Versuchen die von MACH und MERTEN am Quarz angestellten, welcher durch Druck zweiaxig wird und die Eigenschaft der Circularpolarisation (cf. das spätere Capitel) in Richtung der optischen Axen behält.

---

1) v. SEHERR-THOSS, WIED. Ann. 6, pag. 270. 1879.

2) v. LASAULX, Sitzber. der schles. Ges. f. vaterl. Cultur 1879, pag. 171.

3) D. BREWSTER, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8, pag. 281. 1818.

4) MOIGNO u. SOLEIL, Compt. rend. 30, pag. 361. 1850. — MOIGNO, Rép. d'opt. mod. Paris 1850, 4, pag. 1592.

5) W. WERTHEIM, Compt. rend. 33, pag. 576. 1851; 35, pag. 276. 1852. — POGG. Ann. 86, pag. 321. 1852; 87, pag. 498. 1852.

6) A. BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 147. 1855. — POGG. Ann. 96 pag. 395. 1855.

7) TH. PFAFF, POGG. Ann. 107, pag. 333. 1859; 108, pag. 598. 1859.

8) VAN DER WILLIGEN, Arch. de musée de Teyl. 3, pag. 292. 1874.

9) E. MACH u. J. MERTEN, Wien. Ber. (2) 72, pag. 315. 1875. — POGG. Ann. 15 pag. 639. 1875.

10) JANNETAZ, Zeitschr. f. Kryst. 4, pag. 421. 1880.

11) H. BÜCKING, N. Jahrb. f. Min. 1, Ref. pag. 177. 1881. — Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 32, pag. 199. 1880. — Zeitschr. f. Kryst. 7, pag. 555. 1883.

12) F. KLOCKE, N. Jahrb. f. Min. 2, pag 249. 1881.

13) R. BRAUNS, N. Jahrb. f. Min. 1, pag. 232. 1886.

14) C. KLEIN, Berl. Ber. 1890, 1, pag. 724.

Die von NEUMANN für amorphe Körper gegebene Theorie dieser Erscheinungen ist von POCKELS[1]) auf gleichförmig deformirte Krystalle erweitert und durch Beobachtungen geprüft worden. Es ist dabei der Theorie die Annahme zu Grunde gelegt, dass auch im deformirten Zustande die FRESNEL'schen Gesetze Gültigkeit behalten. Die optischen Symmetrieaxen fallen in dem deformirten Krystall im Allgemeinen nicht mehr mit den Dilatationshauptaxen zusammen. Dadurch wird die Zahl der für die accidentelle Doppelbrechung charakteristischen Constanten erheblich (beim triklinen Krystall 36, beim regulären 3). Die Durchführung der Theorie lehrt u. a. auch in einfacher Weise alle möglichen Fälle für das Verhalten von regulären Krystallen kennen. Diese werden durch Druck zweiaxig, jedoch ist das Gesetz über die Lage der Ebenen der optischen Axen ein zunächst nicht sehr übersichtliches. Nach der POCKELS'schen Theorie sind hinsichtlich der Lage der Ebene der optischen Axen die regulären Krystalle in vier wesentlich verschiedene Typen einzutheilen. Es gilt ferner das Gesetz, dass die optischen Axen in dem deformirten Krystall ihre Lage behalten, wenn sich nur die absolute Grösse der äusseren Drucke ändert, während die Verhältnisse der elastischen Druckcomponenten ungeändert bleiben, wie es bei einseitigem Zuge der Fall ist.

Für Krystalle hat sich bisher nicht das beim Glase constatirte merkwürdige Verhalten bestätigt, dass es für die Werthe der die Erscheinungen der accidentellen Doppelbrechung bestimmenden Constanten einen Unterschied macht, ob die Deformationen durch Druckkräfte, oder durch Temperaturänderungen hervorgebracht werden.

Die Doppelbrechungs-Erscheinungen, welche man in schlecht gekühlten Gläsern wahrnimmt, sind auf die gleichen Ursachen zurückzuführen, wie die beschriebenen Erscheinungen, nämlich auf im Innern der Gläser existirende Spannungen und dadurch herbeigeführte Deformationen. Diese Erscheinungen sind zuerst von SEEBECK[2]) beobachtet, ihre Ursache ist bald darauf von BREWSTER[3]) erkannt. Nachdem sind sie von MACÉ DE LEPINAY[4]) weiter studirt. Derselbe konnte durch Beobachtung der NEWTON'schen Ringe, welche eine auf die zu untersuchende Glasplatte aufgelegte Glaslinse hervorbrachte, direkt die durch den Process der Härtung hervorgerufene Deformation durch die Veränderung der NEWTON'schen Ringe messen. CZAPSKI[5]) hat eine einfache Methode angegeben, um an schlecht gekühlten Glasplatten ein Bild von dem Verlauf der Spannungen im Innern derselben zu erhalten. Bei Betrachtung zwischen gekreuzten Nicols treten auch im parallelen Lichte Interferenzcurven auf, da der Gangunterschied der beiden in der Glasplatte fortgepflanzten Wellen von Punkt zu Punkt wechselt. Dies hat auch zur Folge, dass eine planparallele, schlecht gekühlte Glasplatte wie eine Zerstreuungslinse wirkt, d. h. Brennpunkteigenschaften besitzt.

Die Krystallisation hat oft ähnliche Wirkungen, wie das schnelle Kühlen, wie BRAVAIS[6]) gezeigt hat. Die zahlreichen Anomalien, welche reguläre Krystalle

---

[1]) J. POCKELS, die oben (pag. 738) citirte Dissertat. Abgedruckt in WIED. Ann. 37, pag. 144 u. 269. 1889. — Vergl. auch WIED. Ann. 39, pag. 440. 1890.

[2]) SEEBECK, SCHWEIGGER's Journ. 7, pag. 252, 382. 1813; 11, pag. 471. 1814; 12, pag. 1. 1814.

[3]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. 1; 1816, pag. 46.

[4]) MACÉ, Compt. rend. 84, pag. 1024. 1877. — MACÉ DE LÉPINAY, Ann. de chim. et de phys. (5) 19, pag. 5. 1880.

[5]) S. CZAPSKI, WIED. Ann. 42, pag. 319. 1891.

[6]) BRAVAIS, Ann. de chim. et de phys. (3) 43, pag. 129. 1855.

in ihrem optischen Verhalten zeigen, indem sie doppelbrechend sind, sind meist auf unregelmässige Spannungen im Innern der Krystalle zurückzuführen[1]).

In den bisher erwähnten Fällen ist die accidentelle Doppelbrechung nur an festen Körpern beobachtet, jedoch ist dieselbe auch an zähen Flüssigkeiten zu beobachten, wenn sie in eine derartige Bewegung versetzt werden, dass verschiedene Theile derselben verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Dieser Fall von Doppelbrechung ist zuerst von MAXWELL[2]) am Canadabalsam beobachtet. Er wurde später von KUNDT[3]) näher untersucht, indem er einen massiven Messingcylinder innerhalb eines festen Hohlcylinders rotiren liess in einem grösseren Kasten, welcher die zu untersuchende Flüssigkeit aufnahm. Die Flüssigkeit ist für Lichtwellen, welche dieselbe parallel der Rotationsaxe durchsetzen, doppelbrechend, und zwar nimmt die Grösse der Doppelbrechung mit Entfernung des durchsetzenden Lichtstrahls von der Rotationsaxe ab. Dass eine solche Abnahme eintreten muss, ergiebt sich aus den von STOKES[4]) angestellten theoretischen Betrachtungen über die stationäre Bewegung einer reibenden incompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei unendlich langen concentrischen Cylindern. Hiernach nimmt die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten zweier benachbarter Flüssigkeitsringe mit wachsenden Radien derselben ab. In Folge der verschiedenen Geschwindigkeit zweier benachbarter Ringe findet für jedes Volumenelement ein zum Radius tangentieller Zug statt, welcher bei einer elastischen Flüssigkeit in jedem Element ein Maximum der Dilatation und Compression in Richtungen herbeiführt, welche unter 45° zum Radius liegen und auf einander senkrecht sind. Diese Richtungen fallen in der That bei den meisten Flüssigkeiten, welche die besprochene Erscheinung zeigen, mit den Polarisationsrichtungen der in derselben fortgepflanzten Lichtwellen zusammen[5]). Der Sinn der Doppelbrechung ist bei den meisten Flüssigkeiten derselbe, wie er für amorphe Körper bei Einwirkung von deformirenden Kräften im Allgemeinen stattfindet, d. h. sie werden durch einseitigen Druck optisch negativ. — Eine Ausnahme von dieser Regel machen jedoch nach UMLAUF[6]) diejenigen Flüssigkeiten (Traganth und Kirschgummi), welche sich auch bei einseitigem Druck der allgemeinen Regel entgegengesetzt verhalten (cf. oben pag. 737, Anm. 2). KUNDT constatirte ferner, dass die Stärke der Doppelbrechung mit der Rotationsgeschwindigkeit des inneren Cylinders proportional sei. Die Grösse des Reibungscoëfficienten ist indess für die Stärke der Doppelbrechung nicht allein maassgebend, wenigstens wenn man verschiedene Flüssigkeiten mit einander vergleicht, wohl aber ist die Doppelbrechung dem Reibungscoëfficienten bei ein und derselben Flüssigkeit proportional, wenn man deren Reibung durch Temperaturänderungen variirt. Dieses Verhalten hat DE METZ[7]) constatirt.

P. DRUDE.

---

[1]) Vergl. hierüber die Lehrbücher d. Mineralogie und die Untersuchungen von C. KLEIN, Zeitschr. f. Kryst. 9, pag. 38. 1884. — Gött. Nachr. 1884, pag. 129; 1882, No. 16. — MALLARD, Zeitschr. f. Kryst. 9, pag. 398. 1884. — R. BRAUNS, die opt. Anomalien der Krystalle. Preisschr. der JABLONOWSKI'schen Ges. Leipzig 1891.

[2]) CL. MAXWELL, POGG. Ann. 151, pag. 151. 1874.

[3]) A. KUNDT, WIED. Ann. 13, pag. 110. 1881.

[4]) STOKES, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. 8, 1845. — Math. and Phys. Papers. 1, pag. 102, Cambridge 1880.

[5]) Zur Erklärung der Abweichungen von diesem Gesetz vergl. Th. SCHWEDOFF, Journ. de phys. (3) 1, pag. 49. 1892.

[6]) K. UMLAUF, WIED. Ann. 45, pag. 304. 1892.

[7]) G. DE METZ, WIED. Ann. 35, pag. 497. 1888.

Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier Medien.

Die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, denen der Lichtvector, dessen Componenten u, v, w seien, zu genügen hat, bestimmen vollständig die Amplituden- und Phasenänderungen, welche bei der Reflexion und Brechung des Lichtes beim Uebergang über die Grenze zweier Medien eintreten. — Wie oben gezeigt wurde, hat man eine gewisse Auswahl zwischen verschiedenen Hauptgleichungen und Grenzbedingungen, welche alle zu denselben Resultaten für die Erscheinungen in fortschreitenden Wellen führen. Aus gewissen Bequemlichkeitsrücksichten sollen die Betrachtungen des Folgenden an den sogen. NEUMANN-schen Lichtvector, d. h. an die magnetische Kraft der elektromagnetischen Theorie, anknüpfen.

Die für diesen Lichtvector gültigen Formeln (14), (15), (16) der pag. 669 u. 670 lauten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right), \tag{1}$$

$$2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta.$$

Ist die xy-Ebene die Grenze zwischen den Medien 1 und 2, so ist

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\frac{G}{\partial \eta}\right)_2 \quad \text{für} \quad z = 0. \tag{2}$$

Dabei ist gesetzt [nach (13) pag. 669]

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der allgemeinste Ansatz für ebene Wellen ist durch das Formelsystem gegeben:

$$u = \Re\,[\mathrm{M} e^{i\rho}], \quad v = \Re\,[\mathrm{N} e^{i\rho}], \quad w = \Re\,[\Pi e^{i\rho}].$$

$$\rho = \frac{1}{\tau}(t - \mu x - \nu y - \pi z), \tag{3}$$

worin M, N, Π, μ, ν, π complexe Grössen bedeuten, und das vorgesetzte $\Re$ andeuten soll, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll. Durch den obigen Ansatz ist bei reellen μ, ν, π eine ohne Schwächung sich fortpflanzende elliptische Wellenbewegung charakterisirt. Sind μ, ν, π complex, so bedeutet diess, dass die Amplituden der Lichtbewegung sich nach einer geometrischen Reihe ändern, falls die vom Licht durchlaufenen Strecken arith- wachsen. Im Folgenden sollen diese beiden verschiedenen Arten von Wellenbewegungen kurz unterschieden werden als »Wellen mit constanter und Wellen mit variabler Amplitude«.

Da sämmtliche Gleichungen, denen u, v, w zu genügen haben, linear sind, so kann man auch u, v, w den complexen Grössen selber gleich setzen, wenn man nur am Schluss der Rechnung wieder zu den reellen Grössen übergeht, um die physikalische Bedeutung zu wahren.

Es ist zu bemerken, dass in jedem Medium die u, v, w aus mehreren nach den Formeln (3) gebauten Gliedern zusammengesetzt sind, da aus einer einfallenden Welle mehrere reflektirte und gebrochene entstehen können, wie schon früher pag. 703 abgeleitet ist. Die dort abgeleiteten Resultate, welche auf geometrischem Wege gewonnen waren, ergaben sich nun auch hier in einfacher Weise analytisch aus den Grenzbedingungen.

Legt man die y-Axe senkrecht zur Einfallsebene, so werden u, v, w von y unabhängig, d. h. in den Formeln (3) ist $\nu = 0$ zu setzen. Aus $u_1 = u_2$ für $z = 0$ folgt nun sogleich, dass für sämmtliche Wellen die μ den gleichen Werth besitzen müssen: dies ist das früher (pag. 703) abgeleitete Sinusgesetz. Die Anzahl der möglichen Wellen ergiebt sich, wenn man aus den Hauptgleichungen (1) die Amplituden M, N, Π eliminirt.

Setzt man

$$\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = \sin\varphi, \quad \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = \cos\varphi. \tag{4}$$

wobei also φ, falls es reell ist, d. h. μ und π reell sind, den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der z-Axe einschliesst, d. h. den Einfallswinkel, so erhält man[1] durch jene Elimination, falls man den allen Wellensystemen gemeinsamen Werth von μ mit $1/h$ bezeichnet, die Gleichung:

$$\begin{gathered}[a_{11} - 2a_{13}\,tang\,\varphi + (a_{33} - h^2)\,tang^2\varphi][a_{22} + (a_{22} - h^2)\,tang^2\varphi] \\ - (a_{12} - a_{23}\,tang\,\varphi)^2(1 + tang^2\varphi) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Da die Gleichung (5) biquadratisch in $tang\,\varphi$ ist, so sind daher bei gegebenem μ in jedem Medium vier Wellensysteme möglich. Wir haben folglich zu setzen

$$u_1 = u_1^{(1)} + u^{(2)} + u_1^{(3)} + u_1^{(4)}, \tag{6}$$

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + u_2^{(4)}. \tag{7}$$

Von diesen vier Wellensystemen jedes Mediums sind zwei zur Grenze hinschreitende und zwei von ihr fortschreitende.

Aus den Hauptgleichungen folgen, wie wir früher (pag. 689) sahen, ebenfalls Gleichungen für die Amplitudenverhältnisse M:N:Π. Da wegen der Transversalität der Wellen

$$M\mu + \Pi\pi = 0 \tag{8}$$

ist, so ist das Verhältniss M:Π schon bestimmt. Um auch M:N zu erhalten, bringt man zweckmässig die Amplituden in die Form:

$$M = -A\cos\vartheta\cos\varphi, \quad N = A\sin\vartheta, \quad \Pi = A\cos\vartheta\sin\varphi. \tag{9}$$

Jene beiden aus den Hauptgleichungen folgende Relationen gehen dann in eine einzige Gleichung für ϑ über[2], welche lautet:

$$tang\,\vartheta = \frac{h^2\sin^2\varphi - a_{22}}{a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi}. \tag{10}$$

Die in den Formeln (5) und (10) erhaltenen Resultate lassen sich unabhängig von der besonderen Gestalt der Grenzbedingungen ableiten, da sie aus den Hauptgleichungen folgen. Speciell kann man auch das Resultat der Formel (5) rein geometrisch aus dem HUYGENS'schen Princip ableiten, wie früher (pag. 703) geschehen ist. Anders ist es bei der Berechnung der Amplituden A, indem für diese die Gestalt der Grenzbedingungen maassgebend ist. Es ist zu bemerken, dass eine complexe Amplitude sowohl die Intensität der Lichtbewegung, als auch die Gestalt und Lage der Schwingungsellipse beschreibt, die Berechnung der Amplituden A ergiebt daher nicht nur die durch Reflexion und Brechung hervorgerufenen Intensitätsänderungen, sondern auch die Phasenänderungen der Lichtbewegung.

Bezeichnet man die zu den einzelnen Wellen gehörigen Werthe von φ, ϑ und A durch obere Indices 1 . . 4, dagegen die Zugehörigkeit zu den beiden Medien durch untere Indices 1, 2, so folgt aus den Grenzbedingungen

$$u_1 = u_2, \quad v_1 + v_2, \quad w_1 = w_2, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2,$$

---

[1]) cf. G. KIRCHHOFF, Berl. Ber. 1876.

[2]) cf. KIRCHHOFF, l. c.

welche, wie leicht ersichtlich, wegen der dritten der Hauptgleichungen (1) mit der ursprünglichen Form (2) der Grenzbedingungen äquivalent sind:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \cos\varphi_1^{(n)} \cos\vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \cos\varphi_2^{(n)} \cos\vartheta_2^{(n)}, \\
\sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \sin\vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin\vartheta_2^{(n)}, \\
\sum_{n=1}^{n=4} A_1^{(n)} \sin\varphi_1^{(n)} \cos\vartheta_1^{(n)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin\varphi_2^{(n)} \cos\vartheta_2^{(n)}, \\
\sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_1^{(n)}}{\sin\varphi_1^{(n)}} \left[\sin\vartheta_1^{(n)} \left(a_{11}^{I} \cos\varphi_1^{(n)} - a_{12}^{I} \sin\varphi_1^{(n)}\right) + a_{12}^{I} \cos\vartheta_1^{(n)}\right] &= \\
\sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_2^{(n)}}{\sin\varphi_2^{(n)}} \left[\sin\vartheta_2^{(n)} \left(a_{11}^{II} \cos\varphi_2^{(n)} - a_{12}^{II} \sin\varphi_2^{(n)}\right) + a_{12}^{II} \cos\vartheta_2^{(n)}\right]&.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Die Constanten a_{hk}^{I} beziehen sich auf das Medium 1, die a_{hk}^{II} auf das Medium 2. Diese Constanten hängen ab von der Lage des Coordinatensystems gegen die optischen Symmetrieaxen der Medien. Bezeichnet man dieselben in einem derselben durch s_1, s_2, s_3 und bilden die Coordinatenaxen mit diesen Axen Richtungscosinus, welche durch die Tabelle schematisch gegeben werden:

	s_1,	s_2,	s_3
x	p_1	p_2	p_3
y	q_1	q_2	q_3
z	r_1	r_2	r_3

so folgt aus der Form von G

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= ap_1^2 + bp_2^2 + cp_3^2, \\
a_{22} &= aq_1^2 + bq_2^2 + cq_3^2, \\
a_{33} &= ar_1^2 + br_2^2 + cr_3^2, \\
a_{23} &= a_{32} = aq_1 r_1 + bq_2 r_2 + cq_3 r_3, \\
a_{31} &= a_{13} = ar_1 p_1 + br_2 p_2 + cr_3 p_3, \\
a_{12} &= a_{21} = ap_1 q_1 + bp_2 q_2 + cp_3 q_3,
\end{aligned}
$$

wobei die a, b, c drei dem Medium charakteristische Constanten sind, nämlich die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten (cf. oben pag. 687).

Um auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, muss man gewisse drei von den A gleich Null setzen, und zwar will man aus einer einzigen im Medium 1 einfallenden Welle die in 1 reflectirte und in 2 gebrochene Lichtbewegung finden, so muss man das eine A_1, welches auch noch einfallendem Licht, und ferner die beiden A_2, welche im Medium 2 nach der Grenze hin einfallendem Licht entsprechen, Null setzen, während das andere A_1, welches in 1 einfallendem Licht entspricht, als gegeben anzusehen ist. Die Formeln (11) gestatten dann, die vier übrigen A zu berechnen, so dass alle Grössen, welche die reflektirte und gebrochene Lichtbewegung charakterisiren, bestimmbar sind.

Die weitere Durchführung der aufgestellten Formeln ist nun verschieden, je nachdem φ und ϑ reelle oder complexe Grössen sind, d. h. je nachdem wir es nur mit Wellen constanter Amplitude oder auch mit solchen variabler Amplitude zu thun haben.

Es möge zunächst nur der erstere Fall betrachtet werden. Für ihn ist, im Gegensatz zu dem letzteren, charakteristisch, dass nur ein Theil des ein-

fallenden Lichtes an der Grenze reflektirt wird. — Ausserdem entsteht in diesem Falle aus einfallendem, linear polarisirtem Licht durch Reflexion und Brechung wiederum nur linear polarisirtes Licht, da die Gleichungen (11) durch reelle A befriedigt werden können.

I. Partielle Reflexion.

a) Beide Medien sind krystallinisch.

Dieser allgemeine Fall kann praktisch realisirt werden bei der Reflexion des Lichtes an einer Krystallzwillingsfläche. Hierauf bezügliche Rechnungen sind von F. NEUMANN[1]), GRAILICH[2]) und RAYLEIGH[3]) gegeben. GRAILICH hat auch einige Versuche[4]) an Kalkspathzwillingen angestellt, welche qualitativ die theoretischen Resultate bestätigten.

Die optischen Eigenthümlichkeiten des chlorsauren Kalis sind ferner durch STOKES[5]) und RAYLEIGH[6]) durch Reflexion an eingelagerten Zwillingslamellen erklärt.

Der Beobachtung bei weitem bequemer zugänglich sind diejenigen Fälle, in welchen das Medium, in dem das Licht einfällt, isotrop ist. Diese Fälle sollen nun näher betrachtet werden.

b) Ein Medium ist isotrop.

Das isotrope Medium sei das Medium 1. Für dieses ist daher zu setzen:

$$a_{11}^{l} = a_{22}^{l} = a_{33}^{l} = a_1$$
$$a_{23}^{l} = a_{31}^{l} = a_{12}^{l} = 0. \qquad (12)$$

Die Gleichung (5) für $tang\,\varphi_1$ liefert in Folge dessen die Wurzeln

$$tang^2\varphi_1 = \frac{a_1}{h^2 - a_1}, \text{ d. h.}$$
$$\varphi_1^{(1)} = \varphi, \quad \varphi_1^{(2)} = \varphi, \quad \varphi_1^{(3)} = \pi - \varphi^{7)}, \quad \varphi_1^{(4)} = \pi - \varphi, \qquad (13)$$
$$\mu^2 + \pi_1^2 = \frac{1}{a_1},$$

falls φ den Einfallswinkel der einfallenden Welle bedeutet. Die beiden ersten Wurzeln beziehen sich daher auf die einfallenden Wellen, die beiden letzten auf die reflektirten. — Die Gleichung (10) für $tang\,\vartheta$ nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an; ϑ ist also unbestimmt. Wählt man

$$\vartheta_1^{(1)} = 0, \quad \vartheta_1^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_1^{(3)} = 0, \quad \vartheta_1^{(4)} = \frac{\pi}{2}, \qquad (13')$$

so geht in den Wellen mit ungeradem oberen Index die Bewegung in der Einfallsebene vor sich, in den Wellen mit geradem oberen Index senkrecht zu derselben.

---

1) F. NEUMANN, Abhandl. Berl. Akad. 1835.

2) GRAILICH, Wien. Ber. (II) 11, pag. 817 1853; 12, pag. 230. 1854; 15, pag. 311. 1855.

3) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 26, pag. 241. 1888. Die Formeln sind auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie entwickelt.

4 GRAILICH, Wien. Ber. (II) 19, pag. 226. 1856.

5) STOKES, Proc. Roy. Soc. of London. 25. Febr. 1885.

6) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 26, pag. 256. 1888.

7) Ob man $\pi - \varphi$ oder $-\varphi$ für diese Wurzel nimmt, macht nur einen Unterschied hinsichtlich des Sinnes, in welchem man die reflektirten Amplituden positiv rechnet.

In Folge dieser Verfügungen werden die Gleichungen (11):

$$
\begin{aligned}
(A_1^{(1)} - A_1^{(3)}) \cos\varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \cos\varphi_2^{(n)} \cos\vartheta_2^{(n)}, \\
A_1^{(2)} + A_1^{(4)} &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin\vartheta_2^{(n)}, \\
(A_1^{(1)} + A_1^{(3)}) \sin\varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} A_2^{(n)} \sin\varphi_2^{(n)} \cos\vartheta_2^{(n)}, \qquad (14) \\
(A_1^{(2)} - A_1^{(4)}) \operatorname{cotg}\varphi &= \sum_{n=1}^{n=4} \frac{A_2^{(n)}}{\sin\varphi_2^{(n)}} \left[\sin\vartheta_2^{(n)} \left(\frac{a_{11}^{II}}{a_1} \cos\varphi_2^{(n)} - \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \sin\varphi_2^{(n)}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \cos\vartheta_2^{(n)}\right].
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen werden am einfachsten, wenn im Medium 2 drei der $A = 0$ sind, d. h. nur ein gebrochener Strahl zu Stande kommt. Das vierte der A_2 kann unbeschadet der Allgemeinheit $= 1$ gesetzt werden. Durch die Gleichungen (14) sind dann die A_1 bestimmt, d. h. nur für gewisse Azimuthe der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes (welche je durch das Verhältniss $A_1^{(1)} : A_1^{(2)}$ gegeben sind) kommt im zweiten Medium nur ein gebrochener Strahl zu Stande. Man nennt diese Azimuthe die uniradialen Azimuthe; sie wurden zuerst von Mac Cullagh eingeführt (cf. oben pag. 654).

Es war eines von den A_2 gleich 1 gesetzt. Da dieses nur einer gebrochenen Welle entsprechen soll, so ist φ_2 also noch eine zweideutige Function von h, d. h. μ. Bezeichnet man die beiden Wurzeln von φ_2 mit χ_o resp. χ_e, und ebenso die beiden zugehörigen ϑ_2 mit ϑ_o resp. ϑ_e, so bestimmen sich die uniradialen Amplituden $A_o^{(n)}$ im ersten Medium, welche für den Fall gelten, dass nur diejenige Welle im zweiten Medium zu Stande kommt, deren zugehöriges φ_2 gleich χ_o ist, aus den Formeln:

$$
\begin{aligned}
[A_0^{(1)} - A_0^{(3)}] \cos\varphi &= \cos\chi_0 \cos\vartheta_0, \\
A_0^{(2)} + A_0^{(4)} &= \sin\vartheta_0, \qquad (15) \\
[A_0^{(1)} + A_0^{(3)}] \sin\varphi &= \sin\chi_0 \cos\vartheta_0, \\
[A_0^{(2)} - A_0^{(4)}] \operatorname{cotg}\varphi &= \frac{1}{\sin\chi_0} \left[\sin\vartheta_0 \left(\frac{a_{11}^{II}}{a_1} \cos\chi_0 - \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \sin\chi_0\right) + \frac{a_{12}^{II}}{a_1} \cos\vartheta_0\right].
\end{aligned}
$$

Vertauscht man in diesen Formeln die χ_o und ϑ_o mit χ_e und ϑ_e, so erhält man ebenso vier Gleichungen für die uniradialen Azimuthe $A_e^{(n)}$, welche für den Fall gelten, dass im zweiten Medium nur diejenige Welle existirt, deren zugehöriges φ_2 gleich χ_e ist.

Wir wollen nun annehmen, es sei das einfallende Licht linear polarisirt, und zwar sei E_p die Amplitude der parallel zur Einfallsebene schwingenden, d. h. auch in ihr polarisirten Componente, E_s die Amplitude der senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Componente der einfallenden Welle. Wie wir oben sahen (pag. 745) ist dann auch das reflektirte und gebrochene Licht linear polarisirt; es seien R_p und R_s die parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten, d. h. schwingenden, Componenten der reflektirten Welle, D_o und D_e die Amplituden der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen, welche sich auf die Indices o und e beziehen[1]).

[1]) Der positive Sinn der Amplituden E_p, R_p, D_p soll zur Fortschreitungsrichtung der zugehörigen Wellen stets so liegen, wie die positive x-Axe zur positiven z-Axe. Der positive Sinn von E_s, R_s, D_s liegt der positiven y-Axe parallel.

Nach dem auf pag. 744 Erläuterten ist, falls $D_e = 0$, $D_o = 1$ ist, zu setzen:

$$\mathrm{A}_0^{(1)} = E_p, \quad \mathrm{A}_0^{(3)} = R\,,$$
$$\mathrm{A}_0^{(2)} = E_s, \quad \mathrm{A}_0^{(4)} = R_s,$$

falls dagegen D_0 von 1 verschieden ist, so ist

$$D_0\,\mathrm{A}_0^{(1)} = E_p, \quad D_0\mathrm{A}_0^{(3)} = R_p,$$
$$D_0\mathrm{A}_0^{(2)} = E_s, \quad D_0\mathrm{A}_0^{(4)} = R_s.$$

Ebenso ist, falls D_0 gleich Null ist

$$D_e\,\mathrm{A}_e^{(1)} = E_p, \quad D_e\mathrm{A}_e^{(3)} = R_p,$$
$$D_e\,\mathrm{A}_e^{(2)} = E_s, \quad D_e\mathrm{A}_e^{(4)} = R_s.$$

Nach dem Princip der Coexistenz der Bewegungen, welches hier gilt, da alle Gleichungen linear sind, folgt für den allgemeinen Fall, in welchem D_o und D_e beide von Null verschieden sind:

$$E_p = \mathrm{A}_o^{(1)} D_o + \mathrm{A}_e^{(1)} D_e, \qquad E_s = \mathrm{A}_o^{(2)} D_o + \mathrm{A}_e^{(2)} D_e,$$
$$R_p = \mathrm{A}_o^{(3)} D_o + \mathrm{A}_e^{(3)} D_e, \qquad R_s = \mathrm{A}_o^{(4)} D_o + \mathrm{A}_e^{(4)} D_e.$$

Der Zweck der Rechnung ist, R_p, R_s, D_o, D_e aus E_p und E_s zu berechnen. Durch Umformung dieser Gleichungen erhält man sofort

$$\begin{aligned}
&\varrho D_o = \mathrm{A}_e^{(2)} E_p - \mathrm{A}_e^{(1)} E_s, \qquad \varrho D_e = -\mathrm{A}_o^{(2)} E_p + \mathrm{A}_o^{(1)} E_s,\\
&\varrho R_p = \left[\mathrm{A}_o^{(3)}\mathrm{A}_e^{(2)} - \mathrm{A}_e^{(3)}\mathrm{A}_o^{(2)}\right] E_p - \left[\mathrm{A}_o^{(3)}\mathrm{A}_e^{(1)} - \mathrm{A}_e^{(3)}\mathrm{A}_o^{(1)}\right] E_s,\\
&\varrho R_s = \left[\mathrm{A}_o^{(4)}\mathrm{A}_e^{(2)} - \mathrm{A}_e^{(4)}\mathrm{A}_o^{(2)}\right] E_p - \left[\mathrm{A}_o^{(4)}\mathrm{A}_e^{(1)} - \mathrm{A}_e^{(4)}\mathrm{A}_o^{(1)}\right] E_s,
\end{aligned} \tag{16}$$

wo ϱ eine Abkürzung ist für

$$\varrho = \mathrm{A}_o^{(1)}\mathrm{A}_e^{(2)} - \mathrm{A}_o^{(2)}\mathrm{A}_e^{(1)}.$$

Da die A nach den Formeln (15) bestimmt sind, so ist das Problem völlig gelöst.

Aus diesen Formeln bestimmen sich sowohl die absoluten Intensitäten R_s, R_p, D_o, D_e des reflektirten und gebrochenen Lichtes, als auch die Lage der Polarisationsebenen derselben, welche durch die Verhältnisse R_s/R_p und D_o/D_e gegeben sind. Da diese nicht dieselben Werthe besitzen, wie das Verhältniss E_s/E_p, welches die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes bestimmt, so tritt also durch Reflexion und Brechung eine gewisse Drehung der Polarisationsebene ein. Im Voraus sei schon bemerkt, dass im Gegensatz zu dem Verhalten zweier isotroper Medien bei der Krystallreflexion diese Drehung auch bei senkrechter Incidenz ($\varphi = 0$) vorhanden ist[1]), sowie dass eine fernere Eigenthümlichkeit der Krystallreflexion die ist, dass die Intensität R_p des parallel zur Einfallsebene schwingenden reflektirten Lichtes auch von der Intensität E_s des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden einfallenden Lichtes abhängt, und ebenso R_s auch von E_p.

Aus den beiden letzten der Formeln (16) folgt, dass, falls unter den A eine gewisse Beziehung stattfindet, R_p/R_s von E_p/E_s unabhängig wird, d. h. dass natürliches Licht (in welchem E_p/E_s alle möglichen Werthe besitzt) durch die Reflexion zu linear polarisirtem wird. Man nennt den Einfallswinkel φ, für welchen dies stattfindet, den Polarisationswinkel. Jene Beziehung zwischen den A kann man in die Form bringen:

$$\varrho\left[\mathrm{A}_o^{(3)}\mathrm{A}_e^{(4)} - \mathrm{A}_o^{(4)}\mathrm{A}_e^{(3)}\right] = 0.$$

---

[1]) Diese Drehung ist von SÉNARMONT experimentell constatirt. (Vergl. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von EXNER, 2. Bd., pag. 440. 1887.)

Da $\mathfrak{E}$ nicht verschwinden kann, so ist also der Polarisationswinkel definirt durch

$$A_o^{(3)} A_e^{(4)} - A_o^{(4)} A_e^{(3)} = 0. \quad (17)$$

Das zugehörige Azimuth der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes ist gegeben durch

$$R_s : R_p = A_o^{(4)} : A_o^{(3)} = A_e^{(4)} : A_e^{(3)}. \quad (18)$$

Sowohl φ als R_s'/R_p' hängen ab von der Orientirung der reflectirenden Fläche und der Einfallsebene gegen die optischen Symmetrieaxen des Krystalls, da hierdurch nach pag. 744 die Werthe der a_{hk} beeinflusst werden.

Zuerst ist diese Abhängigkeit des Polarisationswinkels φ' von der Orientirung der spiegelnden Fläche und der Einfallsebene von BREWSTER[1]) am Kalkspath entdeckt, nachdem zuvor MALUS[2]) behauptet hatte, es verhalte sich ein Krystall hinsichtlich der Reflexionsgesetze wie ein isotroper Körper. Die Beobachtungsmethode für φ' ist die, dass man denjenigen Winkel aufsucht, unter welchem natürliches Licht einfallen muss, damit das reflektirte Licht durch ein um seine Axe drehbares NICOL'sches Prisma betrachtet, vollständig ausgelöscht werden kann. Die Lage der Polarisationsebene des Nicols in der Stellung, in welcher dies stattfindet, ergiebt zugleich den Werth von R_s'/R_p'. BREWSTER fand auch, dass der Werth des R_s'/R_p', welches bei Reflexion an isotropen Medien Null ist (cf. unten), stark von 0 abweichende Werthe (bis zu ∞) annimmt, falls das Medium 1, in welchem die Reflexion stattfindet, einen hohen Brechungsexponenten besitzt, wie z. B. Cassiaöl. Dies folgt auch aus der Formel (18).

Nach ihm hat SEEBECK[3]) an mehreren künstlich an einen Kalkspathkrystall angeschliffenen Flächen die Polarisationswinkel φ' gemessen. Er konnte auch die Abweichung des Werthes des Verhältnisses R_s'/R_p' von Null, d. h. die Abweichung der Polarisationsebene des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes von der Einfallsebene, in dem Falle constatiren, dass das erste Medium Luft war. SEEBECK hat besondere Sorgfalt auf die Herstellung reiner, spiegelnder Flächen verwandt und wählte danach das Polirmittel. Dasselbe scheint in der That die Krystallflächen nicht wesentlich verunreinigt zu haben, denn F. NEUMANN[4]) erhielt eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten Werthen und den nach der auseinandergesetzten Theorie sich ergebenden.

Dieselbe wird für einaxige Krystalle einfacher, da zwei der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (5) für $tang\,\varphi$ sich sofort ohne Wurzelzeichen bestimmen, nämlich diejenigen, welche den ordinären Wellen angehören. Für den Werth des Polarisationswinkels φ' ergiebt sich nach NEUMANN, falls die optische Axe in der Einfallsebene liegt und mit der Grenznormale den Winkel w einschliesst, die Gleichung:

$$sin^2\varphi' = \frac{(1-a)\,cos^2 w + (1-c)\,sin^2 w}{1-ac}, \quad (19)$$

wobei a und c die Verhältnisse der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls in der Richtung der optischen Axe zu dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium bedeuten.

Die Gleichung (19) ist dieselbe, welche SEEBECK rein empirisch zur Darstellung seiner Beobachtungen fand.

---

[1]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1819, pag. 145. Die Resultate dieser Arbeit sind von ihm später in Edinb. Trans. 24, pag. 233. 1866 noch weiter bestätigt.

[2]) MALUS, Théorie de la double refraction. Paris 1810.

[3]) SEEBECK, POGG. Ann. 21, pag. 290. 1831.

[4]) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

Zur weiteren Bestätigung seiner Theorie unternahm NEUMANN[1]) noch zahlreiche Messungen unter anderen Winkeln als dem Polarisationswinkel, über die uniradialen Azimuthe und Bestimmung der Azimuthe der Polarisationsebenen des reflektirten und gebrochenen Lichtes bei beliebiger Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Sämmtliche Beobachtungen wurden durch die Rechnung völlig befriedigend dargestellt. Wie NEUMANN[2]) bemerkt hat, erhält man durch die beobachtete Drehung der Polarisationsebene durch Reflexion und Brechung zugleich auch eine Bestätigung der theoretischen Ergebnisse für die absoluten Intensitäten R_s und R_p, da wegen des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte Beziehungen zwischen E_s, E_p und R_s, R_p, D_o, D_e bestehen.

Später sind von CONROY[3]) ausführliche Messungen von φ' und R_s'/R_p' an Spaltflächen von Kalkspath in Luft, Wasser und Chlorkohlenstoff ausgeführt. Im letzteren ist die Abhängigkeit der beobachteten Grössen von der Lage der Einfallsebene besonders stark, was im Einklang mit den Beobachtungen BREWSTER's und den theoretischen Ergebnissen steht (cf. pag. 744). Die gleichen Messungen in Luft sind auch von DRUDE[4]) ausgeführt.

GLAZEBROOK[5]) hat die Azimuthe ϑ_o und ϑ_e der Polarisationsebenen der beiden gebrochenen Strahlen im Kalkspath beobachtet, falls das einfallende Licht in uniradialen Azimuthen polarisirt war. Er erhielt betreffs der Abhängigkeit der ϑ vom Einfallswinkel φ Abweichungen von der theoretischen Formel (10), welche aber wahrscheinlich durch die weiter unten zu besprechenden Störungen veranlasst sind, da angeschliffene und polirte Grenzflächen benutzt wurden.

SCHRAUF[6]) hat ebenfalls Beobachtungen über ϑ_o und ϑ_e angestellt und hat namentlich sein Augenmerk auf die Azimuthdifferenz der gebrochenen Strahlen, d. h. die Grösse $\vartheta_o - \vartheta_e$, gerichtet. Dieselbe weicht von 90° ab, wie auch aus Formel (10) unmittelbar hervorgeht. SCHRAUF fand, dass jene Abweichung von 90° in erster Näherung gleich der Richtungsdifferenz der Normalen der ordinären und extraordinären Welle ist.

c) Beide Medien sind isotrop.

Es ist zu setzen

$$a_{11}^{II} = a_{22}^{II} = a_{33}^{II} = a_2, \quad a_{23}^{II} = a_{31}^{II} = a_{12}^{II} = 0. \tag{20}$$

Die Gleichung (5) liefert für $tang\,\varphi_2$

$$tang^2\varphi_2 = \frac{a_2}{h^2 - a_2},$$

d. h. nach Gleichung (4)

$$\mu^2 + \pi_2^2 = \frac{1}{a_2}. \tag{21}$$

Die Gleichung (10) für $tang\,\vartheta$ erscheint in der Form $\frac{0}{0}$. Wir setzen

$$\vartheta_o = 0, \quad \vartheta_e = \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

---

[1]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 42, pag. 1. 1837.

[2]) F. NEUMANN, Abhandl. der Berl. Acad. 1835.

[3]) CONROY, Proc. Roy. Soc. 40, pag. 173. 1886.

[4]) P. DRUDE, WIED. Ann. 38, pag. 265. 1889.

[5]) R. T. GLAZEBROOK, Proc. Roy. Soc. 32, pag. 30. 1881. — Phil. Trans. for 1882, 173, pag. 595. 1883.

[6]) SCHRAUF, Ztschr. f. Kryst. 11, pag. 5. 1885.

Bezeichnet man mit χ den Brechungswinkel φ_2, wobei wegen (13) und (21) die Relation besteht

$$sin\,\varphi : sin\,\chi = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2} \text{ (Snellius'sches Brechungsgesetz)}, \tag{23}$$

so wird nach den Gleichungen (15) und den entsprechenden für die A_e gebildeten, da $\chi_o = \chi_e = \chi$ ist

$$A_o^{(3)} = A_o^{(4)} = A_e^{(1)} = A_e^{(2)} = 0.$$

$$A_o^{(1)} = \frac{sin\,(\varphi + \chi)}{sin\,2\varphi}, \quad A_o^{(2)} = -\frac{sin\,(\varphi - \chi)}{sin\,2\varphi} \tag{24}$$

$$A_e^{(3)} = \frac{sin\,(\varphi + \chi)\,cos\,(\varphi - \chi)}{sin\,2\varphi}, \quad A_e^{(4)} = \frac{cos\,(\varphi + \chi)\,sin\,(\varphi - \chi)}{sin\,2\varphi}.$$

Nach den Formeln (16) ist daher

$$D_p = E_p\,\frac{sin\,2\varphi}{sin\,(\varphi + \chi)}, \quad D_s = -E_s\,\frac{sin\,2\varphi}{sin\,(\varphi + \chi)\,cos\,(\varphi - \chi)}, \tag{25}$$

$$R_p = -E_p\,\frac{sin\,(\varphi - \chi)}{sin\,(\varphi + \chi)}, \quad R_s = E_s\,\frac{tang\,(\varphi - \chi)}{tang\,(\varphi + \chi)}.$$

In diesen Formeln ist D_p und D_s für D_o und D_e geschrieben, da diese Grössen jetzt die Amplituden der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden gebrochenen Wellen bedeuten.

Die bisherigen Formeln gelten für den Neumann'schen Vector, d. h. die magnetische Kraft. — Um Formeln für den Fresnel'schen Lichtvector oder die elektrische Kraft aufzustellen, genügt zu bemerken, dass nach pag. 672 letzterer Vector in fortschreitenden Wellen stets proportional zu ersterem ist und senkrecht zu ihm liegt. Haben daher $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{E}_s$, $\mathfrak{R}_s$ dieselbe Bedeutung für den Fresnel'schen Vector, wie E_p, etc. für den Neumann'schen, so ist

$$\mathfrak{E}_p = \sigma \cdot E_s, \quad \mathfrak{R}_p = \sigma \cdot R_s, \quad \mathfrak{E}_s = -\sigma \cdot E_p, \quad \mathfrak{R}_s = -\sigma \cdot R_p,$$

wobei σ ein Proportionalitätsfaktor ist, auf den es nicht weiter ankommt.

Aus (25) folgt daher

$$\mathfrak{R}_s = -\mathfrak{E}_s\,\frac{sin\,(\varphi - \chi)}{sin\,(\varphi + \chi)}, \quad \mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p\,\frac{tang\,(\varphi - \chi)}{tang\,(\varphi + \chi)}. \tag{25'}$$

Die Angabe der gebrochenen Amplituden mag hier unterbleiben, da an diese sich kein besonderes Interesse knüpft.

Aus den Formeln (25) und (25') ergiebt sich zunächst, dass, abgesehen von Vorzeichenänderungen, die Amplituden des reflektirten Lichtes dieselben Werthe behalten, falls φ und χ vertauscht werden, d. h. wenn das Licht anstatt im Medium 1 unter dem Winkel φ im Medium 2 unter dem Winkel χ einfällt. Ferner folgt, dass D_p und D_s für keinen Einfallswinkel verschwinden, ebenso nicht R_p und $\mathfrak{R}_s$, dagegen verschwinden R_s und $\mathfrak{R}_p$ für $\varphi + \chi = \pi/2$ oder mit Rücksicht auf (23) für

$$tang\,\varphi = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = n, \tag{26}$$

wobei n den Brechungsexponenten des Mediums 2 gegen das Medium 1 bedeutet. Natürliches Licht, welches unter diesem Winkel φ' einfällt, ist daher nach der Reflexion linear polarisirt, und zwar zeigt die Beobachtung, dass es in der Einfallsebene polarisirt ist, wenn man an der Definition festhält, dass der ordinäre Strahl eines einaxigen Krystalls im Hauptschnitt polarisirt sei. Daher folgt auch aus den Reflexionserscheinungen, dass der Neumann'sche Lichtvector in die Polarisationsebene fällt, dass dagegen der Fresnel'sche zu ihr senkrecht liegt. Der Einfallswinkel φ' wird der Polarisationswinkel der beiden Medien genannt. Das durch die Formel (26) ausgesprochene Gesetz für diesen Winkel

ist zuerst von BREWSTER[1]) experimentell gefunden und wird nach ihm das BREWSTER'sche Gesetz genannt. — Er fand zunächst an einigen Substanzen merkliche Ausnahmen von seinem Gesetze, jedoch ist dasselbe später von SEEBECK[2]), welcher grössere Sorgfalt auf die Reinheit der Grenzfläche verwandte, an zahlreichen Substanzen mit grosser Genauigkeit verificirt.

Aus der am Eingang der Discussion der Formeln gemachten Bemerkung ergiebt sich, dass der Polarisationswinkel φ_2' bei Reflexion am Medium 1 der Brechungswinkel χ ist, welcher zu dem Polarisationswinkel φ_1', bei Reflexion am Medium 2 zugehört, dass daher $\sin\varphi_1' : \sin\varphi_2' = n$ ist. Dies Gesetz hat MALUS[3]) gefunden.

Wie die aufgestellten Formeln lehren, sind die reflektirten Amplituden am kleinsten bei senkrechter Incidenz ($\varphi = 0$), für welche sie die Werthe annehmen, da $\varphi : \chi = n$ bei kleinem φ:

$$\begin{aligned} R_p &= -E_p \frac{n-1}{n+1}, \quad R_s = E_s \frac{n-1}{n+1}, \\ \mathfrak{R}_s &= -\mathfrak{E}_s \frac{n-1}{n+1}, \quad \mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Die reflectirten Amplituden sind am grössten für streifende Incidenz $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, nämlich

$$\begin{aligned} R_p &= -E_p, \quad R_s = -E_s, \\ \mathfrak{R}_p &= -\mathfrak{E}_p, \quad \mathfrak{R}_s = -\mathfrak{E}_s. \end{aligned} \tag{28}$$

Die reflektirten Intensitäten sind proportional den Quadraten der Amplituden (cf. pag. 636), daher sind ihre Werthe aus (25) und für die speciellen Fälle aus (27) und (28) zu bilden. Bei streifender Incidenz ist die Intensität des reflectirten Lichtes gleich der des einfallenden[4]). — Die Intensitäten des gebrochenen Lichtes sind ebenfalls den Quadraten der Amplituden D_p, D_s proportional. Will man denselben Proportionalitätsfaktor erhalten, wie er für das Medium 1 gilt, so sind die Intensitäten des gebrochenen Lichtes einfach durch die Differenz der Intensität des einfallenden und des reflektirten Lichtes gegeben, da durch den Akt der Reflexion keine Lichtintensität verloren geht. Bezeichnet man daher die Intensitäten des einfallenden Lichtes durch J_p^e, J_s^e, des reflektirten durch J_p^r, J_s^r, des gebrochenen durch J_p^d, J_s^d, so ist nach dem NEUMANN'schen Standpunkt:

$$\begin{aligned} J_p^r &= \frac{\sin^2(\varphi-\chi)}{\sin^2(\varphi+\chi)} J_p^e, \quad J_s^r = \frac{\tang^2(\varphi-\chi)}{\tang^2(\varphi+\chi)} J_s^e, \\ J_p^d &= \frac{\sin 2\varphi \sin 2\chi}{\sin^2(\varphi+\chi)} J_p^e, \quad J_s^d = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\chi}{\sin^2(\varphi+\chi)\cos^2(\varphi-\chi)} J_s^e. \end{aligned} \tag{25''}$$

Nach dem FRESNEL'schen Standpunkte sind die Faktoren der s- und p-Componenten mit einander zu vertauschen.

Es möge nun der Unterschied in den Resultaten, welche man vom NEUMANN'schen resp. FRESNEL'schen Standpunkte aus erhält, etwas näher betrachtet werden.

---

[1]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1815, pag. 125. Betreffs der Beobachtungsmethode vergl. pag. 748.

[2]) SEEBECK, POGG. Ann. 20, pag. 27. 1830.

[3]) MALUS, Mém. de la Soc. d'Arcueil, 2, pag. 143. 1808. — Mém. de la prem. et de l'Inst. 11. 1810.

[4]) Eine graphische Darstellung der reflektirten und gebrochenen Amplituden gab BEER, Wien. Ber. 21, pag. 428. 1856.

Wie die Formeln (25) und (25') zeigen, sind die Faktoren, mit denen die einfallenden Amplituden multiplicirt werden müssen, um die reflektirten zu ergeben, nach beiden Standpunkten vertauscht. Dies bedeutet aber keinen beobachtbaren Unterschied zwischen beiderlei Resultaten, da nur die Polarisationsebene eines Lichtstrahls, nicht seine Schwingungsebene durch Beobachtung festgesetzt werden kann.

Man erhält andere Differenzen zwischen beiderlei Lichtvektoren, wenn man ihre durch Reflexion herbeigeführten Vorzeichenänderungen berücksichtigt. Nach den Erörterungen der pag. 746, Anm. 1, bedeutet ein positiver Werth des Verhältnisses R_s/E_s und $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{E}_s$, dass die reflektirte Amplitude dieselbe Richtung hat, wie die einfallende (die Phasendifferenz des reflektirten Lichtes gegen das einfallende ist Null), ein positiver Werth von R_p/E_p und $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{E}_p$ hat dieselbe Bedeutung bei streifender Incidenz, dagegen die entgegengesetzte bei senkrechter Incidenz, indem dann die reflektirte Amplitude die entgegengesetzte Richtung hat, wie die einfallende (die Phasendifferenz des reflektirten Lichtes gegen das einfallende Licht ist gleich π).

Daher folgt aus den Formeln (28), dass beide Vektoren bei streifender Incidenz unabhängig von dem Werthe des Brechungsexponenten der Medien durch Reflexion eine Umkehr ihrer Amplituden erfahren. Dieser Satz ist von FRESNEL[1]) experimentell durch seinen Dreispiegelversuch verificirt, in welchem die Interferenz von zwei Lichtstrahlen beobachtet wird, von denen der eine an zwei Glasspiegeln, der andere an einem reflektirt wird. An der Stelle, an welcher die von beiden Strahlen durchlaufenen Wege dieselben Werthe haben (welche Stelle sich dadurch kennzeichnet, dass zu ihr bei Beleuchtung mit inhomogenem Lichte die Farben der Interferenzstreifen symmetrisch vertheilt sind), tritt Dunkelheit ein, d. h. die beiden Lichtstrahlen haben eine Phasendifferenz von π, d. h. entgegengesetzt gerichtete Amplituden.

Die Reflexion an zwei Spiegeln bringt den Lichtstrahl wieder in den ursprünglichen Zustand; man kann diese aber auch vermeiden und direkt einen einfallenden Lichtstrahl mit einem unter nahezu streifender Incidenz reflektirten zur Interferenz bringen, wie in dem LLOYD'schen Experiment[2]) geschehen ist. Auch hier tritt Dunkelheit an der Stelle gleicher Weglängen beider Strahlen ein.

Aus den Formeln (27) folgt, dass bei senkrechter Incidenz für $n > 1$, d. h. bei Reflexion am stärker brechenden Medium nach NEUMANN die reflektirte Amplitude die gleiche Richtung hat, wie die einfallende, nach FRESNEL dagegen die entgegengesetzte, Diese Verhältnisse kehren sich um für $n < 1$, d. h. bei Reflexion am schwächer brechenden Medium.

Man hat bisher vergeblich versucht, durch Experimente zu entscheiden, ob die Amplitude durch Reflexion am stärker brechenden Medium umgekehrt wird oder nicht. Versuche an NEWTON'schen Ringen erlauben nur, die Amplitudenänderungen, wie sie durch Reflexion an zwei verschiedenen Grenzflächen herbeigeführt werden, mit einander zu vergleichen, und für eine derartige Vergleichung stimmen beide Theorien überein. — In neuerer Zeit hat O. WIENER[3])

---

[1]) A. FRESNEL, Oeuvr. compl. T. 1, pag. 703. Wegen der experimentellen Anordnung vergl. auch MASCART, Traité d'Optique. Bd. 1, pag. 187, Paris 1889. Die Abhängigkeit der Erscheinung bei kleinerem Einfallswinkel vom Polarisationszustande ist erörtert von MASCART, Compt. rend. 105, pag. 967. 1887.

[2]) LLOYD, Irish. Trans. 17. 1834. — POGG. Ann. 45, pag. 95. 1838. — G. QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 177. 1871.

[3]) O. WIENER, WIED. Ann. 40, pag. 203. 1890.

diese Frage dadurch zu entscheiden gesucht, dass er durchsichtige, lichtempfindliche Gelatinehäutchen, deren Dicke klein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes war, auf einen stark reflektirenden Spiegel[1]) mit sehr geringer Neigung gegen denselben befestigte. Bei senkrecht einfallendem Lichte hängt die photographische Wirkung im Häutchen ab von der Summe des einfallenden und des reflektirten Lichtvectors. Wenn dieselben also entgegengesetzt liegen, wird die erzielte Wirkung eine schwächere sein, als wenn die beiden Vectoren gleich gerichtet sind.

Es treten nun in der That in Distanzen von einer halben Wellenlänge vom Spiegel abwechselnd Maxima und Minima der photographischen Wirkung ein, und zwar liegt am Spiegel selbst, für den $n > 1$ war, ein Minimum. Damit ist gezeigt, dass der FRESNEL'sche Vector oder die elektrische Kraft für das Auftreten der photographischen Wirkung maassgebend ist. Im Einklang mit diesem Versuche zeigte sich auch, dass zwei rechtwinklig gegen einander laufende Wellenzüge nur dann Interferenzen der photographischen Wirkung ergeben, wenn ihre Polarisationsebenen zusammenfallen, dagegen nicht, wenn die Polarisationsebenen senkrecht auf einander stehen. Da Interferenz nur bei parallelen Amplituden eintreten kann, so folgt auch aus diesem zweiten Versuche, dass für die photographische Wirkung ein Vector maassgebend ist, welcher senkrecht zur Polarisationsebene liegt, d. h. der FRESNEL'sche Vector.

Spätere Versuche von DRUDE und NERNST[2]) haben gleiche Resultate für die Fluorescenzwirkung geliefert.

Durch diese Versuche ist noch keine Entscheidung zwischen der Zulässigkeit der Grundhypothesen der mechanischen Theorien von FRESNEL und NEUMANN (ob der Aether in allen Medien gleiche Dichte, aber verschiedene Elasticität besitzt, oder ob das Umgekehrte der Fall ist) getroffen, weil man nicht weiss, ob die untersuchten Wirkungen an den Vector der kinetischen oder an den der potentiellen Energie des Aethers geknüpft sind. Letzterer befolgt aber nach NEUMANN's Theorie die Gesetze, welchen ersterer nach der FRESNEL'schen unterworfen ist und umgekehrt[3]) (cf. oben pag. 673).

Die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln (25') und (25) sind mannigfach experimentell verificirt. Am bequemsten lassen sich die Amplitudenverhältnisse $R_s : R_p$ und $D_s : D_p$ beobachten, d. h. die durch Reflexion und Brechung herbeigeführte Drehung der Polarisationsebene linear polarisirten einfallenden Lichtes, da man hierzu nur zwei drehbare NICOL'sche Prismen gebraucht, bei denen man die Lage ihrer Polarisationsebenen gegen die Einfallsebene bestimmen kann. Dreht man das analysirende Nicol so lange, bis der beobachtete reflektirte oder gebrochene Lichtstrahl vollständig ausgelöscht wird, so steht dessen Polarisationsebene auf der des Nicols senkrecht, d. h. ihre Lage ist ebenfalls bekannt. Auf diesem Wege haben FRESNEL[4]) und BREWSTER[5]) die Formeln für $R_s : R_p$ und

[1]) WIENER benutzte meist Metallspiegel. Die theoretischen Betrachtungen modificiren sich dadurch nur sehr wenig, wie weiter unten ausgeführt ist.

[2]) P. DRUDE u. W. NERNST, Gött. Nachr. 10, pag. 2. 1891. — WIED. Ann. 45, pag. 460. 1892.

[3]) Theoretische Discussionen über die WIENER'schen Versuche finden sich bei A. CORNU, Compt. rend. 112, pag. 186 u. 365. 1891. — H. POINCARÉ, Compt. rend. 112, pag. 325 u. 456. 1891. — BERTHELOT, Compt. rend. 112, pag. 329. 1891. — A. POTIER, Compt. rend. 112, pag. 383. 1891; Journ. de phys. (2) 10 pag. 101. 1891. — P. DRUDE, WIED. Ann. 41, pag. 154. 1890; 43, pag. 177. 1891; 48, pag. 119. 1893.

[4]) A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2) 17, pag. 314. 1821.

[5]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1830, pag. 69, 133 u. 145.

$D_s : D_p$ verificirt, falls die beiden aneinander grenzenden Medien Glas und Luft resp. Wasser und Luft, waren. $D_s : D_p$ kann man am bequemsten beim Durchgang des Lichts durch eine planparallele Platte eines Mediums 2, welche sich in einem Medium 1 befindet, messen. Wegen der zweimaligen Brechung an der Vorder- und Hinterfläche derselben ist das Amplitudenverhältniss des austretenden Lichtes das Quadrat des Amplitudenverhältnisses des gebrochenen Lichtes.

Aus der Bestätigung der Formeln, welche sich für die Grössen R_s/R_p und D_s/D_p ergeben, folgt schon[1]), wie wir oben pag. 749 bei Besprechung der Krystallreflexion sahen, auch die Bestätigung der Formeln für die absoluten Werthe R_s, R_p, D_s, D_p, jedoch sind diese auch durch besondere Versuche verificirt.

Provostaye und Desains[2]) haben die Formeln auf calorimetrischem Wege verificirt. Die Wärmestrahlen unterscheiden sich von den Lichtstrahlen nur durch ihre grössere Schwingungsdauer und daher sind für erstere ebenfalls die angestellten Betrachtungen anwendbar. In der That hat Bérard[3]) schon im Jahre 1821 gezeigt, dass Wärmestrahlen wie die Lichtstrahlen durch Reflexion polarisirt werden können.

Provostaye und Desains polarisirten die einfallenden Wärmestrahlen mit Hilfe eines doppelbrechenden Prismas und haben mittelst eines Thermomultiplicators die Richtigkeit der Formeln für die Intensitäten des reflektirten Lichtes bei Reflexion an einer Glasfläche nachgewiesen, sowohl für die *s*- als *p*-Componente.

Die Verification der Formel für R_p ist für Lichtstrahlen bei Reflexion an Glas von Glan[4]) mit Hilfe eines Polarisationsphotometers geschehen. Die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen betragen höchstens 1 $\frac{0}{0}$.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich darauf, dass das einfallende Licht linear polarisirt war. Ist dasselbe elliptisch polarisirt, so sind für E_p und E_s complexe Werthe $E_p e^{ip}$, $E_s e^{is}$ einzuführen, wo dann die E_p, E_s, und $p - s$ die Gestalt der Schwingungsellipse des einfallenden Lichts nach den Gleichungen (8) der pag. 634 bestimmen.

Es werden dann die R_p, R_s, D_p, D_s ebenfalls complex, und zwar folgt aus den Formeln (25), dass, wenn man diese Grössen in die Form $R_p \cdot e^{ip'}$, $R_s e^{is'}$, $D_p e^{ip''}$, $D_s e^{is''}$ bringt, dann die Beziehungen stattfinden:

$$p' = p'' = p, \quad s' = s'' = s,$$

d. h. die relativen Phasendifferenzen der beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componenten des reflektirten und gebrochenen Lichtes haben gleiche Werthe wie im einfallenden Lichte. — Die Gestalt der Bahn der Aethertheilchen ist dagegen im reflektirten und gebrochenen Licht im Allgemeinen eine andere als im einfallenden, da die Formeln (8) der pag. 634 lehren, dass diese Gestalt auch von den Amplitudenverhältnissen jener beiden (*s*- und *p*-) Componenten abhängt. Nur für senkrechte und streifende Incidenz bleibt auch die Bahngestalt dieselbe, im ersteren Falle kehrt sich aber wegen

---

1) Man vergl. dazu auch G. Stokes, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 4, pag. 1. 1849. — Math. and phys. papers II, pag. 101.

2) Provostaye et Desains, Ann. de chim. et de phys. (3) 30, pag. 276. 1849.

3) Bérard, Mém. d'Arcueil 3, pag. 5. 1821. Genauere Versuche hierüber stellte Knoblauch (Pogg. Ann. 74, pag. 161, 170 u. 177. 1848) mit Hilfe des Melloni'schen Thermomultiplicators an.

4) P. Glan, Berl. Ber. 1874, pag. 511.

der entgegengesetzten Richtung der Wellennormalen der Rotationssinn um. So wird z. B. ein senkrecht einfallender, rechts-circular polarisirter Lichtstrahl nach der Reflexion zu einem links-circular polarisirten, wie von POWELL[1]) experimentell verificirt ist. Alle Betrachtungen gelten unverändert auch vom FRESNEL'schen Standpunkte aus.

Fällt natürliches Licht ein, so ist zu setzen

$$\mathrm{E}_p = \Sigma E_p e^{ip}, \quad \mathrm{E}_s = \Sigma E_s e^{is},$$

wobei die Summen über alle möglichen Werthe E_p, E_s, p und s zu erstrecken sind. Indess sind dieselben nach den früher (pag. 637) aus der Natur des natürlichen Lichtes abgeleiteten Gleichungen (10) an die Relationen geknüpft:

$$\Sigma E_p^2 = \Sigma E_s^2, \quad \Sigma E_p E_s \cos(p - s) = 0, \quad \Sigma E_p E_s \sin(p - s) = 0. \tag{29}$$

Es folgen dann aus den Formeln (25), falls man die Intensität des reflektirten Lichtes wieder durch J_s^r resp. J_p^r, die des einfallenden durch $J_s^e = J_p^e$ bezeichnet, analoge Gleichungen wie die Formeln (25''), welche bei einfallendem linear oder elliptisch polarisirtem Lichte bestehen, nämlich

$$J_p^r = J_p^e \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)}, \quad J_s^r = J_s^e \frac{\tang^2(\varphi - \chi)}{\tang^2(\varphi + \chi)}. \tag{30}$$

Bezieht man die Componenten des reflektirten Lichtes auf zwei rechtwinklige Ebenen, welche den Winkel α, resp. $\frac{\pi}{2} + \alpha$ mit der Einfallsebene einschliessen, so sind die Intensitäten der in diesen Ebenen schwingenden Componenten wegen des Bestehens der dritten der Gleichungen (29) gegeben durch

$$\begin{aligned} J_\alpha^r &= J_s^r \cos^2\alpha + J_p^r \sin^2\alpha, \\ J_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^r &= J_s^r \sin^2\alpha + J_p^r \cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{31}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Ebene der partiellen Polarisation des reflektirten Lichtes mit der Einfallsebene zusammenfällt, da für $\alpha = 0$ die Differenz zwischen J_α^r und $J_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^r$ ein Maximum erreicht.

Aus (30) ergiebt sich das Quantum der Polarisation des reflektirten Lichtes zu

$$J_p^r - J_s^r = \frac{1}{2} J^e \left[\frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} - \frac{\tang^2(\varphi - \chi)}{\tang^2(\varphi + \chi)}\right], \tag{32}$$

die Gesammtmenge des reflektirten Lichtes zu

$$J^r = J_p^r + J_s^r = \frac{1}{2} J^e \left[\frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi - \chi)} + \frac{\tang^2(\varphi - \chi)}{\tang^2(\varphi + \chi)}\right], \tag{33}$$

wobei J_e die Gesammtintensität des einfallenden Lichtes bedeutet.

In ähnlicher Weise sind die Intensitäten für das durchgehende Licht aus (25) zu berechnen.

Aus (33) folgt, dass die Intensität des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes, da für diesen $\varphi + \chi = \frac{\pi}{2}$, und $\tang\varphi = n$ ist, gegeben ist durch

$$J^{r'} = \frac{1}{2} J^e \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^2.$$

Für Glas vom Brechungsexponenten 1·5 ist $J^{r'} = \frac{1}{13 \cdot 5} J^e$; die Methode, Licht durch einfache Reflexion zu polarisiren, ist also erheblich unvortheilhafter als die Anwendung eines Kalkspaths, welcher nahezu $\frac{1}{2} J^e$ für die Intensität des polarisirten Lichtes liefert.

[1]) POWELL, Phil. Mag. (3) 22, pag. 92 u. 262.

Die Formel (32) ist experimentell von DESAINS[1]) verificirt. Er bestimmte das Maass der Polarisation des reflektirten Lichtes, indem er dasselbe nach der Reflexion durch einen Satz paralleler Glasplatten gehen liess, welcher ebenfalls die Eigenschaft hat, die Intensitäten des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten durchgehenden Lichtes in verschiedenem Grade je nach dem Einfallswinkel zu schwächen, wie weiter unten noch ausführlicher erörtert werden soll. Durch geeignete Drehung des Glasplattensatzes kann man es daher erreichen, dass die beiden rechtwinklig zu einander polarisirten Componenten wieder gleiche Intensität erhalten, d. h., dass vollständige Depolarisation des von dem untersuchten Spiegel reflektirten Lichtes eintritt. Bei bekannter Wirkung des Glasplattensatzes lässt sich daher aus dessen Stellung das Quantum der Polarisation jenes Lichtes, d. h. $J_p^r - J_s^r$ bestimmen.

Die Gesammtintensität des vom Glas reflektirten Lichtes ist von RAYLEIGH[2]) mit Hilfe eines Sektorenphotometers bestimmt. Derselbe beruht auf dem Princip, dass man einen Lichtstrahl in zu berechnender Weise schwächen kann, wenn man in seinen Weg eine rotirende Scheibe einschaltet, in welcher sich durchbrochene Stellen befinden, deren Grösse im Verhältniss zu den undurchbrochenen bekannt ist. Es ergab sich, dass frisch polirte Flächen ein Reflexionsvermögen haben, das um 1—2 % vom theoretischen Werthe abweicht; nach einigen Monaten oder Jahren nimmt es um 10—30 % ab, ohne dass man eine Veränderung der Politur wahrnimmt. Dies Verhalten muss offenbar durch Aenderung der Oberfläche herbeigeführt sein.

Der Einfluss des Alters der Politur auf die absoluten reflektirten Intensitäten, sowie auf die Grösse des Polarisationswinkels ist auch von CONROY[3]) studirt, welcher zur Messung des ersteren meist polarisationsphotometrische Methoden benutzte. Im Allgemeinen ergaben sich nur geringe Abweichungen von den theoretischen Werthen.

Tritt eine mehrmalige (n-malige) Reflexion unter demselben Reflexionswinkel ein, wie es experimentell leicht realisirt werden kann, wenn das Licht z. B. zwischen zwei mit ihren Grenzflächen parallelen Glasstücken hin- und herreflektirt wird, so sind die absoluten Amplitudenverhältnisse R_s/E_s und R_p/F_p die $n$ten Potenzen der nach einmaliger Reflexion stattfindenden Werthe. Da ersteres Verhältniss (R_s/E_s) stets kleiner ist als letzteres (R_p/E_p), so vermag man durch wiederholte Reflexionen auch unter anderen Winkeln als unter dem Polarisationswinkel eine nahezu vollständige Polarisation zu erzielen, wie BREWSTER[4]) gezeigt hat.

d) Reflexion und Durchgang des Lichtes durch eine planparallele isotrope Platte oder mehrere untereinander parallele.

Es sollen zunächst die Fälle betrachtet werden, in welchen die Platten so dick sind, dass sie keine Interferenzfarben ergeben. Es möge zunächst nur eine Platte vorhanden sein. Die reflektirte und durchgehende Lichtintensität ergiebt

---

[1]) DESAINS, Compt. rend. 31, pag. 676. 1850. — Ann. de chim. et de phys. (3) 31, pag. 286. 1851. — POGG. Ann. 82, pag. 152. 1851.

[2]) RAYLEIGH, Nat. 35, pag. 64. 1886; Proc. of the Roy. Soc. 41, pag. 275. 1886. — Nach einer mit dieser verwandten Methode hatte schon BOUGUER die absoluten von Glas und Wasser reflektirten Intensitäten gemessen. Vergl. VERDET, Wellenthorie, deutsch von EXNER, II. Bd., pag. 376. Braunschw. 1887.

[3]) CONROY, Phil. Trans. 180, pag. 245. 1889. — Im Auszuge Proc. Roy. Soc. 45, pag. 101. 1888.

[4]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1830; POGG. Ann. 19. 1830.

sich dann als Summe der Intensitäten derjenigen Lichtstrahlen, welche eine 1malige, 3malige, 5malige etc. Reflexion an der Vorder- und Rückfläche der Platte, und eine 2malige, 4malige etc. Brechung an ihnen erfahren haben.

Setzt man

$$\begin{aligned} J_p^r &= r_p \cdot J_p^e, \quad & J_s^r &= r_s \cdot J_s^e, \\ J_p^d &= d_p \cdot J_p^e, \quad & J_s^d &= d_s \cdot J_s^e, \end{aligned} \tag{34}$$

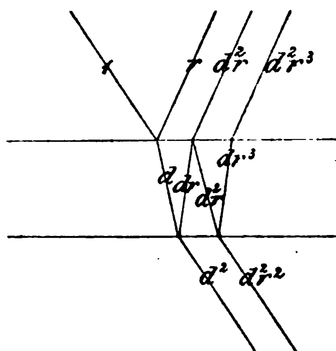
wobei nach den Formeln (25″) gesetzt ist

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{sin^2(\varphi - \chi)}{sin^2(\varphi + \chi)}, \quad & r_s &= \frac{tang^2(\varphi - \chi)}{tang^2(\varphi + \chi)}, \\ d_p &= 1 - r_p, \quad & d_s &= 1 - r_s, \end{aligned} \tag{34'}$$

so sind die reflektirten und durchgehenden Gesammtintensitäten I^r und I^d, wie aus der beistehenden Figur sich ergiebt, in welcher die Intensitäten, welche zu summiren sind, bei den einzelnen Strahlen angegeben sind (Fig. 488).

$$\begin{aligned} I^r &= J^e\,[r + d^2 r (1 + r^2 + r^4 + \ldots)] = J^e \frac{2r}{1+r}, \\ I^d &= J^e\, d^2 (1 + r^2 + r^4 + \ldots) = J^e \frac{1-r}{1+r}. \end{aligned} \tag{35}$$

wobei an sämmtlichen Buchstaben noch die Indices p oder s anzufügen sind, je nachdem das parallel oder das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht betrachtet wird.



(Ph. 488.)

ARAGO[1]) hat die Formeln (35) in dem Falle, dass natürliches Licht einfällt, verificirt, indem er diejenigen Einfallswinkel maass, für welche die Intensität des reflektirten Lichtes in einem einfachen rationalen Verhältniss zu der des durchgehenden steht, was er mit Hilfe eines besonderen von ihm construirten Doppelprismas constatiren konnte. Er erhielt annähernde Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Einfallswinkeln. Bei der von ihm benützten Glasplatte hatte für $\varphi = 78° \, 52'$ das reflektirte Licht dieselbe Intensität wie das durchgehende.

Sind mehrere (n) unter einander parallele identische Platten vorhanden (ein Plattensatz), so ist[2])

$$I^r = J^e \frac{2nr}{1 + (2n-1)r}, \quad I^d = J^e \frac{1-r}{1+(2n-1)r}. \tag{35'}$$

Es folgt hieraus, dass, da I_s^r für den Polarisationswinkel $\varphi = \varphi'$ verschwindet, da dann $r_s = 0$ ist, unter diesem Winkel einfallendes natürliches Licht vollständig nach der Einfallsebene polarisirt ist, gerade wie bei der Reflexion an nur einer Grenzfläche. Die Intensität des reflektirten Lichtes ist aber in diesem Falle bei weitem grösser als bei letzterem. Betrug die Intensität des an einer Glasfläche unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes nur den 13·5ten Theil des einfallenden, so ist dieselbe bei Anwendung einer einzigen Platte schon

[1]) ARAGO, Oeuvr. compl. 10, pag. 150, 185, 217 u. 468.

[2]) Man gelangt zu diesen Formeln am einfachsten durch einen Schluss von n Platten auf $n+1$ Platten, cf. F. NEUMAMN, Optik, herausg. von DORN, Leipzig 1885, pag. 147. — Man vergl. auch C. BOHN, POGG. Ann. 117, pag. 117. 1862.

doppelt so gross, bei Anwendung von 20 Platten beträgt sie den 2·3ten Theil des einfallenden Lichtes.

Die Verification der Formeln (35') bei Glas sowohl für die *s*- als *p*-Componente ist mit Hilfe eines Thermomultiplicators, d. h. für Wärmestrahlen, von PROVOSTAYE und DESAINS[1]) nachgewiesen. Um die Absorption[2]) zu vermeiden, wurden Strahlen angewendet, welche schon durch eine dicke Glasschicht hindurchgegangen waren, so dass der Glasplattensatz für die benutzten Strahlen als vollkommen diatherman gelten konnte.

Fällt natürliches Licht ein, so ist das durch einen Plattensatz durchgehende Licht theilweise polarisirt und zwar senkrecht zur Einfallsebene. Der Betrag der Polarisation hängt in einer aus den Formeln (25') leicht zu berechnenden Weise vom Einfallswinkel ab. Ein solcher Glasplattensatz kann daher nach ARAGO[3]) als Polarimeter benutzt werden, d. h. als ein Instrument, mittelst dessen man das Quantum der Polarisation eines Lichtstrahls messen kann, indem derselbe durch einen Plattensatz geschickt wird und derselbe in eine solche Lage gebracht wird, dass das austretende Licht völlig depolarisirt ist. Letzteres kann dadurch erkannt werden, dass bei einer Krystallplatte, welche im polarisirten Licht irgend welche Farbenerscheinungen zeigt, diese bei vollständiger Depolarisation des einfallenden Lichtes nicht mehr auftreten.

Die Anwendung eines Plattensatzes zur Bestimmung der Polarisation durch Reflexion ist von DESAINS[4]) gemacht. Vermittelst desselben hat WILD[5]) das blaue Himmelslicht untersucht, welches im Gegensatz zum Wolkenlicht theilweise polarisirt ist.

Die Sonne und der antisolare Punkt sind neutral, in der nächsten Umgebung ist ein Theil senkrecht zu dem durch die Sonne und den beobachteten Punkt gelegten Kreis polarisirt. Dann folgt in einem Abstande, der je nach der Sonnenhöhe von 7—15° variirt, wieder eine neutrale Zone, im übrigen Theile des Himmels fällt die Polarisationsebene mit der durch die Sonne gelegten Ebene zusammen. Das Maximum der Polarisation findet sich senkrecht zur Sonne.

WILD hat einen Glasplattensatz auch in ähnlicher Weise als Photometer verwandt[6]).

Ist eine Platte vorhanden und dieselbe so dünn, dass sie zu Interferenzfarben Anlass giebt, so darf man nicht, wie vorhin, die Intensitäten der einzelnen mehrfach reflektirten und gebrochenen Strahlen addiren, um die Gesammtintensität des reflektirten und durchgehenden Lichtes zu erhalten, sondern es muss Rücksicht auf die Phasenunterschiede der einzelnen Strahlen genommen werden[7]).

Man kann entweder so verfahren, dass man die complexen Amplituden, welche ja in der complexen Form zugleich die der zugehörigen Lichtwelle anhaftende Phase angeben, der einzelnen zur Interferenz gelangenden Wellen addirt,

---

1) PROVOSTAYE et DESAINS, Ann. de chim. et de phys. (3) 30, pag. 159. 1849.

2) Die betreffenden Formeln mit Rücksicht auf Absorption gab G. STOKES, Proc. Roy. Soc. 11, pag. 545. 1862. — Phil. Mag. (4) 24, pag. 450. 1862.

3) ARAGO, Oeuvr. compl. 10, pag. 270.

4) Vergl. d. Anm. 1 auf pag. 756.

5) WILD, POGG. Ann. 99, pag. 235. 1856.

6) WILD, ibid. Betreffs eines ähnlichen, von DUBOSQ construirten Photometers, bei welchem nur eine Glasplatte benutzt wird, vergl. VERDET, Wellentheorie, deutsch von EXNER, II. Bd. Braunschw. 1887, pag. 391.

7) Diese Rechnungen sind zuerst von AIRY (Phil. Mag. (2) 10, pag. 141; (3) 2, pag. 120. 1832. — POGG. Ann. 41. 1831 angestellt.

welche Operation auf unendliche Reihen führt, deren Summe aber leicht in geschlossener Form angebbar ist, oder so, dass man für beide Grenzflächen der Platte die Uebergangsbedingungen (2) anwendet, dabei aber für das Innere der Platte nicht nur eine gebrochene, d. h. im Sinne der einfallenden Welle fortschreitende Bewegung annimmt, sondern auch eine im Innern reflektirte. Dieses Verfahren[1]) ist deshalb bequemer, weil man dadurch die Summation von unendlichen Reihen ganz umgeht.

Befindet sich die Platte, deren Dicke d sein mag, zwischen zwei gleichen Medien, in welchen das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes a_1 ist, während dasselbe in der Platte den Betrag a_2 besitzen soll, und haben μ, π_1 und π_2 die früheren Bedeutungen, nach welchen, falls φ den Einfallswinkel bezeichnet,

$$\mu = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{a_1}}, \quad \mu^2 + \pi_1^2 = \frac{1}{a_1}, \quad \mu^2 + \pi_2^2 = \frac{1}{a_2}$$

ist, setzt man ferner

$$p = e^{\frac{i}{\tau}\pi_2 d}, \quad q = e^{-\frac{i}{\tau}\pi_2 d}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T},$$

so findet man auf dem angedeuteten Wege für die reflektirten Amplituden die Werthe

$$\left.\begin{aligned} R_s &= E_s \frac{(p-q)(a_1^2\pi_1^2 - a_2^2\pi_2^2)}{(p-q)(a_1^2\pi_1^2 + a_2^2\pi_2^2) + 2(p+q)a_1\pi_1 a_2\pi_2}, \\ R_p &= E_p \frac{(p-q)(\pi_1^2 - \pi_2^2)}{(p-q)(\pi_1^2+\pi_2^2) + 2(p+q)\pi_2\pi_1}. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Für die Amplituden des durch die Platte hindurchgehenden Lichtes ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} D_s &= E_s e^{\frac{i}{\tau}\pi_1 d} \frac{4a_1\pi_1 a_2\pi_2}{(p-q)(a_1^2\pi_1^2 + a_2^2\pi_2^2) + 2(p+q)a_1\pi_1 a_2\pi_2}, \\ D_p &= E_p e^{\frac{i}{\tau}\pi_1 d} \frac{4\pi_1\pi_2}{(p-q)(\pi_1^2+\pi_2^2) + 2(p+q)\pi_1\pi_2}. \end{aligned}\right\} \quad (36')$$

In den Formeln bedeuten E_s, E_p die Amplituden des einfallenden Lichtes. Auch wenn diese reell sind, d. h. dasselbe linear polarisirt ist, so sind doch die Amplituden des reflektirten und gebrochenen Lichtes complex, da sie die imaginäre Grösse $p - q = 2i \sin\frac{\pi_2 d}{\tau}$ enthalten, d. h. auch bei einfallendem linear polarisirten Lichte ist das reflektirte und durchgehende Licht elliptisch polarisirt.

Die Intensitäten J_s^r, J_p^r, J_s^d, J_p^d des reflektirten und durchgehenden Lichtes ergeben sich durch Multiplikation der Amplituden R_s, R_p, D_s, D_p mit ihren conjugirten Ausdrücken. Da $p - q$ die einzige in den Formeln auftretende imaginäre Grösse ist[2]), so erhält man für jene Intensitäten, wenn man die des einfallenden Lichtes durch den oberen Index e bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} J_s^r &= J_s^e \frac{(a_1^2\pi_1^2 - a_2^2\pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}{4a_1^2\pi_1^2 a_2^2\pi_2^2 + (a_1^2\pi_1^2 - a_2^2\pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}, \\ J_p^r &= J_p^e \frac{(\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}{4\pi_1^2\pi_2^2 + (\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

---

[1]) Dasselbe ist angewandt bei W. VOIGT, WIED. Ann. 22, pag. 226. 1887; 35, pag. 76. 1888. — P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 865. 1889; 43, pag. 126. 1891.

[2]) π_2 ist reell, da wir Fälle der partiellen Reflexion voraussetzen.

$$\left.\begin{aligned} J_s^d &= J_s^e \frac{4a_1^2\pi_1^2 a_2^2\pi_2^2}{4a_1^2\pi_1^2a_2^2\pi_2^2 + (a_1^2\pi_1^2 - a_2^2\pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}, \\ J_p^d &= J_p^e \frac{4\pi_1^2\pi_2^2}{4\pi_1^2\pi_2^2 + (\pi_1^2 - \pi_2^2)^2 \sin^2\frac{\pi_2 d}{\tau}}. \end{aligned}\right\} \quad (37')$$

Es ist also

$$J_s^r + J_s^d = J_s^e, \qquad J_p^r + J_p^d = J_p^e,$$

wie es ja der Fall sein muss.

Die Formeln (37) und (37') lassen sich durch Einführung der nach den Gleichungen (24) definirten r_p, r_s in der einfachen Gestalt schreiben

$$J^r = J^e \frac{4r\sin^2\left(2\pi\cos\chi\frac{d}{\lambda_2}\right)}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\left(2\pi\cos\chi\frac{d}{\lambda_2}\right)}, \quad (37'')$$

$$J^d = J^e - J^r,$$

wobei die unteren Indices p und s an J und r anzuhängen sind, und χ den Brechungswinkel, λ_2 die Wellenlänge des Lichtes in der Platte bedeuten.

Aus den Formeln (37'') folgt, dass, falls die Platte eine variable Dicke d besitzt, wie es am NEWTON'schen Farbenglase eintritt, die Maxima und Minima der reflektirten und durchgehenden Lichtintensität an den gleichen Stellen unabhängig von dem Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes eintreten. Daher ist die Erscheinung der NEWTON'schen Ringe im polarisirten Lichte dieselbe wie im natürlichen. Nur falls das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist und unter dem Polarisationswinkel auffällt, verschwindet die Erscheinung der Ringe gänzlich, da in diesem Falle $r_s = 0$ ist. Die Platte erscheint dann im reflektirten Lichte gleichförmig dunkel, im durchgehenden gleichförmig hell.

In den Minimis der reflektirten Lichtintensität tritt völlige Dunkelheit ein, also z. B. auch im Centrum des Ringsystems, für welches $d = 0$ ist. Diese Verhältnisse werden modificirt, wenn die Platte sich nicht mehr zwischen zwei Medien von demselben Brechungsexponenten befindet.

Liegt z. B. der Brechungsexponent der Platte zwischen denen der angrenzenden Medien, so tritt, wie wir oben pag. 752 sahen, entweder an der Vorder- und an der Rückfläche der Platte bei senkrechter Incidenz eine Umkehr der Schwingungsrichtung durch die Reflexion ein, oder an beiden Flächen keine. Jedenfalls haben die an beiden Flächen reflektirten Amplituden dasselbe Vorzeichen, und daher ist in diesem Falle das Centrum der NEWTON'schen Ringe im reflektirten Licht hell. Dies Verhalten war ohne Weiteres schon aus der Ueberlegung vorherzusehen, weil man im Centrum des Ringsystems sich die zwischenlagernde Platte ganz fortdenken kann. Lag nun dieselbe zwischen zwei Medien von verschiedenen Brechungsexponenten, so muss an ihrer Grenzfläche, d. h. im Ringcentrum, ein gewisser Theil des einfallenden Lichtes reflektirt werden, lag die Platte aber zwischen zwei Medien von gleichen Brechungsexponenten, so kann an ihrer Grenzfläche, d. h. im Ringcentrum, kein Licht reflektirt werden, da aus dem Innern eines optisch homogenen Mediums kein Licht reflektirt wird. — Diese je nach den Umständen verschiedene Helligkeit des Ringcentrums ist von YOUNG[1]) experimentell constatirt.

[1]) Man vergl. VERDET, »Wellentheorie«, deutsch von EXNER, I. Bd., Braunschw. 1881, pag. 22. Weitere Experimente sind von AIRY (l. c.) gemacht bei Reflexion zwischen Schwefelzink und Schwefeleisen. — Vergl. auch BREWSTER, Phil. Mag. 32, pag. 181. 1849.

In den Minimis der Lichtintensität des reflektirten Lichtes tritt natürlich auch nicht vollkommene Dunkelheit ein, falls die beiden die Platte umgebenden Medien verschiedene Brechungsexponenten besitzen, da die an der Vorderfläche der Platte reflektirten Wellen eine andere Intensität besitzen, als die an der Hinterfläche reflektirten, mit welchen erstere interferiren.

Besitzt die Platte die Dicke von mehreren Wellenlängen, so erscheint sie bei Beleuchtung im weissen Lichte farblos, da die Maxima und Minima verschiedener Lichtsorten übereinander fallen. Zerlegt man dagegen das reflektirte Licht spectral, so erkennt man, dass dasselbe nicht ein continuirliches Spectrum liefert, sondern ein von schwarzen Streifen durchzogenes, welche um so enger an einander liegen, je dicker die Platte ist. WERNICKE[1]) hat die Beobachtung dieser Streifen dazu angewandt, um die Differenz in den Phasen des Lichtes, welches in der Lamelle an zwei verschiedenen, an dieselbe anstossenden Substanzen reflektirt wird, zu bestimmen. Wenn man mit einem Fernrohr auf die Grenzlinie, in der jene beiden Substanzen aneinanderstossen, einstellt, so erscheinen offenbar an ihr jene Interferenzstreifen abgesetzt, wenn eine Phasendifferenz existirt. Aus der relativen Verschiebung des einen Streifensystems gegen das andere kann man die Grösse der Phasendifferenz berechnen. — WERNICKE constatirte nach dieser Methode, dass bei Anwendung von zwei Substanzen, von denen die eine einen grösseren, die andere einen kleineren Brechungsexponenten als die Lamelle besitzt, eine Phasendifferenz von π auftritt (cf. pag. 752), d. h. dass in der Grenzlinie, in welcher beide Substanzen aneinanderstossen, die Maxima des einen Interferenzbildes in die Verlängerung der Minima des andern fallen.

e) Modifikation der Reflexionserscheinungen durch Oberflächenschichten.

Das Studium gerade der zuletzt beschriebenen Erscheinungen, der NEWTON-schen Ringe im polarisirten Lichte, hat zu der Entdeckung geführt, dass die bisher beschriebenen Reflexionsgesetze nicht immer streng erfüllt sind.

Als AIRY[2]) die NEWTON'schen Ringe, welche er zwischen einer Glaslinse und einem Diamanten hervorbrachte, in senkrecht zur Einfallsebene polarisirter Beleuchtung betrachtete, verschwanden bei Variation des Einfallswinkels die Ringe nicht plötzlich, als der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich wurde, und traten bei weiterem Wachsen des Einfallswinkels nicht wieder an denselben Stellen auf, an welchen sie vorher gelegen hatten, wie es die auseinandergesetzte Theorie erfordert, sondern es trat Folgendes ein:

Der schwarze centrale Fleck öffnete sich drei oder vier Grade vor dem Winkel des Polarisationsmaximums. Der entstandene centrale, bei einfallendem weissen Lichte farbige Fleck erreichte seine grösste Ausdehnung, wenn die Incidenz dem Winkel des Polarisationsmaximums gleich geworden war, und verschwand wieder fünf oder sechs Grade hinter dem Polarisationsmaximum.

Diese Erscheinungen führen auf die Auffassung, dass die s-Componente in der Nähe des Polarisationswinkels durch die Reflexion eine gewisse Phasenänderung erleidet, oder mit anderen Worten, dass auch bei Reflexion an einer Grenzfläche bei einfallendem linear polarisirten Lichte das reflektirte Licht elliptisch polarisirt ist, falls der Einfallswinkel dem früher definirten Polarisationswinkel nahe liegt. Da die von AIRY beobachteten Ringe unter keinem Einfalls-

---

[1]) W. WERNICKE, Berl. Ber. 1875, pag. 673.

[2]) AIRY, Cambr. Trans. 4, pag. 219. 1832.

winkel verschwanden, so folgt zugleich, dass die *s*-Componente für keinen Einfallswinkel verschwindet, oder dass unter keiner Incidenz einfallendes, natürliches Licht durch Reflexion zu vollständig nach der Einfallsebene linear polarisirtem wird, mit anderen Worten, dass es im eigentlichen Sinne keinen Polarisationswinkel giebt[1]).

Diese aus der AIRY'schen Beobachtung zu ziehenden Schlussfolgerungen hat JAMIN experimentell bei zahlreichen festen[2]) und flüssigen[3]) Substanzen verificirt, indem er linear polarisirtes Licht, dessen Polarisationsebene nicht mit der Einfallsebene parallel war, oder senkrecht zu ihr stand, nach der Reflexion an jenen Substanzen mit Hilfe eines BABINET'schen Compensators, dessen Hauptschnitte parallel und senkrecht zur Reflexionsebene lagen, und eines drehbaren Nicols untersuchte. Nach den Erörterungen der pag. 721 misst man mit Hilfe des ersteren die relative Phasendifferenz (Δ) derjenigen beiden Componenten des reflektirten Lichtes, welche nach den Hauptschnitten des Compensators genommen sind, d. h. parallel und senkrecht zur Einfallsebene, mit Hilfe des Nicols dagegen wird das Azimuth (ψ) der Polarisationsebene des durch den Compensator linear polarisirt gemachten Lichtes gemessen, oder wie man sich kurz ausdrückt, das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation.

JAMIN fand nun, dass Δ continuirlich bei zunehmendem Einfallswinkel von 0 bis π (resp. von π bis 0, was keinen wesentlichen Unterschied bedeutet, da der Sinn, in welchem man die reflektirten Amplituden als positiv annimmt, willkürlich ist) variire, dass Δ den Werth $\pi/2$ annimmt für denjenigen Einfallswinkel, welcher nach der obigen FRESNEL-NEUMANN'schen Theorie der Polarisationswinkel sein sollte, dessen Grösse also durch die Beziehung $tang\,\varphi = n$ gegeben ist, und dass für diesen ψ nicht Null, wie es obige Theorie erfordert, sei, sondern ein von Null noch messbar abweichendes Minimum annehme. Der Winkel, für den Δ zu $\frac{\pi}{2}$ wird, wird der Haupteinfallswinkel genannt. Eine merkliche Abweichung des Δ von den Werthen 0 oder π, d. h. eine merkliche Ellipticität des reflektirten Lichtes tritt nur für Einfallswinkel ein, welche dem Haupteinfallswinkel benachbart sind.

Der Vorzeichenwechsel einer Amplitude kann man auch als Aenderung der zugehörigen Phase um π deuten. Die Differenz zwischen den beobachteten Eigenschaften des reflektirten Lichtes und den nach der bisher dargelegten Theorie sich ergebenden liegt daher darin, dass letztere bei einem gewissen Einfallswinkel eine sprunghafte Aenderung der relativen Phasendifferenz Δ um π ausspricht, während die Beobachtungen eine allmähliche Aenderung derselben erweisen. Dass jene theoretische sprunghafte Aenderung keine wirkliche Discontinuität der Erscheinungen zur Folge hat, welche in der Natur nie stattfindet, liegt daran, dass für jene Einfallswinkel die Componente R_s theoretisch Null sein müsste. Wenn, wie es faktisch der Fall ist, dieselbe für keinen Einfallswinkel verschwindet, so folgt daraus wegen des Continuitätsprincipes schon von selbst, dass die durch Wechsel des Einfallswinkels hervor-

---

[1]) Diese Beobachtung hatte schon BREWSTER an einigen stark brechenden Substanzen gemacht (Phil. trans. 1815, pag. 125). Vergl. auch SEEBECK, Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Diss. Berolini 1830, pag. 46. — POGG. Ann. 20, pag. 35. 1830.

[2]) JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 29, pag. 263. 1850.

[3]) JAMIN, ibid. 31, pag. 165. 1850.

gebrachte Aenderung der Phasendifferenz Δ um π allmählich, nicht sprunghaft vor sich gehen muss.

Da R_s beim Haupteinfallswinkel nur sehr kleine Werthe besitzt, so ist es für genaue Messung von Δ erforderlich, mit sehr intensivem Lichte (Sonnenlicht) zu beleuchten und das Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes nahezu senkrecht zur Einfallsebene zu wählen, damit ψ nicht zu kleine Werthe erhält. Der Compensator misst Δ am genauesten, wenn $\psi = 45°$ ist. Man wählt daher (wie von DRUDE, cf. unten, geschehen ist) die Versuchsanordnung zweckmässig so, dass man das analysirende Nicol in der festen Lage lässt, in welcher seine Polarisationsebene einen Winkel von $\pm 45°$ mit der Einfallsebene bildet, dagegen das polarisirende Nicol und die Compensatorschraube so lange dreht, bis dass im Gesichtsfelde Dunkelheit eintritt. Das Azimuth des polarisirenden Nicols in diesem Falle ist das Complement des Azimuths der Polarisationsebene des analysirenden Nicols in demjenigen Falle, dass das einfallende Licht unter dem Winkel $\pm 45°$ gegen die Einfallsebene polarisirt ist.

JAMIN fand, dass zwei Klassen von Substanzen zu unterscheiden wären, je nach dem Vorzeichen von Δ. Setzt man fest (was in gewisser Weise willkürlich ist), dass bei streifender Incidenz $\Delta = 0$, bei senkrechter Incidenz $\Delta = \pm \pi$ sei, und bezeichnet Δ die Differenz zwischen den Phasen des senkrecht und des parallel zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes, so gerechnet, dass letztere als Subtrahend auftritt, so geht bei den von JAMIN »positiv« genannten Substanzen Δ mit abnehmendem Einfallswinkel continuirlich von 0 in $-\pi$ über, bei den »negativen« Substanzen von 0 in $+\pi$.

Die festen durchsichtigen Substanzen gehören im Allgemeinen zu den positiven Körpern, falls ihr Brechungsexponent grösser als 1·46 ist, dagegen zu den negativen, falls er kleiner als diese Zahl ist. Jedoch kommen Ausnahmen von dieser Regel vor. Dieselbe ist für Flüssigkeiten gar nicht mehr anwendbar, da für wässrige Salzlösungen z. B. das Vorzeichen von Δ sich mit der Concentration ändern kann, ohne dass der Brechungsexponent stark dadurch beeinflusst ist. Wasser und wässrige Lösungen verhalten sich im Allgemeinen als negative Körper, Alkohol, Aether und Oele als positive.

Die Untersuchungen von QUINCKE[1]) haben indess gezeigt, dass die Unterscheidung der Substanzen in positive und negative nur einen Sinn hat, wenn man die Reflexion immer in Luft stattfinden lässt. Findet dieselbe in der Substanz selber statt, so kehrt sich damit zugleich das Vorzeichen von Δ um. QUINCKE untersuchte auch die Reflexion an Gläsern in Flüssigkeiten und fand qualitativ die gleichen Erscheinungen, wie bei Reflexion in Luft.

Die JAMIN'sche Untersuchungsmethode ist ausserdem von KURZ[2]) auf Flintglas angewandt und hat zu gleichen Resultaten geführt, wie sie JAMIN erhalten hat. — CORNU[3]) hat die Abhängigkeit der elliptischen Reflexion von der Farbe des angewandten Lichtes an zahlreichen Substanzen ermittelt, selbst für ultraviolette Strahlen mit Hilfe photographischer Methoden.

Bezogen sich die erwähnten Arbeiten auf Feststellung der relativen Phasendifferenz Δ der parallel und der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtcomponenten bei einfallendem linear polarisirtem Lichte, so hat

1) G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 355. 1866.
2) KURZ, POGG. Ann. 108, pag. 588. 1859.
3) A. CORNU, Compt. rend. 108, pag. 917 u. 1211. 1889.

WERNICKE[1]) nach seiner oben (pag. 761) erwähnten Methode die absoluten durch die Reflexion hervorgerufenen Phasenänderungen Δ_p und Δ_s jener Componenten d. h. ihre Phasendifferenzen gegen die Componenten des einfallenden Lichtes an der Grenzfläche genommen, bestimmen können. Es ergab sich, das Δ_p stets 0 (oder π) ist, während Δ_s allmählich von 0 zu π bei Variation des Einfallswinkels sich ändert. — Nach der gleichen Methode hat RITTER[2]) die Reflexion des Lichtes an parallel zur optischen Axe geschnittenem Quarz untersucht und gefunden, dass auch hier nur Δ_s eine allmähliche Aenderung erleidet. Es ergeben sich verschiedene Werthe des Haupteinfallswinkels je nach der Lage der optischen Axe zur Einfallsebene.

Bald nachdem JAMIN die beschriebenen Experimente angestellt hatte, gab CAUCHY[3]) eine Theorie derselben, in welcher ausser den Brechungsexponenten der beiden aneinander grenzenden Medien noch ein gewisser Coëfficient ε auftritt, welchem JAMIN den Namen des Ellipticitätscoëfficienten gab und welcher die Modifikation der beobachteten Erscheinungen gegenüber den durch die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln dargestellten theoretisch angiebt. Ableitungen der Formeln CAUCHY's wurden gegeben von BEER[4]), ETTINGSHAUSEN[5]), EISENLOHR[6]) und von LANG[7]). Man erhält dieselben aus der Annahme, dass die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente des einfallenden Lichtes im reflektirten und im gebrochenen Strahle auch longitudinale Schwingungen erregt, welche bei ihrer Fortpflanzung, deren Geschwindigkeit in beiden Medien als verschieden angenommen wird, an Intensität äusserst rasch abnehmen und schon in unmessbarer Entfernung von der Trennungsfläche verschwinden.

Eine andere Theorie[8]) der genannten Erscheinungen beruht auf der Vorstellung, dass der Uebergang zwischen beiden aneinander grenzenden Medien nicht ein plötzlicher sein kann, wie es bisher bei Benutzung der Formeln angenommen ist, sondern streng genommen ein allmählicher ist, dass also zwischen beiden homogenen Medien sich eine sehr dünne Schicht mit variabelem Brechungsexponenten befindet, welche einen continuirlichen Uebergang der Werthe der Brechungsexponenten in beiden angrenzenden Medien vermittelt.

Im Uebrigen wird die bisher erörterte Theorie unverändert beibehalten, es werden also z. B. keine longitudinalen Strahlen eingeführt. Die genannte Zwischen- oder Oberflächenschicht kann künstlich durch die Politur noch vergrössert sein, sie kann aber auch, wie z. B. bei Flüssigkeiten, eine natürliche sein. Eine auf dieser Vorstellung aufgebaute Theorie ist von L. LORENZ[9]) gegeben, welche indess nicht zu völlig analytisch identischen Formeln für die Amplituden und Phasen des reflektirten und gebrochenen Lichtes führt wie die CAUCHY'sche Theorie.

---

1) W. WERNICKE, WIED. Ann. 25, pag. 203. 1885.

2) R. RITTER, WIED. Ann. 36, pag. 236. 1889.

3) A. CAUCHY, Compt. rend 30, pag. 465. 1850; 31, pag. 60, 255 u. 766. 1850. — Mém. de l'Acad. des sc. 22, pag. 29. 1849.

4) A. BEER, POGG. Ann. 111, pag. 467. 1854.

5) ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. 18, pag. 369. 1855.

6) EISENLOHR, POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858.

7) V. v. LANG, Einleitung in die theoretische Physik, Braunschw. 1873, pag. 263.

8) Im Grunde genommen ist diese Theorie dieselbe wie die CAUCHY's, denn in einer inhomogenen Schicht muss man thatsächlich Longitudinalwellen annehmen. — Diese Vorstellung vermeidet aber gewisse Schwierigkeiten der CAUCHY'schen Theorie.

9) L. LORENZ, POGG. Ann. 111, pag. 460. 1860; 114, pag. 238. 1861.

Zur numerischen Uebereinstimmung mit dieser führen die Rechnungen P. ZECH's[1]), welcher indess insofern eine zu specielle Annahme benutzte, als er die Oberflächenschicht als längs ihrer ganzen Dicke homogen annahm.

Die Ausführungen VON DER MÜHLL's[2]) führten insofern zu keinem Resultate, als sie die Reflexionserscheinungen als unabhängig von der Existenz der Oberflächenschicht ergeben, so lange das Quadrat ihrer Dicke gegen das der Wellenlänge des Lichtes zu vernachlässigen sei.

In neuerer Zeit hat indess A. C. VAN KYN VAN ALKEMADE[3]) eine Theorie dieser Erscheinungen unter Benutzung der Vorstellung einer beliebigen, aber sehr dünnen Oberflächenschicht von der elektromagnetischen Lichttheorie aus gegeben, DRUDE[4]) von der mechanischen Theorie aus. Beide Wege führen natürlich zu gleichen Resultaten, da man auch die Ausgangsgleichungen in einander überführen kann.

Für das relative Amplitudenverhältniss $tang\,\psi$ und die relative Phasendifferenz Δ der beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Componenten ergeben sich unter der Voraussetzung, dass die Oberflächenschicht dünn gegen die Wellenlänge des Lichtes sei, analytisch identische Resultate mit der CAUCHY'schen Theorie. Diese Formeln sind durch die JAMIN-schen und QUINCKE'schen Versuche experimentell bestätigt.

Bezeichnet Δ die relative Phasendifferenz bei der Reflexion am Medium (2), Δ' dieselbe bei Reflexion am Medium (1), φ den Einfallswinkel im ersten Falle, φ' denselben im letzteren, und ist schliesslich n der Brechungsexponent des Mediums 2 gegen das Medium 1, ε der Ellipticitätscoëfficient, so kann man die CAUCHY'schen Formeln in die Gestalt bringen:

$$tang\,\Delta = 2\varepsilon\,\frac{\sin\varphi\,tang\,\varphi}{\frac{tang^2\varphi}{n^2}-1}, \qquad tang\,\Delta' = -\,2\varepsilon n\,\frac{\sin\varphi'\,tang\,\varphi'}{n^2\,tang^2\varphi'-1}. \tag{38}$$

Die reflektirten Amplituden, d. h. auch $tang\,\psi$, erweisen sich im Allgemeinen als erst von dem Quadrat von ε abhängig. Nur bei dem Einfallswinkel $\varphi = arc\,tang\,n$ bei Reflexion am Medium 2, und bei dem Einfallswinkel $\varphi' = arc\,tang\,\frac{1}{n}$ bei Reflexion am Medium 1 ist $tang\,\psi$ resp. $tang\,\psi'$ (wobei sich ψ auf ersteren, ψ' auf letzteren Fall bezieht), von ε selbst abhängig, nämlich

$$tang\,\psi = tang\,\psi' = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1+n^2}. \tag{39}$$

Diese Resultate werden durch die Erfahrung völlig bestätigt, vorausgesetzt dass ε so klein ist, dass sein Quadrat gegen die Grösse selbst zu vernachlässigen sei. Im Allgemeinen müssen dann die Intensitäten des reflektirten Lichtes durch die FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln befriedigend dargestellt werden, und das ist, wie wir nach den pag. 754 erwähnten Experimenten sahen, wirklich der Fall. Nur für den Einfallswinkel, welcher der Polarisationswinkel der Substanzen sein sollte, für welchen also ψ nach den FRESNEL-NEUMANN'schen Formeln Null sein sollte, tritt eine Abweichung hinsichtlich des Verhaltens der Amplituden ein, indem für diesen Einfallswinkel jene Grösse ψ nicht Null ist, sondern eine nach

---

[1]) P. ZECH, POGG. Ann. 109, pag. 60. 1860.

[2]) K. VON DER MÜHLL, Math. Annal. 5, pag. 471. 1872.

[3]) A. C. VAN KYN VAN ALKEMADE, WIED. Ann. 20, pag. 22. 1883.

[4]) P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 126. 1891.

den Gleichungen (39) definirte Grösse behält. Zugleich wird für diesen Winkel Δ resp. Δ' zu $\frac{\pi}{2}$, wie die Gleichungen (38) lehren, d. h. jener Einfallswinkel ist der Haupteinfallswinkel. Letztere Gleichungen erklären auch völlig die von QUINCKE beobachtete Umkehr des Vorzeichens der elliptischen Reflexion bei Vertauschung des reflektirenden Mediums.

Die Theorie ergiebt ferner in Uebereinstimmung mit dem Experiment, dass von den absoluten, durch die Reflexion herbeigeführten Phasenänderungen Δ_p und Δ_s nur letztere in merklicher Weise durch die Anwesenheit der Oberflächenschicht modificirt wird, und ebenso ergiebt die Theorie einen nur unbedeutenden Einfluss der Oberflächenschicht auf das gebrochene Licht.

Bezeichnet dl die Dicke einer Elementarschicht der Oberflächenschicht an einer Stelle derselben, an welcher der Brechungsexponent gegen das Medium 1 den Werth n' hat, so ist

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n^2 - 1} \int dl \frac{(n'^2 - 1)(n^2 - n'^2)}{n'^2}, \tag{40}$$

wobei unter λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im Medium (1) verstanden ist, und das Integral über die ganze Oberflächenschicht zu erstrecken ist.

Nach den Gleichungen (38) entspricht ein positives ε einem nach der JAMIN-schen Bezeichnung (cf. pag. 763) positiven Sinne der elliptischen Reflexion. Nach der Gleichung (40) ist ε positiv, falls der Brechungsexponent n' jeder Elementarschicht der Oberflächenschicht zwischen denen der angrenzenden Medien 1 und 2 enthalten ist. In diesem Falle kann man eine untere Grenze l für die Dicke der Oberflächenschicht angeben. Dieselbe beträgt

$$\frac{l}{\lambda} > \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Bei Diamant, für welchen ε nach JAMIN 0·018 beträgt, ist diese untere Grenze $l = 0{\cdot}0068\,\lambda$. Diese geringe Dicke der Oberflächenschicht vermag also schon die beim Diamant in sehr starkem Maasse auftretende elliptische Reflexion zu erklären, was für die Wahrscheinlichkeit der ganzen Vorstellungsweise sehr günstig ist.

Ist in einer grösseren Anzahl von Elementarschichten der Oberflächenschicht n' grösser als n, so kann ε negativ werden, wie Formel (40) zeigt. Dies enthält einen plausibeln Grund dafür, dass polirte feste Körper mit niederem Brechungsexponenten negative elliptische Reflexion zeigen, da man sich vorstellen kann, dass bei diesen der Brechungsexponent der durch das Polirmittel künstlich hervorgerufenen Oberflächenschicht den der polirten Substanz übertrifft.

Auf Grund der FRESNEL'schen Vorstellung variabler Dichte der Oberflächenschicht gelangte POTIER[1]) auf anderem Wege zu Resultaten, welche zwar mit den CAUCHY'chen analytisch nicht identisch zu sein scheinen[2]), aber für ein und dieselbe Farbe nicht merklich von ihnen abweichen sollen. Speciell ist die von POTIER gegebene Formel für den Ellipticitätscoëfficienten analog mit der obigen Formel (40), insofern als sie ebenfalls die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im Nenner enthält. Sieht man also von der Dispersion der Brechungsexponenten der Medien 1 und 2 und ihrer Grenzschicht ab, so folgt, dass der Ellipticitätscoëfficient umgekehrt proportional mit der Wellenlänge ist. Die oben (pag. 763)

---

1) POTIER, Compt. rend. 108, pag. 599. 1889.

2) Aus der kurzen l. c. gegebenen Notiz lässt sich dies nicht ersehen.

citirten Experimente von CORNU bestätigen ein nach diesem Gesetze starkes Wachsen der elliptischen Reflexion mit abnehmender Wellenlänge. Die CAUCHY'sche Theorie ergiebt dagegen einen von der Wellenlänge unabhängigen Ellipticitätscoëfficienten.

Auch in anderen Fällen ergiebt sich keine Uebereinstimmung mehr zwischen der CAUCHY'schen Theorie und der der Oberflächenschichten, wie DRUDE ausführte. Es sind dies die Fälle, für welche die absoluten Amplituden- und Phasenänderungen des reflektirten Lichtes beider (s- und p-) Componenten maassgebend sind, und welche z. B. bei der Erscheinung der NEWTON'schen Ringe im polarisirten Licht eintreten, falls die dieselben erzeugende Platte mit Oberflächenschichten behaftet ist.

Theoretisch ist die Erscheinung der NEWTON'schen Ringe, wie sie durch das Auftreten der elliptischen Reflexion an den Grenzflächen modificirt wird, zunächst von JAMIN[1]) nach der CAUCHY'schen Theorie behandelt. Letztere erweist sich aber insofern hier als unzureichend, als sie die Helligkeit des Centralflecks der NEWTON'chen Ringe, welcher einer Plattendicke gleich Null entspricht, bei Beleuchtung mit unter dem Polarisationswinkel einfallendem senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichte, dem der übrigen Maxima der Ringe als gleich ergiebt, während derselbe, wie das Experiment lehrt, viel dunkler als letztere ist. — Zu diesem Resultate führen jedoch die DRUDE'chen Rechnungen, und zugleich ist in ihnen gezeigt, dass man aus dem Polarisationswinkel des Centralflecks den Brechungsexponent der Oberflächenschicht erhält, falls man diese als homogen annimmt[2]), und daher auch bei bekannten durch gewöhnliche Reflexion bestimmten Ellipticitätscoëfficienten nach Formel (40) die Dicke der Oberflächenschicht.

Erweist sich daher die CAUCHY'che Theorie schon aus dem genannten Grunde als nicht ausreichend gegenüber der die Vorstellung von Oberflächenschichten benutzenden, so tritt dies besonders auch noch durch Heranziehung folgender Thatsachen hervor:

Nach der Vorstellung der Oberflächenschichten ist der Ellipticitätscoëfficient mehr eine secundäre, von Nebenumständen (nämlich der Oberflächenschicht) abhängende Grösse, während derselbe nach CAUCHY für die beiden Medien, an deren Grenze die Reflexion stattfindet, charakteristisch wäre.

Die Beobachtungen sprechen nun entschieden mehr für die erste Auffassung, denn es hat sich der Ellipticitätscoëfficient als stark von der Behandlung, Politur Alter etc. des Spiegels als abhängig erwiesen[3]) und andererseits zeigen Beobachtungen an frischen Krystall-Spalt-Flächen[4]) und neuerdings auch an gut rein

---

[1]) JAMIN; Ann. de chim. et de phys. (3) 36, pag. 158. 1852. — Vergl. auch MASCART, Compt. rend. 112, pag. 407. 1891; Ann. de chim. et de phys. (6) 24, pag. 373. 1891.

[2]) Eine Anwendung hiervon ist gemacht von P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 158. 1891.

[3]) Vergl. C. SPURGE, Proc. Roy. Soc. 42, pag. 242. 1887. — P. DRUDE, cf. folgende Anm. Auf eine Wirkung von Oberflächenschichten ist auch die von GLAZEBROOK (Proc. cambr. Phil. Soc. V (3) pag. 169. 1884) beobachtete Abhängigkeit der Drehung der Polarisationsebene des in Glas gebrochenen Lichtes von der Feuchtigkeit der umgebenden Luft zurückzuführen.

[4]) P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 532. 1889. Gegen diese Beobachtungen sind Einwände von K. E. F. SCHMIDT (WIED. Ann. 37, pag. 353. 1889) erhoben, welcher fand, dass an Kalkspath-Spaltflächen noch starke elliptische Reflexion vorhanden sei. Indess hat für diese DRUDE (WIED. Ann. 38, pag. 265. 1889.) seine früheren Resultate bestätigt gefunden, dass nämlich ϵ sehr klein sei, wenn man genügend frische Spaltflächen untersucht.

gehaltenem Wasser[1]), dass, je mehr man für die Fernhaltung von Oberflächenschichten sorgt, auch der Ellipticitätscoëfficient um so kleiner wird.

Ferner hat QUINCKE[2]) den Einwand gegen die CAUCHY'sche Theorie erhoben, dass, falls der Ellipticitätscoëfficient eines Mediums *a* gegen *b*, und von *b* gegen *c* beobachtet ist, die CAUCHY'sche Theorie den Ellipticitätscoëfficienten von *a* gegen *c* zu berechnen erlaubt. Dieser berechnete Werth stimmt aber durchaus nicht mit dem beobachteten. Ebenso ist die von RAYLEIGH[3]) beobachtete Lichtreflexion an der Grenze zweier Medien von gleichem Brechungsexponenten nach der CAUCHY'chen Theorie nicht zu erklären.

Diese Einwände kann man gegen die Theorie der Oberflächenschichten nicht geltend machen. — Wie oben erörtert ist, ergiebt sich der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ durch die Beziehung $tang\,\bar{\varphi} = n$[4]). Von dieser Regel haben indess schon BREWSTER und SEEBECK[5]) merkliche Ausnahmen constatirt; der Winkel des Polarisationsmaximums (welcher derselbe wie $\bar{\varphi}$ ist), schwankte oft bei demselben Spiegel je nach Wahl des Polirmittels und des Alters seiner Herstellung. Diese Erscheinungen sind nach der Theorie der Oberflächenschichten so zu erklären, dass dieselben nicht mehr so dünn sind, dass das Quadrat ihrer Dicke gegen das der Lichtwellenlänge zu vernachlässigen ist[6]).

Es ist schliesslich noch ein Versuch von MATHIEU[7]) zu erwähnen, welcher die elliptische Reflexion durchsichtiger Körper dadurch erklären wollte, dass er die NEUMANN'schen Formeln durch Berücksichtigung eines kleinen durch den Akt der Reflexion herbeigeführten Intensitätsverlustes modificirte. — Die erhaltenen Resultate schliessen sich aber den Beobachtungen nicht so gut an, wie die aus der obigen Theorie sich ergebenden. — Auch ist es unwahrscheinlich, dass der durch Reflexion herbeigeführte Intensitätsverlust für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente weit grösser sein sollte, als für die parallel zur Einfallsebene polarisirte, wie es die MATHIEU'sche Theorie erfordert. — Schliesslich ist gegen dieselbe einzuwenden, dass die Ellipticität des reflektirten Lichtes nicht von der grösseren oder geringeren Vollkommenheit der Politur des Spiegels abhängt.

Die folgende Tabelle enthält die Werthe der Ellipticitätscoëfficienten ε, des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$, sowie des aus ihm nach der Formel $\bar{n} = arc\,tang\,\bar{\varphi}$ berechneten Brechungsexponenten nach Beobachtungen von JAMIN. *n* giebt den direkt ermittelten Werth der Brechungsexponenten an. — Die Reflexion fand stets in Luft statt.

Wenn die erhaltenen Zahlen, zumal bei festen Körpern, auch nicht Constanten

---

1) LORD RAYLEIGH, Phil. Mag. 30, pag. 386. 1890; 33, pag. 1. 1892.

2) G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 359. 1866.

3) LORD RAYLEIGH, Rep. of the Brit. Assoc. 1887, pag. 585.

4) Daher ist die W. WERNICKE'sche Behauptung nicht gerechtfertigt, dass, falls für $\bar{\varphi}$ obige Beziehung gilt, Oberflächenschichten nicht mehr vorhanden wären. Vergl. W. WERNICKE, WIED. Ann. 31, pag. 452. 1887. — W. VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 326. 1887.

5) Vergl. die oben (pag. 751) citirten Arbeiten. — Vergl. auch SISSINGH, Arch. Néerl. 20, pag. 171. 1885.

6) Für die Wahrscheinlichkeit dieser Erklärung spricht, dass es W. WERNICKE (cf. vorige Anm. 4) stets gelungen ist, bei Substanzen, welche zunächst eine Abweichung von der Beziehung $tang\,\bar{\varphi} = n$ aufweisen, durch ein Reinigungsverfahren ihrer Oberfläche dieselbe herbeizuführen. — Das Verfahren bestand darin, dass die Oberfläche mit Gelatine übergossen wurde, welche nach dem Eintrocknen abgerissen wurde.

7) MATHIEU, Liouv. Journ. (3) 7, pag. 219. 1881.

bedeuten, welche für jene Substanzen bei allen Beobachtungen die gleichen Werthe besitzen werden, da sie durch die Behandlung der Oberfläche, Wahl des Polirmittels, Alter der Politur etc. variiren, so geben sie doch, da jene Variationen nie sehr bedeutend sein werden, eine annähernde Vorstellung von dem Betrage der elliptischen Reflexion auch in allen Fällen.

I. Feste Körper.

Name der Substanz	ε	$\overline{\varphi}$	$\overline{n}$	n
Positive Substanzen.				
Selen	+0·1200	68° 5′	2·605	
Steinkohle	0·1158	59° 17′	1·701	
Turmalin	0·0864	58° 25′	1·645	1·668
Bleiglätte	0·0825	64° 0′	2·076	
Realgar	0·0791	67° 26′	2·454	2·420
Kalkspath, ⊥ zur Axe geschnitten	0·0606	59°	1·675	1·654
Anthracit	0·0548	59° 42′	1·720	
Dunkelblauer Strass	0·0492	57° 53′	1·597	
Flintglas, MATTHIESSEN A	0·0365	59° 14′	1·683	
Arsenigte Säure	0·0332	59° 24′	1·692	
Blende	0·0296	67° 6′	2·371	2·369
Flintglas, FARADAY B	0·0285	60° 16′	1·755	
Antimonglas	0·0258	63° 34′	2·013	2·010
Borsaures Bleioxyd	0·0256	61° 16′	1·825	1·866
Asphalt	0·0252	57° 38′	1·579	
Cornalin	0·0245	56° 53′	1·534	
Grünes Glas	0·0218	56° 46′	1·527	
Leim	0·0199	56° 28′	1·509	1·520
Aloeharz	0·0197	58° 18′	1·619	1·634
Diamant	0·0180	67° 30′	2·434	2·439
Flintglas, GUINAND C	0·0170	59° 44′	1·714	1·710
Topas	0·0161	58° 36′	1·638	1·638
Farbloser Strass D	0·0158	57° 53′	1·593	1·580
Beryll, ⊥ zur Axe geschnitten	0·0145	57° 21′	1·560	1·598
Flintglas E	0·0120	58° 12′	1·613	1·614
Granat	0·0110	60° 30′	1·767	
Quarz	0·0112	56° 50′	1·530	1·547
Bernstein	0·0107	56° 50′	1·530	1·547
Diopsid	0·0106	54° 2′	1·378	
Grüner Strass	0·0089	58° 36′	1·638	1·620
Copal	0·0092	56° 48′	1·528	1·535
Dunkelrother Strass	0·0088	58° 17′	1·618	1·618
Rothes Glas	0·0085	56° 8′	1·490	
Gummi arabicum	0·0082	56° 3′	1·480	1·476
Flintglas E	0·0082	57° 40′	1·579	1·574
Alaun	0·0075	55° 22′	1·448	1·457
Glas	0·0075	56° 5′	1·487	
Colophonium	0·0070	55° 15′	1·545	1·543
Neutrale Substanzen.				
Alaun, ⊥ zur Octaëderaxe geschnitten	—	55°	1·428	
Menilit	—	56°	1·482	
Negative Substanzen.				
Flussspath	−0·0097	55° 15′	1·441	
Hyalith	0·0074	54° 52′	1·421	

II. Flüssigkeiten.

Name der Substanz	ε	$\bar{\varphi}$	$\bar{n}$	n
Positive Flüssigkeiten.				
Gastheer	+ 0·00823	60° 30′	1·768	1·768
Jodwasserstoffäther	0·00283	56° 37′	1·517	1·503
Lavendelöl	0·00250	55° 37′	1·462	1·462
Terpentinöl	0·00237	55° 36′	1·461	1·462
Amylen	0·00233	56° 5′	1·487	1·487
Anisöl	0·00231	57° 12′	1·553	1·555
Salpeteräther	0·00225	54° 37′	1·408	1·381
Rosmarinöl	0·00223	55° 45′	1·469	1·472
Sternanisöl	0·00216	57° 20′	1·560	1·555
Chlorzink, gesättigt	0·00213	56° 34′	1·515	1·543
Camphron	0·00212	56° 30′	1·511	1·503
Wermuthöl	0·00212	56° 15′	1·497	1·473
Cajeputöl	0·00212	55° 51′	1·474	1·465
Absoluter Alkohol	0·00208	53° 38′	1·358	1·465
Fenchelöl	0·00203	55° 59′	1·482	1·492
Melissenöl	0·00201	56° 26′	1·507	1·480
Kümmelöl	0·00200	56° 3′	1·486	1·489
Ingweröl	0·00200	55° 57′	1·480	1·479
Pfefferöl	0·00195	56° 5′	1·487	1·490
Copaivabalsamöl	0·00193	56° 27′	1·508	1·498
Quendelöl	0·00191	55° 47′	1·471	1·479
Aetherisches Lorbeeröl	0·00189	56° 59′	1·539	1·540
Gewürznelkenöl	0·00189	56° 56′	1·536	1·535
Benzoeäther	0·00188	56° 55′	1·535	1·503
Elaylbromür	0·00185	56° 52′	1·532	1·532
Oenanthol	0·00183	54° 51′	1·420	1·412
Camillenöl	0·00174	55° 27′	1·453	1·456
Campheröl	0·00168	55° 48′	1·472	1·461
Pimentöl	0·00166	56° 41′	1·521	1·531
Sadebaumöl	0·00168	55° 45′	1·469	1·472
Aceton	0·00165	53° 55′	1·372	1·359
Oxaläther	0·00154	55° 45′	1·469	1·407
Chloral	0·00154	55° 25′	1·450	1·461
Essigäther	0·00117	53° 45′	1·364	1·367
Essigsaurer Holzäther	0·00101	53° 47′	1·366	1·359
Neutrale Flüssigkeiten.				
Schwefelsaures Eisenoxyd 7:4	0	55° 33′	1·458	1·458
„ „ 1:4	0	55° 3′	1·431	1·431
Glycerin	0	54° 42′	1·412	1·413
Neutralessigsaures Bleioxyd, gesättigt	0	54° 3′	1·379	1·379
Manganchlorür 1:3	0	53° 29′	1·350	1·350
Goldchlorid 2:13	0	53° 18′	1·341	1·342
Salpetersaures Nickeloxyd 1:5	0	53° 8′	1·333	1·334
Negative Flüssigkeiten.				
Doppeltchromsaures Kali 1:6	− 0·00170	53° 24′	1·346	1·346
Schwefelsaures Kupferoxyd, gesättigt	0·00171	53° 49′	1·367	1·359
Jodkalium 1:4	0·00206	53° 25′	1·347	1·347
Essigsaures Kupferoxyd, gesättigt	0·00243	53° 6′	1·333	1·333
Chlorzink 2:3	0·00378	54° 30′	1·402	1·401
Platinchlorid 2:13	0·00400	53° 27′	1·349	1·349

Name der Substanz	ϵ	$\bar{\varphi}$	$\bar{n}$	n
Salpetersaures Uranoxyd	0·00430	53° 27′	1·349	1·349
Chromalaun 1:4	0·00514	53° 28′	1·350	1·355
Salpetersaures Natron 3:8 . . .	0·00561	53° 24′	1·347	1·389
Wasser	0·00577[1])	53° 7′	1·333	1·333
Salpetersaures Kali, gesättigt . .	0·00666	53° 37′	1·357	1·357
Basischessigsaures Bleioxyd, gesättigt	0·01027	53° 27′	1·349	1·349
Eisenchlorid 1:3	0·01056	53° 55′	1·372	1·372
Chlorzink 1:3	0·01152	53° 44′	1·363	1·371
Schwefelsaures Natron 1:4 . . .	0·01383	53° 28′	1·349	1·344

II. Totalreflexion.

Wir wählen als Ausgangspunkt zunächst wieder die allgemeinen Gleichungen (5), (10) und (11), welche die Lösung des Problems der Reflexion und Brechung an der Grenze zweier beliebiger durchsichtiger krystallinischer Medien enthalten.

Es soll die bisher gemachte Voraussetzung, dass die beiden den gebrochenen Wellen angehörigen Wurzeln φ der Gleichung (5) reelle Werthe seien, fallen gelassen werden. Da die φ die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung sind, so ist das Eintreten complexer Werthe derselben nur dadurch möglich, dass der Radicand einer zweiten Wurzel, welche in dem Ausdruck für φ auftritt, negativ wird. Der Uebergang von reellen zu complexen Werthen ist also dadurch gegeben, dass jener Radicand Null ist, d. h. da die verschiedenen aus der Gleichung (5) folgenden Werthe des φ dadurch gebildet werden, dass in ihren expliciten Ausdrücken den auftretenden zweiten Wurzeln verschiedene Vorzeichen beigelegt werden, so müssen beim Uebergang von reellen zu complexen Werthen zwei der Wurzeln φ zusammenfallen. Für diesen betrachteten Uebergang der gewöhnlichen Reflexion in die hier betrachtete muss also die Discriminante der Gleichung 5 verschwinden.

Hierdurch kann man analytisch den zu diesem Grenzfall gehörigen Einfallswinkel φ leicht berechnen. Es ergeben sich zwei solcher Werthe φ_o und φ_e, da die Discriminante aus einer biquadratischen Gleichung gebildet ist.

Man erhält aber auch eine einfache geometrische Construction des hier betrachteten Grenzfalls. Complexe Werthe von φ bedeuten offenbar, dass keine gebrochene Wellen zu Stande kommen, dass also die auf pag. 703 beschriebene geometrische Construction der gebrochenen Strahlen unmöglich wird. Diese Construction war folgende:

Um einen beliebigen Punkt O der Geraden P, in welcher die einfallende Wellenebene W die Grenzfläche G der beiden Medien (1) und (2) schneidet, construire man die zu gleichen aber beliebigen Zeiten gehörigen Strahlenflächen $\Sigma^{(1)}$ und $\Sigma^{(2)}$, von welchen erstere sich auf das Medium (1), letztere sich auf das Medium (2) bezieht. Man verlängere den durch den Einfallspunkt O gehenden, zu W gehörigen Strahl über O hinaus bis zum Schnitt H mit der correspondirenden Schale von $\Sigma^{(1)}$ und lege in H an diese Schale eine Tangentialebene W'. Durch die Schnittgerade P' von W' mit G lege man nun die in das zweite Medium fallenden Tangentialebenen von $\Sigma^{(2)}$, so geben diese die Richtung der gebrochenen Wellenebenen. Die Radien von O nach den Berührungspunkten dieser Wellenebenen mit ihren Strahlenflächen bezeichnen die Richtungen der gebrochenen Strahlen.

Diese Construction ist nicht mehr möglich, wenn die Gerade P' eine der beiden von der Strahlenfläche $\Sigma^{(2)}$ mit der Grenzfläche G ausgeschnittenen Curven

[1]) Für möglichst reine Wasseroberflächen erhält man nach RAYLEIGH $\epsilon = +0{\cdot}00042$.

oder beide schneidet. Der Grenzfall, in welchem gewöhnliche Reflexion in Totalreflexion einer der beiden gebrochenen Wellen übergeht, tritt also ein, wenn P' die zu der betreffenden Welle gehörige Schale der Strahlenfläche $\Sigma^{(2)}$ berührt. Analytisch kann man dies so ausdrücken, dass man zunächst die Gleichung für die Coordinaten der Schnittpunkte von P' mit $\Sigma^{(2)}$ aufstellt.

Es mögen nur die Fälle betrachtet werden, in denen das Medium (1), in welchem das Licht einfällt, isotrop ist. Die Strahlenfläche $\Sigma^{(1)}$ ist dann eine Kugel und zwar mit dem Radius ω_0, falls sie nach Verlauf der Zeiteinheit um O construirt ist, und ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Medium (1) bezeichnet. Bei der hier getroffenen Wahl des Coordinatensystems (nämlich die z-Axe senkrecht zur Grenze, die y-Axe senkrecht zur Einfallsebene) ist für die Gerade P' $z = 0$, $x = -\omega_0/sin\,\varphi = -h$ nach der Bezeichnungsweise der pag. 743. Dabei bezeichnet φ den Einfallswinkel, und zwar positiv gerechnet, wenn die einfallende Wellennormale in den von der positiven x-Axe und positiven z-Axe gebildeten Quadranten fällt.

Bildet man dann die Gleichung $\Sigma^{(2)}$ der Strahlenfläche, bezogen auf unser Coordinatensystem, und setzt in derselben $z = 0$, $x = -h$, so erhält man eine biquadratische Gleichung für y, d. h. die Coordinaten der Schnittpunkte der Strahlenfläche mit der Geraden P'. Das Verschwinden der Discriminante dieser Gleichung giebt die Bedingung dafür, dass P' die Strahlenfläche berührt, d. h dass der Einfallswinkel einer der Grenzwinkel φ_o, φ_e ist.

Dass man auf den beiden, soeben auseinandergesetzten verschiedenen Wegen, von denen der erste an die Wellennormalen, der zweite an die Strahlen anknüpft, zu denselben Gleichungen für h, d. h. für die Grenzwinkel φ_o, φ_e gelangt, erkennt man am einfachsten, wenn man das von HAMILTON[1]) und MAC CULLAGH[2]) gefundene Resultat berücksichtigt, dass die HUYGENS'sche Construction der gebrochenen Strahlen auch in der Weise ausgeführt werden kann, dass die Strahlenflächen durch ihre Reciprokalflächen in Bezug auf eine concentrische Kugel, deren Radius gleich der Längeneinheit ist, ersetzt werden.

Aus der zuletzt angegebenen Construction folgt, dass für einen Grenzeinfallswinkel einer der zugehörigen gebrochenen Strahlen in der Trennungsfläche der beiden Medien (1) und (2) liegt. Wie oben pag. 695 erörtert wurde, geht in diesem Falle bei der zugehörigen Lichtwelle keine Energie von (1) auf (2) über, da allgemein ein Lichtstrahl die Eigenschaft hat, dass durch jede durch ihn gelegte Ebene keine Energie übertritt. Ist das Azimuth des einfallenden Lichtes so gewählt, dass nur dieser eine gebrochene Strahl überhaupt zu Stande kommen kann (uniradiales Azimuth $A_o^{(n)}$ nach Bezeichnung der pag. 746), so tritt überhaupt keine Energie vom Medium (1) auf (2) über, mit anderen Worten, die Intensität der reflektirten Welle muss gleich der der einfallenden sein. Daher nennt man diesen Fall der Reflexion Totalreflexion, weil das ganze einfallende Licht reflektirt wird. — Ebenso erhält man Totalreflexion, wenn der Einfallswinkel grösser als einer der Grenzwinkel φ_o oder φ_e wird, da dann ebenfalls kein gebrochener Strahl zu Stande kommt.

Ist das einfallende Licht nicht in einem uniradialen Azimuth polarisirt, so werden die Verhältnisse insofern complicirter, als nicht mehr die reflektirte Intensität gleich der einfallenden ist.

Das Polarisationsazimuth des reflektirten Lichtes ergiebt sich aus den

[1]) HAMILTON, Trans. Irish Acad. 17, pag. 144. 1883, III. Suppl.

[2]) J. MAC CULLAGH, Trans. Irish Acad. 17, pag. 252; Coll. Works, pag. 36. Vergl. auch TH. LIEBISCH, Physikal. Kryst. pag. 288.

Gleichungen (11) dieses Kapitels. Es ist in diesen zu berücksichtigen, dass die A complexe Grössen werden, sobald der Einfallswinkel an Grösse einen der Grenzwinkel überschreitet[1]).

Fällt natürliches Licht ein, so kann man die Grenzwinkel daran erkennen, dass für diese die reflektirte Intensität fast plötzlich bedeutend zunimmt. Beleuchtet man daher eine Krystallfläche mit diffusem homogenem Lichte, so erscheinen im Felde des reflektirten Lichtes zwei Curven, welche die Gebiete geringerer Lichtintensität von denen grösserer trennen. Diese Curven liegen an den Stellen, für welche der Reflexionswinkel einer der Grenzwinkel φ_o oder φ_e ist). Sie stehen im Allgemeinen nicht senkrecht zur Reflexionsebene; dies tritt nur dann ein, wenn dieselbe einer optischen Symmetrieebene des Krystalls parallel läuft, oder wenn die Schnittgerade der Reflexionsebene mit der Krystallfläche die Richtung einer optischen Symmetrieaxe besitzt.

Man hat Instrumente construirt, welche die Grenzwinkel nach dem angegebenen Principe bequem zu messen gestatten. In dem von F. KOHLRAUSCH[3]) angegebenen Totalreflektometor wird der Krystall in eine stärker brechende Flüssigkeit[4]) (Schwefelkohlenstoff), getaucht, damit man die Totalreflexion beobachten kann. Das Azimuth der Einfallsebene kann man dadurch variiren, dass der Krystall an einem zweckmässig construirten, um die Spiegelnormale drehbaren Träger[5]) befestigt wird.

Wegen des bedeutenden Einflusses, welchen die Temperatur auf den Brechungsexponenten der umgebenden Flüssigkeit ausübt, ist erstere bei jedem Versuche genau zu ermitteln und dementsprechende Correctionen bei den Messungen anzubringen. Man vermeidet diese, wenn man anstatt der Flüssigkeit einen festen Körper als Umgebung der Krystallplatte wählt, dieselbe z. B. nach einem im Princip von WOLLASTON[6]) angegebenen Verfahren gegen die eine Seite eines stark brechenden Glasprismas drückt[7]).

---

[1]) Betreffs weiterer Ausführungen dieser Rechnungen vergl. E. KETTELER, WIED. Ann. 28, pag. 230 u. 520. 1886, und P. VOLKMANN, WIED. Ann. 29, pag. 263. 1886. — Experimentell ist die Polarisation der Grenzcurven untersucht von C. PULFRICH, WIED. Ann. 34, pag. 337. und 1888, J. NORRENBERG, WIED. Ann. 34, pag. 843. 1888.

[2]) Diese Grenzcurven treten noch deutlicher hervor, wenn man das Licht aus dem Krystall in das äussere Mittel streifend eintreten lässt; alsdann erscheint der bei der vorigen Anordnung hellste Theil des Gesichtsfeldes (der der vollständigen Totalreflexion) völlig dunkel, und das bei der vorigen Anordnung durch partiell reflektirtes Licht erleuchtete Gebiet wird nur durch partiell gebrochenes erleuchtet.

[3]) F. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 4, pag. 1. 1876; 16, pag. 609. 1882. Eine Abbildung dieses Instruments ist z. B. enthalten in TH. LIEBISCH, physikal. Krystall. pag. 407. — Eine weitere Vervollkommnung dieses Instrumentes, besonders zum Zweck der Dispersionsmessung gab CH. SORET, Arch. de Gen. (3), pag. 44. 1883. — Zeitschr. f. Instr. 2, pag. 414. 1883.

[4]) Andere geeignete Flüssigkeiten sind α-Monobromnaphtalin (cf. A. FOCK, Zeitschr. f. Kryst. 4, pag. 590. 1880), Methylenjodid (cf. R. BRAUNS, N. Jahrb. f. Mineral. 1886, 2, pag. 72; 1888, 1, pag. 213) oder eine Lösung von Jod und Schwefel in Methylenjodid, cf. E. BERTRAND, Bull. soc. franc. de min. 11, pag. 31. 1888. Der Brechungsexponent dieser Lösung übersteigt 1·85.

[5]) Construirt nach Angaben von C. KLEIN, N. Jahrb. f. Mineral. 1879, pag. 880.

[6]) WOLLASTON, Phil. Trans. 92 (2), pag. 381. 1802.

[7]) Eine solche Versuchsanordnung ist von F. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 16, pag. 603. 1882, vorgeschlagen. Betreffs der Berechnung der Beobachtungsdaten vergl. auch K. SCHERING, N. Jahrb. f. Mineral. 1883, 1, pag. 169, und B. HECHT, ibid. 1886, 2, pag. 186. Um das Azimuth der Einfallsebene beliebig ändern zu können, ist von TH. LIEBISCH für diese Methode eine zweckmässige Construction für den Krystallträger angegeben (Zeitschr. f. Instrumkd. 4, pag. 185. 1884; 5, pag. 13, 1885).

Die WOLLASTON'sche Methode ist ferner in der Weise modificirt worden, dass an Stelle des Glasprismas eine halbkugelförmige Linse[1]) oder ein Glascylinder[2]) gesetzt ist. Durch Anwendung eines Ocularspectroskopes im Ocularauszug des beobachtenden Fernrohres mit einem Spalt, welcher parallel zur Einfallsebene liegt[3]), erhält man bei Beleuchtung mit weissem Lichte bequem die Dispersion der Grenzwinkel.

a) Totalreflexion an optisch einaxigen Krystallen[4]).

Bezeichnet μ den Winkel zwischen der Normale der reflektirenden Krystallfläche und der optischen Axe, und ist ϑ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der Einfallsebene (das Azimuth derselben), so ergiebt das Verschwinden der Discriminante der Gleichung (5) für die beiden Grenzwinkel die Relationen

$$h_o^2 = \frac{\omega_o^2}{\sin^2\varphi_o} = a, \tag{41}$$

$$h_e^2 = \frac{\omega_o^2}{\sin^2\varphi_e} = c\,\frac{c + (a - c)(\cos^2\mu + \sin^2\mu\cos^2\vartheta)}{c + (a - c)\cos^2\mu}, \tag{42}$$

worin a und c die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls bedeuten, und zwar erstere die der ordinären Welle, letztere die der extraordinären. Da für positiv einaxige Krystalle $a < c$ ist, für negativ einaxige $a > c$, so ist für erstere h_o kleiner als h_e, d. h. φ_o grösser als φ_e, bei negativen Krystallen ist dagegen φ_o kleiner als φ_e. Welche von den beiden im Gesichtsfelde eines Totalreflektometers sichtbaren Grenzcurven dem Winkel φ_o und welche φ_e entspricht, ist daran zu erkennen, dass erstere bei Aenderung des Azimuths der Einfallsebene eine feste Lage behält und stets senkrecht gegen erstere verläuft, während dies bei der zu φ_e gehörigen Grenzcurve nicht der Fall ist. — Aus der Lage der Grenzcurven kann man daher sofort den Charakter der Doppelbrechung ablesen.

Eine Discussion der Gleichung (42) zeigt, dass, falls man in ihr ϑ als variabel betrachtet, φ_e seinen Maximal- resp. Minimalwerth annimmt für $\vartheta = 0$ oder π und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, d. h. wenn die Einfallsebene im Hauptschnitt oder senkrecht zu ihm liegt. In diesen beiden Lagen allein steht auch die zu φ_e gehörige Grenzcurve senkrecht zur Einfallsebene.

In der ersteren Lage ($\vartheta = 0$) ist

$$h_e^2 = \frac{ac}{c + (a - c)\cos^2\mu}, \tag{42'}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die Geschwindigkeit des ausserordentlichen Strahles dar, dessen Richtung durch die Schnittlinie der Krystallfläche mit der Einfallsebene gegeben ist.

In der zweiten Lage $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$, ist

$$h_e^2 = c. \tag{42''}$$

---

[1]) E. BERTRAND, Bull. soc. min. de France 8, pag. 375 u. 426. 1885. — Bull. soc. franc. de min. 9, pag. 15. 1886; 10, pag. 140. 1887. — E. MALLARD, Bull. soc. franc. de min. 9, pag. 167. 1886. — Auf demselben Princip beruht das von E. ABBE angegebene Totalreflektometer, welches von S. CZAPSKI beschrieben ist in der Zeitschr. f. Instrumkd. 9, pag. 360. 1889.

[2]) Ein solcher ist von C. PULFRICH zur Construction eines Totalreflektometers verwandt. Vergl. WIED. Ann. 30, pag. 193 u. 487. 1887; 31, pag. 724. 1887. — Zeitschr. f. Instrumkd. 7, pag. 16, 55 u. 392. 1887.

[3]) Vergl. C. PULFRICH, WIED. Ann. 30, pag. 487. 1887. — Zeitschr. f. Instrumkd. 7, pag. 55. 1887.

[4]) Vergl. TH. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1885, 1, pag. 246; 2, pag. 203; 1886, 2, pag. 52.

Man kann daher an einer beliebigen Grenzebene eines optisch einaxigen Krystalls die Hauptlichtgeschwindigkeiten und den Winkel, welchen ihre Normale mit der optischen Axe bildet, durch Totalreflexion finden. Letzterer berechnet sich aus den beiden Gleichungen (42') und (42''), deren linke Seiten direkt beobachtbare Grössen enthalten, nämlich die Maximal- resp. Minimalwerthe der zur ausserordentlichen Welle gehörigen Grenzwinkel. — Aus dem Erörterten folgt ebenfalls, dass man für jede Lage der Einfallsebene ihr Azimuth gegen den Hauptschnitt auch aus alleiniger Beobachtung des totalreflektirten Lichtes finden kann.

Die Neigung χ der dem Winkel φ_e zugehörigen Grenzlinie gegen die Einfallsebene ist gegeben[1]) durch

$$\cos\chi = \frac{\sqrt{c}(a-c)\sin^2\mu \sin\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{\mathfrak{N}}},$$

wobei $\mathfrak{N}$ gesetzt ist für

$$\mathfrak{N} = a[ac - \omega_0^2(a\cos^2\mu + c\sin^2\mu)]\cos^2\vartheta + (c-\omega_0^2)(a\cos^2\mu + c\sin^2\mu)^2\sin^2\vartheta.$$

In der betrachteten Abhängigkeit der Grenzwinkel vom Azimuth ϑ der Einfallsebene macht es einen wesentlichen Unterschied, ob ω_0 kleiner als beide Hauptlichtgeschwindigkeiten ist, oder nur kleiner als die eine derselben. Im letzteren Fall erhält man nicht für alle Azimuthe ϑ Totalreflexion[2]). Diese durch derartige Verhältnisse herbeigeführte Modifikationen kann man entweder dadurch experimentell studiren, dass man die Krystallplatte in verschiedene Flüssigkeiten mit geeigneten Brechungsexponenten taucht[3]) oder dadurch, dass man eine Flüssigkeit anwendet, deren Dispersion hinreichend ist, um für gewisse Farben in jeglichen Azimuthen Totalreflexionen zu ergeben, für andere Farben dagegen nicht[4]).

b) Totalreflexion an optisch zweiaxigen Krystallen.

Die Gleichungen der Grenzwinkel gestalten sich am einfachsten, wenn die Grenzfläche des Krystalls eine optische Symmetrieebene ist. Der eine Grenzwinkel ist unabhängig vom Azimuth der Einfallsebene und ergiebt direkt die eine Hauptlichtgeschwindigkeit, der andere ist von jenem Azimuth abhängig. Seine Maximal- resp. Minimalwerthe ergeben die beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Liegt die Grenzebene des Krystalls parallel zur Ebene der optischen Axen, so treten ausser den beiden den vorhin betrachteten Grenzwinkeln angehörigen Grenzcurven noch solche auf, welche der (äusseren) konischen Refraction ihre Entstehung verdanken[5]). Da nämlich, wie wir aus der pag. 772 erläuterten geo-

---

1) TH. LIEBISCH, Physikal. Krystall., pag. 417. — Messungen des Winkels χ sind am Krystallspath ausgeführt von F. DANKER (N. Jahrb. f. Mineral., Beil., Bd. 4, pag. 265. 1885), C. PULFRICH, (ibid. 5, pag. 182. 1887), J. NORRENBERG (Verh. des naturf. Ver. d. pr. Rheinl. 45, pag. 32. 1888).

2) Betreffs der specielleren Discussion vergl. das citirte Werk von LIEBISCH, pag. 418—420.

3) Nach dieser Methode ist C. PULFRICH (l. c. pag. 167), und J. DANKER (l. c. pag. 241) verfahren.

4) Diese Verhältnisse sind an einer parallel zur optischen Axe geschliffenen Kalkspathfläche erfüllt, welche sich in Monobromnaphtalin befindet, wie J. NORRENBERG (l. c. und WIED. Ann. 34, pag. 843. 1880) gezeigt hat.

5) Vergl. W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann. 6, pag. 113. 1879, Taf. I. Betreffs weiterer Details mag wieder auf das citirte Werk von TH. LIEBISCH, pag. 423—425, und CH. SORET, Compt. rend. 107, pag. 479. 1888 verwiesen sein.

metrischen Construction sahen, Totalreflexion eintritt, wenn die Normale der einfallenden Welle eine derartige Lage hat, dass der gebrochene Strahl parallel zur Krystallgrenze verläuft, und da, falls derselbe in die Richtung einer Strahlenaxe fällt, ihm ein Kegel von im Krystall fortgepflanzten Wellennormalen angehört, so tritt auch für einen gewissen Kegel von im umgebenden Medium fortgepflanzten Wellennormalen Totalreflexion ein. Mit Hilfe desselben kann man direkt den Winkel der optischen Axen des Krystalls bestimmen, wie Mülheims[1]) gethan hat.

Auch bei beliebiger Orientirung der Krystallgrenzfläche erhält man nach Soret[2]) aus dem absolut grössten und absolut kleinsten Grenzwinkel, den man erhält, wenn man das Azimuth der Einfallsebene ändert, die beiden extremen Hauptlichtgeschwindigkeiten nach dem Schema

$$h^2 = \frac{\omega_0^2}{sin^2\varphi} = a, c.$$

An einer einzigen Krystallplatte kann man dagegen nicht entscheiden, ob die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit $\sqrt{b}$ dem grössten Werth desjenigen Grenzwinkels entspricht, welcher der Grenzcurve mit kleineren Grenzwinkeln angehört, oder dem kleinsten Werth desjenigen Grenzwinkels, welcher der Grenzcurve mit grösseren Grenzwinkeln angehört. Dies steht im Einklang mit der von A. Brill[3]) gefundenen Thatsache, dass durch einen Diametralschnitt einer Strahlenfläche im Allgemeinen noch eine zweite Strahlenfläche gelegt werden kann, welche die extremen Werthe $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ der Halbaxen mit ihr gemeinsam hat und sich nur durch einen anderen Werth der Halbaxe $\sqrt{b}$ von ihr unterscheidet (cf. oben pag. 711).

Man muss daher, wenn zur Ermittelung der Hauptlichtgeschwindigkeiten keine durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnete Grenzebene benutzt werden kann, die Beobachtung der grössten und der kleinsten Grenzwinkel in dem äusseren und inneren Kegel der Grenzstrahlen an zwei verschieden orientirten Grenzebenen ausführen, um die drei allen Grenzebenen gemeinsamen Extrem-Werthe der Grenzwinkel, aus welchen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten ableiten lassen, zu finden[4]).

Soret zeigte auch, wie man mit Hilfe der Totalreflexion die optische Orientirung einer beliebigen Krystallfläche finden kann. Nach B. Hecht[5]) liefert indess diese Methode nicht sehr genaue Resultate, und man verbindet sie zweckmässig noch mit anderen Messungsmethoden, z. B. der der Interferenzerscheinungen im convergenten polarisirten Lichte, um die Orientirung genau zu bestimmen.

Da aus den Beobachtungen über Totalreflexion sich die Geschwindigkeit von bestimmt orientirten, in der Grenzfläche verlaufenden Strahlen ergiebt, so eignet sich die Methode sehr gut zur experimentellen Prüfung der Fresnel'schen

---

[1]) A. Mülheims, über eine Art der Axenwinkelmessung und über die Bestimmung von Brechungsexponenten nach der Methode der Totalreflexion. Inaug.-Diss., Bonn 1888. — Ztschrft. f. Kryst. 14, pag. 202. 1888.

[2]) Vergl. Ch. Soret, Compt. rend. 107, pag. 176 u. 479. 1888; Arch. de Gen. 20, pag. 263. 1888; Ztschrft. f. Kryst. 15, pag. 25. 1888.

[3]) A. Brill, Sitzber. der bayer. Akad. 1883, pag. 423; Math. Ann. 34, pag. 297. 1889.

[4]) Ch. Soret, Ztschrft. f. Kryst. 15, pag. 45. 1889; F. L. Perrot, Compt. rend. 108, pag. 137. 1889; Arch. de Gen. (3) 21, pag. 113. 1889. — B. Hecht, N. Jahrb. f. Mineral., Beil.-Bd. 6, pag. 241. 1889.

[5]) B. Hecht, l. c., pag. 241.

Gesetze der Doppelbrechung[1]). Zu diesem Zweck angestellte Untersuchungen von W. KOHLRAUSCH[2]) und J. DANKER[3]) haben zu einer befriedigenden Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment geführt.

c) Totalreflexion an isotropen Medien.

Es mögen die Fälle näher ins Auge gefasst werden, in welchen der Einfallswinkel einen der Grenzwinkel φ_o oder φ_e überschreitet. Diese fallen bei isotropen Medien beide zusammen und werden durch die Relation geliefert:

$$sin\,\varphi_o = sin\,\varphi_e = n.$$

n bedeutet den Brechungsexponenten des reflektirenden Mediums (2) gegen das umgebende Medium (1).

Es gelten auch in diesem Falle die Formeln (25) oder (25') in ihrer analytischen Gestalt, nur ist der in ihnen auftretende Winkel χ nicht der wirkliche reelle Brechungswinkel, sondern es ist eine complexe Grösse, welche definirt ist durch die Gleichungen:

$$sin\,\chi = \frac{sin\,\varphi}{n}, \quad cos\,\chi = \frac{\sqrt{n^2 - sin^2\varphi}}{n}.$$

$sin\,\chi$ ist daher eine reelle, $cos\,\chi$ eine imaginäre Grösse, da $sin\,\varphi > n$ sein soll.

Löst man in den Formeln (25)[4]) die trigonometrischen Functionen der Differenzen der Grössen φ und χ in solche der Grössen selber auf, so schreiben sich, wenn man für die reflektirten Amplituden $\mathrm{R}_p = R_p + iR_p'$, resp. $\mathrm{R}_s = R_s' + iR_s'$ schreibt, wobei die R_p, R_p', R_s, R_s' reelle Grössen bedeuten sollen, und ebenso für die einfallenden Amplituden $E_p + i\,E_p'$, resp. $E_s + i\,E_s'$, wobei die imaginären Bestandtheile $i\,E_p'$, $i\,E_s'$ neben den reellen E_p, E_s auftreten, falls das einfallende Licht elliptisch polarisirt ist, diese Formeln in der Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_p &= R_p + iR_p' = (E_p + i\,E_p)\,\frac{cos\,\varphi - i\sqrt{sin^2\varphi - n^2}}{cos\,\varphi + i\sqrt{sin^2\varphi - n^2}}, \\ \mathrm{R}_s &= R_s + iR_s' = (E_s + i\,E_s')\,\frac{n^2 cos\,\varphi - i\sqrt{sin^2\varphi - n^2}}{n^2 cos\,\varphi - i\sqrt{sin^2\varphi - n^2}}\ ^{5)}. \end{aligned} \qquad (43)$$

---

[1]) Zuerst hat WOLLASTON die von ihm ersonnene Methode der Totalreflexion (cf. oben pag. 773) benutzt zur Verifikation der HUYGENS'schen Gesetze am Kalkspath.

[2]) W. KOHLRAUSCH, WIED. Ann 6, pag. 86. 1879; 7, pag. 427. 1879.

[3]) J. DANKER, N. Jahrb. f. Mineral. Beil.-Bd. 4, pag. 241. 1885.

[4]) Der Einfachheit wegen sind die folgenden Entwickelungen nur an die NEUMANN'schen Formeln angeknüpft. Die FRESNEL'schen ergeben ihnen gegenüber nichts wesentlich anderes.

[5]) Die Einführung complexer Werthe der Amplituden und des Winkels χ bedarf durchaus keiner besonderen physikalischen Erklärung zu ihrer Rechtfertigung, wie sie z. B. FRESNEL bei der von ihm zuerst gegebenen Theorie der Totalreflexion gab, indem er annahm, dass einige Theile der Lichtwellen an der Oberfläche des zweiten Mediums reflektirt würden, dagegen ein anderer Theil zunächst in dasselbe zu einer geringen Tiefe eindränge und dann reflektirt würde. Zu einer derartigen Reflexion aus dem homogenen Innern eines Mediums fehlt jede genügend theoretisch begründete Ursache. Wenn sich also auch in der That in das zweite Medium eine gewisse Art von Bewegung fortpflanzt, wie sowohl die Formeln angeben (da die D_p und D_s nicht Null sind), als auch die später pag. 780 zu besprechenden Versuche QUINCKE's, so giebt doch diese Bewegung nicht zu einer Reflexion in das erste Medium Anlass, wenn nicht, wie es bei den QUINCKE'schen Versuchen der Fall ist, die Homogenität des zweiten Mediums gestört wird.

Die gegebenen Formeln fliessen aus den Grenzbedingungen (2) mit derselben Begründung, wie die Formeln für gewöhnliche Reflexion. Dass complexe Grössen auftreten, ist nur ein die Rechnung vereinfachender Kunstgriff, und man könnte dieselben vermeiden, wenn man die Gleichungen (3) für die Lichtbewegung mit Vermeidung complexer Grössen schreiben würde, d. h. die dort angedeuteten reellen Theile wirklich bilden würde. Dadurch würde aber die Rechnung weit complicirter.

Nach der durch die Gleichungen (3) definirten Bedeutung der complexen Amplituden ist die Intensität des reflektirten Lichtes proportional mit $R_p^2 + R_p'^2$, resp. $R_s^2 + R_s'^2$, die des einfallenden proportional mit $E_p^2 + E_p'^2$, resp. $E_s^2 + E_s'^2$. Aus den Gleichungen (43) folgt sofort durch Multiplikation mit ihren conjugirten (nur durch das Vorzeichen von i sich von ihnen unterscheidenden) Ausdrücken:

$$R_p^2 + R_p'^2 = E_p^2 + E_p'^2, \qquad R_s^2 + R_s^2 = E_s'^2 + E_s'^2, \tag{44}$$

d. h. es ist in der That die Intensität des reflektirten Lichtes stets gleich dem des einfallenden, sobald der Einfallswinkel den Grenzwinkel erreicht oder überschreitet.

Aus der Bedeutung der complexen Amplituden, wie sie in den Gleichungen (3) definirt sind, folgt ferner, dass, wenn man die Quotienten zweier complexer Amplituden in die Form setzt:

$$\begin{aligned} \frac{R_p + iR_p'}{E_p + iE_p'} &= tang\, \psi_p e^{i\Delta_p}, \\ \frac{R_s + iR_s'}{E_s + iE_s'} &= tang\, \psi_s e^{i\Delta_s}, \\ \frac{R_s + iR_s'}{R_p + iR_p'} &= tang\, \psi e^{i\Delta}, \end{aligned} \tag{45}$$

die Δ_p, Δ die absoluten durch die Reflexion herbeigeführten Phasenänderungen des reflektirten Lichtes gegenüber der Phase des einfallenden Lichtes bedeuten, dass dagegen Δ die relative Phasendifferenz des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes gegen das in derselben polarisirten reflektirten, und dass ψ das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes bedeutet.

Für diese Grössen folgt daher nach den Formeln (43):

$$\begin{aligned} tang\, \Delta_p &= -\frac{2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{1 + n^2 - 2\sin^2\varphi}, \\ tang\, \Delta_s &= -\frac{2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{1 + n^2 - \left(n^2 + \frac{1}{n^2}\right)\sin^2\varphi}, \\ tang\, \psi_p &= tang\, \psi_s = 1 \end{aligned} \tag{46}$$

und wenn das einfallende Licht linear polarisirt im Azimuth ψ_0 ist, d. h.

$$\frac{E_s + iE_s'}{E_p + iE_p'} = tang\, \psi_0$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0, \quad tang\, \Delta &= -\frac{2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + n^2 \cot g^2\varphi}, \\ \text{oder} \quad \cos\frac{1}{2}\Delta &= \frac{\sin\varphi\, tang\, \varphi}{\sqrt{tang^2\varphi - n^2}}. \end{aligned} \tag{47}$$

Das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes ist daher gleich dem Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Die absolute und die relative Phasendifferenz ist 0 (resp. π) für streifende Incidenz und ebenso für den Fall, dass φ bis auf den Grenzwinkel $\varphi_0 = arc \sin n$ zurückgeht. Sie erreichen in Zwischenlagen des Einfallswinkels gewisse Maximalwerthe. Für die relative Phasendifferenz Δ tritt dies ein für einen Einfallswinkel φ', welcher durch die Gleichung gegeben ist:

$$\sin^2\varphi' = \frac{2n^2}{1 + n^2}.$$

Der zugehörige Maximalbetrag Δ' von Δ folgt aus

$$\cos\frac{1}{2}\Delta' = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Für Glas vom Brechungsexponenten 1·51 gegen Luft ist, da in diesem Falle $n = 1/1{\cdot}51$ zu setzen ist, $\varphi' = 51°\,20'$, $\Delta' = \pi - 45°\,36'$. Zwei solcher Reflexionen erzeugen daher nahezu circularpolarisirtes Licht, falls das einfallende Licht unter dem Azimuth $\pm 45°$ gegen die Einfallsebene polarisirt ist. Ebenso kann man durch mehr als zweimalige, z. B. drei- oder viermalige totale Reflexion unter einem grösseren oder kleineren Einfallswinkel als φ' circularpolarisirtes Licht erzeugen. FRESNEL[1]) hat in der That Glasparallelepipeda construirt, mit schiefen Endflächen, welche senkrecht auf letztere auffallendes Licht circularpolarisirt austreten lassen, wenn das auffallende Licht unter dem Azimuth 45° gegen die auf die Seitenflächen der Glaskörper bezogene Einfallsebene linear polarisirt ist. Die Wirkungsweise dieser Glasparallelepipeda beruht auf den soeben erörterten Thatsachen.

Einfallendes natürliches Licht behält nach der Totalreflexion vollständig seine Eigenschaften, d. h. es wird nicht theilweise polarisirt, wie es bei der partiellen Reflexion der Fall ist. Dieser Unterschied liegt darin begründet, dass für letztere nicht $\psi = \psi_o$ ist, welche Relation für die Totalreflexion nach den Formeln (47) besteht.

Experimentell ist die entwickelte Theorie, abgesehen[2]) von einem Versuch ARAGO's (Oeuvr. compl. 10, pag. 226), welcher nach seinem pag. 757 erwähnten Verfahren constatirte, dass das totalreflektirte Licht die gleiche Intensität wie das einfallende besässe, bisher nur von JAMIN[3]) und QUINCKE[4]) hinsichtlich der Werthe für ψ und die relative Phasendifferenz Δ bestätigt, welche dieselben mit Hilfe des BABINET'schen Compensators bei der inneren Reflexion in Glas an Luft massen. Man fand eine genügende Uebereinstimmung[5]) zwischen den berechneten und beobachteten Werthen, und in der That sind hier derartige Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung, wie sie bei der gewöhnlichen Reflexion sich einstellen, nicht zu erwarten, da für den Fall der Totalreflexion Oberflächenschichten keinen Einfluss auf ψ und nur sehr geringen Einfluss auf Δ besitzen[6]).

---

[1]) A. FRESNEL, Ann. de chim. et de phys. (2), 29, pag. 175. 1818.

[2]) Ausserdem sind Versuche BABINET's (Compt. rend. 8, pag. 709. 1839) zu erwähnen über die Interferenz von direkten mit totalreflektirten Lichtstrahlen, welche daher zur Messung der absoluten Phasenänderungen Δ_p und Δ_s verwerthet werden könnten. Diese Versuche sind aber nicht zur numerischen Berechnung jener Grössen benutzt.

[3]) J. JAMIN, Ann. de phys. et de chim. (3) 30, pag. 257. 1850.

[4]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 127, pag. 217. 1866.

[5]) Um dieselbe zu erreichen, sind gewisse Vorsichtsmaassregeln anzuwenden, um die Wirkung einer event. vorhandenen Anisotropie des Glases zu eliminiren. cf. JAMIN, l. c.

[6]) Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 146. 1891. — Dies gilt jedoch nur in der Annäherung, dass das Quadrat der Dicke der Oberflächenschicht gegen das der Wellenlänge des Lichtes vernachlässigt wird. — Bei sehr subtiler Prüfung erhielt H. DUFET (Bull. de la soc. franç. de Miner. 14, pag. 130. 1891) an polirten Körpern eine geringe Abweichung zwischen dem nach der Prismenmethode und zwischen dem durch Totalreflexion ermittelten Werthe ihres Brechungsexponenten. — Auch die von CH. SORET (Arch. de Genève 26, pag. 541. 1891) beobachteten Anomalieen bei der Erscheinung der Totalreflexion deuten auf Wirkung von Oberflächenschichten.

III. Totalreflexion an sehr dünnen Lamellen.

Die Erscheinungen der Totalreflexion können wesentlich modificirt werden, wenn sie an einer Lamelle stattfinden, deren Dicke nicht sehr gross gegenüber der Wellenlänge des Lichtes ist. — Auch wenn der Einfallswinkel den Grenzwinkel überschreitet, findet nicht Totalreflexion im eigentlichen Sinne des Wortes statt. Denn es wird nicht alles einfallende Licht reflektirt, sondern ein Teil wird durch die Lamelle hindurch in das hinter derselben befindliche Medium gebrochen.

Eine bequeme Versuchsanordnung zur Beobachtung dieser Erscheinungen erhält man, wenn man zwei rechtwinklige Glasprismen mit ihren Hypothenusenflächen, von denen die des einen Prismas schwach convex geschliffen ist, aneinander drückt. Diese Anordnung ist zuerst von NEWTON[1]) angegeben und später von QUINCKE[2]) zum genaueren experimentellen Studium dieser Erscheinungen benutzt. — An der zwischen beiden Prismen befindlichen Luftschicht tritt Totalreflexion für senkrecht auf die Kathetenfläche eines Prismas auffallendes Licht ein, sodass bei genügender Dicke der Luftschicht die Prismencombination in jener Richtung undurchsichtig ist. Falls man aber die beiden Prismen so fest aneinander drückt, dass sie sich in den Hypothenusenflächen berühren, so wird die Berührungsstelle und ein gewisser Umkreis derselben durchsichtig und zwar bei einfallendem weissen Lichte mit braunrothem Rande. Im reflektirten Lichte erscheint jener Umkreis dunkel auf hellem Grunde, und zwar bei einfallendem weissen Lichte mit bläulichem Rande.

Dass für die Berührungsstelle selber diese Erscheinungen eintreten, war von vornherein zu erwarten, da an dieser der Glaskörper des einen Prismas ohne Unterbrechung der Homogenität in den des anderen fortgesetzt gedacht werden kann. Dass jene Erscheinungen aber auch noch in einer gewissen Umgebung der Berührungsstelle wahrzunehmen sind, d. h. bei einer gewissen, von Null verschiedenen Dicke der zwischenlagernden Luftschicht, hat seinen Grund darin, dass auch bei Totalreflexion an einem Medium (2) eine gewisse Bewegung in das reflektirende Medium fortgepflanzt wird, deren Amplitude allerdings sehr schnell mit wachsendem Abstand von der Grenzfläche abnimmt. Befindet sich nun in genügend naher Distanz von ihr eine zweite Grenzfläche im Medium (2), so giebt die an ihr erfolgte Reflexion und Brechung der im Medium (2) fortgepflanzten Bewegung Anlass zu den beschriebenen Erscheinungen, speciell wird dieselbe durch Brechung wieder in die gewöhnliche Art der Lichtbewegung verwandelt, d. h. solche, deren Amplitude überall längs der Wellennormalen constant ist.

Die Grösse des durchsichtigen Fleckes der Prismencombination hängt von der Intensität der Beleuchtung und der Grösse des Krümmungsradius der Hypothenusenfläche des einen Prismas ab, indem der Fleck mit Wachsen beider (Intensität und Krümmungsradius) ebenfalls an Grösse zunimmt.

Von den Erscheinungen geben die FRESNEL-NEUMANN'schen Reflexionsformeln eine vollständig in allen Einzelheiten mit dem Experiment übereinstimmende Erklärung.

Dies ist zuerst von STOKES[3]) nachgewiesen, welcher vor Anstellung der QUINCKE'schen Versuche aus jenen Formeln das Auftreten des schwarzen Fleckes

---

1) NEWTON, Optice lib. II, obs. 1, pag. 185.

2) G. QUINCKE, POGG. Ann. 127, pag. 1 u. 199. 1866.

3) G. STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 642. 1849.

im reflektirten Lichte in der Umgebung der Berührungsstelle der Prismen erklärte, und später hat VOIGT[1]) die QUINCKE'schen Versuche qualitativ völlig[2]) erklärt, zum Theil auch berechnet.

Man erhält die Theorie der Versuche sehr einfach aus den hier pag. 759 angegebenen Formeln (36) und (36') für die Amplituden des an einer dünnen Platte reflektirten oder durch sie hindurchgehenden Lichtes. Es ist hier nur zu berücksichtigen, dass das dort auftretende π_2 jetzt eine imaginäre Grösse ist, nämlich

$$\pi_2 = i\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{i}{\sqrt{a_1}}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}, \tag{48}$$

da $\sin\varphi$ grösser sein soll als der Brechungsexponent $n = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$ der Platte gegen das umgebende Medium.

Es sind daher die dort auftretenden Grössen p und q reell, nämlich

$$p = e^{-2\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}\,\frac{d}{\lambda}}, \quad q = e^{+2\pi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}\,\frac{d}{\lambda}}, \tag{49}$$

wobei λ die Wellenlänge des Lichtes im umgebenden Medium bedeutet.

Nach diesen Formeln (36) sind die reflectirten Amplituden

$$\begin{aligned} R_s &= E_s \frac{(p-q)(n^2-1)(n^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{(p-q)(n^4\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)n^2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} \\ R_p &= E_p \frac{(p-q)(1-n^2)}{(p-q)(\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}. \end{aligned} \tag{50}$$

Die durchgelassenen Amplituden sind nach (36')

$$\begin{aligned} D_s &= E_s e^{2\pi i\cos\varphi\frac{d}{\lambda}} \frac{4in^2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{(p-q)(n^4\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)n^2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \\ D_p &= E_p e^{2\pi i\cos\varphi\frac{d}{\lambda}} \frac{4i\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{(p-q)(\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Durch Multiplication mit den conjugirten Ausdrücken erhält man sofort die Intensität des reflectirten und durchgehenden Lichtes, nämlich da $(p+q)^2 = (p-q)^2 + 4$ ist

$$\begin{aligned} J_s^r &= J_s^e \frac{(p-q)^2(1-n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)^2}{(p-q)^2(1-n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)^2 + 16n^4\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}, \\ J_p^r &= J_p^e \frac{(p-q)^2(1-n^2)^2}{(p-q)^2(1-n^2)^2 + 16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}; \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} J_s^d &= J_s^e \frac{16n^4\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}{(p-q)^2(1-n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)^2 + 16n^4\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}, \\ J_p^d &= J_p^e \frac{16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}{(p-q)^2(1-n^2)^2 + 16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}. \end{aligned} \tag{52'}$$

Für die Dicke $d = 0$ der Zwischenschicht ist $p = q = 1$, daher $J_s^r = J_p^r = 0$, $J_s^d = J_s^e$, $J_p^d = J_p^e$.

Für sehr grosse Dicke d im Vergleich zur Wellenlänge λ ist $p = 0$, $q = +\infty$, daher $J_s^r = J_s^e$, $J_p^r = J_p^e$, $J_s^d = J_p^d = 0$.

Da q mit wachsendem Einfallswinkel wächst, so nimmt die Grösse des durchsichtigen Flecks der Prismencombination mit wachsendem Einfallswinkel ab, wie QUINCKE constatirte (l. c. pag. 7).

---

[1]) W. VOIGT, Gött. Nachr., pag. 49. 1884.

[2]) Abgesehen von einer bei QUINCKE, l. c., pag. 16, beobachteten Erscheinung, die aber jedenfalls weiterer Bestätigung bedarf.

Man kann die erste der Formeln (52') auch in der Gestalt schreiben

$$J_s^d = J_s^e \frac{16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}{(p-q)^2(1-n^2)^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - \cos^2\varphi\right)^2 + 16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)},$$

d. h. J_s^d unterscheidet sich von J_p^d nur dadurch, dass bei ersterem die Grösse $(p-q)^2(1-n^2)^2$ im Nenner mit dem Faktor $\left(\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - \cos^2\varphi\right)^2$ auftritt, bei letzterem mit dem Faktor 1. Beim Beginn der Totalreflexion ist $\sin\varphi = n$, der erste Faktor daher gleich $\sin^4\varphi$, d. h. kleiner als der zweite, daher $J_s^d > J_p^d$. Bei streifender Incidenz ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, der erste Faktor daher $\frac{1}{n^4}$, also grösser als der zweite, d. h. $J_s^d < J_p^d$. Auch dieses Verhalten ist von QUINCKE constatirt (l. c. pag. 8).

Da q mit wachsender Wellenlänge abnimmt, so nimmt mit derselben die Grösse des durchsichtigen Fleckes zu (QUINCKE, l. c., pag. 8).

Nach den Erörterungen der pag. 788 ergiebt sich die relative Phasendifferenz Δ des parallel zur Einfallsebene polarisirten reflektirten Lichtes zu dem in derselben polarisirten, sowie des Azimuth ψ der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes nach den Formeln:

$$tang\,\psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{R_s}{R_p} = \tag{53}$$

$$\frac{E_s}{E_p}(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)\frac{(p-q)(\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{(p-q)(n^4\cos^2\varphi + n^2 - \sin^2\varphi) + 2i(p+q)n^2\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}};$$

haben ψ' und Δ' die analoge Bedeutung für das durchgehende Licht, wie ψ und Δ für das reflectirte, so folgt aus (51)

$$tang\,\psi' e^{i\Delta'} = \frac{D_s}{D_p} = \frac{n^2}{\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi}\, tang\,\psi \cdot e^{i\Delta}, \tag{54}$$

d. h.

$$tang\,\psi'(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi) = n^2\, tang\,\psi, \quad \Delta' = \Delta. \tag{54'}$$

Die letzten dieser Gleichungen ist von QUINCKE (l. c., pag. 217, 220) bestätigt.

Aus der Gleichung (53) ergiebt sich durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile für $E_s/E_p = 1$, d. h. bei linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirten einfallendem Lichte

$$\begin{gathered} tang^2\psi = (\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)^2 \\ \frac{(p-q)^2(1-n^2)^2 + 16\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}{(p-q)^2(1-n^2)^2(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)^2 + 16n^4\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}, \\ tang\,\Delta = \\ -\frac{2(p^2-q^2)\sin^2\varphi\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}(1-n^2)^2}{(p-q)^2(1-n^2)^2[\sin^4\varphi - \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)] + 16n^2\cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}. \end{gathered} \tag{55}$$

Die Phasendifferenz Δ wächst daher mit wachsendem q, d. h. zunehmender Dicke der Zwischenschicht. (Vergl. QUINCKE, l. c, pag. 220). Für $d = \infty$ geht letzte Formel in die früher abgeleitete Formel (47) für Totalreflexion über und es wird auch dementsprechend $tang\,\psi = 1$. — Die beiden letzten Formeln erklären die eigenthümlichen Erscheinungen, welche man wahrnimmt, wenn man bei Beleuchtung mit linear polarisirtem Lichte jene Prismencombination durch ein drehbares Nicol betrachtet (cf. STOKES, l. c.). P. DRUDE.

Rotationspolarisation.

Für einige einaxige Krystalle, wie z. B. Quarz, gelten nicht die FRESNEL-schen Gesetze der Lichtfortpflanzung, und auch eine Anzahl regulärer Krystalle[1]) zeigen in ihrem optischen Verhalten Abweichungen gegenüber dem der isotropen oder amorphen Körper. Diese bestehen hauptsächlich darin, dass die Polarisationsebene linear polarisirten Lichtes, welches eine planparallele Platte jener Substanzen senkrecht zu ihren Begrenzungsflächen durchsetzt, nach dem Austritt aus derselben gegen ihre ursprüngliche Lage gedreht erscheint.

Das Gemeinsame dieser Art Krystalle ist, dass sie sogen. »gewendete« sind[2]), d. h. keine Deckoperationen besitzen, welche aus der Verbindung von Drehungen mit Spiegelungen hervorgehen.

Die Erscheinung der genannten Art ist zuerst von ARAGO[3]) im Jahre 1811 am Quarz entdeckt. Bald darauf fand BIOT[4]) dieselbe auch am Terpentinöl, und man hat seitdem eine grosse Zahl von Flüssigkeiten und Lösungen krystallinischer Körper kennen gelernt, welche ebenfalls das genannte optische Drehungsvermögen besitzen. Wir wollen diese Medien im Folgenden kurz mit »optisch aktiv« bezeichnen. Diese Flüssigkeiten und Lösungen haben nun nach der Entdeckung PASTEUR's[5]) mit den »optisch aktiven« Krystallen ebenfalls die Eigenschaft gemeinsam, dass sie als »gewendete« Medien anzusehen sind, d. h. nach der früheren Bezeichnung (cf. pag. 662) sind diese Flüssigkeiten nicht als vollkommen isotrope, sondern nur als dissymmetrisch-isotrope Körper anzusehen. Der Unterschied der Flüssigkeiten gegenüber den festen Körpern besteht nur darin, dass in ersteren die Dissymmetrie nicht in der Anordnung ihrer Moleküle begründet sein kann, wie bei letzteren, da man bei einer Flüssigkeit die Moleküle als völlig regellos angeordnet annimmt, sondern dass die Anordnung der Atome im Molekül die Dissymmetrie hervorbringt[6]).

Nachdem von HOPPE-SEYLER[7]) und E. MULDER[8]) auf Grund der Erscheinung, dass das Drehungsvermögen natürlicher organischer Substanzen sich bis zu einem gewissen Grade in ihre Derivate fortpflanzt, die Ansicht geäussert war, dass die optische Aktivität nicht von der Gruppirung sämmtlicher Atome im Molekül,

---

[1]) Die Krystalle, an welchen die erwähnten Eigenschaften bisher entdeckt sind, sind mit den betreffenden Literaturnachweisen in TH. LIEBISCH, Physikal. Krystallogr., pag. 518, aufgeführt.

[2]) Diese Bezeichnung rührt von H. MARBACH (Ueber »Hemiédrie non superposale« oder »gewendete Krystallformen«, Programm, Breslau, 1861) her. Vergl. auch B. MINNIGERODE, N. Jahrb. f. Mineral., Beil., Bd. 5, pag. 149. 1887. Das typische Beispiel einer »gewendeten« Form ist eine Schraubenlinie.

[3]) F. ARAGO, Mém. de la Cl. des scienc. math. et. phys. de l'inst. imp. de France, Année 1811, 12, pag. 93. 1812. — Oeuvr. compl. 10, pag. 36. — GILBERT, Ann. d. Physik, 40, pag. 145. 1812.

[4]) J. B. BIOT, Bullet. de la Soc. Philomath. 1815, pag. 190.

[5]) PASTEUR, Recherches sur la dissymmetrie moléculaire des produits organiques naturels. Lécons de chimie, professées en 1860. Paris 1861. — Compt. rend. 26, pag. 535. 1847; 28, pag. 477. 1848; 31, pag. 480. 1850; 33, pag. 217. 1851; 35, pag. 176. 1852. — Ann. de chim. et de phys. (3) 24, pag. 442. 1848; 28, pag. 56. 1850; 31, pag. 67. 1851; 34, pag. 30. 1852; 38, pag. 437. 1853.

[6]) Hierfür spricht auch die von BIOT im Jahre 1818 und von GERNEZ (Compt. rend. 62, pag. 1277. 1866. — Ann. de l'école norm. 1. 1864) beobachtete Aktivität des Terpentinöl-Dampfes.

[7]) HOPPE-SEYLER, Journ. f. prak. Chem. 89. — Zeitschr. f. Chem. 1867.

[8]) E. MULDER, Zeitschr. f. Chem. 11. 1868.

sondern nur von einer bestimmten Anzahl derselben herrühre, haben LE BEL[3]) und VAN'T HOFF[4]) eine Hypothese aufgestellt, welche das Drehungsvermögen direkt mit der Constitutionsformel in Verbindung setzt. Wenn ein Kohlenstoffatom mit vier unter sich verschiedenen Radikalen verbunden ist, soll ein Molekül von asymmetrischer Form entstehen und als solches Drehungsvermögen zeigen. In der That besitzen optisch aktive Flüssigkeiten oder Lösungen stets ein oder mehrere asymmetrische Kohlenstoffatome[5]), und die Aktivität in den Derivaten einer Substanz hört auf, falls diese asymmetrischen Kohlenstoffatome nicht mehr vorhanden sind[6]).

Allgemein kann man also sagen, dass die Erscheinungen der Rotationspolarisation an das Auftreten gewendeter oder dissymmetrischer Formen oder Moleküle geknüpft sei; das Auftreten derselben zieht aber nicht immer mit Notwendigkeit auch Rotationspolarisation nach sich (wie z. B. bei Salmiak und Sylvin).

I. Theorie.

Für eine mathematische Darstellung der Lichtbewegung in einem aktiven Körper müssen die Hauptgleichungen die Bedingung der Dissymmetrie erfüllen, welche das Auftreten von Symmetrieebenen ausschliesst.

Analytisch drückt sich dies so aus, dass es nie möglich sein darf, das Coordinatensystem so zu wählen, dass die Hauptgleichungen unverändert bestehen bleiben, wenn man den positiven Sinn einer Coordinatenaxe in die entgegengesetzte Richtung verlegt. Durch welche specielle Anordnung der Körpermoleküle (der Atome) oder durch welche Molekular-Kraftgesetze jene Dissymmetrie hervorgerufen werden kann, werden wir hier ebensowenig erörtern, wie wir die Differentialgleichungen der optisch inaktiven Körper auf specielle Vorstellungen über Molekularkraftgesetze begründet haben, da dieser Weg vorläufig noch nicht in befriedigender Weise[7]) zum Ziel führt.

---

[3]) LE BEL, Bull. soc. chim. (2) 22. 1874.

[4]) J. H. VAN'T HOFF, ibid. (2) 23. 1875; Naturf. 9, pag. 177. 1876; Ber. d. chem. Ges. 10, pag. 1620. 1877.

[5]) Ausführlicheres über die Constitution flüssiger aktiver Substanzen, die Abhängigkeit der optischen Aktivität von der chemischen Constitution, die künstliche Darstellung aktiver Substanzen und das optische Verhalten der Derivate aktiver Körper findet man in: H. LANDOLT, das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen etc. Braunschweig, 1879.

[6]) Vergl. z. B. das Verhalten der Traubensäure. (PASTEUR, Ann. de chim. et de phys. (3) 28, pag. 56. 1850. POGG. Ann. 80.)

[7]) Theorien des optischen Drehungsvermögens, welche auf einer speciellen Vorstellung vom Bau der optisch aktiven Körper beruhen, gab L. SOHNCKE (Math. Ann. 9, pag. 504. 1876; POGG. Ann. Ergzbd., Bd. 8, pag. 16. 1878. — Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur. Leipzig 1879, pag. 241; Zeitschr. f. Kryst. 13, pag. 229. 1888). — E. MALLARD (Ann. des mines (7) 19, pag. 256. 1881; Compt. rend. 92, pag. 1155. 1881; Journ. de phys. (1) 10, pag. 479. 1881. — Traité de crist. pag. 262 u. 305. 1884). G. WYROUBOFF (Bull. Soc. Trans. Min. 13, pag. 215. 1890). — A. FOCK (Chem. Ber. 24, pag. 101. 1891). — Diesen Theorien liegt die von E. REUSCH (Berl. Ber. 1869, pag. 530; POGG. Ann. 138, pag. 628. 1869) entdeckte Thatsache zu Grunde, dass man die Erscheinungen, welche senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatten, sowohl im senkrecht einfallenden wie im convergenten Lichte zeigen, künstlich durch eine Combination von übereinander geschichteten Glimmerplatten nachahmen kann, bei welcher die Ebene der optischen Axen jeder Platte denselben im bestimmten Sinne gerechneten Winkel mit der Ebene der optischen Axen der darunterliegenden Platte einschliesst. Betreffs der Wirkung solcher Combinationen vergl. auch VERDET, Wellentheorie des Lichtes. Deutsch von K. EXNER. Braunschweig 1884. 2. Bd., pag. 275—286.

Zur Erklärung der Rotationspolarisation sind verschiedene Formen von Hauptgleichungen angegeben. Die Bedingung ihrer Dissymmetrie erfordert, dass zu den gewöhnlichen, die Doppelbrechung erklärenden Termen ungerade Differentialquotienten des Lichtvectors nach den Coordinaten, nicht nach der Zeit, hinzutreten müssen. Letztere ergeben für entgegengesetzt gerichtete Wellen gleiche, nicht entgegengesetzte Drehungen der Polarisationsebene, wie es bei optisch aktiven Substanzen nach der Beobachtung der Fall ist[1]). Die Theorien von LOMMEL[2]), KETTELER[3]), VOIGT[4]) und BASSET[5]) enthalten nun nur Terme der letzteren Gattung, sie sind daher wohl zur Erklärung der magnetischen[6]), aber nicht zu der Erklärung der natürlichen Drehung der Polarisationsebene geeignet[7]).

Dagegen enthalten andere mechanische Lichttheorien Terme der verlangten Form.

So sind die Hauptgleichungen der BOUSSINESQ'schen Theorie[8]) für active Krystalle nach pag. 662

$$
\begin{aligned}
a\,\frac{\partial^2 u}{t^2} &= \Delta u + k\,\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\\
b\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta v + k\,\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\\
c\,\frac{\partial^2 w}{t^2} &= \Delta w + k\,\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \varepsilon\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},
$$

$$
\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1'}
$$

Lässt man in der Angabe der Form der dissymetrischen Terme die (geraden) Differentiatienten nach t fort, so ist nach CAUCHY[9]) für isotrope Medien

---

1) Man vergl. CH. SORET, Arch. des sc. phys. et. natur. Lausanne (3) 11, pag. 330 u. 412. 1884; Arch. de Genève, 11, pag. 412. 1884; 24, pag. 591. 1890.

2) E. LOMMEL, WIED. Ann. 15, pag. 378. 1882.

3) E. KETTELER, WIED. Ann. 16, pag. 86. 1882.

4) W. VOIGT, WIED. Ann. 19, pag. 873. 1883. Um entgegengesetzte Drehungen für entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen zu erhalten, hat VOIGT die Coëfficienten der die Rotationspolarisation erklärenden Terme als von der Richtung der Wellennormalen abhängig angenommen. Dies hat aber weitere Schwierigkeiten zur Folge, falls mehrere in verschiedenen Richtungen fortpflanzende Wellen existiren (cf. W. VOIGT, WIED. Ann. 30, pag. 191. 1887).

5) A. B. BASSET, Phil. Mag. (5) 30, pag. 152. 1890.

6) Man vergl. auch AIRY, Phil. Mag. (3) 28, pag. 469.

7) Die magnetische Drehung ist nämlich die gleiche für entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen der Wellen. Der Unterschied zwischen der natürlichen und magnetischen Rotationspolarisation macht sich eklatant bemerklich, falls eine linearpolarisirte Lichtwelle durch eine planparallele Platte der zu untersuchenden Substanz geht und an der Hinterfläche reflektirt wird. Die Polarisationsebene der aus der Vorderfläche wieder ausgetretenen Welle erweist sich gegenüber der ursprünglichen Lage als gedreht, falls die Platte aus einer magneto-aktiven Substanz besteht, dagegen als ungedreht, falls sie natürlich aktiv ist.

8) BOUSSINESQ, Liouv. Journ. (2) 13, pag. 330. 1868.

9) A. CAUCHY, Compt. rend, 15, pag. 916. 1842.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u + a' \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \text{ etc.,} \tag{2}$$

nach v. LANG[1]) für Krystalle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b\Delta v - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c\Delta w - \frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Die BRIOT'schen[2]) Gleichungen für einaxige Krystalle kann man aus dem Ansatz ableiten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u + \frac{\partial}{\partial x}\left(f\vartheta + f_1\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon_1\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b\Delta v + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\vartheta + f_1\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon_1\frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon_2\frac{\partial w}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b\Delta w + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\vartheta + f_2\frac{\partial n}{\partial x}\right) + \varepsilon_2\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon_1\frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei die x-Axe zur optischen Axe gewählt ist, die SARRAU'schen[3]) Gleichungen für einaxige Krystalle (x-Axe = optische Axe) sind abzuleiten aus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\left(\Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \varepsilon_1\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b\left(\Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon_3\frac{\partial w}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b\left(\Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \varepsilon_3\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon_2\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei sind die a, b, c, ε als Funktionen von τ anzusehen.

Das Gemeinsame der Gleichungen dieser Theorien besteht darin, dass die dissymmetrischen Terme erste Differentialquotienten des Lichtvectors nach den Coordinaten sind. — Von dieser Form weichen die Differentialgleichungen von MAC CULLAGH[4]) ab, welche die ersten waren, die zur Erklärung der Rotationspolarisation aufgestellt sind. Diese Gleichungen enthalten dritte Differentialquotienten von u, v, w nach den Coordinaten.

Zur Vergleichung der Resultate der verschiedenen mechanischen Theorieen ist es wiederum nützlich, gerade wie früher pag. 668 angegeben ist, auch die elektromagnetische Theorie mit heranzuziehen. Gerade wie früher (pag. 684) bei Behandlung der anomalen Dispersion lassen wir die Formeln unverändert bestehen:

---

[1]) V. v. LANG, POGG. Ann. Ergz.-Bd. 8, pag. 608. 1878. — Wien. Ber. (2) 75, pag. 719 1877. Dies ist die zweite der von v. LANG angegebenen Formen der Differentialgleichungen. Die erste in POGG. Ann. 119, pag. 74. 1863 für einaxige Krystalle gegebene Form unterscheidet sich von dieser nur dadurch, dass ε noch als Faktor das Quadrat des Cosinus des Winkels zwischen der optischen Axe und der Wellennormale enthält. Dieser Faktor führt aber gewisse Schwierigkeiten für die Betrachtung der Fälle herbei, in welchen sich mehrere verschieden gerichtete Wellen im Krystall zugleich fortpflanzen.

[2]) CH. BRIOT, Versuche über die mathematische Theorie des Lichtes; übersetzt von W. Klinkerfuss, Leipzig 1867, pag. 123.

[3]) E. SARRAU, Liouv. Journ. (2) 13, pag. 99. 1868.

[4]) MAC CULLAGH, Irish Transact. 17, pars III, pag. 461; Proceed. of Irish Acad. 1, pag. 383. 1837—40.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \tag{6}$$

wobei die magnetische Polarisation und die magnetische Kraft L als identisch angenommen sind (die Magnetisirungsconstante ist gleich 1 gesetzt), dagegen erweitern wir die Beziehungen zwischen der elektrischen Kraft und der elektrischen Polarisation. — Um Dissymmetrie herbeizuführen ist nothwendig, dass die elektrische Polarisation auch von ungeraden Differentialquotienten der elektrischen Kräfte nach den Coordinaten abhängt[1]). Hält man an der MAXWELL'schen Idee fest, dass nur geschlossene elektrische Ströme existiren, d. h. an der Incompressibilität der Elektricität, so ist die Bedingung dafür

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = 0.$$

Mit Benutzung derselben folgt, dass die Polarisationen, falls man bei ersten Differentialquotienten der Kräfte nach den Coordinaten stehen bleibt, die Form besitzen müssen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{21}X + \rho_{22}Y + \rho_{23}Z) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{31}X + \rho_{32}Y + \varepsilon_{33}Z), \\
\mathfrak{Y} &= \varepsilon_{21}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{31}X + \rho_{32}Y + \rho_{33}Z) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{11}X + \rho_{12}Y + \rho_{13}Z), \\
\mathfrak{Z} &= \varepsilon_{31}X + \varepsilon_{32}Y + \varepsilon_{33}Z + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{11}X + \rho_{12}Y + \rho_{13}Z) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}(\rho_{21}X + \rho_{22}Y + \rho_{23}Z).
\end{aligned} \tag{7}$$

Dabei können die ε und ρ Summen von Quotienten von unendlichen Reihen sein, welche nach reciproken Potenzen der Schwingungsdauer fortschreiten, aus demselben Grunde, wie er früher pag. 685 bei der anomalen Dispersion entwickelt ist. Für vollkommen durchsichtige Medien würden in diesen unendlichen Reihen die ungeraden Potenzen von T fortfallen. — Wie zur Erklärung der Dispersionserscheinungen kann man auch hier annehmen, dass die Zähler in den Summanden von ε und ρ Constanten sind, während die Nenner nur aus 2 (bei nicht völlig durchsichtigen Medien aus 3) Gliedern bestehen. Diese analytische Form ist dann leicht aus der Annahme zu erklären, dass die ponderabeln Moleküle, oder wenigstens ihre Polarisationen, gewisser Eigenschwingungen fähig seien.

Würde man noch dritte Differentialquotienten der elektrischen Kräfte nach den Coordinaten in den Gleichungen (7) zufügen, so würden sich in einem isotropen aktiven Medium mehr als zwei Wellen fortpflanzen können. Dies ist eine unnöthige, von dem Experiment nicht verlangte Complication. — Wir bleiben daher bei den Gleichungen (7) stehen.

---

[1]) Dass die Polarisation auch von den Differentialquotienten der Kräfte nach den Coordinaten abhängt, erklärt sich durch die Annahme, dass auch die Werthe der Kräfte in den benachbarten Raumtheilen von Einfluss auf den Zustand in dem betrachteten Raumpunkte ist. Diese Annahme entspringt direkt aus einer endlichen Grösse der Moleküle, während für ein streng homogenes Medium (freier Aether) kein Anlass zu derartigen Erweiterungen gegeben ist. — Aus dissymmetrischen Molekülformen ergeben sich dann auch die dissymmetrischen Ansätze (7).

Nach den Gleichungen (7) würden die dissymmetrischen Terme in einem aktiven Krystall eine allgemeinere Form besitzen (mehr Constanten enthalten), als in einem aktiven dissymmetrisch-isotropen Medium. Wenn man für einen Krystall die dissymmetrischen Terme in der Gestalt annehmen wollte, wie sie für isotrope Medien auftreten, so würde sich ergeben:

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z + \rho \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \text{ etc.} \tag{7'}$$

Man erhielte dadurch in den Resultaten Abweichungen von den aus den Gleichungen (7) ableitbaren Resultaten, welche von der Ordnung des Produktes der Constante ρ in die Differenz der Hauptbrechungsindices des Krystalls wären. Da nun ρ für alle in der Natur vorkommenden aktiven Körper sehr klein ist, so ist jene Abweichung unmerkbar. Wir wollen daher die einfacheren Formeln (7') an Stelle von (7) setzen.

Die aufgestellten Gleichungen (6) und (7') sollen auch für inhomogene Medien gelten, d. h. auch in der Grenzschicht zwischen zwei Medien, in welcher die ε und ρ sehr schnell variiren. Aus demselben Grunde, wie er früher pag. 674 angegeben ist, würden daher wiederum die Grenzbedingungen lauten

$$L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2 \quad \text{für } z = 0, \tag{8}$$

falls die xy-Ebene die Grenze ist. Es lässt sich zeigen[1]), dass diese Grenzbedingungen mit dem Energieprincip im Einklang stehen.

Interpretirt man nun die elektrische Kraft als Lichtvector u, v, w, so erhält man aus (6) und (7')

$$\begin{aligned} A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_{11} u + \varepsilon_{21} v + \varepsilon_{31} w - \rho\xi) &= \Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\ A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_{21} u + \varepsilon_{22} v + \varepsilon_{23} w - \rho\eta) &= \Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \\ A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_{31} u + \varepsilon_{32} v + \varepsilon_{33} w - \rho\zeta) &= \Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ nach (1') definirt sind. Diese Gleichungen gehen, falls man die Coordinatenaxen in die Hauptaxen des Ellipsoids

$$\varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + 2\varepsilon_{23} yz + 2\varepsilon_{31} zx + 2\varepsilon_{12} xy = 1$$

legt, in die Gleichungen (1) der BOUSSINESQ'schen Theorie über, falls man in ihr $k = -1$, d. h. die Geschwindigkeit der Longitudinal-Wellen gleich Null setzt (cf. oben pag. 664). Dies ist ja in der That der CAUCHY'sche Standpunkt, der von BOUSSINESQ acceptirt wird. — Auch hinsichtlich der Grenzbedingungen schliesst sich BOUSSINESQ den CAUCHY'schen Continuitätsbedingungen an, deren analytische Form nach den Erörterungen der pag. 670 lautet, falls man die Longitudinal-Wellen eleminirt

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2. \tag{10}$$

Dies sind auch die Grenzbedingungen (8) der elektrischen Theorie, da L proportional zu ξ ist, etc. — Es folgt daher völlige Identität des Erklärungssystemes der elektrischen Theorie und der mechanischen von BOUSSINESQ.

Von dem Formelsystem (9) unterscheidet sich das System (5) der SARRAU'schen Theorie nur durch die allgemeinere (krystallinische) Form der dissymmetrischen Terme. Wegen der Kleinheit der Constanten ρ und ε müssen aber aus dem vorhin angeführten Grunde beide Formelsysteme zu sehr nahe identischen Resultaten führen.

Der bisher benützte Lichtvector (elektrische Kraft) pflanzt sich in quasi-

[1]) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. No. 11, pag. 403. 1892.

transversalen Wellen fort. Will man streng transversale Wellen erhalten, so muss man als Lichtvector entweder die elektrische Polarisation oder die magnetische Kraft einführen. — Erstere Annahme führt zu Gleichungen, welche eine Verallgemeinerung der von MAC CULLAGH für isotrope Medien aufgestellten sind. — Führt man aber nur einen Theil der elektrischen Polarisation als Lichtvector ein, setzt man nämlich

$$\varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z = u, \text{ etc.}$$

so erhält man, wenn man wiederum Formelsysteme, welche sich nur in ihren dissymmetrischen Termen unterscheiden, als gleich ansieht, das System (3) von v. LANG, d. h. auch das System (4) von BRIOT, wenn man dort die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinal-Wellen Null setzt. Beide Formelsysteme würden daher die Ausdehnung der FRESNEL'schen Theorie (mit transversalen Wellen und annähernd der FRESNEL'schen Definition der Polarisationsebene) auf aktive Krystalle sein.

Die Ausdehnung der NEUMANN'schen Theorie (mit annähernd NEUMANN's Definition der Polarisationsebenen und streng transversalen Wellen) auf diese Fälle erhält man, indem man die magnetische Kraft als Lichtvector einführt, d. h. setzt

$$L = u, \quad M = v, \quad N = w.$$

Mit Zugrundelegung der auf pag. 788 definirten Coordinatenaxen erhält man dann aus (6) und (7') die Form[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b\frac{\partial \eta}{\partial z} - c\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \varepsilon\xi, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c\frac{\partial \zeta}{\partial x} - a\frac{\partial \xi}{\partial z} + \varepsilon\eta, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\frac{\partial \xi}{\partial y} - b\frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon\zeta, \end{aligned} \qquad (11)$$

Aus dem Erörterten folgt, dass alle hier genannten Theorieen zu gleichen beobachtbaren Resultaten führen müssen[2]), wenn man noch die Grenzbedingungen consequent aus den Gleichungen (8) ableitet. Wir wollen uns auf letztere nicht näher einlassen, da für alle in der Natur vorkommende Körper ε so klein ist, dass der Einfluss der Activität auf die Amplitudengesetze der Reflexion und Brechung verschwindet[3]).

Aus den Gleichungen (11) ergiebt sich, dass für den Vector, dessen Componenten ξ, η, ζ sind, Differentialgleichungen der Form (3) gelten. Wenn man daher die Formeln (11) für die Rechnung benützt, welche in gewissem Sinne das NEUMANN'sche System repräsentiren, so kann man aus den sich ergebenden Resultaten sofort die Gesetze für den Lichtvector des FRESNEL'schen Systems ableiten, wenn man als dessen Componenten die Grössen ξ, η, ζ auffasst. Das Umgekehrte findet ebenfalls statt.

Als Integrale der Differentialgleichungen verwenden wir die für ebene Wellen constanter Amplitude gültige Form:

$$\begin{aligned} u &= M\cos\rho - M'\sin\rho, \\ v &= N\cos\rho - N'\sin\rho, \\ w &= P\cos\rho - P'\sin\rho, \end{aligned} \qquad (12)$$

---

1) In diesen Formeln hängen die a, b, c von den ε_{hk} ab. ε ist eine von ρ und ε_{hk} abhängende Constante.

2) In der That zeigen dies die Berechnungen von B. HECHT (WIED. Ann. 30, pag. 274. 1887) am Quarz.

3) Dies gilt selbst für Zinnober (Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. 11, pag. 406. 1892), für welches ε den grössten bisher beobachteten Werth besitzt.

$$\rho = \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega}\right), \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}, \qquad m^2 + n^2 + p^2 = 1.$$

In diesen Gleichungen bedeuten m, n, p die Richtungscosinus der Wellennormalen, ω ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, T die Schwingungsdauer. Wie wir früher (pag. 636) ableiteten, beschreibt der Endpunkt des Vectors (u, v, w) eine ebene Ellipse. Wir wollen sehen, was der Uebergang von den u, v, w zu den ξ, η, ζ für eine Bedeutung hat, d. h. welche Bahn der Endpunkt des Vectors ξ, η, ζ beschreibt. Beide Vectoren pflanzen sich in transversalen Wellen fort, d. h. sie liegen senkrecht zur Wellennormale. Wählt man diese zur xy-Ebene, so ist zu setzen

$$m = n = 0, \qquad p = 1.$$

In Folge dieser Verfügung folgt aus (12), da $P = P' = 0$ zu setzen ist

$$u = M\cos\rho - M'\sin\rho, \qquad v = N\cos\rho - N'\sin\rho, \qquad w = 0,$$

und aus (1') folgt

$$\xi = N'\cos\rho - N\sin\rho, \qquad \eta = -M'\cos\rho + M\sin\rho, \qquad \zeta = 0.$$

Setzt man nun

$$M = A\cos p, \qquad M' = A\sin p, \qquad N = B\cos q, \qquad N' = B\sin q,$$

so werden die beiden letzten Gleichungssysteme zu

$$u = A\cos(\rho + p), \qquad v = B\cos(\rho + q),$$

$$\xi = B\cos\left(\rho + \frac{\pi}{2} - q\right), \qquad \eta = A\cos\left(\rho - \frac{\pi}{2} - p\right).$$

Nach den Gleichungen (8) des Capitels »Natur der Lichtbewegung« (pag. 634) folgt, dass die Endpunkte des Vectors u, v und des Vectors ξ, η zwei gleiche Ellipsen beschreiben, deren Hauptaxen in inverser Lage auf einander fallen, d. h. die grosse Axe der einen Ellipse auf die kleine der anderen und umgekehrt. Ferner ist der Durchlaufungssinn in beiden Ellipsen der entgegengesetzte.

Wenn man also anstatt des Neumann'schen Vectors den Fresnel'schen einführt, so hat das zur Folge, dass die elliptischen Bahnen des Endpunktes der Vectoren jene durch den vorigen Satz ausgedrückte gegenseitige Lage besitzen[1]). Durch das Zusammenwirken beider Umstände, nämlich der Inversion der Lage der Hauptaxen der Ellipsen und des Durchlaufungssinnes, folgen nach beiden Anschauungen (der Fresnel'schen und Neumann'schen) dieselben Resultate für die beobachtbaren Erscheinungen (z. B. Drehung der Polarisationsebene bei Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte aktiver Substanz), wie später zum Theil ausführlicher erörtert werden soll.

Das Coordinatensystem mag nun wieder, wie früher, gelegt werden, nämlich in die optischen Symmetrieaxen, welche der Krystall besitzen würde, falls die dissymmetrischen Terme fehlten. Wir benutzen daher wiederum die Gleichungen (12).

Durch passende Wahl des Nullpunktes der Zeit t kann man es stets erreichen, dass

$$MM' + NN' + PP' = 0 \tag{13}$$

ist. Unter dieser Bedingung haben M, N, P und M', N', P' einfache Bedeutungen. Für $\rho = 0$ befindet sich nämlich, falls man u, v, w als Elongationen auffasst, ein Aethertheilchen in einem Punkte, dessen Coordinaten M, N, P sind, dessen Entfernung r vom Coordinatenanfang also gegeben ist durch

$$r^2 = M^2 + N^2 + P^2. \tag{14}$$

---

[1]) Zu diesem Satze ist schon A. Clebsch in Crelle's Journ. 57, pag. 319. 1860 gelangt.

Nach einem unendlich kleinen Zuwachs dt der Zeit beträgt diese Entfernung $r + dr$, und zwar folgt aus (12) durch Differentiation

$$(r + dr)^2 = \left(M - M' \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right)^2 + \left(N - N' \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right)^2 + \left(P - P' \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right)^2.$$

Falls die Gleichung (13) besteht, ist daher dr zweiter Ordnung unendlich klein, falls dt unendlich klein erster Ordnung ist, d. h. r ist eine Hauptaxe der von den Aethertheilchen durchlaufenen Ellipse. Die andere Hauptaxe derselben r' ist gegeben durch

$$r'^2 = M'^2 + N'^2 + P'^2, \tag{14'}$$

ihre Richtungscosinus sind M'/r', N'/r', P'/r'.

Die Integrale (12) lassen sich in die Form bringen

$$u = \Re\,[\mathrm{M} e^{i\rho}], \quad v = \Re\,[\mathrm{N} e^{i\rho}], \quad w = \Re\,[\Pi e^{i\rho}], \tag{15}$$

wobei

$$\mathrm{M} = M + iM' \quad \mathrm{N} = N + iN', \quad \Pi = P + iP'$$

bedeutet, $i^2 = -1$ gesetzt ist, und das vorgesetzte $\Re$ andeuten soll, dass der reelle Theil der nachfolgenden Grösse zu nehmen ist.

Da alle Differentialgleichungen linear sind, so kann man auch u, v, w den complexen Ausdrücken in (15) selber gleich setzen. Jede sich dann ergebende Gleichung, welche complexe Grössen enthält, ist stets zwei Gleichungen äquivalent, welche erhalten werden, wenn man in der ursprünglichen Gleichung die reellen von den imaginären Bestandtheilen trennt.

Aus den Gleichungen (3), d. h. für den FRESNEL'schen Vector, folgt, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varepsilon\tau\omega = \sigma, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - a)\,\mathrm{M} &= -m\,(am\mathrm{M} + bn\mathrm{N} + cp\Pi) + i\sigma\,(\Pi n - \mathrm{N} p),\\
(\omega^2 - b)\,\mathrm{N} &= -n\,(am\mathrm{M} + bn\mathrm{N} + cp\Pi) + i\sigma\,(\mathrm{M} p - \Pi m),\\
(\omega^2 - c)\,\Pi &= -p\,(am\mathrm{M} + bn\mathrm{N} + cp\Pi) + i\sigma\,(\mathrm{N} m - \mathrm{M} n).
\end{aligned} \tag{17}$$

Wegen der Transversalität der Wellen ist ferner

$$m\mathrm{M} + n\mathrm{N} + p\Pi = 0. \tag{18}$$

Die Gleichungen (17) und (18) sind linear in den vier Grössen M, N, Π und $am\mathrm{M} + bn\mathrm{N} + cp\Pi$. Durch Elimination derselben erhält man

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - a, & i\sigma p, & -i\sigma n, & m \\ -i\sigma p, & \omega^2 - b, & i\sigma m, & n \\ i\sigma n, & -i\sigma m, & \omega^2 - c, & p \\ -m, & -n, & -p, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Auflösung der Determinante folgt:

$$m^2(\omega^2 - b)(\omega^2 - c) + n^2(\omega^2 - c)(\omega^2 - a) + p^2(\omega^2 - a)(\omega^2 - b) = \sigma^2. \tag{19}$$

Da das Produkt von ε in die Differenz der Hauptbrechungsindices des Krystalls schon bei Ableitung der Hauptgleichungen vernachlässigt ist, so ist σ als eine von der Richtung der Wellennormale unabhängige Constante anzusehen. Die Formel (19) giebt daher in einfacher Weise die Modifikation des FRESNEL'schen Gesetzes der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes für aktive Krystalle an[1]).

Durch Auflösung von (19) folgt:

$$2\omega^2 = m^2(b + c) + n^2(c + a) + p^2(a + b) \pm \sqrt{(A + B - C)^2 - 4AB + 4\sigma^2}, \tag{20}$$

wo A, B, C Abkürzungen sind für:

$$A = m^2(b - c), \quad B = n^2(c - a), \quad C = p^2(a - b). \tag{21}$$

[1]) A. CLEBSCH (CRELLE's Journ. 57, pag. 319. 1860) hat obige Formel aus den CAUCHY-schen Gleichungen abgeleitet.

Von diesen drei Grössen ist A und C positiv, B negativ, falls $a > b > c$ ist, was wir annehmen wollen. Daher stehen unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung (20) nur positive Grössen, d. h. es giebt zu jeder Richtung m, n, p der Wellennormalen zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Dieselben sind stets von einander verschieden, d. h. die Normalenfläche in optisch aktiven Krystallen besteht aus zwei in keinem Punkte zusammenhängenden Schalen. Bezeichnet man die beiden verschiedenen Wurzeln von ω^2 durch o^2 und e^2, so folgt aus (20), dass, falls σ^2 klein ist gegen die Werthe von a, b, c, was stets der Fall ist, die Differenz $o^2 - e^2$ ein Minimum erreicht, falls

$$A + B - C = 0, \qquad AB = 0 \tag{22}$$

ist. Durch diese Gleichungen sind aber, wie wir früher (pag. 691) sahen, die Richtungen der optischen Axen des inaktiven Krystalls definirt. Wir wollen sie im Folgenden auch beim aktiven Krystall die optischen Axen nennen, obgleich sie hier nicht dieselben physikalischen Eigenschaften, wie beim inaktiven Krystall, besitzen.

In den Richtungen der optischen Axen, welche, wie früher [pag. 691, Gleichung (13)] durch die Formeln definirt sind:

$$m^2 = \frac{a-b}{a-c}, \qquad n = 0, \qquad p^2 = \frac{b-c}{a-c} \tag{22'}$$

sind die Werthe von ω^2:

$$\omega^2 = b \pm \sigma, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \sqrt{b}\left(1 \pm \frac{\sigma}{2b}\right). \tag{22''}$$

Die 9 Grössen M/r, N/r, P/r; M'/r', N'/r', P'/r'; m, n, p sind die Richtungscosinus von drei zu einander rechtwinkligen Linien. Rechnet man dieselben positiv in einem solchen Sinne, dass durch Drehung diese drei (positiven) Linien mit den positiven Coordinatenaxen zur Deckung gebracht werden können, so bestehen die Relationen:

$$\frac{M'}{r'} = \frac{Pn - Np}{r}, \qquad \frac{M}{r} = -\frac{P'n - N'p}{r'} \quad \text{etc.}$$

Unter ihrer Berücksichtigung erhält man aus den Gleichungen (17), wenn man in ihnen die reellen von den imaginären Bestandtheilen trennt:

$$\begin{aligned}
\left(\omega^2 - a - \sigma\frac{r'}{r}\right) M &= -m(amM + bnN + cpP),\\
\left(\omega^2 - b - \sigma\frac{r'}{r}\right) N &= -n(amM + bnN + cpP),\\
\left(\omega^2 - c - \sigma\frac{r'}{r}\right) P &= -p(amM + bnN + cpP),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\left(\omega^2 - a - \sigma\frac{r}{r'}\right) M' &= -m(amM' + bnN' + cpP'),\\
\left(\omega^2 - b - \sigma\frac{r}{r'}\right) N' &= -n(amM' + bnN' + cpP'),\\
\left(\omega^2 - c - \sigma\frac{r}{r'}\right) P' &= -p(amM' + bnN' + cpP').
\end{aligned} \tag{23'}$$

Aus (23) ergiebt sich durch Zusammenfassung mit den Faktoren M, N, P:

$$\omega^2 - \left(a\frac{M^2}{r^2} + b\frac{N^2}{r^2} + c\frac{P^2}{r^2}\right) = \sigma\frac{r'}{r},$$

ebenso aus (23') durch Zusammenfassung mit den Faktoren M', N', P':

$$\omega^2 - \left(a\frac{M'^2}{r'^2} + b\frac{N'^2}{r'^2} + c\frac{P'^2}{r'^2}\right) = \sigma\frac{r}{r'}.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen folgt, da $M^2/r^2 + M'^2/r'^2 = 1 - m^2 = n^2 + p^2$ ist, etc.

$$2\omega^2 - a(n^2 + p^2) - b(p^2 + m\ ) - c(m^2 + n^2) = \sigma\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right). \quad (24)$$

Bezeichnet man daher die Axenverhältnisse r/r' mit k_o resp. k_e, je nachdem sie der Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit o resp. e ist, angehören, so folgt aus (24), da nach (20) $a(n^2 + p^2) + b(p^2 + m^2) + c(m^2 + n^2) = (o^2 + e^2)$ ist:

$$\sigma\left(k_o + \frac{1}{k_o}\right) = o^2 - e^2, \qquad \sigma\left(k_e + \frac{1}{k_e}\right) = e^2 - o^2. \quad (25)$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt leicht

$$(k_o + k_e)(1 + k_o k_e) = 0.$$

Es muss also entweder sein $k_o = -k_e$, oder $k_o = -1/k_e$. Dies spricht aus, dass die Schwingungsellipsen der Aethertheilchen in beiden Wellen (o und e) identisch seien, und entweder auf einanderfallen, oder dass sie in inverser Lage zu einander liegen. Wegen der Continuität mit dem Verhalten der inaktiven Krystalle kann nur letzteres eintreten. Da ferner k in beiden Wellen entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, so werden die Ellipsen in beiden Wellen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Aus den Gleichungen (12) folgt, dass, falls die Fortpflanzungsrichtung der Wellennormale in die positive z-Axe fällt, bei positivem k die Ellipse in demselben Sinne durchlaufen wird, in welchem man die positive y-Axe drehen muss, um sie mit der positiven x-Axe zur Deckung zu bringen.

Nach den Erörterungen der pag. 789, 790 folgt daher, dass man aus den Gesetzen, welche hier für den Fresnel'schen Vector abgeleitet werden, die für den Neumann'schen gültigen erhält, wenn man für den Vector, dessen Index o ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit e annimmt, und umgekehrt.

Da nach (22'') für die Richtung der optischen Axen $o^2 - e^2 = \pm 2\sigma$ ist, so folgt aus (25), dass in diesem Falle

$$k_o = \pm 1, \qquad k_e = \mp 1.$$

In der Richtung der optischen Axen findet also Circularpolarisation statt.

Die Richtung der Hauptaxen der Schwingungsellipsen ergiebt sich aus den Gleichungen (23) und (23'). Man erhält aus ihnen das Resultat, dass sie in denjenigen Richtungen liegen, in welchen bei Fehlen von Rotationspolarisation die geradlinigen Lichtschwingungen liegen. Sie werden also durch die Formeln (10) der pag. 689 bestimmt.

Führt man die Winkel g und g' ein, welche die Wellennormale mit den optischen Axen bildet, so wird:

$$\begin{aligned} 2o^2 &= a + c + (a - c)\cos g \cos g' + \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2}, \\ 2e^2 &= a + c + (a - c)\cos g \cos g' - \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2}, \\ 2\sigma k_o &= -\frac{2\sigma}{k_e} = (a - c)\sin g \sin g' + \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 g \sin^2 g' + 4\sigma^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Durch diese Gleichungen ist das Verhalten der beiden im Krystall fortgepflanzten Wellen völlig gegeben. — Aus (26) geht hervor, dass das arithmetische Mittel aus den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellen, und in der hier stets benutzten Näherung auch das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten selber, denselben Werth besitzt, als ob σ gleich Null wäre, d. h. der Krystall kein Drehungsvermögen besässe[1]).

[1]) Vergl. dazu A. Cornu, Compt. rend. 92, pag. 1365. 1881. — Journ. de phys. (2) 1, pag. 157. 1882. — K. Exner, Wien. Ber. (II) 91, pag. 218. 1885. — Wied. Ann. 25 pag. 141. 1885.

In einigen der Beobachtung besonders leicht zugänglichen Fällen kann man nicht die beiden Lichtwellen gesondert untersuchen, sondern nur die Wirkung der Superposition beider Wellen. Es ist dies der Fall, wenn ebene Lichtwellen eine planparallele Platte des Krystalls durchsetzen. Wir wollen annehmen, dass linearpolarisirtes Licht senkrecht auf eine solche Platte auffalle, und zwar sei φ das Azimuth der Lichtschwingungen des einfallenden Lichtes gegen diejenige Ebene E, in welcher die grosse Axe der Schwingungsellipse der mit der Geschwindigkeit o sich fortpflanzenden Welle liegt. Nimmt man an, dass die durch Reflexion an den Begrenzungsflächen der Platte herbeigeführte Schwächung des einfallenden Lichtes unabhängig von φ sei, d. h. sieht man bei dieser Wirkung von der Doppelbrechung ab, so ergeben sich folgende Beziehungen[1]):

Nennt man Δ die relative Phasendifferenz der parallel der Ebene E schwingenden Componente des austretenden Lichtes zu der senkrecht zu E schwingenden Componente, sowie φ' das Azimuth der Schwingungen des austretenden Lichtes, falls dasselbe linear polarisirt wäre (d. h. wenn Δ durch Compensation mit Hilfe des BABINET'schen Compensators zu Null gemacht ist), so ist:

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi' &= \cos^2 2\chi \cos 2\varphi + \sin^2 2\chi \cos 2\varphi \cos\delta + \sin 2\chi \sin 2\varphi \sin\delta, \\ \sin 2\varphi' \sin\Delta &= -\sin 2\chi \cos 2\chi \cos 2\varphi (1 - \cos\delta) + \cos 2\chi \sin 2\varphi \sin\delta, \qquad (27) \\ \sin 2\varphi' \cos\Delta &= \sin 2\varphi \cos\delta - \sin 2\chi \cos 2\varphi \sin\delta. \end{aligned}$$

Hierin ist gesetzt

$$\delta = \frac{d}{\tau}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right),$$

wobei d die Dicke der Krystallplatte bedeutet und o und e durch die Formeln (26) gegeben sind; ferner ist gesetzt:

$$\tang\chi = \frac{1}{k_o}.$$

Die Formeln (27) sind zu benutzen, wenn man das aus der Platte austretende elliptisch polarisirte Licht mit Hilfe eines BABINET'schen Compensators und eines Nicols untersucht, da dann φ' und Δ direkt durch die Beobachtung ermittelt werden.

Untersucht man das austretende Licht mit Hilfe eines SENARMONT'schen Compensators (cf. pag. 721) und eines Nicols, so beobachtet man das Azimuth ϑ der Lage der Hauptaxen der austretenden Schwingungsellipse und das Verhältniss $\tang i$ der Hauptaxen derselben. Zwischen diesen Grössen und den durch (27) gegebenen bestehen die Relationen [cf. pag. 634, Formel (8)]

$$\tang 2\vartheta = \frac{\sin 2\varphi' \cos\Delta}{\cos 2\varphi'}, \quad \sin 2i = \sin 2\varphi' \sin\Delta,$$

d. h. ϑ und i sind ebenfalls, vermöge der Gleichungen (27) durch φ, χ, δ ausgedrückt.

Für $\varphi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$, d. h. wenn das einfallende Licht parallel oder senkrecht zu den Hauptschwingungsebenen der Krystallplatte polarisirt ist, werden die Formeln besonders einfach. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \tang\Delta &= \cos 2\chi \tang\tfrac{1}{2}\delta, \\ \left.\begin{aligned}\sin\varphi' &= \\ \cos\varphi' &=\end{aligned}\right\} & \sin 2\chi \sin\tfrac{1}{2}\delta, \qquad (27') \end{aligned}$$

[1]) Es ist bei der Aufstellung derselben nicht Rücksicht auf die wiederholten Reflexionen im Innern der Platte genommen. Dass diese auf die durch eine Platte von circularpolarisirender Substanz herbeigeführte Drehung $\varphi' - \varphi$ (cf. unten) der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes keinen Einfluss haben, ist von W. VOIGT (WIED. Ann. 22, pag. 237. 1884) gezeigt.

Bei beliebigem φ ist für $tang\chi = +1$, d. h. bei Circularpolarisation im Innern der Krystallplatte:

$$\Delta = 0, \quad \varphi' = \varphi - \tfrac{1}{2}\delta, \tag{28}$$

d. h. das austretende Licht ist linear polarisirt. Die Polarisationsebene des austretenden Lichtes ist um den Winkel $\delta/2$ in dem Sinne gedreht, in welchem man von der positiven y-Axe zur positiven x-Axe gelangt.

Nach dem oben Erörterten tritt Circularpolarisation nur in den Richtungen der optischen Axen ein. Für diese ist

$$\delta = \frac{d}{\tau} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{b^3}},$$

daher der Betrag der Drehung der Polarisationsebene im Sinne der Drehung der $+y$-Axe zur $+x$-Axe:

$$\varphi - \varphi' = \frac{d}{2\tau} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{b^3}} = \pi \cdot \frac{d}{\lambda_0} \cdot \frac{n\sigma}{b}. \tag{29}$$

n bedeutet den mittleren Brechungsexponenten $\omega_0/\sqrt{b}$ des Krystalls, λ_0 die Wellenlänge des einfallenden Lichtes in Luft.

II. Experimente.

a) Zweiaxige Krystalle.

Natürliche zweiaxige aktive Krystalle sind bisher nicht beobachtet. Es liegt dies wahrscheinlich daran, dass, wie aus den Formeln des vorigen Abschnittes hervorgeht, die Wirkung der Rotationspolarisation bei einigermaassen grossem Betrage der Doppelbrechung $(a - c)$ nur falls die Wellennormale nahe mit einer der optischen Axen zusammenfällt, zu beobachten ist. Dass die zahlreichen Substanzen, welche im gelösten Zustande aktiv sind, diese Eigenschaft verlieren, falls man sie auskrystallisiren lässt, wird daher erklärlich, da sie zweiaxige Krystalle werden. Werden sie in die feste, amorphe Form übergeführt, so behalten sie ihre Aktivität[1]). Ebenso besitzen Strychninsulfat[2]) und Amylamin-Alaun[3]) sowohl im gelösten, als im krystallisirten Zustande Aktivität, letzteres deshalb, weil ihre Krystallform dem quadratischen, resp. regulären System angehört.

Wie oben (pag. 739) erwähnt ist, besitzen wir in elastisch deformirtem Quarz ein Beispiel eines zweiaxigen aktiven Krystalls. Versuche an demselben sind von Beaulard[4]) und Monnory[5]) angestellt, welche senkrecht zur Axe geschliffene Quarzplatten benutzten und dieselben einem einseitigen, senkrecht zur Axe wirkenden Druck aussetzten. Es wurde das Axenverhältniss und die Lage der Hauptaxen der Schwingungsellipse des aus der Platte austretenden Lichtes bestimmt, falls die Polarisationsebene des linear polarisirten einfallenden Lichtes parallel oder senkrecht zur Druckrichtung (d. h. einer Hauptschwingungsrichtung) lag. Es ergaben sich je nach der Dicke der angewandten Quarzplatte verschiedene Resultate für den Einfluss wechselnder Drucke, wie auch die Discussion der Formeln (27') zeigt.

Beaulard und Monnory haben ihre Resultate in Uebereinstimmung mit der

---

[1]) Biot, Mém. de l'Acad. 13, pag. 126. 1832. — Ann. de chim. et de phys. (3) 10, pag. 175. 1844; 28, pag. 351. 1849.

[2]) Des Cloizeaux, Pogg. Ann. 102, pag. 474. 1857.

[3]) Le Bel, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 5, pag. 391.

[4]) F. Beaulard, Compt. rend. 111, pag. 173. 1890; 112, pag. 1503. 1891.

[5]) Monnory, Compt. rend. 112, pag. 428. 1891.

von GOUY[1]) gegebenen Theorie gefunden, welcher das Zusammenwirken von Doppelbrechung und Circularpolarisation unter der Annahme berechnete, dass die Bewegung der Aethertheilchen die Resultante der Einzelbewegungen sei, wie sie einerseits nur in Folge der Doppelbrechung, und andererseits nur in Folge der Circularpolarisation stattfinden würden. Bei der Kleinheit der beiden Eigenschaften (es ist $a - c$, und ebenso σ klein gegen $a + c$) führt dies zu demselben Resultate, als wenn man, wie es hier aus der »Theorie« interpretirt werden kann, die aus beiden Eigenschaften resultirenden Kräfte addirt.

b) Einaxige Krystalle.

Wir betrachten zunächst die Fälle, in welchen die beiden im Krystall fortgepflanzten Strahlen räumlich getrennt erscheinen. Es ist hierzu nur nöthig, dass das Licht unter einem schiefen Winkel auf den Krystall auffällt oder unter einem solchen aus demselben austritt, wie es z. B. der Fall ist, wenn das Licht ein Prisma eines aktiven einaxigen Krystalls durchsetzt. Da in keiner Richtung die beiden in ihnen fortgepflanzten Wellen dieselbe Geschwindigkeit besitzen, so müssen aus dem Prisma stets zwei verschieden gerichtete Wellen austreten, auch wenn dieselben im Krystall die Richtung der optischen Axe besitzen sollten.

Dieses Verhalten ist in der That an einem Prisma, dessen brechende Kante senkrecht zur optischen Axe lag und dessen Flächen gegen dieselbe nahezu gleich geneigt waren, von V. VON LANG[2]) constatirt. Derselbe konnte die Brechungsexponenten ω_o/o und ω_o/e (wo ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft bedeutet) bis auf die siebente Decimale bestimmen und erhielt eine befriedigende Uebereinstimmung der Beobachtungen mit den theoretischen Formeln. Speciell erwies sich der Brechungsexponent der ordinären Welle, falls ihre Normale im Krystall der optischen Axe benachbart war, nicht constant. Für Fortpflanzungsrichtungen, welche einen grösseren Winkel als 25° mit der optischen Axe einschliessen, liess sich eine Abweichung vom HUYGENS'schen Gesetze nicht mehr nachweisen. Es liegt dies daran, dass in den Formeln (26), in welchen $g = g'$ zu setzen ist, $4\sigma^2$ gegen $(a - c)^2 \sin^4 g$ in diesen Fällen verschwindend klein wird. Die Differenz der Brechungsexponenten für die beiden in Richtung der optischen Axe fortgepflanzten Wellen betrug für Natriumlicht:

$$\omega_0 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right) = 0{\cdot}0000718.$$

Dieser Werth lässt eine Prüfung zu vermittelst der beobachteten Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang des Lichtes durch eine planparallele senkrecht zur Axe geschliffene Quarzplatte. Es ist nämlich nach (28) diese Drehung gegeben durch:

$$\varphi - \varphi' = \tfrac{1}{2}\delta = d \cdot \frac{\pi}{T}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right) = \pi \frac{d}{\lambda_0} \omega_0 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right),$$

d. h.

$$\omega_0 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right) = \frac{(\varphi - \varphi')}{180} \cdot \frac{\lambda_0}{d},$$

wobei $(\varphi - \varphi')$ in Graden ausgedrückt ist.

---

[1]) GOUY, Journ. de Phys. (2) 4, pag. 149. 1885; P. LEFEBVRE, Journ. de Phys. (3) 1, pag. 121. 1892. Zu gleichen Resultaten wie GOUY ist O. WIENER (WIED. Ann. 35, pag. 1. 1888), auf rein geometrischem Wege gelangt. Die Resultate sind experimentell von W. WEDDING (WIED. Ann. 35, pag. 25. 1888) verificirt.

[2]) V. VON LANG, Wien. Ber. (2) 60, pag. 767. 1869; POGG. Ann. 140, pag. 460. 1870. Man vergl. auch A. CORNU, Compt. rend. 92, pag. 1365. 1881.

Nun ist für $d = 1\,mm = \frac{\lambda_0}{0{\cdot}0005892}$ nach STEFAN[1]) $\varphi - \varphi' = 21{\cdot}67°$, daraus berechnet sich

$$\omega_0 \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{o}\right) = 0{\cdot}0000713,$$

d. h. es besteht genügende Uebereinstimmung mit dem v. LANG'schen Resultate.

Man erhält eine grössere Divergenz der austretenden Strahlen, wenn man mehrere Prismen combinirt, welche abwechselnd aus rechts- und linksdrehendem Quarz bestehen. Wie nämlich fast bei allen optisch aktiven Substanzen, so werden auch beim Quarz zwei verschiedene Modifikationen beobachtet, die sich nur durch das Vorzeichen der Constante ε von einander unterscheiden, von denen also die eine Modifikation die Polarisationsebene beim Durchgang durch eine planparallele, senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte um ebensoviel nach rechts dreht, wie die andere Modifikation nach links. Man kann die rechtsdrehende Modifikation des Quarzes von der linksdrehenden schon an der äusseren Krystallform unterscheiden, wie HERSCHEL[2]) entdeckt hat.

Mit Hilfe einer derartigen Combination von drei Prismen konnte FRESNEL[3]) zum ersten Male die Existenz der Doppelbrechung in Richtung der optischen Axe nachweisen. Durch Untersuchung der austretenden Strahlen mit Hilfe eines Analysators und $\frac{1}{4}\lambda$-Glimmerblättchens constatirt man, dass dieselben in entgegengesetztem Sinne circular polarisirt sind.

Um die Existenz der elliptischen Doppelbrechung in Fortpflanzungsrichtungen, welche der Axe benachbart sind, bequem nachzuweisen, hat CROULLEBOIS[4]) drei verschiedene Combinationen von je zwei Quarzprismen angegeben.

Wir betrachten jetzt den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte von Quarz.

Ist dieselbe senkrecht zur Axe geschnitten, so ist das austretende Licht linear polarisirt, falls es das einfallende war, jedoch erscheint die Polarisationsebene gegen die ursprüngliche Lage gedreht. Experimentell wurden die Gesetze dieser Erscheinung zuerst von BIOT[5]) ermittelt. Derselbe constatirte, dass die Drehung α der Polarisationsebene umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge des einfallenden Lichtes war.

Spätere Versuche von BROCH[6]), STEFAN[7]), V. VON LANG[8]), SORET und SARASIN[9]), DESAINS[10]) zeigten, dass man mit diesem einfachen Dispersionsgesetz für α nicht die Beobachtungen befriedigend darstellen könne, sondern dass α

---

[1]) J. STEFAN, Wien. Ber. (2) 50, pag. 88. 1864. — POGG. Ann. 122, pag. 631. 1864.

[2]) J. HERSCHEL, Trans. Cambr. Phil. Soc. 1, pag. 43. 1821; Edinb. Phil. Journ. 4, pag. 371. 1821; 6, pag. 379. 1822; POGG. Ann. 21, pag. 288. 1831. Vergl. auch H. W. DOVE, POGG. Ann. 40, pag. 607. 1837. — Farbenlehre 1853, pag. 247. — G. ROSE, Berl. Ber. 1844, pag. 144; Abhandl. d. Berl. Acad. 1846.

[3]) A. FRESNEL, POGG. Ann. 21, pag. 276. 1831.

[4]) CROULLEBOIS, Ann. de chim. et de phys. (4) 28, pag. 433. 1873.

[5]) J. B. BIOT, Mém. de la cl. des sc. math. et phys. de l'inst. Année 1812, 13, pag. 218. 1814; Mém. de l'acad. roy. des sc. de l'inst. Année 1817, 2, pag. 41. 1819.

[6]) BROCH, DOVE's Repert. d. Phys. 7, pag. 91 u. 113. 1846; Ann. de chim. et de phys. (3) 34, pag. 119. 1852.

[7]) J. STEFAN, Wien. Ber. (2) 50, pag. 88. 1864; POGG. Ann. 122, pag. 631. 1864.

[8]) V. v. LANG, Wien. Ber. (2) 74, pag. 209. 1876.

[9]) J. L. SORET et ED. SARASIN, Arch. sc. phys. et nat. (2) 54, pag. 253. 1875; (3) 8, pag. 5, 97 u. 201. 1882.

[10]) P. DESAINS, POGG. Ann. 128, pag. 487. 1866; Compt rend. 84, pag. 1056. 1877.

gleich sei einer nach fallenden Potenzen von λ^2 fortschreitenden Reihe, wie es von BOLTZMANN[1]) aus theoretischen Gründen abgeleitet war. Nach den Erörterungen der pag. 680 kann man eine derartige Dispersionsformel erhalten, wenn die Eigenschwingungen des Quarzes im Ultravioletten liegen. — Die angenäherte Dispersionsformel, dass nämlich α umgekehrt proportional zu T sei, folgt aus den Gleichungen (1) der BOUSSINESQ'schen Theorie [da nämlich das später auf pag. 786 eingeführte ε identisch ist mit dem ε/τ^2 der Formeln (1)], sowie aus den elektromagnetischen Gleichungen (7'), wenn man in ihnen ρ als von T unabhängig annimmt.

Die Beobachtungen von DESAINS beziehen sich auf ultrarothe Wärmestrahlen[2]), die von SORET und SARASIN auf die sichtbaren und ultravioletten Strahlen. Infolge dessen kennt man die Drehungswinkel α innerhalb eines sehr grossen Bereichs verschiedener Wellenlängen. Innerhalb desselben lassen sich die beobachteten Werthe von α befriedigend durch die Formel darstellen

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\lambda_0^2} + \frac{\alpha_2}{\lambda_0^4} + \frac{\alpha^3}{\lambda_0^6} + \frac{\alpha_4}{\lambda_0^8}, \tag{30}$$

wo die α_k Constanten sind, λ_0 die Wellenlänge des einfallenden Lichtes in Luft bedeutet.

Nach den Beobachtungen von SORET und SARASIN genügt innerhalb der Grenzen des Sonnenspectrums die zweiconstantige Dispersionsformel, d. h. es ist $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ zu setzen[3]).

Die Beobachtungsmethode, nach welcher von den erwähnten Physikern verfahren ist, ist im wesentlichen die von BROCH angegebene, nach welcher eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte zwischen Collimator und Fernrohr eines Spectroskops eingeschaltet wurde. Collimator und Fernrohr sind mit drehbaren NICOL'schen Prismen versehen. Es erscheint im Spectrum ein schwarzer Streifen an der Stelle derjenigen Farbe, für welche die Quarzplatte die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes gerade senkrecht zu der des analysirenden Nicols gedreht hat. Durch Drehung des letzteren wandert daher der schwarze Streifen im Spectrum, und durch Einstellen desselben auf einzelne FRAUNHOFER'sche Linien kann man die Drehung α für jede besondere Wellenlänge λ bestimmen.

Falls die Dicke der Platte beträchtlicher ist, sodass die Differenz der α für verschiedene Spectralfarben den Betrag von 180° überschreitet, treten mehrere schwarze Streifen auf. Diese theilweise Auslöschung von gewissen Lichtsorten hat zur Folge, dass eine Quarzplatte zwischen zwei Nicols in einfallendem weissen Lichte gefärbt erscheint, falls sie nicht zu dick oder zu dünn ist. Die Färbung wechselt, falls man den analysirenden Nicol dreht. Bei einer rechtsdrehenden Quarzplatte erscheinen bei Drehung des Analysators im Sinne des Uhrzeigers die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit; umgekehrt ist es bei einer linksdrehenden Quarzplatte.

---

[1]) BOLTZMANN, POGG. Ann., Jubelbd., pag. 128. 1874. — Andere Dispersionsformeln sind von CARVALLO (Compt. rend. 113, pag. 846. 1891; 114, pag. 288. 1892; Ann. de Chim. et de Phys. (6) 26, pag. 113. 1892) und WASASTJERNA (Oefvers. Finska Vet. Soc. Förhdl. 31, pag. 167. 1888—89) geprüft.

[2]) Die Drehung für ultrarothe Strahlen ist nach der phosphorographischen Methode E. LOMMEL's (WIED. Ann. 40, pag. 681. 1890) neuerdings von A. HUSSELL (WIED. Ann. 43, pag. 498. 1891) gemessen.

[3]) Betreffs der Abhängigkeit des α von der Temperatur vergl. V. v. LANG (Wien. Ber. (2) 71, pag. 707. 1875), L. SOHNKE (WIED. Ann. 3, pag. 516. 1878), SORET et SARASIN (Compt. rend. 95. 1882) und CHATELIER (Compt. rend. 109, pag. 264. 1889).

Für besondere Dicken der Platte und besondere Stellungen des Nicols vollzieht sich die Farbenänderung bei Drehen eines derselben besonders schnell, es ist dies der Fall, wenn für die hellsten gelben Strahlen der Drehung α 90° oder 180° beträgt (die dementsprechende Dicke der Quarzplatte beträgt 3·75 oder 7·50 *mm*), und das analysirende Nicol diesen Strahlen den Durchgang nicht gestattet. Die Platte erscheint dann violett, und diese Färbung (empfindliche Farbe, *teinte sensible* oder *teinte de passage*) schlägt bei einer kleinen Drehung des Analysators in roth oder blau um. Vereinigt man nach dem Vorschlag von SOLEIL eine derartige rechtsdrehende Quarzplatte mit einer gleich dicken linksdrehenden, so hat man ein emfindliches Mittel, zwei polarisirende Vorrichtungen in parallele oder gekreuzte Lage zu bringen, da diese erkannt werden durch die homogene Färbung der Doppelquarzplatte. — Ebenso kann man dieselbe zur Ermittelung der Schwingungsrichtungen in einer Krystallplatte benützen (cf. pag. 716).

Eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte zeigt im convergenten polarisirten Licht andere Interferenzfiguren, als inaktive einaxige Krystalle. Speciell ist das bei gekreuzten Nicols auftretende schwarze Kreuz der Hauptisogyren in der Nähe der optischen Axe nicht mehr vorhanden und auch das Gesetz der Ringdurchmesser der Isochromaten ist durch die Rotationspolarisation beeinflusst[1]). Bei einfallendem circularpolarisirten Licht traten spiralförmige Interferenzfiguren auf, ebenso zeigen sich verschlungene Spiralen in zwei übereinandergelegten Quarzplatten, von denen die eine rechtsdrehend, die andere linksdrehend ist. Diese sogenannten AIRY'schen[2]) Spiralen ändern ihren Drehungssinn, wenn man die Reihenfolge der beiden Quarzplatten vertauscht, indem derselbe jedesmal dem Drehungsvermögen der unteren Quarzplatte entspricht. — Mit Hilfe eines von NÖRRENBERG angegebenen Polarisationsapparates kann man die AIRY'schen Spiralen schon an einer einzigen Quarzplatte beobachten und erhält dadurch zugleich eine wichtige Methode, um zu prüfen, ob eine Quarzplatte senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist[3]) (vergl. pag. 730, Anm. 2, die Methode zur Prüfung, ob sie parallel zur Axe geschnitten ist).

Die Untersuchung des eine planparallele Quarzplatte in Richtungen, welche der optischen Axe benachbart sind, durchsetzenden linear polarisirten Lichtes mit

---

[1]) cf. J. C. MAC CONNELL, Proc. Cambr. Phil. Soc. 5, pag. 53. 1883; Proc. Lond. Roy. Soc. 39, pag. 409. 1885; Trans. Phil. Soc. 177, pag. 299. 1887.

[2]) Die von AIRY zuerst beobachteten Interferenzerscheinungen hat derselbe erklärt in Cambr. Phil. Trans. 4, pag. 79 u. 198. 1831; POGG. Ann. 23, pag. 204. 1831, vermöge einiger von ihm willkürlich angenommener Hypothesen, welche zu dem Zweck erfunden waren, um die Continuität der Eigenschaften des Quarzes für Fortpflanzungsrichtungen der Lichtwellen senkrecht und parallel zur optischen Axe herzustellen, indem sich derselbe im ersteren Falle wesentlich wie ein gewöhnlicher einaxiger Krystall verhält, dagegen in letzterem, wie FRESNEL nachgewiesen hatte, zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten existiren. — AIRY nahm an, dass im Allgemeinen zwei elliptisch polarisirte Wellen existiren mit inverser Lage der Hauptaxen und gleichem Axenverhältniss. Dasselbe solle bei Uebergang der Wellennormale von der zur optischen Axe parallelen Lage in die dazu senkrechte continuirlich von 1 zu 0 abnehmen. — Diese Hypothesen weichen daher nicht von den hier theoretisch abgeleiteten Resultaten ab. Das Axenverhältniss ist allerdings in letzterem Falle, wie Formel (26) für k auf pag. 793 lehrt, nicht streng Null, aber sehr klein. — Betreffs der analytischen Ableitung der Interferenzerscheinungen aus den AIRY'schen Hypothesen vergl. F. NEUMANN, Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von E. DORN, pag. 251, Leipzig 1885.

[3]) Vergl. TH. LIEBISCH, physikal. Krystallogr., pag. 513, Anm. — Vergl. ebendaselbst die Eigenschaften der Ergänzungszwillinge des Quarzes.

Hilfe des BABINET'schen Compensators und eines analysirenden NICOL'schen Prismas ist von JAMIN[1]) und nachher in noch verbesserter Anordnung von HECHT[2]) vorgenommen. Es zeigte sich befriedigende Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den nach den Theorien von CAUCHY etc. berechneten Werthen des φ' und Δ (vergl. pag. 794), welche, wie oben pag. 789 erwähnt, untereinander nicht wesentlich abweichen. — Nach einer von der vorigen etwas differenten Methode hat CROULLEBOIS[3]) die Abhängigkeit des Δ von der Fortpflanzungsrichtung beobachtet.

Die verschiedene Geschwindigkeit der beiden parallel der Axe fortgepflanzten circular polarisirten Wellen kann man auch durch Interferenzversuche nachweisen, indem die Lage der Interferenzstreifen, welche durch irgend eine Vorrichtung, z. B. FRESNEL'sche Spiegel, FRESNEL'sches Biprisma, BILLET'sche Halblinsen, zwei Beugungsspalten etc. hervorgerufen werden, bei Einschaltung einer planparallelen Quarzplatte ihre Lage wechseln, je nachdem sie von Wellen gleicher, oder entgegengesetzter Rotationsrichtung herrühren. Es treten daher im Allgemeinen drei Interferenzfransensysteme auf[4]). — Am übersichtlichsten gestalten sich die Verhältnisse bei der einen von STEFAN[5]) angestellten Versuchsanordnung, bei welcher hinter ein FRESNEL'sches Biprisma oder zwei Beugungsspalten eine Doppelplatte aus einem rechts und einem links circular polarisirenden Quarz derart eingeschaltet wird, dass von den beiden zur Interferenz gelangenden Lichtbündeln jedes nur durch die eine Hälfte der Doppelquarzplatte hindurchgeht. Ist das einfallende Licht cirkular polarisirt, so kommt in jeder Hälfte der Platte nur ein Strahl zu Stande, denn es lässt sich aus den Uebergangsbedingungen des Lichtes über die Grenze zweier Medien leicht ableiten, dass, falls in dem einen derselben zwei verschiedene Arten von Lichtwellen sich fortpflanzen können, und falls das einfallende Licht schon von der Art der einen dieser beiden Wellen ist, dann nur die Welle dieser Art allein in dem doppelbrechenden Medium zu Stande kommt. Ist das einfallende Licht z. B. rechts circularpolarisirt, so rühren die Interferenzstreifen von den beiden rechts circular polarisirten Strahlen in den Hälften der Doppelquarzplatte her. Dieselben haben aber in einem rechts und einem links drehenden Quarz verschiedene Geschwindigkeit, daher erscheinen die Interferenzfransen auch bei gleicher Dicke beider Quarzhälften aus ihrer ursprünglichen Lage, wie sie ohne Einschalten der Quarzplatte stattfand, abgelenkt. Eine gleich grosse Ablenkung, jedoch nach der entgegengesetzten Seite, tritt bei Anwendung links circularpolarisirten einfallenden Lichtes auf. Die gemessenen Ablenkungen

---

1) J. JAMIN, Ann. de phys. et de chim. (3) 30, pag. 55. 1850.

2) B. HECHT, WIED. Ann. 20, pag. 426. 1883; 30, pag. 274. 1887.

3) CROULLEBOIS, Ann. de chim. et de phys. (4) 28, pag. 382. 1873. — Ebenfalls hat F. BEAULARD (Compt. rend. 109, pag. 140. 1889; 110, pag. 1063; 111, pag. 173. 1890) die elliptische Doppelbrechung im Quarz gemessen. Die Resultate waren mit der GOUY'schen Theorie (cf. pag. 796) im Einklang.

4) Derartige Versuche sind gemacht von BABINET (Compt. rend. 4, pag. 900. 1837; POGG. Ann. 42, pag. 30. 1837), STEFAN (Wien. Ber. (II) 50, pag. 380. 1864; POGG. Ann. 124, pag. 623. 1865), CORNU (Compt. rend. 92, pag. 1369. 1881) und CROULLEBOIS (Compt. rend. 92, pag. 297, 519 u. 1008. 1881). Betreffs der Interpretation dieser Versuche vergl. auch BILLET, Traité d'optique physique, Paris 1859, Bd. 2, pag. 242 und RIGHI, Journ. de Phys. 7, pag. 29. 1878. Ein anderer Fall von Interferenzen, welche durch die beiden im Quarz längs der Axe fortgepflanzten circularpolarisirten Wellen hervorgerufen werden, ist von LOMMEL (WIED. Ann. 36, pag. 733. 1889) an einem Quarzprisma beobachtet worden.

5) J. STEFAN, Wien. Ber. (II) 53, pag. 548. 1866.

waren in Uebereinstimmung mit der Drehung α der Polarisationsebene linear polarisirten Lichtes, welche ja nach pag. 796 in einer einfachen Beziehung zur Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden circular polarisirten Wellen steht.

Die folgende Tabelle enthält die von den verschiedenen Beobachtern erhaltenen Werthe für die Drehung α der Polarisationsebene in einer 1 *mm* dicken Quarzplatte, welche senkrecht zur Axe geschliffen ist. Die erste Colonne bezeichnet die Wellenlänge durch den Buchstaben der auf sie fallenden FRAUNHOFER'schen Linie.

Für Quarz.

	SORET u. SARASIN (20° C.)	BROCH	STEFAN	v. LANG (21° C.)	HUSSEL
λ_{12}	—	—	—	—	7·232°
σ	—	—	—	—	8·467°
Y	—	—	—	—	9·117°
X_1	—	—	—	—	10·167°
Z	—	—	—	—	10·939°
A	12·668°	—	—	—	—
a	14·304°	—	—	—	—
B	15·746°	15·30	15·55	—	—
C	17·318°	17·24	17·22	17·299	—
D_2	21·684°	21·67	21·67	21·727	—
D_1	21·727°				
E	27·543°	27·46	27·46	—	—
F	32·773°	32·50	32·69	32·722	—
G	42·604°	42·20	42·37	—	—
h	47·481°	—	—	—	—
H	51·193°	—	50·98	—	—
K	52·155°	—	—	—	—
L	55·625°	—	—	—	—
M	58·894°	—	—	—	—
Cd 9	63·628°	—	—	—	—
N	64·459°	—	—	—	—
Cd 10	69·454°	—	—	—	—
O	70·587°	—	—	—	—
Cd 11	72·448°	—	—	—	—
P	74·571°	—	—	—	—
Q	78·579°	—	—	—	—
Cd 12	80·459°	—	—	—	—
R	84·972°	—	—	—	—
Cd 17	121·052°	—	—	—	—
Cd 18	143·266°	—	—	—	—
Cd 23	190·426°	—	—	—	—
Cd 24	201·824°	—	—	—	—
Cd 25	220·731°	—	—	—	—
Cd 26	235·972°	—	—	—	—

Der Drehungswinkel α_t bei der Temperatur $t°$ C. bestimmt sich aus dem Drehungswinkel α_0 bei der Temperatur 0° nach den Formeln:

$\alpha_t = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}000141\, t)$ (v. LANG),

$\alpha_t = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}0000999\, t + 0{\cdot}000000318\, t^2)$ (SOHNCKE),

$\alpha_t = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}000179\, t)$ (SORET und SARASIN).

In der folgenden Tabelle (sie ist der »Physikalischen Krystallographie« von TH. LIEBISCH entnommen) sind für andere aktive Krystalle (auch solche des regulären Systems) die Drehungswinkel angegeben. Die Indices bei den Krystallnamen beziehen sich auf die Beobachter, die letzte Colonne giebt die Farbe an, für welche die Drehung beobachtet ist.

Krystallsystem	Krystall	α	Farbe
Hexagonal, trapezoëdrisch-tetartoëdrisch.	Zinnober[1])	3·25°	roth
	Kaliumhyposulfat[2])	8·39°	Na
	Calciumhyposulfat[3])	2·09°	grün
	Strontiumhyposulfat[3])	1·64°	grün
	Bleihyposulfat[3])	5·53°	Na
	Benzil[3])	24·84°	Na
	Matico-Campher[4])	2·07°	Na
Hexagonal, ogdoedrisch.	Natriumperjodat[5])	23·3°	Na
Tetragonal, trapezoëdrisch-hemiëdrisch.	Strychninsulfat[1])	10·8°	roth
	Aethylendiaminsulfat[6])	15·5°	Na
	Guanidincarbonat[7])	14·58°	Na
	Diacetylphenolphtaleïn[8])	19·7°	Na
Regulär, tetartoëdrisch.	Natriumchlorat[9])	3·16°	Na
	Natriumbromat[10])	2·8°	Gelb
	Uranylnatriumacetat[10])	1·8°	Gelb

c) Isotrope Körper.

Die Isotropie ist nach den pag. 783 gemachten Erörterungen dissymmetrisch. Es ist in den Formeln (26) $a = c$ zu setzen. Es folgt

$$o^2 = a + \sigma, \quad e^2 = a - \sigma, \quad k_o = -\frac{1}{k_e} = 1.$$

d. h. in jeder Richtung pflanzen sich zwei circularpolarisirte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort.

Die Existenz derselben in circularpolarisirenden Flüssigkeiten hat v. FLEISCHL[11]) durch eine Combination zahlreicher Prismen, welche abwechselnd mit rechts- und linksdrehenden Flüssigkeiten gefüllt waren, in ähnlicher Weise wie FRESNEL im Quarz nachweisen können.

Von besonderer praktischer Bedeutung ist die Circularpolarisation in Flüssigkeiten und Lösungen einmal deshalb geworden, weil man, wie oben pag. 784

1) A. DES CLOIZEAUX, Compt. rend. 44, pag. 876 u. 909. 1857; Ann. des mines (5) 11, pag. 339, 1857; Ann. de chim. et de phys. (3) 51, pag. 361. 1857; POGG. Ann. 102, pag. 471. 1857. — G. TSCHERMAK, Min. petr. Mitth. 7, pag. 361. 1886.

2) C. PAPE, POGG. Ann. 139, pag. 224. 1870.

3) A. DES CLOIZEAUX, Compt. rend. 68, pag. 308. 1869; POGG. Ann. 137, pag. 629. 1869; 141, pag. 300. 1870. — J. MARTIN, N. Jahrb. f. Mineral., Beil., Bd. 7, pag. 30. 1890.

4) C. HINTZE, Min. Mitth., herausgeg. v. TSCHERMAK, 1874, pag. 227.

5) P. GROTH, Berl. Ber. 1869, pag. 140; POGG. Ann. 137, pag. 435. 1869.

6) V. v. LANG, Wien. Ber. (II) 65, pag. 30. 1872; POGG. Ann. 148, pag. 496. 1873.

7) C. BODEWIG, POGG. Ann. 157, pag. 122. 1876. — J. MARTIN, l. c. pag. 26.

8) C. BODEWIG, Zeitschr. f. Kryst. 1, pag. 72. 1877.

9) L. SOHNCKE, WIED. Ann. 3, pag. 516. 1878. CH. E. GUYE, Compt. rend. 108, pag. 348. 1889; Arch. sc. nat. (3) 22, pag. 130. 1889.

10) H. MARBACH, POGG. Ann. 94, pag. 412. 1855; Compt. rend. 40, pag. 793. 1855; Ann. de chim. et de phys. (3) 44, pag. 41. 1855.

11) E. v. FLEISCHL, WIED. Ann. 24, pag. 127, 1885.

erwähnt ist, dadurch gewisse Schlüsse auf ihre chemische Constitution ziehen kann, andererseits deshalb, weil man bei den Zuckerarten aus dem Drehungswinkel α die gelöste Menge an aktiver Substanz berechnen kann, sodass dadurch ein Mittel zur quantitativen Analyse geboten ist, welches sehr vielfach angewendet wird.

Bei einigen Substanzen, z. B. dem Rohrzucker, ist der Drehungswinkel α der in der Volumeinheit enthaltenen Menge aktiver Substanz sehr nahe proportional[1]. Man nennt nach BIOT das specifische Drehungsvermögen ρ einer aktiven Flüssigkeit die von einer Schicht der Dicke $d = 1\ dcm$ hervorgerufene Drehung der Polarisationsebene, dividirt durch die Dichte σ der Flüssigkeit:

$$\rho = \frac{\alpha}{d\sigma}.$$

Hat man eine aktive Substanz gelöst in einer inaktiven Flüssigkeit, und ist das Gewicht der aktiven Substanz gleich ε, das der inaktiven Flüssigkeit gleich $1 - \varepsilon$, ferner die Dichte der Lösung gleich σ, so ist offenbar die Dichte der aktiven Substanz in der Lösung $\varepsilon\sigma$. Für eine Lösung ist daher das specifische Drehungsvermögen definirt durch

$$\rho = \frac{\alpha}{d\sigma\varepsilon}.$$

Das sogen. molekulare[2] Drehungsvermögen ρ_m wird dadurch definirt, dass ρ mit dem Molekulargewicht P der gelösten Substanz multiplicirt und durch 100 dividirt wird, d. h. es ist

$$\rho_m = \frac{P}{100} \cdot \frac{\alpha}{d\sigma\varepsilon}.$$

Bei dem Rohrzucker, ebenso bei Terpentinöl, ist nun die Grösse ρ (und ρ_m) nahezu eine Constante, d. h. bei ersterem von seiner Concentration, bei letzterem von ε, d. h. der Temperatur[3] unabhängig.

Bei anderen Substanzen erkannte BIOT[4] eine Abhängigkeit des specifischen Drehungsvermögens vom Procentgehalt der Lösung oder von der Natur des Lösungsmittels. Nach späteren eingehenden Untersuchungen von OUDEMAN's jun.[5] und HESSE[6] findet dies in gewissem Grade bei allen Substanzen statt.

Das Dispersionsvermögen der Flüssigkeiten lässt sich meist wie beim Quarz durch die zweiconstantige BOLTZMANN'sche Formel (pag. 798) darstellen. Gewisse Anomalien hingegen zeigt die in Wasser oder Alkohol gelöste Weinsäure, wie schon BIOT fand, und später von ARNDTSEN[7] genauer studirt ist.

---

[1]) Ueber das Drehungsvermögen des Zuckers in verdünnter Lösung vergl. R. NASINI und V. VILLAVECCHIA, Rend. R. Acad. dei Lincei (4) 7, 2. Sem. pag. 285, 1891.

[2]) BIOT nannte die Grösse ρ das molekulare Drehungsvermögen. Später ist diese Bezeichnung von WILHELMY (POGG. Ann. 81, pag. 527. 1850), HOPPE-SEYLER (Journ. f. pract. Chem. (1) 89, pag. 273, und KRECKE (ibid. (2) 5, pag. 6) auf die Grösse ρ_m angewandt.

[3]) Dies Verhalten hat BIOT am Terpentinöl im Intervall von $-10°$ bis $+100°$ constatirt. Später fand GERNEZ (l. c.) allerdings eine geringe Abhängigkeit des specifischen Drehungsvermögens des Terpentinöls von der Temperatur. Dagegen fand er für die Dämpfe von Kampfer, Orangenöl, Bigaradenöl, Terpentinöl, dass sie dasselbe specifische Drehungsvermögen, wie im flüssigen Zustande besässen.

[4]) BIOT, Ann. de chim. et de phys. (3) 10, pag. 5, 175, 307 u. 385. 1844; 36, pag. 257. 1852.

[5]) OUDEMANS, POGG. Ann. 148. 1873.

[6]) HESSE, LIEBIG's Ann. 176. 1875. Man vergl. auch das citirte Werk von LANDOLT, pag. 50 u. ff.

[7]) ARNDTSEN, Ann. de chim. et de phys. (3) 54, pag. 403. Dass durch Mischung zweier Substanzen von entgegengesetzten Drehungsvermögen eine Lösung mit anomaler Rotationsdispersion entstehen kann, ist von G. H. v. WYSS am Terpentinöl gezeigt (WIED. Ann. 33, pag. 554. 1888).

Das specifische Drehungsvermögen ist bei den Lösungen bei weitem geringer, als bei festen Körpern, z. B. Quarz. So beträgt ρ für Rohrzuckerlösungen ungefähr 66° bei gelbem Licht, während sich das specifische Drehungsvermögen des Quarzes zu 830° ergeben würde. Unter den Lösungen[1]) besitzen ein besonders starkes Drehungsvermögen nach NASINI[2]) diejenigen von Santonin (202°), Parasantonid (890°) und Santonid (700° für *D*).

Wie schon eingangs dieses Capitels erwähnt ist, behält eine aktive Substanz die Fähigkeit bei, die Polarisationsebene zu drehen, wenn sie in Verbindungen eingeht, welche die Dissymmetrie nicht stören. So sind im Allgemeinen die weinsauren Salze drehend. Indess bleibt das Drehungsvermögen dabei im Allgemeinen nicht ungeändert, ja es kann selbst der Fall eintreten, dass die Drehung die entgegengesetzte wird. So geht rechtsdrehender Rohrzucker durch Behandeln mit verdünnten Mineralsäuren durch Aufnahme von ein Atom Wasser in linksdrehenden Invertzucker über.

Um den Drehungswinkel α bequem und genau zu ermitteln, sind besondere Instrumente[3]) construirt, welche man Polaristrobometer nennt, oder Saccharimeter, wenn sie zur quantitativen Zuckerbestimmung dienen sollen.

In dem WILD'schen[4]) Polaristrobometer ist zwischen zwei NICOL'schen Prismen, von denen das vordere (polarisirende) drehbar ist, ein SAVART'sches Polariskop (cf. pag. 736) eingeschaltet. Nachdem zunächst die Stellungen des Analysators ermittelt sind, in welchen die Interferenzfransen des Polariskops verschwinden, wird eine Säule der zu untersuchenden Substanz hinter dem Polarisator und vor die SAVART'sche Platte eingeschaltet. Ist dieselbe aktiv, so erscheinen die Streifen der SAVART'schen Platte wieder, und aus den neuen Lagen des vorderen (polarisirenden) Nicols, in welchen die Streifen verschwinden, erhält man sofort die durch die Substanz bewirkte Drehung der Polarisationsebene. Beträgt die Drehung α mehr als 45°, so muss man zur unzweideutigen Bestimmung derselben zwei verschieden lange Röhren in den Apparat einschalten.

Die einfachsten derartigen Apparate sind die von BIOT[5]) und MITSCHERLICH[6]) beschriebenen, welche aus zwei polarisirenden drehbaren Vorrichtungen (bei MITSCHERLICH zwei NICOL'sche Prismen) bestehen, zwischen welche die zu untersuchende Flüssigkeit in einer durch Plangläser verschlossenen Röhre eingeschaltet werden kann. Es wird auf Dunkelheit eingestellt. Man kann diese Apparate dadurch empfindlicher machen, dass man anstatt dessen auf Farbengleichheit einer zwischen den Nicols noch eingeschalteten SOLEIL'schen Doppelquarzplatte (cf. pag. 799) einstellt[7]). — Dieselbe ist ebenfalls in dem zuerst von SOLEIL[8]) conconstruirten Saccharimeter benutzt, welches später noch von diesem Optiker und DUBOSQ[9]) verbessert ist. In Deutschland erfuhr das Instrument einige Verände-

---

[1]) Betreffs weiterer numerischer Angaben vergl. das oben pag. 784, Anm. 5, citirte Werk von LANDOLT.

[2]) R. NASINI, Atti d. R. Acc. dei Lincei Roma (3) 13. 1883.

[3]) Betreffs ihrer detaillirten Beschreibung und ihrer Abbildungen vergl. LANDOLT, l. c. pag. 91 u. ff.

[4]) WILD, Ueber ein neues Polaristrobometer. Bern 1865.

[5]) BIOT, Ann. d. chim. et de phys. (2) 75, pag. 401. 1840.

[6]) MITSCHERLICH, Lehrb. d. Chemie. 4. Aufl., Bd. 1, pag. 361. 1844.

[7]) cf. LANDOLT, l. c. pag. 91.

[8]) SOLEIL, Compt. rend. 24, pag. 973. 1846; 26, pag. 163. 1847.

[9]) SOLEIL und DUBOSQ, Compt. rend. 31, pag. 248. 1850. — DUBOSQ, Journ. de Phys. (2) 5, pag. 274. 1886.

rungen durch VENTZKE[1]), der eine andere Skala einführte, sowie durch SCHEIBLER[2]), welcher den mechanischen Theil in mehreren Punkten vervollkommnete. Das Charakteristische an dem Apparat ist, dass die durch die zu untersuchende Substanz herbeigeführte Drehung durch ein System von senkrecht zur Axe geschnittenen Quarzplatten compensirt wird, von denen die eine aus zwei verschiebbaren keilförmigen Stücken besteht und daher eine Platte von variabler Dicke repräsentirt. — Der Apparat beruht auf der Anwendung weissen Lichtes, ist aber daher nur für solche Substanzen zu verwerthen, welche die gleiche Rotationsdispersion besitzen wie Quarz. Dies ist bei Zuckerlösungen der Fall. Sind dieselben nicht farblos, so würde man nicht die empfindliche Farbe der Doppelquarzplatte erhalten[3]). Zu der Wiederherstellung derselben befindet sich in diesem Falle vor dem Apparat noch eine senkrecht zur Axe geschliffene Quarzplatte nebst einem dritten NICOL'schen Prisma[4]).

Aeusserst genaue Messungen gestatten die sogen. Halbschattenapparate, denen das gemeinsam ist, dass zwei polarisirte Lichtbündel einfallen, deren Polarisationsebene einen kleinen Winkel mit einander einschliessen. Liegt die Polarisationsebene des analysirenden Nicols senkrecht zur Halbirungsebene jenes (spitzen) Winkels, so erscheinen beide Theile des Gesichtsfeldes gleich dunkel, während bei einer kleinen Drehung des Analysators diese Helligkeitsgleichheit gestört ist. — Die Apparate unterscheiden sich hinsichtlich der Herstellungsweise der beschriebenen Art des einfallenden Lichtes, indem der Polarisator theils aus zwei polarisirenden Prismen[5]), theils aus nur einem solchen besteht, welches aber zur Hälfte von einer entweder parallel zur Axe geschnittenen Quarzplatte bedeckt ist, welche bei geeigneter Dicke der Polarisationsebene eine von ihrer Lage gegen die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes abhängige Drehung zu ertheilen vermag[6]), oder von einer senkrecht zur Axe geschliffenen Quarzplatte[7]). — Die Empfindlichkeit hängt von dem Winkel ab, welchen die Polarisationsebenen des einfallenden Lichtes mit einander bilden. Bei den meisten derartigen Apparaten ist dieser Winkel regulirbar eingerichtet, da je nach der Intensität des Lichtes die günstigste Grösse desselben etwas variirt[8]).

P. DRUDE.

---

[1]) VENTZKE, Erdm. Journ. f. prakt. Chem. 25, pag. 84; 28, pag. 111.

[2]) SCHEIBLER, Zeitschr. d. Verh. f. Rübenzuckerindustrie. Jahrg. 1870, pag. 609.

[3]) Zur Untersuchung stark gefärbter Substanzen, bei welchen man nicht die empfindliche Farbe der Doppelquarzplatte herstellen kann, hat v. FLEISCHL ein »Spectropolarimeter« vorgeschlagen (Rep. d. Phys. 21, pag. 323. 1885). Ueber die Bestimmung des Drehungsvermögens aktiver Substanzen für bestimmte Farben, d. h. ihrer Rotationsdispersion, vergl. ausser den oben pag. 798 erwähnten Methoden auch J. SEYFFART, WIED. Ann. 41, pag. 111. 1890, und P. GLAN, WIED. Ann. 43, pag. 441. 1891.

[4]) Ueber die Wirkungsweise dieser Einrichtung vergl. LANDOLT, l. c. pag. 152.

[5]) Von dieser Art sind die Instrumente von JELETT (Rep. of the Brit. Assoc. 2, pag. 13. 1860), CORNU (Bull. soc. chim. (2) 14, pag. 140); RIGHI, Mém della R. Acc. delle Sc. dell Inst di Bologna (4) 6, pag. 591. 1885) und LIPPICH (cf. Anm. 8).

[6]) Von dieser Construction ist der LAURENT'sche Apparat (DINGL. Polytechn. Journ. 223, pag. 608).

[7]) Diese hat GLAN bei der Construction eines Spectrosaccharimeters benützt. — WIED. Ann. 43, pag. 44. 1891.

[8]) Vergl. F. LIPPICH, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 1882, pag. 167; 1892, pag. 333. — Wien. Ber. 85, pag. 268. 1882; 91, pag. 1059. 1885; 99, pag. 695. 1890.

Die Gesetze der Lichtbewegung für absorbirende Medien.

Absorbirende Medien werden diejenigen genannt, welche der Intensität des durch sie hindurchgegangenen Lichtes eine Schwächung ertheilen, die mit der Grösse des von den Lichtstrahlen im absorbirenden Medium zurückgelegten Weges stark zunimmt. Es ist daraus zu schliessen, dass die Lichtbewegung im Innern eines solchen Mediums eine solche mit variabler Amplitude ist (nach der Bezeichnung der pag. 742).

In hervorragendem Maasse gehören die Metalle zu den absorbirenden Medien, indem bei dieser die Absorption eine solche Grösse erreicht, dass nur mit grossen Schwierigkeiten überhaupt hinreichend dünne Metallschichten, welche durchsichtig sind, hergestellt werden können. Dagegen bietet die Beobachtung des an den Metallen reflektirten Lichtes keinerlei Schwierigkeiten. Dasselbe befolgt andere Gesetze, als wir sie bei durchsichtigen Medien kennen gelernt haben. Dies hat zuerst ARAGO[1]) bei der Betrachtung der zwischen einer Glaslinse und einem Metallspiegel erzeugten NEWTON'schen Ringe im polarisirten Lichte erkannt, welche sich von der gewöhnlichen Erscheinung der Ringe zwischen zwei Glasflächen unterscheiden, dagegen in gewisser Weise analog den von AIRY auf Diamant beobachteten Ringen sind (cf. oben pag. 761). — Im Jahre 1815 entdeckte BREWSTER[2]), dass die Reflexion von Metallflächen linear polarisirtem Lichte dieselben Eigenschaften ertheilt, wie der Durchgang durch eine dünne Gypsplatte. Man muss daraus schliessen, dass das reflektirte Licht elliptisch polarisirt ist.

Einige Zeit darauf veröffentlichte BREWSTER[3]) eine grössere Abhandlung, in der die Erscheinungen der elliptischen Polarisation des Lichtes durch Metallreflexion näher und ausführlicher auseinandergesetzt wurden. U. a. fand er, dass durch mehrfache Reflexion unter demselben Einfallswinkel das reflektirte Licht zu linear polarisirtem werden kann.

F. NEUMANN[4]) zeigte, dass die vielen von BREWSTER beobachteten complicirten Erscheinungen sich aus zwei Grundsätzen erklären liessen, welche lauten:

1) Die Intensität (oder die Amplitude) eines von einer Metallfläche reflektirten Lichtstrahles ist bei demselben Einfallswinkel verschieden, je nachdem seine Polarisationsebene parallel oder senkrecht zur Einfallsebene liegt. Ist der Einfallswinkel 0° oder 90°, so ist das Verhältniss der Intensitäten gleich 1; für eine gewisse Grösse des Einfallswinkels (für den sogen. Haupteinfallswinkel) ist das Verhältniss ein Minimum, doch stets von Null verschieden.

2) Zwei von einer Metallfläche unter demselben Einfallswinkel reflektirte Lichtstrahlen, von denen der eine parallel, der andere senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, verhalten sich so, dass der erstere dem anderen um einen Bruchtheil einer Wellenlänge voraus ist. Dieser Bruchtheil hat den Werth $\frac{1}{4}$ beim Haupteinfallswinkel, von diesem Werthe aus ändert er sich stetig bis zu 0 resp. $\frac{1}{2}$, welche Beträge er bei streifender, resp. senkrechter Incidenz annimmt.

[1]) ARAGO, Mém. de soc. d'Arc. 3, pag. 323. 1817. — ARAGO's Werke, deutsch v. HANKEL, Bd. 10, pag. 12. Die Versuche sind schon im Jahre 1811 angestellt.

[2]) BIOT, Traité de phys. 4, pag. 580—599. 1816. — Lettre of Dr. BREWSTER to Dr. TH. YOUNG, Works of Dr. YOUNG by PEACOCK 1, pag. 359.

[3]) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1830, 2, pag. 287. — POGG. Ann. 21, pag. 219. 1831.

[4]) F. NEUMANN, POGG. Ann. 26, pag. 89. 1832.

Die nächste Aufgabe zur numerischen Berechnung der Erscheinungen war daher jetzt, die Werthe des Intensitätsverhältnisses und des Gangunterschiedes als Function des Einfallswinkels zu ermitteln. NEUMANN stellte Formeln hierfür auf, welche jedoch nicht von einer strengeren theoretischen Grundlage aus, sondern nach Analogie der Formeln für Totalreflexion, welche ja der Metallreflexion in mancher Hinsicht ähnlich ist, gebildet waren. Die NEUMANN'schen Formeln[1]) sind daher mehr als Interpolationsformeln anzusehen, die allerdings die Beobachtungen mit einer gewissen Annäherung darstellten, jedoch nicht einen Schluss auf andere optische Vorgänge, z. B. auf die Lichtbewegung im Innern des Metalls und damit auf seine optische Natur, d. h. seine Constanten, gestatteten.

In ähnlicher Weise stellte MAC CULLAGH[2]), von der Analogie zwischen Metallreflexion und Totalreflexion geleitet, Interpolationsformeln auf. Auch diese sind zum grossen Theil als im Einklang mit der Erfahrung stehend, anzusehen, da sie sich theilweise in die von CAUCHY gegebenen Formeln überführen lassen, und letztere an der Hand des Experimentes zahlreich bestätigt worden sind. Wir werden auf die CAUCHY'sche Theorie nun ausführlicher eingehen.

I. Theorie.

CAUCHY hat nur für isotrope Körper, also z. B. die Metalle, eine Theorie gegeben[3]). Er hat dieselbe nicht ausführlich mitgetheilt, sondern nur die Resultate der Rechnung und die Hypothesen, von welchen er ausgegangen ist. Später sind von BEER[4]), EISENLOHR[5]) und STRUTT[6]) Ableitungen der CAUCHY-schen Formeln aus den Hypothesen der Theorie gegeben, indess sind diese Ableitungen nicht frei von jeder willkürlichen Annahme[7]).

Die Hypothesen CAUCHY's beziehen sich hauptsächlich auf die Grenzbedingungen, welche in derselben Form (als Continuitätsbedingungen der Geschwindigkeiten des Aethers und der ersten Differentialquotienten derselben nach den Coordinaten) angewandt werden, wie bei durchsichtigen Medien (vergl. oben pag. 650); für die Lichtbewegung im Innern des Metalls wird von vornherein angenommen, dass sie eine solche variabler Amplitude sei. Wie oben pag. 742 auseinandergesetzt, ist für diese mindestens eine der in den Formeln (3) auftretenden Grössen μ, ν, π complex. Bei isotropen durchsichtigen Medien haben nach pag. 749, Formel (21) die μ, ν, π der Gleichung

$$\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 = \frac{1}{a} \cdot \qquad (1^*)$$

zu genügen, wo a das Quadrat der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit in dem durchsichtigen Medium bedeutet. Um complexe Werthe eines der μ, ν, π zu erhalten, kann man nun annehmen, dass diese Grössen bei absorbirenden Medien einer Gleichung von derselben Form wie (1*) genügen, dass aber nun die rechte Seite jener Gleichung, welche durch die optische Natur des Mediums bestimmt ist, eine complexe Grösse bezeichnet. Durch diese ist dann nicht

---

[1]) Sie sind durch WILD, POGG. Ann. 99, pag. 235. 1856, mitgetheilt.

[2]) MAC CULLAGH, Trans. of Irish Acad. 28, part 1, 1837.

[3]) A. CAUCHY, Compt. rend. 2, pag. 427. 1836; 8, pag. 553, 658, 1839; 9, pag. 727. 1839; 26, pag. 86. 1847. — Liouvill. Journ. (1) 7, pag. 338. 1839.

[4]) A. BEER, POGG. Ann. 92, pag. 402. 1854.

[5]) F. EISENLOHR, POGG. Ann. 104, pag. 346. 1858.

[6]) STRUTT, Phil. Mag. (4) 43, pag. 321. 1872.

[7]) Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 35, pag. 508. 1889.

nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem betrachteten Medium, sondern auch zugleich seine Absorption bestimmt.

Die CAUCHY'schen Formeln sind nun in der That so gebildet, dass sie diese Annahme machen. Im Uebrigen sind sie den FRESNEL'schen Formeln für die Reflexion an durchsichtigen Körpern analog, d. h. es treten für die Amplituden des reflektirten Lichtes dieselben trigonometrischen Functionen des Einfallswinkels und Brechungswinkels auf, nur ist letzterer keine reelle, sondern eine complexe Grösse, indem der Brechungsexponent des Metalls als complex angenommen wird. Durch Trennung der reellen von den imaginären Bestandtheilen in den Formeln für die complexen Amplituden ergeben sich auf dem pag. 778 eingeschlagenen Wege die durch Reflexion (und Brechung) hervorgerufenen Intensitäts- und Phasenänderungen.

Die CAUCHY'schen Formeln genügen insofern dem praktischen Bedürfniss, als sie nicht nur die Natur des reflektirten Lichtes für jeden beliebigen Einfallswinkel zu berechnen erlauben, wenn dieselbe bei einem Einfallswinkel beobachtet ist, sondern auch aus den Reflexionsbeobachtungen in richtiger Weise Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption des im Metall fortgepflanzten Lichtes, d. h. die optische Natur des Metalls, zu ermitteln gestatten.

Die Einführung eines complexen Brechungsexponenten genügt aber nicht den theoretischen Anforderungen, wenn nicht dieselbe aus den Hauptgleichungen des Lichtvectors gerechtfertigt wird. Diese sind bei CAUCHY nicht aufgestellt.

Wie aus dem bei der »Theorie der anomalen Dispersion« [oben pag. 675, Formel (2)] Erörterten hervorgeht, wird man zu complexen Brechungsexponenten, d. h. zu Absorption, geführt, wenn man die Bewegung der ponderabeln Moleküle als mit Reibung behaftet annimmt [δ von Null verschieden in der dortigen Formel (2)]. In ähnlicher Weise sind die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen für absorbirende Medien von KETTELER[1]) aufgestellt, und zwar für den FRESNEL'schen Lichtvector. Es ergiebt sich Uebereinstimmung mit den CAUCHY'schen Formeln[2]).

In anderer Weise hat VOIGT[3]) für den NEUMANN'schen Lichtvector die Form der Gleichungen in absorbirenden Medien bestimmt.

VOIGT nimmt nicht ein Mitschwingen der ponderabeln Moleküle an und geht demgemäss nur von einem System von Hauptgleichungen aus. Er sucht die Form derselben unter der Bedingung, dass ausser Energie erhaltenden Termen auch solche auftreten, welche die Energie des Aethers für jede Art von Bewegung (nicht nur für periodische Bewegungen) vermindern. Unter der Berücksichtigung der Incompressibilitätsbedingung ergeben sich dann für absorbirende Medien Hauptgleichungen, deren rechte Seiten dieselben Differentialquotienten der Componenten u, v, w des Lichtvectors nach den Coordinaten enthalten, wie in durchsichtigen Medien. Nur treten ausser beliebig hohen geraden Differentialquotienten der u, v, w nach der Zeit t, welche in letzteren Medien allein vorkommen, noch beliebig[4]) hohe ungerade nach t in absorbirenden Medien auf.

---

[1]) E. KETTETER, Verh. des naturhist. Ver. für Rheinl. Westph. Jahrg. 32 (4) 2, pag. 70. 1875. — Jahrg. 33 (4) 2, pag. 36. 1876. — CARL's Repert. 12, pag. 354. — POGG. Ann. 160, pag. 468. 1877. — WIED. Ann. 1, pag. 229. 1877; 7, pag. 119. 1879 etc. — Theoret. Optik, pag. 198 u. ff.

[2]) Vergl. E. KETTELER, WIED. Ann. 3, pag. 95, 284. 1878; 22, pag. 11. 1884.

[3]) W. VOIGT, WIED. Ann. 23, pag. 104, 554, 577. 1884; 31, pag. 233. 1887; 43, pag. 410. 1891.

[4]) Diese Erweiterung des VOIGT'schen Ansatzes ist von P. DRUDE in den Gött. Nachr. 1892, No. 10, pag. 384 gegeben.

Da nun für periodische Bewegungen ist

$$\frac{\partial^{(2n+1)} u}{\partial t^{(2n+1)}} = \frac{i}{\tau} \cdot \frac{\partial^{(2n)} u}{\partial t^{(2n)}} \text{ etc.,}$$

falls man setzt $u = e^{\frac{i}{\tau} t} \cdots$, so ergiebt sich hieraus, dass die optischen Hauptgleichungen für absorbirende Medien nur dadurch verschieden sind von den für durchsichtige Medien gültigen, dass die Coëfficienten der Differentialquotienten von u, v, w nach den Coordinaten complexe Werthe annehmen. — Wie es oben pag. 667 in der »Theorie der durchsichtigen Medien« erwähnt ist, erhält daher VOIGT auch hier die Superposition zweier Kräftesysteme, die man das FRESNEL'sche und das NEUMANN'sche nennen kann. Letzteres wird aber allein beibehalten, weil sich sonst keine linearen Grenzbedingungen ergeben (cf. oben pag. 668).

Zu ihrer Ableitung wird wiederum die Continuität des Lichtvectors zu beiden Seiten der Grenze und das Energieprincip verwandt, letzteres in der Weise, dass der Uebergang des Lichtes über die Grenze zweier absorbirender Medien ohne Energieverlust stattfinden soll. Es ergeben sich dadurch die Grenzbedingungen[1]) in derselben Form, wie bei durchsichtigen Medien, nur sind die optischen Constanten complex. — Aus dem Erörterten ist ohne Weiteres klar, dass man für isotrope absorbirende Medien, d. h. z. B. Metalle, die früher abgeleiteten NEUMANN'schen Reflexionsformeln erhält, falls man den Brechungsexponenten complex annimmt, und damit ergiebt sich die Identität der aus VOIGT's Theorie fliessenden Resultate mit denen der CAUCHY'schen Formeln[2]).

Die elektromagnetische Theorie, deren Ansatz für Metalle oben pag. 686 in der Theorie der anomalen Dispersion gegeben ist, liefert wiederum sowohl für den FRESNEL'schen, als für den NEUMANN'schen Standpunkt Erklärungssysteme, und zwar für ersteren, wenn man die elektrische Polarisation oder die elektrische Kraft (quasi-transversale Wellen), für letzteren, wenn man die magnetische Kraft als Lichtvector einführt. Die sich dadurch ergebenden Erklärungssysteme sind mit dem KETTELER'schen resp. VOIGT'schen identisch[3]). Daraus folgt die Identität der Resultate der genannten Theorieen auch für krystallinische Medien. — In welcher Weise die elektromagnetische Theorie eine Abhängigkeit der optisch-elektrischen Constanten von der Schwingungsdauer liefert, soll weiter unten bei der Besprechung der optischen Eigenschaften der Metalle erörtert werden. Vorläufig wollen wir diese Constanten als unbekannte Functionen von T ansehen.

Nach dem Erörterten können wir hier von den früher pag. 669 bis 671 für durchsichtige Krystalle gegebenen Erklärungssystemen ausgehen, wenn wir die dort auftretenden Constanten a_{hk}, oder ε_{hk} als complex annehmen. Wählen wir z. B. die früheren Gleichungen (20) und (21) (pag. 671) des FRESNEL'schen Vectors als Ausgangspunkt, so ergiebt sich hier:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}\right), \tag{1}$$

. . . .

$$H = H_1 + iH_2,$$

$$2H_1 = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv, \tag{2}$$

$$2H_2 = a_{11}'u^2 + a_{22}'v^2 + a_{33}'w^2 + 2a_{23}'vw + 2a_{31}'wu + 2a_{12}'uv. \tag{2'}$$

---

1) Für Krystalle sind sie nach VOIGT's Theorie zuerst von P. DRUDE in WIED. Ann. 32, pag. 584. 1887 aufgestellt.

2) Dies ist ausführlicher behandelt von P. DRUDE (WIED. Ann. 35, pag. 508. 1888).

3) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. 1892, No. 11, pag. 398.

Ein absorbirender (nicht aktiver) Krystall kann demnach 12 optische Constanten (die noch von der Farbe abhängen) besitzen. — Für durchsichtige Krystalle verschwinden die Coëfficienten a_{hk}'.

Durch Transformation des Coordinatensystems kann man entweder H_1 auf die Form bringen:

$$2H_1 = au^2 + bv^2 + cw^2, \tag{3}$$

oder H_2 auf die Form

$$2H_2 = a'u^2 + b'v^2 + c'w^2. \tag{3'}$$

Nennt man die ersteren Richtungen des Coordinatensystems optische Elasticitätsaxen (s_1, s_2, s_3), die letzteren Richtungen Absorptionsaxen (s_1', s_2', s_3'), so kann man als die charakteristischen optischen Constanten eines absorbirenden Krystalls auch die 6 Grössen a, b, c, a', b', c', sowie die Orientirung der beiden genannten Axensysteme gegen die krystallographischen Axen ansehen. Legt man aber ein für allemal das Coordinatensystem in die optischen Elasticitätsaxen, so besitzt ein Krystall im allgemeinsten Falle (triklines System) noch 9 optische Constanten, ein monokliner Krystall besitzt deren 7, da eine der Absorptionsaxen mit einer der Elasticitätsaxen zusammenfallen muss; in einem rhombischen Krystall müssen beide Axensysteme zusammenfallen, daher bleiben nur noch 6 optische Constanten übrig, die sich auf 4 reduciren für die Krystalle noch höherer Symmetrie, d. h. die tetragonalen und hexagonalen, und schliesslich auf 2 für reguläre Krystalle und isotrope Körper.

Bei verschwindender Absorption, d. h. für $a' = b' = c' = 0$ haben die a, b, c nach pag. 689 die Bedeutung der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten, sie sind also positive Grössen. Diese Bedeutung haben dieselben bei stark absorbirenden Krystallen nicht mehr, wie unten näher ausgeführt werden soll; ja es kann vorkommen — und bei sämmtlichen Metallen ist dies der Fall —, dass die a, b, c negative Werthe besitzen. Auf die Erklärung dieser Thatsache, welche aus einfachen Vorstellungen über Molekularkräfte von einerlei Art wohl nicht zu geben ist, soll weiter unten eingegangen werden.

II. Gesetze der Lichtbewegung für Wellen, deren Amplitude längs der Wellenebene constant ist.

Macht man wiederum den für ebene Wellen gültigen Ansatz:

$$u = \mathrm{M} \cdot e^{\frac{i}{\tau}\rho}, \quad v = \mathrm{N} \cdot e^{\frac{i}{\tau}\rho}, \quad w = \Pi \cdot e^{\frac{i}{\tau}\rho}, \qquad \rho = t - \mu x - \nu y - \pi z, \tag{4}$$

so erkennt man, dass den Hauptgleichungen (1) nicht genügt werden kann, wenn man in dem Ausdruck für ρ die μ, ν, π als reell annimmt. Da sie complex sind, so entspricht dies einer Wellenbewegung, deren Amplitude längs der Wellennormalen variirt. Untersuchen wir zunächst nur solche Wellenbewegungen, deren Amplitude in der Wellenebene constant ist[1]), so muss man die imaginären Bestandtheile in den μ, ν, π den reellen proportional setzen, d. h. schreiben:

$$\mu = m\frac{1 - i\varkappa}{\omega}, \quad \nu = n\frac{1 - i\varkappa}{\omega}, \quad \pi = p\frac{1 - i\varkappa}{\omega}, \qquad m^2 + n^2 + p^2 = 1. \tag{5}$$

m, n, p sind die Richtungscosinus der Wellennormale, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in der Richtung der Normalen, $\varkappa$ bestimmt die Abnahme der Amplitude in jener Richtung, indem das Verhältniss der Amplituden

[1]) Man erhält diese Bewegungen experimentell, wenn das Licht aus einem umgebenden durchsichtigen Medium senkrecht auf die Grenzfläche eines absorbirenden trifft.

in zwei um die Länge 1 von einander abstehenden Wellenebenen gleich $e^{-\frac{x}{\tau\omega}}$ ist. Es soll x/ω der Absorptioncoëfficient, x der Absorptionsindex genannt werden.

Man kann die Formeln, welche oben pag. 687 u. ff. im Capitel »Doppelbrechung« für durchsichtige Krystalle entwickelt sind, direkt nach hier übertragen, wenn man $2H$ in die canonische Form bringt

$$2H = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2. \tag{6}$$

Es ist dies nämlich auch möglich durch Transformation des Coordinatensystems, d. h. durch Anwendung der Formeln:

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z, \\ y' &= \varepsilon_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z, \\ z' &= \varepsilon_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei die ε, η, ζ denselben analytischen Bedingungen genügen sollen, wie die Richtungscosinus dreier zu einander rechtwinkliger Strecken, d. h. den Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varepsilon_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = \varepsilon_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1, \\ &\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 = \varepsilon_3\varepsilon_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1 = 0, \\ &\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1, \\ &\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2 + \varepsilon_3\eta_3 = \eta_1\zeta_1 + \eta_2\zeta_2 + \eta_3\zeta_3 = \zeta_1\varepsilon_1 + \zeta_2\varepsilon_2 + \zeta_3\varepsilon_3 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

nur können im allgemeinen Falle die ε, η, ζ nicht mehr reell sein, d. h. sie besitzen nicht die früher gegebene geometrische Bedeutung von wirklichen Richtungscosinus gewisser Strecken.

Durch welche Gleichungen die ε, η, ζ bestimmt werden, findet man, wenn man den Ausdruck (6) mit denen (2) und (2') vergleicht. Setzt man $\alpha_{hk} = a_{hk} + i a_{hk}'$, so liefert diese Vergleichung:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha\varepsilon_1^2 + \beta\varepsilon_2^2 + \gamma\varepsilon_3^2, \\ \alpha_{22} &= \alpha\eta_1^2 + \beta\eta_2^2 + \gamma\eta_3^2, \\ \alpha_{33} &= \alpha\zeta_1^2 + \beta\zeta_2^2 + \gamma\zeta_3^2, \\ \alpha_{23} &= \alpha_{32} = \alpha\eta_1\zeta_1 + \beta\eta_2\zeta_2 + \gamma\eta_3\zeta_3, \\ \alpha_{31} &= \alpha_{32} = \alpha\zeta_1\varepsilon_1 + \beta\zeta_2\varepsilon_2 + \gamma\zeta_3\varepsilon_3, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha\varepsilon_1\eta_1 + \beta\varepsilon_2\eta_2 + \gamma\varepsilon_3\eta_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man sofort unter Rücksicht auf die Relationen (8) drei Systeme von je drei Gleichungen, welche in das Formelsystem zusammengefasst werden können:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_h(\alpha_{11} - \alpha_h) + \eta_h\alpha_{12} + \zeta_h\alpha_{13} = 0, \\ &\varepsilon_h\alpha_{21} + \eta_h(\alpha_{22} - \alpha_h) + \zeta_h\alpha_{23} = 0, \\ &\varepsilon_h\alpha_{31} + \eta_h\alpha_{32} + \zeta_h(\alpha_{33} - \alpha_h) = 0, \\ &h = 1, 2, 3, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \beta, \quad \alpha_3 = \gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Formelsysteme dienen zur Bestimmung der α, β, γ, ε_h, η_h, ζ_h aus den α_{hk}. Man erhält nämlich durch Elimination der ε_h, η_h, ζ_h aus (10) eine kubische Gleichung für α_h, welche in der Form der Determinante zu schreiben ist:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \alpha_h, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \alpha_h, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} - \alpha_h \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung ergeben die Werthe von α, β, γ, und durch Einsetzen ihrer Werthe in (10) erhält man unter Rücksicht auf (8) die Werthe der ε_h, η_h, ζ_h.

Wie die Gleichungen (10) lehren, sind in der That die ε, η, ζ complex. Nur falls die Richtungen der Elasticitätsaxen mit denen der Absorptionsaxen zu-

sammenfallen, d. h. für rhombische, tetragonale, hexagonale und reguläre Krystalle werden die ε, η, ζ reell und bezeichnen dann die Richtungscosinus jener Axensysteme.

Gerade wie früher pag. 689 aus den Hauptgleichungen sich die Formel (8) für ω ergab, folgt hier für die Grösse

$$\Omega = \frac{\omega}{1 - i\varkappa}, \tag{12}$$

$$\frac{m'^2}{\alpha - \Omega^2} + \frac{n'^2}{\beta - \Omega^2} + \frac{p'^2}{\gamma - \Omega^2} = 0. \tag{13}$$

Hierin bezeichnen m', n', p' die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die (complexen) Richtungen des neu eingeführten Coordinatensystemes x', y', z', d. h. sie sind aus den Richtungscosinus m, n, p der Wellennormale gegen die ursprünglichen (reellen) Coordinatenaxen nach den Formeln zu berechnen:

$$m' = \varepsilon_1 m + \eta_1 n + \zeta_1 p, \quad n' = \varepsilon_2 m + \eta_2 n + \zeta_2 p, \quad p' = \varepsilon_3 m + \eta_3 n + \zeta_3 p. \tag{14}$$

Kennzeichnet man die beiden Werthe Ω^2, welche nach dieser Gleichung zu der Richtung m', n', p' gehören, sowie die zugehörigen Werthe der Amplituden M, N, Π, welche sich auf das durch (7) definirte Coordinatensystem beziehen, durch untere Indices o und e, so folgt genau so wie die früheren Formeln (10) der pag. 689 hier

$$\begin{aligned} M_o : N_o : \Pi_o &= \frac{m'}{\alpha - \Omega_o^2} : \frac{n'}{\beta - \Omega_o^2} : \frac{p'}{\gamma - \Omega_o^2}, \\ M_e : N_e : \Pi_e &= \frac{m'}{\alpha - \Omega_e^2} : \frac{n'}{\beta - \Omega_e^2} : \frac{p'}{\gamma - \Omega_e^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Von diesen für den FRESNEL'schen Vector gültigen Formeln gelangt man zu den für den NEUMANN'chen Vector gültigen, wenn man auf den linken Seiten jener beiden Proportionen (15) die Indices o und e gegenseitig vertauscht (cf. oben pag. 689).

Nach (15) besitzen die M, N, Π complexe Werthe. Es pflanzen sich daher im Krystall zwei elliptisch polarisirte Wellen fort.

Die Ebenen beider Ellipsen liegen senkrecht zur Wellennormale, d. h. in der Wellenebene.

Aus (15) und (13) folgt analog wie früher pag. 689 für durchsichtige Medien abgeleitet ist:

$$M_o M_e + N_o N_e + \Pi_o \Pi_e = 0. \tag{16}$$

Diese Relation spricht bei reellen M, N, Π (in durchsichtigen Krystallen) aus, dass die beiden zu derselben Wellennormale zugehörigen Lichtschwingungen senkrecht zu einander liegen. Hier, wo die M, N, Π complex hat, hat sie eine andere einfache geometrische Bedeutung.

Setzt man

$$\mathrm{M} = M + iM', \qquad \mathrm{N} = N + iN', \qquad \Pi = P + iP',$$

so kann man durch passende Wahl[1]) des Anfangspunktes der Zeit, wie wir früher pag. 790 sahen, die Gleichung als erfüllt ansehen:

$$MM' + NN' + PP' = 0.$$

Wie dort des Näheren ausgeführt war, ist in diesem Falle

$$\begin{aligned} M &= r\cos\alpha, & N &= r\cos\beta, & P &= r\cos\gamma, \\ M' &= r'\cos\alpha', & N' &= r'\cos\beta', & P' &= r'\cos\gamma, \end{aligned} \tag{17}$$

wobei r und r' die Längen der Hauptaxen der elliptischen Bahnen sind und α, β, γ resp. α', β', γ' die Winkel, welche die Hauptaxen mit den Coordinatenaxen einschliessen.

---

[1]) Diese Wahl ist für beide Wellen o und e verschieden.

Die Gleichung (16) zerfällt nun in

$$M_o M_e + N_o N_e + P_o P_e - M_o' M_e' - N_o' N_e' - P_o' P_e' = 0,$$
$$M_o M_e' + N_o N_e' + P_o P_e' + M_o' M_e + N_o' N_e + P_o' P_e + 0.$$

Wegen der Gleichungen (17) erhält man hinaus:

$$r_o r_e \cos(r_o r_e) - r_o' r_e' \cos(r_o' r_e') = 0,$$
$$r_o r_e' \cos(r_o r_e') + r_o' r_e \cos(r_o' r_e) = 0.$$

Da nun beide Bahnellipsen in derselben Ebene liegen (der Wellenebene), so ist

$$\cos(r_o r_e) = \cos(r_o' r_e'),$$
$$\cos(r_o r_e') = -\cos(r_o' r_e) = \pm \sin(r_o r_e).$$

Daher

$$(r_o r_e - r_o' r_e') \cos(r_o r_e) = 0,$$
$$(r_o r_e' - r_o' r_e) \sin(r_o r_e) = 0.$$

Hieraus folgt, dass entweder r_o mit r_e zusammenfällt, und dass $r_o : r_o' = r_e' : r_e$, oder dass r_o mit r_e' zusammenfällt, und dass dann $r_o : r_o' = r_e : r_e'$ ist. Aus beiden Fällen folgt das gemeinsame Resultat: die beiden zu derselben Wellennormale gehörigen Schwingungsellipsen sind einander ähnlich und fallen mit ihren Hauptaxen in inverser Lage zusammen.

Die Gleichung (13) zerfällt durch Trennung der reellen von den imaginären Bestandtheilen in zwei simultane Gleichungen für ω und $\varkappa$. Die Abhängigkeit der einen dieser Grössen, z. B. des ω allein, von den Richtungscosinus m, n, p der Wellennormale ist in dem Allgemeinen bisher betrachteten Falle sehr complicirt. Es gelten also nicht mehr die FRESNEL'schen Gesetze der durchsichtigen Krystalle. — Dieselben behalten aber ihre Gültigkeit bei geringem Betrage der Absorption, wenn diese nämlich so klein ist, dass man die Quadrate der Grössen a_{hk}' der Formel (2') gegen die der a_{hk} vernachlässigen kann. Diese Vernachlässigung ist bei allen denjenigen Krystallen, welche man überhaupt noch bequem im durchgehenden Lichte beobachten kann, unbedenklich gestattet, und daher möge jetzt dieser Fall als der alleinige, welcher experimentelles Interesse beansprucht, näher ins Auge gefasst werden.

Wie schon bemerkt, gelten für schwach absorbirende (gefärbte) Krystalle dieselben Gesetze für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie für völlig durchsichtige Krystalle[1]). Die Grössen a, b, c der Formel (3) ergeben daher die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten in Richtung der optischen Elasticitätsaxen, die sogenannten Hauptlichtgeschwindigkeiten. — In der Nähe der optischen Axen treten die früher pag. 701, 702 beschriebenen Erscheinungen auch hier ein.

Die Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Richtung ergiebt sich am einfachsten, wenn man das Produkt $\varkappa\omega^2$ untersucht. Für dieses folgt nämlich (bei Annahme des FRESNEL'schen Lichtvectors):

$$2\varkappa\omega^2 = a' \cos^2 h_1 + b' \cos^2 h_2 + c' \cos^2 h_3, \tag{18}$$

falls h_1, h_2, h_3 die Winkel der grossen Axe der Schwingungsellipse gegen die Absorptionsaxen bezeichnen. Die Grössen a', b', c' sind durch die Formel (3') definirt.

Der Absorptionscoëfficient $\varkappa : \omega$, auf den es z. B. ankommt, falls man die Abhängigkeit der Durchsichtigkeit einer Krystallplatte von ihrer Orientirung und ihren Dichroismus studiren will, hängt in complicirter Weise von den Richtungsconsinus m, n, p der Wellennormale ab. Stellt man diese Abhängigkeit geometrisch durch eine Fläche dar, indem man auf jeder Richtung der Wellennormalen die

[1]) Betreffs des näheren Nachweises dieses und der folgenden Sätze vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 40, pag. 665. 1890.

zugehörigen Werthe der beiden Absorptionscoëfficienten von einem festen Punkte aus aufträgt, so erhält man eine Fläche mit zwei Schalen, welche eine gewisse Aehnlichkeit mit der Wellennormalenfläche und Strahlenfläche besitzt. Sie unterscheidet sich aber dadurch von den letzteren wesentlich, dass die beiden Schalen nicht in discreten Punkten (Richtungen der optischen — und Strahlen-Axen), sondern längs gewisser Curvenstücke zusammenhängen, die bei monoklinen und triklinen Krystallen unsymmetrisch zu den durch die optischen Elastititätsaxen gelegten Ebenen liegen. Es giebt also unendlich viel Richtungen für die Wellennormalen, in welchen beide Wellen gleichen Absorptionscoëfficienten aufweisen. Eine Platte, welche senkrecht zu einer solchen Richtung geschnitten ist, zeigt daher keine Helligkeitsunterschiede, wenn man sie in senkrecht durchfallendem Lichte durch ein NICOL'sches Prisma betrachtet und dasselbe dreht. Diese Curven gleicher Absorption gehen aber im Allgemeinen nicht durch die optischen Axen, d. h. die Richtungen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit. In Folge der ungleichen Absorption erweist sich daher eine Welle natürlichen Lichtes, dessen Normale den Krystall in Richtung einer optischen Axe durchsetzt hat, als polarisirt.

Die Richtungen der grössten und kleinsten Absorptionscoëfficienten liegen in triklinen und monoklinen Krystallen nicht rechtwinklig zu einander. Für letztere ist dieses Resultat von LASPEYRES[1]) am Piemontit und RAMSAY[2]) am Epidot constatirt. DRUDE[3]) hat die Beobachtungen RAMSAY's auch quantitativ mit der Theorie in Uebereinstimmung gefunden[4]).

Bei Krystallen des rhombischen Systems haben m', n', p' die Bedeutung der Richtungscosinus der Wellennormale gegen die krystallographischen Axen, welche mit den optischen Elasticitätsaxen und den Absorptionsaxen coincidiren.

Ferner ist hier

$$\alpha = a + ia', \qquad \beta = b + ib', \qquad \gamma = c + ic'.$$

Fällt die Wellennormale successive in eine der drei Symmetrieaxen, so folgt aus (13) und (15):

1) Für $m' = 1$, $n' = p' = 0$:

$$\Omega_o^2 = \beta, \qquad M_o = \Pi_o = 0, \qquad N_o \gtrless 0,$$
$$\Omega_e^2 = \gamma, \qquad M_e = N_e = 0, \qquad \Pi_e \gtrless 0.$$

2) Für $n' = 1$, $m' = p' = 0$:

$$\Omega_o^2 = \gamma, \qquad M_o = N_o = 0, \qquad \Pi_o \gtrless 0,$$
$$\Omega_e^2 = \alpha, \qquad N_e = \Pi_e = 0, \qquad M_e \gtrless 0.$$

3) Für $p' = 1$, $m' = n' = 0$:

$$\Omega_o^2 = \alpha, \qquad N_o = \Pi_o = 0, \qquad M_o \gtrless 0,$$
$$\Omega_e^2 = \beta, \qquad \Pi_e = M_e = 0, \qquad N_e \gtrless 0.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass für je zwei Hauptrichtungen diejenigen beiden Wellen dieselbe Geschwindigkeit und Absorption besitzen, d. h. auch die gleiche Farbe zeigen, in denen der Lichtvector gleiche Lage hat.

Würde man die Gesetze für den NEUMANN'schen Lichtvector aufstellen, so erhielte man das Resultat, dass diejenigen beiden Wellen gleiche Farbe zeigen, deren Schwingungen senkrecht zu einander sind.

---

[1]) H. LASPEYRES, Zeitschr. f. Kryst. 4, pag. 454. 1880.

[2]) RAMSAY, Zeitschr. f. Kryst. 13, pag. 97. 1887.

[3]) P. DRUDE, Zeitschr. f. Kryst. 13, pag. 574. 1887.

[4]) Die Beobachtungen von H. BECQUEREL (Compt. rend. 108, pag. 891. 1889. — Vergl. auch E. CARVALLO, Compt. rend. 114, pag. 661. 1892) stimmen mit den RAMSAY'schen Beobachtungen und der Theorie nicht überein. — Die BECQUEREL'schen Resultate sind aber auch von A. POTIER (Compt. rend. 114, pag. 661. 1892) nicht bestätigt.

Dieser Vergleich zwischen den Gesetzen von beiderlei Arten Lichtvectoren ist oft benützt[1]), um zu Gunsten der FRESNEL'schen Theorie gegenüber der NEUMANN'schen zu entscheiden. Diese Entscheidung ist natürlich insofern nicht zwingend, als sie sich auf die Hypothese stützt, dass lediglich die Lage des Lichtvectors das Verhalten der Welle bestimmen soll[2]).

Nach beiden Anschauungen (der NEUMANN'schen und FRESNEL'schen) ergiebt sich das Resultat, dass für diejenigen beiden Wellen, welche sich in zwei Hauptrichtungen fortpflanzen und gleiche Farbe aufweisen, ihre Polarisationsebenen senkrecht zu einander liegen. Dies wird durch die Erfahrung leicht bestätigt, wenn man einen parallel zu den Symmetrieebenen geschnittenen Würfel eines absorbirenden Krystalls mit Hilfe eines drehbaren NICOL'schen Prismas betrachtet. Im Allgemeinen zeigt ein solcher Würfel in denjenigen beiden Stellungen des Nicols, in welchen seine Polarisationsebene einer der Würfelseiten parallel ist, zwei verschiedene Färbungen. Sind die durchgehenden Lichtstrahlen successive parallel einer der Würfelkanten, so sind also sechs Färbungen wahrzunehmen, welche jedoch zu je zweien nach dem obigen Gesetze einander gleich sind. Diese Krystalle werden daher auch trichroitisch genannt.

Besondere Wirkungen der Absorption werden in optisch zweiaxigen Krystallen in der unmittelbaren Umgebung der optischen Axen beobachtet. Liegt die Wellennormale in einer Ebene, welche um den Winkel ψ gegen die Ebene der optischen Axen geneigt ist und schliesst sie einen so kleinen Winkel g mit der einen derselben ein, dass das Quadrat desselben gegen 1 zu vernachlässigen ist, so ist[3]) $\varkappa$ von diesem Winkel g unabhängig und nur eine Function von ψ, nämlich:

$$
\begin{aligned}
2b\varkappa_o &= (a'\cos^2\chi + c'\sin^2\chi)\cos^2\frac{\psi}{2} + b'\sin^2\frac{\psi}{2}, \\
2b\varkappa_e &= (a'\cos^2\chi + c'\sin^2\chi)\sin^2\frac{\psi}{2} + b'\cos^2\frac{\psi}{2},
\end{aligned} \tag{19}
$$

wobei χ den Winkel, welchen die optischen Axen mit einander einschliessen, bedeutet.

Diese Formeln zeigen, dass, wenn man aus der Ebene der optischen Axen heraus in einem engen Kreiskegel um eine derselben herumgeht bis wieder in die Ebene der Axen hinein, $\varkappa_o$ sich ebenso ändert, als $\varkappa_e$ beim Gehen in der entgegengesetzten Richtung. — Für die optische Axe selbst werden jene Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert. Aus der Gleichung (13) folgt in diesem Falle für die in der Ebene der optischen Axen polarisirte Welle:

$$2b\varkappa_o = b',$$

für die dazu senkrecht polarisirte: (19')

$$2b\varkappa_e = a'\cos^2\chi + c'\sin^2\chi.$$

Betrachtet man eine Platte von der Dicke L senkrecht zu einer optischen

---

1) Vergl. HAIDINGER, POGG. Ann. 86, pag. 131. 1852. — Reproducirt von MOUSSON, Physik 2, pag. 630. 1872. — MÜLLER-POUILLET, Physik, 1, pag. 804. 1864. — E. CARVALLO, Journ. de Phys. (2) 9, pag. 257. 1890. — Auch E. LOMMEL (WIED. Ann. 44, pag. 311. 1891) hat aus Fluorescenzerscheinungen ähnlich geschlossen.

2) FRESNEL machte in der That in seiner Theorie der Doppelbrechung von dieser Hypothese Gebrauch.

3) W. VOIGT, WIED. Ann. 23, pag. 595. 1884. — Die entwickelten Formeln gelten streng nur für rhombische Krystalle. Zur Erklärung der Interferenzerscheinungen im polarisirten Licht in qualitativer Hinsicht können sie aber auch auf monokline und trikline Krystalle angewandt werden.

Axe geschnitten im Polarisationsapparat für convergentes Licht (cf. pag. 722) und ist α der Winkel der Polarisationsebene des Polarisators, β der der Polarisationsebene des Analysators mit der Ebene der optischen Axen, so beobachtet man in der Umgebung der Plattennormale eine Lichtintensität J, welche gegeben ist durch:

$$J = A^2\Big[\sin^2\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\sin^2\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)e^{-2\varkappa_o l_o}+\cos^2\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\cos^2\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)e^{-2\varkappa_e l_e}$$
$$+2\sin\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)\cos\delta\cdot e^{-(\varkappa_o l_o+\varkappa_e l_e)}\Big]. \quad (20)$$

Hierin ist δ die Phasendifferenz der beiden in der durch g und ψ gegebenen Richtung fortgepflanzten Wellen. Ferner ist gesetzt:

$$l_o = L/\tau o, \qquad l_e = L/\tau e.$$

In der Richtung der optischen Axe selbst aber gilt, da auch da zwei Componenten in verschiedener Intensität, wenn auch mit gleicher Geschwindigkeit fortgepflanzt werden:

$$J = A^2(\cos\alpha\cos\beta\, e^{-\varkappa_o l_o}+\sin\alpha\sin\beta\, e^{-\varkappa_e l_e})^2. \quad (21)$$

Da $\cos\delta$ mit wachsender Entfernung von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima erreicht, so erhält man im Allgemeinen helle und dunkle Ringe um die Axen. Der Einfluss der Absorption auf die Erscheinung stellt sich am klarsten heraus, wenn man die Platte so dick nimmt, dass das Ringsystem verschwindet, indem die in $\cos\delta$ multiplicirte Exponentialgrösse in Formel (20) sehr klein wird. Trotzdem sind dann die beiden ersten Glieder der Gleichung (20) beizubehalten, weil ihre Exponenten nach den Relationen (19) für gewisse Richtungen sehr klein werden können; dies tritt dagegen nicht ein für den Exponenten des dritten Gliedes. — Für gekreuzte Nicols ist $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ und nach (20)

$$J = \frac{A^2}{4}\sin^2(2\alpha-\psi)(e^{-2\varkappa_o l_o}+e^{-2\varkappa_e l_e}), \quad (22)$$

für die optische Axe selber ist nach (21)

$$J = \frac{A^2}{4}\sin 2\alpha\,(e^{-2\varkappa_o l_o}+e^{-2\varkappa_e l_e}). \quad (22')$$

Der Faktor $\sin(2\alpha-\psi)=0$ giebt die Lage der dunkeln Hauptisogyren (vergl. oben pag. 728). Es ist der zweite Faktor $e^{-2\varkappa_o l_o}+e^{-2\varkappa_e l_e}$ von J aber ebenfalls mit ψ variabel. Es lässt sich allgemein nachweisen, dass dieser Faktor für $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$ ein Maximum, für $\psi = \frac{\pi}{2}$ oder $\psi = 3\frac{\pi}{2}$ ein Minimum besitzt. Daher zeigt die Krystallplatte ausser den Hauptisogyren dunkle Büschel in der Richtung normal zur Ebene der optischen Axen. Nach der Formel (22') findet in der optischen Axe selbst nur Dunkelheit für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ d. h. in den Normal-Stellungen der Krystallplatte statt. Für andere Lagen, z. B. $\alpha = \pi/4$ (Diagonalstellung) ist also die Hauptisogyre, welche bei durchsichtigen Krystallen als schwarzer Büschel durch die optischen Axen geht, in der optischen Axe selber durch einen hellen Fleck unterbrochen. Diese hellen Axenbilder sind leicht in absorbirenden Krystallen zu beobachten.

Für parallele Nicols ($\alpha = \beta$) wird die Discussion der Resultate complicirter[1]).

---

[1]) Betreffs der äusseren Ausführung vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 23, pag. 599. 1884.

Man muss verschiedene Krystalltypen unterscheiden je nach dem Grössenverhältniss der a', b', c'.

Betrachtet man eine senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte ohne Polarisationsapparat im natürlichen Licht, so ist

$$J = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2k_o l_o} + e^{-2k_e l_e}\right), \qquad (23)$$

für die optische Axe selber dagegen bei merklich verschiedenen Werthen von $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$, d. h. merklichem Dichroismus:

$$J = \frac{A^2}{4}. \qquad (23')$$

Nach den Formeln (23) und (23') treten daher in solchen Platten dunkle Büschel normal zur Ebene der optischen Axen mit hellen Axenbildern auf. Diese idiocyclophanen Axenbilder sind bereits von BREWSTER[1]) beobachtet und können z. B. am Andalysit und Epidot leicht wahrgenommen werden.

Für optisch einaxige Krystalle, d. h. Krystalle des tetragonalen und hexagonalen Systems, sind in der Formel (13) zwei der α, β, γ einander als gleich anzunehmen. Es wird dadurch für eine Welle sowohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω als auch der Absorptionsindex $\varkappa$ von der Richtung der Wellennormale unabhängig. Für diese Welle zeigt daher eine beliebig geschnittene Platte von bestimmter Dicke stets die gleiche Färbung. Eine solche zeigt überhaupt nur zwei wesentlich von einander verschiedene Färbungen, und zwar am ausgeprägtesten, falls die Plattennormale senkrecht zur optischen Axe steht. Die beiden verschiedenen Färbungen sind wahrzunehmen, wenn man die Platte durch ein Nicol betrachtet, dessen Polarisationsebene einmal parallel und einmal senkrecht zur optischen Axe steht. Die einaxigen absorbirenden Krystalle werden wegen dieser Eigenschaften auch dichroitische genannt.

Eine Platte senkrecht zur Axe geschnitten zeigt, durch ein Nicol betrachtet, eine von der Lage des letzteren unabhängige Färbung, da beide in Richtung der Axe fortgepflanzte Wellen gleich stark absorbirt werden. Dies tritt nicht mehr ein für circular polarisirende absorbirende Krystalle, z. B. bei Amethyst, bei welchem DOVE[2]) eine verschiedene Absorption der beiden längs der Axe fortgepflanzten circular polarisirten Strahlen nachweisen konnte. Dieses Resultat ist auch leicht aus dem theoretischen Ansatz zu erhalten, da jene beiden circular polarisirten Strahlen verschiedene Geschwindigkeit besitzen (cf. oben pag. 796).

Ist die s_3-Axe die optische Axe, so ist zu setzen:

$$\alpha = \beta, \quad \text{d. h.} \quad a = b, \qquad a' = b' \text{ (vergl. pag. 814).}$$

Aus (13) folgt daher, wenn man g den Winkel der Wellennormale mit der optischen Axe nennt:

$$\Omega_o^2 = \alpha, \qquad \Omega_e^2 = \alpha \cos^2 g + \gamma \sin^2 g.$$

1) D. BREWSTER, Phil. Trans. 1, pag. 11. 1819. Diese Erscheinungen sind an mehreren anderen Mineralien von TH. LIEBISCH (Gött. Nachr. 1888, pag. 202) beobachtet. Nach Beobachtungen von BERTIN (Ann. de chim. et de phys. (5) 15, pag. 412. 1878) sind oft auch im natürlichen Licht schwache Ringsysteme um die optischen Axen wahrzunehmen. Diese sind wahrscheinlich durch Interferenz der Wellen, welche in der Krystallplatte mehrere innere Reflexionen erlitten haben, zu erklären. (Vergl. W. VOIGT, l. c., pag. 603.) Künstlich sind diese Erscheinungen in BERTRAND's idiocyclophanen Kalkspathprismen hervorgerufen. (Vergl. H. G. MADAN, Nat. 42, pag. 52. 1890. S. P. THOMPSON, chem. News 61, pag. 155. 1890.)

2) DOVE, POGG. Ann. 110, pag. 284. 1860.

Nach der Bedeutung des Ω folgt hieraus bei kleiner Absorption, d. h. Vernachlässigung der Quadrate der a', b', c' gegen die der a, b, c

$$\omega_o^2 = a, \quad \omega_e^2 = a\cos^2 g + c\sin^2 g, \tag{24}$$
$$2a\varkappa_o = a', \quad 2(a\cos^2 g + c\sin^2 g)\varkappa_e = a'\cos^2 g + c'\sin^2 g.$$

Betrachtet man eine Platte der Dicke L im Polarisationsapparat für convergentes Licht und ist α der Winkel der Polarisationsebene des Polarisators, β der dieser Ebene des Analysators mit dem Hauptschnitt der Krystallplatte, d. h. der durch ihre Normale und die optische Axe gelegten Ebene, so ist die beobachtete Lichtintensität:

$$J = A^2\left[\cos^2\alpha\cos^2\beta e^{-2\varkappa_o l_o} + \sin^2\alpha\sin^2\beta e^{-2\varkappa_e l_e} + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\cos\delta e^{-(\varkappa_o l_o + \varkappa_e l_e)}\right], \tag{25}$$

worin δ, l_o und l_e dieselbe Bedeutung haben wie auf pag. 816. Wegen der periodischen Aenderung des $\cos\delta$ bei Wachsen des Winkels g erhält man helle und dunkle Ringe um die optische Axe. Dieselben treten jedoch nicht ein, wenn $\varkappa_e$ mit Entfernung von der Axe derartig wächst, dass das letzte Glied der rechten Seite der Gleichung (25) für grössere Winkel g unmerklich wird.

Dies Verhalten hat LOMMEL[1]) am Magnesiumplatincyanür im blauen Licht beobachtet. Seine Beobachtungen werden durch Discussion der Formel (25) völlig erklärt[2]). — In der Richtung der Axe selber ($g = 0$) ist nämlich, da dort $\delta = 0$, $\varkappa_c = \varkappa_e$ ist, die Formel für die Lichtintensität dieselbe, wie für durchsichtige Medien, d. h. es ergiebt sich zwischen gekreuzten Nicols Dunkelheit, zwischen parallelen Helligkeit. In einiger Entfernung von der optischen Axe ist dagegen:

$$J = A^2\cos^2\alpha\cos^2\beta e^{-2\varkappa_o l_o}, \tag{25'}$$

und diese Formel sagt aus, dass im Gesichtsfelde ein schwarzes Kreuz ohne Interferenzringe auftritt, dessen Balken senkrecht zu den Polarisationsebenen des Polarisators und Analysators verlaufen. Bei parallelen Nicols fallen die beiden Balken des Kreuzes in einen zusammen, welcher von einem hellen Axenbilde unterbrochen ist.

Fällt natürliches Licht ein, welches nach dem Durchgange durch einen Analysator betrachtet wird, so erhält man die beobachtete Lichtintensität als Mittelwerth des Ausdruckes (25'), der über alle möglichen Werthe von α zu nehmen ist. Es folgt so:

$$J = \frac{A^2}{2}\cos^2\beta e^{-2\bar{k}_o l_e},$$

d. h. es erscheint im Gesichtsfeld ein dunkles, senkrecht zur Polarisationsebene des Analysators verlaufendes Büschel, welches von einem hellen Axenbilde durchbrochen ist.

Lässt man auch den Analysator fort, so bleibt als Erscheinung ein helles Axenbild.

Die Eigenschaften des Magnesiumplatincyanürs folgen sämmtlich daraus, dass $\varkappa_e$ mit g wächst d. h. nach Formel (24), dass $c' > a'$ ist. Tritt das Umgekehrte ein, $c' < a'$, wie es z. B. beim Turmalin der Fall ist, so folgen etwas andere Erscheinungen, speciell sind die Axenbilder dunkel, anstatt, wie im vorigen Falle, hell. Ein dunkles Axenbild ist auch von BERTRAND[3]) am Turmalin beobachtet worden.

---

1) E. LOMMEL, WIED. Ann. 9, pag. 108. 1880.

2) Vergl. W. VOIGT, l. c., pag. 589.

3) BERTRAND, Ztschrft. f. Kryst. 3, pag. 645. 1879.

Für ein optisch isotropes Medium ist zu setzen

$$\alpha = \beta = \gamma = \Omega^2, \tag{26}$$

$$\text{d. h.}\quad \Omega = \frac{\omega}{1 - i\varkappa} = \sqrt{\alpha} = \sqrt{a + i a'}. \tag{27}$$

Bei kleiner Absorption folgt hieraus

$$\omega^2 = a, \qquad 2a\varkappa = a'.$$

Ist es dagegen nicht mehr gestattet, a'^2 neben a^2 zu vernachlässigen, so folgt aus (26)

$$a = \frac{\omega^2(1 - \varkappa^2)}{(1 + \varkappa^2)^2}, \qquad a' = \frac{2\omega^2\varkappa}{(1 + \varkappa^2)^2}, \tag{28}$$

und

$$\varkappa = \frac{-a + \sqrt{a^2 + a'^2}}{a'}, \qquad \frac{\omega^2}{\varkappa} = \frac{2(a^2 + a'^2)}{a'}. \tag{29}$$

In den bisher angestellten Rechnungen ist keine Rücksicht auf die durch Reflexion herbeigeführten Intensitätsänderungen genommen. Es ist dies unbedenklich, so lange man die Erscheinungen einer Platte in nahezu senkrecht durchfallendem Lichte nur qualitativ erklären will und die Absorption nicht sehr stark ist. Bei den Metallen erreicht sie indess solche Beträge, dass für diese gerade die durch Reflexion herbeigeführten Intensitätsänderungen ein wesentliches Interesse bieten, während die Erscheinungen im durchgehenden Lichte nicht so bequem zu beobachten sind, weil die Herstellung genügend dünner, durchsichtiger Metallschichten mit Schwierigkeiten verknüpft ist. Wir wenden uns daher jetzt der genannten Klasse von Erscheinungen zu.

III. Reflexion und Brechung an absorbirenden Medien.

Falls Licht aus einem durchsichtigen Medium unter schiefer Incidenz auf ein absorbirendes einfällt, so ist die Lichtbewegung in letzterem nicht mehr eine solche mit in der Wellenebene constanter Amplitude, da man den Grenzbedingungen nicht durch einen Ansatz, wie er in den Formeln (5) dieses Capitels gemacht ist, genügen kann. Falls jedoch die Grenzebene des absorbirenden Mediums zur xy-Ebene gewählt wird, so sind die Coëfficienten μ [vergl. Formelsystem (4)] für sämmtliche Wellen einander gleich. Es sind ferner sämmtliche ν Null zu setzen, falls die y-Axe senkrecht zur Einfallsebene liegt, was wir annehmen wollen. Die Coëfficienten π bestimmen sich für jede Welle aus dem zugehörigen μ durch eine der Gleichung (5) pag. 743 des Capitels »Uebergang des Lichtes etc.« ganz analoge Gleichung, welche erhalten wird, wenn man die dort auftretenden reellen optischen Constanten a_{hk} des durchsichtigen Mediums durch die complexen α_{hk} des absorbirenden ersetzt und φ durch dieselbe Gleichung, wie dort, d. h. durch die dortigen Gleichungen (4) definirt. Es sind nun überhaupt sämmtliche Formeln des obigen Capitels auf diesen Fall zu übertragen, und speciell enthalten die Formeln (5), (10), (15) und (16) der pag. 743—747 die vollständige Lösung des Problems der Reflexion und Brechung an einem absorbirenden Krystall, welcher von einem isotropen Medium umgeben ist[1]).

Die ersten genaueren auf diesen Fall bezüglichen Messungen hat SÉNARMONT[2]) angestellt, welcher fand, dass der Haupteinfallswinkel, d. h. derjenige Einfallswinkel, für den die Phasendifferenz der senkrecht zur Einfallsebene und der

[1]) Betreffs weiterer Ausführung vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 32, pag 584. 1887.

[2]) H. DE SÉNARMONT, POGG. Ann. Ergzbd. 2, pag. 513. 1848.

parallel zu ihr polarisirten Componente des reflektirten Lichtes bei linear polarisirtem einfallenden Lichte $\pi/2$ beträgt, beim Antimonglanz, Quecksilberchlorür und Zinnoxyd merklich mit der Lage der Einfallsebene gegen die krystallographischen Axen der Krystalle variirte. Später hat SCHENK[1]) Beobachtungen über das am Rothgiltigerz und Magnesiumplatincyanür reflektirte Licht angestellt. Diese Beobachtungen lassen aber deshalb keine Prüfung der aufgestellten Theorie zu, weil zum Theil künstlich angeschliffene und polirte Flächen als Spiegel benutzt sind und die auf diesen durch die Politur hervorgerufene künstliche Oberflächenschicht die Resultate stark beeinflusst; dieses zeigten Versuche von P. DRUDE[2]), der frische Spaltflächen von Bleiglanz mit polirten Flächen dieses Materials verglich. Nach diesen Versuchen können die aus Reflexionsbeobachtungen ermittelten optischen Constanten durch eine Polir-Schicht um ihren doppelten Betrag entstellt werden. — Bei frischen Spaltflächen ist man am ehesten frei von dem störenden Einfluss der Oberflächenschichten. Darum unternahm P. DRUDE[3]) an solchen von Antimonglanz erneute Untersuchungen und fand eine vollständige Bestätigung der theoretischen Formeln.

Aus den Beobachtungen an einer Spaltfläche des (rhombischen) Antimonglanzes können nicht seine sämmtlichen (complexen) optischen Constanten α, β, γ mit Genauigkeit berechnet werden, sondern nur zwei von ihnen. Lässt man die optische Symmetrieaxe s_1 (vergl. pag. 810) mit der krystallographischen Verticalaxe, s_2 mit der Brachy-, s_3 mit der Makroaxe zusammenfallen, welch' letztere auf der Spaltfläche senkrecht steht, so ist nur α und β zu berechnen. Es ergab sich, falls die optische Constante der umgebenden Luft gleich a_0 gesetzt wird, für Natriumlicht

$$\alpha/a_0 = 0{\cdot}0364 + i\cdot 0{\cdot}0088, \qquad \beta/a_0 = 0{\cdot}0469 + i\cdot 0{\cdot}0176.$$

Nach den Formeln (29) ergeben sich hiernach für die beiden senkrecht zur Spaltfläche im Antimonglanz sich fortpflanzenden Wellen, von denen die erste (1) parallel s_1, die zweite (2) parallel s_2 polarisirt ist, die Brechungsexponenten n und Absorptionscoëfficienten $n\varkappa$:

$$n_1 = 4{\cdot}49; \qquad n_1\varkappa_1 = 0{\cdot}795;$$
$$n_2 = 5{\cdot}17; \qquad n_2\varkappa_2 = 0{\cdot}740;$$

wobei unter dem Brechungsexponenten n das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeit in der Luft zu der im Krystall für den Fall senkrechter Incidenz verstanden ist.

Es zeigte sich, dass die Beobachtungen unmittelbar nach der Spaltung anzustellen waren, da schon nach wenigen Minuten die Spaltfläche sich von selbst durch atmosphärische Einflüsse verunreinigte[4]).

Von anderen stark absorbirenden Krystallen sind die optischen Constanten durch Reflexionsbeobachtungen an Spaltflächen bisher nur am Tellurwismuth[5]) und am Bleiglanz[6]) untersucht. — Für ersteren, welcher optisch einaxig ist, für eine parallel zur optischen Axe sich fortpflanzende Welle im Natriumlicht:

---

[1]) E. SCHENK, WIED. Ann. 15, pag. 177. 1882.

[2]) P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 532. 1889.

[3]) P. DRUDE, WIED. Ann. 34, pag. 489. 1888.

[4]) Dies ist zu schliessen aus den eigenthümlichen Veränderungen, welche Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth des am Antimonglanz reflektirten Lichtes mit der Zeit erlitten, und welche vollständig durch das allmählige Entstehen einer Oberflächenschicht erklärt werden. Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 886. 1889.

[5]) P. DRUDE, l. c., pag. 895.

[6]) P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 549. 1889.

$$n = 2{\cdot}70; \quad n\varkappa = 4{\cdot}39$$[1],

für Bleiglanz, welcher optisch isotrop ist, ist im Natriumlicht:

$$n = 4{\cdot}30; \quad n\varkappa = 1{\cdot}72.$$

Eine qualitative Bestätigung hat die Theorie auch durch die Untersuchung[2] der optischen Eigenschaften der Platincyanüre erfahren. Wie nämlich weiter unten bei Behandlung der isotropen Medien des Näheren ausgeführt werden soll, zeigt ein Medium ein um so stärkeres Reflexionsvermögen, je stärker das Absorptionsvermögen ist. Dieses Gesetz gilt bei Krystallen auch für jede einzelne der gebrochenen Wellen; wird nur die eine von ihnen beiden in sehr starkem Grade absorbirt, so muss das metallisch glänzende reflektirte Licht polarisirt sein. Diese Verhältnisse treten bei den Platincyanüren wirklich ein. — Wie daher schon HAIDINGER aussprach, ist das von einer Substanz reflektirte Licht und das durch dieselbe hindurchgehende nahezu complementär gefärbt[3], falls man die Substanz in so geringer Dicke untersucht, dass im durchgehenden Lichte wirklich nur die in sehr starkem Maasse absorbirten Lichtsorten fehlen, deren Absorption wegen ihrer Grösse auf das Reflexionsvermögen von Einfluss ist. Wenn auch, wie wir unten näher sehen werden, die HAIDINGER'sche Vermuthung nur als angenähert richtig sich herausstellt, so wird doch stets einer hellen Partie im reflektirten Spectrum eine dunkle im durchgehenden entsprechen, wie E. WIEDEMANN[4] auch am übermangansauren Kali constatiren konnte.

Es möge jetzt die Reflexion an isotropen Medien, z. B. an Metallen, näher betrachtet werden. Die früher pag. 750 abgeleiteten Gleichungen (25) und (25') für die reflektirten Amplituden gelten auch hier, falls man den complexen Winkel χ mit dem Einfallswinkel φ durch die Gleichung verbindet:

$$sin\,\varphi : sin\,\chi = \sqrt{a_0} : \sqrt{\alpha}, \tag{30}$$

wobei a_0 die optische Constante des umgebenden isotropen Mediums, d. h. das Quadrat der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit in ihm, α die complexe optische Constante des Metalls bedeutet.

Schreibt man die complexen Amplituden in der Form der Gleichungen (45) auf pag. 778, so ergeben die genannten Gleichungen (25) für den NEUMANN'schen Lichtvector:

$$\begin{aligned} \frac{R_p}{E_p} &= tang\,\psi_p e^{i\Delta_p} = -\frac{sin\,(\varphi - \chi)}{sin\,(\varphi + \chi)}, \\ \frac{R_s}{E_s} &= tang\,\psi_s e^{i\Delta_s} = \frac{tang\,(\varphi - \chi)}{tang\,(\varphi + \chi)}, \\ \frac{R_s}{R_p} &= tang\,\psi e^{i\Delta} = -\frac{E_s}{E_p}\frac{cos\,(\varphi + \chi)}{cos\,(\varphi - \chi)}. \end{aligned} \tag{31}$$

In diesen Gleichungen bedeuten $tang^2\,\psi_p$ und $tang^2\,\psi_s$ die Intensitätsverhältnisse der reflektirten zu den einfallenden p- und s-Componenten, Δ_p und Δ_s

[1]) Da das Verhältniss der Amplituden in zwei um die Strecke d von einander entfernten Wellenebenen gleich $e^{-2\pi n\varkappa\frac{d}{\lambda}}$ ist, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft bedeutet, so bedeutet dieser Werth $n\varkappa$ von Tellurwismuth eine sehr starke Absorption, indem die Amplitude einer Welle nach dem Durchlaufen einer Strecke von der Grösse der Wellenlänge des Natriumlichtes, d. h. von 0·0006 *mm* auf $1/10^{12}$ des eigenen Betrages geschwächt wird.

[2]) H. BEHRENS, POGG. Ann. 150, pag. 303. 1873. — W. KÖNIG, WIED. Ann. 19, pag. 491. 1883.

[3]) Dies ist bestätigt von G. G. STOCKES, Phil. Mag. (4) 6, pag. 393. 1353; POGG. Ann. 91, pag. 300. 1854.

[4]) E. WIEDEMANN, POGG. Ann. 151, pag. 1, 625. 1874.

die an der Grundfläche genommenen Phasendifferenzen der reflektirten Componenten gegen die einfallenden, Δ die Phasendifferenz der reflektirten s- und p-Componente, $tang^2 \psi$ das Intensitätsverhältniss derselben. Es sollen im Folgenden kurz die Grössen $tang\, \psi_p$, $tang\, \psi_s$, Δ_p, Δ_s als absolute Amplitudenverhältnisse und Phasendifferenzen bezeichnet werden, da sie gegen die Componenten des einfallenden Lichtes genommen sind, dagegen die Grössen $tang\, \psi$ und Δ als relatives Amplitudenverhältniss und relative Phasendifferenz.

Für den FRESNEL'schen Lichtvector müssen auf den linken Seiten der Gleichungen (31) die Indices p und s gegenseitig vertauscht werden.

Indem man in ihnen die trigonometrischen Functionen der Winkelsummen und Winkeldifferenzen in solche der Winkel selbst auflöst und die Gleichung (30) benutzt, erhält man die einfachsten Formeln, wenn man die Quotienten $1 + tang\, \psi e^{i\Delta}/1 - tang\, \psi e^{i\Delta}$ bildet. Es ist nun

$$\frac{1 + tang\, \psi \cdot e^{i\Delta}}{1 - tang\, \psi \cdot e^{i\Delta}} = \frac{cos\, 2\psi}{1 - sin\, 2\psi\, cos\, \Delta} + i\, \frac{sin\, 2\psi\, sin\, \Delta}{1 - sin\, 2\psi\, cos\, \Delta}. \tag{32}$$

Setzt man daher für die linke Seite dieser Gleichung einen Ausdruck

$$\frac{1 + tang\, \psi e^{i\Delta}}{1 - tang\, \psi e^{i\Delta}} = \frac{e^{iQ}}{tang\, P}, \tag{33}$$

so bestimmt sich Q und P durch folgende Formeln aus ψ und Δ:

$$\begin{aligned} tang\, Q &= sin\, \Delta\, tang\, 2\psi, \\ cos\, 2P &= cos\, \Delta\, sin\, 2\psi, \end{aligned} \tag{34}$$

dagegen werden ψ und Δ aus P und Q bestimmt nach den Formeln:

$$\begin{aligned} tang\, \Delta &= sin\, Q\, tang\, 2P, \\ cos\, 2\psi &= cos\, Q\, sin\, 2P. \end{aligned} \tag{35}$$

Denkt man sich die den Formeln (32, 33, 34, 35) analogen Formeln für die mit unterem Index p und s behafteten Grössen gebildet, so folgt aus den Formeln (31)

$$\begin{aligned} \frac{e^{iQ_p}}{tang\, P_p} &= \frac{cos\, \varphi \sqrt{a/a_0}}{\sqrt{1 - a/a_0\, sin^2 \varphi}}, \\ \frac{e^{iQ_s}}{tang\, P_s} &= \frac{cos\, \varphi}{\sqrt{a/a_0}\sqrt{1 - a/a_0\, sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \tag{36}$$

und bei linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirtem einfallendem Lichte:

$$\frac{e^{iQ}}{tang\, P} = \frac{sin\, \varphi\, tang\, \varphi \sqrt{a/a_0}}{\sqrt{1 - a/a_0\, sin^2 \varphi}}. \tag{36'}$$

Die Formeln (36), (36') gestatten sämmtliche Eigenschaften des reflektirten Lichtes aus den optischen Constanten a des Metalls und dem Einfallswinkel φ zu berechnen. Für diese Berechnung müssen die reellen und imaginären Bestandtheile in dem Formelsystem (36') gesondert werden. Dies soll jedoch nicht in völlig strenger Weise[1]), sondern nur mit einer für die wirklich vorkommenden Fälle völlig ausreichenden Näherung geschehen.

Es hat sich nämlich herausgestellt, dass die Grösse a/a_0 für sämmtliche bisher beobachtete stark absorbirende Medien so klein ist (man vergl. z. B. die auf pag. 820 angegebenen Werthe für Antimonglanz), dass man, selbst wenn man die absorbirende Substanz in einem stark brechenden Medium, z. B. Kassiaöl, beobachten sollte, für welches a_0 verhältnissmässig klein ist, das Quadrat des Moduls

[1]) Die strengen Formeln finden sich bei P. DRUDE, WIED. Ann. 35, pag. 520. 1888.

der complexen Grösse α/a_0 unbedenklich gegen 1 vernachlässigen kann[1]). — Unter Benutzung dieser Vernachlässigung ist zu setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/a_0 \sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha \sin^2\varphi}{a_0}.$$

Führt man nun noch den Brechungsexponenten $n = \omega_0 : \omega$, wo $\omega_0 = \sqrt{a_0}$ die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit im umgebenden Medium bedeutet, und den Absorptionsindex $\varkappa$ ein, so ist nach den Formeln (27) und (28)

$$\begin{gathered}\sqrt{\frac{\alpha}{a_0}} = \sqrt{\frac{a + ia'}{a_0}} = \frac{1}{n(1 - i\varkappa)},\\ \frac{a}{a_0} = \frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}, \qquad \frac{a'}{a_0} = \frac{2\varkappa}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}.\end{gathered} \tag{37}$$

Daher ist nach (36)

$$\begin{aligned} tang\, P_p &= \frac{n\sqrt{1 + \varkappa^2}}{\cos\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi \frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}\right],\\ tang\, Q_p &= \varkappa\left[1 + \frac{\sin^2\varphi}{n^2(1 + \varkappa^2)}\right],\\ tang\, P_s &= \frac{1}{\cos\varphi\, n\sqrt{1 + \varkappa^2}}\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi \frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}\right],\\ tang\, Q_s &= -\varkappa\left[1 - \frac{\sin^2\varphi}{n^2(1 + \varkappa^2)}\right],\\ tang\, P &= \frac{n\sqrt{1 + \varkappa^2}}{\sin\varphi\, tang\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi \frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}\right],\\ tang\, Q &= \varkappa\left[1 + \frac{\sin^2\varphi}{n^2(1 + \varkappa^2)}\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Diese Formeln lassen zu jedem Einfallswinkel bei bekanntem n und $\varkappa$ die zugehörigen ψ und Δ berechnen mit Hilfe der Formeln (35). In diesen ist ψ beständig als positiv zu nehmen. Δ_p liegt stets, da $n^2(1 + \varkappa^2) > 1$ ist, zwischen $\pi/2$ und π, Δ_s liegt für kleine Einfallswinkel zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, für grosse Einfallswinkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$, Δ liegt bei kleinen Einfallswinkeln zwischen π und $\pi/2$, bei grossen Einfallswinkeln zwischen $\pi/2$ und Null. Es erreicht den Werth $\pi/2$ für den Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi} = \varphi$. Da für diesen nach Formel (34) $tang P = 1$ sein muss, so ist der Haupteinfallswinkel durch die Gleichung bestimmt

$$\sin\bar{\varphi}\, tang\,\bar{\varphi} = n\sqrt{1 + \varkappa^2}\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\bar{\varphi}\frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}\right]. \tag{39}$$

Ein Näherungswerth für $\bar{\varphi}$ ist:

$$\sin\bar{\varphi}\, tang\,\bar{\varphi} = n\sqrt{1 + \varkappa^2}. \tag{40}$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von $\sin\bar{\varphi}$ in die rechte Seite der Gleichung (39) ein, so folgt

$$\sin\bar{\varphi}\, tang\,\bar{\varphi} = n\sqrt{1 + \varkappa^2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1 - \varkappa^2}{n^2(1 + \varkappa^2)^2}\right]. \tag{41}$$

[1]) Dagegen ist es für Metalle nicht gestattet a'^2 neben a^2 zu vernachlässigen, wie es im vorigen Capitel bei der Behandlung der gefärbten Krystalle geschehen ist. Diese würden Reflexionsgesetze ergeben, welche hinsichtlich der Intensitäten sich nicht von den für vollkommen durchsichtige Medien unterscheiden würden, nur würden die durch die Reflexion hervorgerufenen Phasenänderungen durch die Absorption modificirt, sodass Gesetze für dieselben bestehen, die den bei durchsichtigen mit Oberflächenschichten behafteten Medien (cf. pag. 765) ähnlich sind; jedoch würde diese Aehnlichkeit keine analytische Identität sein (cf. die Anmerkung 5 weiter unten auf pag. 827).

Das zum Haupteinfallswinkel zugehörige Azimuth $\overline{\psi}$ der wiederhergestellten Polarisation des reflektirten Lichtes (das sogen. Hauptazimuth) berechnet sich nach den Formeln (35), da in ihnen $2P = \pi/2$ zu setzen ist, zu

$$cos\, 2\overline{\psi} = cos\, Q, \tag{42}$$

d. h. es ist nach (38):

$$tang\, 2\overline{\psi} = \varkappa\left[1 + \frac{sin^2 \overline{\varphi}}{n^2(1+\varkappa^2)}\right]. \tag{43}$$

Ist der Modull der complexen Grösse α/a_0:

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2}}{a_0} = \frac{1}{n^2(1+\varkappa)^2}$$

so klein, dass man ihn selbst gegen 1 vernachlässigen kann, so kann man nach den Formeln (38) und (40) setzen:

$$tang\, P = \frac{n\sqrt{1+\varkappa^2}}{sin\,\varphi\, tang\,\varphi} = \frac{sin\,\overline{\varphi}\, tang\,\overline{\varphi}}{sin\,\varphi\, tang\,\varphi},$$

und für jeden Einfallswinkel $Q = 2\overline{\psi}$, d. h. nach (35) und (42):

$$\left.\begin{aligned} tang\,\Delta &= sin\, 2\overline{\psi}\cdot tang\left(2\, arctg\, \frac{sin\,\overline{\varphi}\, tang\,\overline{\varphi}}{sin\,\varphi\, tang\,\varphi}\right), \\ cos\, 2\,\psi &= cos\, 2\overline{\psi}\, sin\left(2\, arctg\, \frac{sin\,\overline{\varphi}\, tang\,\overline{\varphi}}{sin\,\varphi\, tang\,\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

In dieser Form, welche QUINCKE[1]) den CAUCHY'schen Formeln für Metallreflexion gegeben hat, und die er brauchbar zur Berechnung der Beobachtungen befunden hat, sind also die optischen Constanten n und $\varkappa$ ersetzt durch die direkt beobachtbaren Grössen $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$. Diese Form ist aber nur in der genannten Annäherung richtig[2]), und würde bei nicht sehr grossem $n^2(1+\varkappa^2)$ nicht mehr zulässig sein, wie es z. B. für Kupfer und Gold eintritt, bei denen jene Grösse, falls das umgebende Medium Luft ist, nur etwa den Betrag 8 besitzt.

Aus den Formeln (31) folgt ferner für das Verhältniss der Intensitäten des reflektirten Lichtes zu denen des einfallenden unter Benutzung der letzten QUINCKE-schen Annäherung

$$\left.\begin{aligned} tang^2\,\psi_p &= \frac{J_p^r}{J_p^e} = \frac{n^2(1+\varkappa^2) - 2\,n\, sos\,\varphi + cos^2\varphi}{n^2(1+\varkappa^2) + 2\,n\, cos\,\varphi + cos^2\varphi}, \\ tang^2\,\psi_s &= \frac{J_s^r}{J_s^e} = \frac{n^2(1+\varkappa^2)\, cos^2\varphi - 2n\, cos\,\varphi + 1}{n^2(1+\varkappa^2)\, cos^2\varphi + 2n\, cos\,\varphi + 1}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Diese Formeln gelten bei kleinen Einfallswinkeln auch in strenger Weise für diejenigen Metalle, bei welchen $n^2(1+\varkappa^2)$ nicht sehr gross gegen 1 ist. Es folgt aus ihnen, dass $tang^2\,\psi_s$ stets kleiner als $tang^2\,\psi_p$ ist, d. h. dass einfallendes natürliches Licht partiell in der Einfallsebene polarisirt ist. Die Ausdrücke (45) nehmen die kleinsten Werthe an für $\varphi = 0$, d. h. senkrechte Incidenz. Das Verhältniss des reflektirten zum einfallenden Lichte ist in diesem Falle

$$J = \frac{J^r}{J^e} = \frac{1 + n^2(1+\varkappa^2) - 2n}{1 + n^2(1+\varkappa^2) + 2n}. \tag{45'}$$

Diese Grösse J soll, da sie für das Verhalten eines Metallspiegels charakteristisch ist, sein Reflexionsvermögen genannt werden. Wie die Formel (45')

---

[1]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 551. 1866.

[2]) In dieser Annäherung folgt auch, dass Δ_s ebenfalls für den Haupteinfallswinkel den Werth $-\frac{\pi}{2}$ annimmt. Ferner ergiebt sich, dass beim Haupteinfallswinkel ψ ein Minimum erreicht, d. h. dass für ihn der Betrag der partiellen Polarisation des reflektirten Lichtes bei einfallendem natürlichem Licht ein Maximum erreicht.

lehrt, ist dasselbe um so grösser, je kleiner $2n$ im Vergleich zu $1 + n^2(1 + \varkappa^2)$ ist, und hierdurch ist der Metallglanz erklärt, da für Metalle letztere Grösse in der That weit den Betrag von $2n$ überschreitet. Ausserdem lehrt die Formel (45'), dass das Reflexionsvermögen, falls n constant bleibt, mit wachsendem Absorptionscoëfficienten $n\varkappa$ zunimmt. In gewisser Annäherung ist daher die Farbe des reflektirten Lichtes complementär zu der des durch eine sehr dünne Metallschicht hindurchgehenden Lichtes, jedoch nicht streng, da das Reflexionsvermögen ausser von $n\varkappa$ auch von n abhängt.

Aus den Formeln (31) folgt ferner die absolute Verzögerung für senkrechte Incidenz zu

$$tang\,\Delta_p = tang\,\Delta_s = -\frac{2n\varkappa}{n^2(1+\varkappa^2)-1}. \tag{46}$$

Da für die in der Natur vorkommenden Metalle die rechte Seite (46) bei Reflexion in Luft den Werth 1 nicht überschreitet, so wird also der NEUMANN'sche Lichtvector an Metallen mit einer Phasenverzögerung, die kleiner als $0{\cdot}25\,\pi$ ist, d. h. kleiner als $0{\cdot}12\,\lambda$, bei senkrechter Incidenz reflektirt. — Für den FRESNEL-schen Vector folgt, dass derselbe mit einer Beschleunigung, welche grösser als $0{\cdot}75\,\pi$, d. h. $0{\cdot}38\,\lambda$, aber kleiner als π, d. h. $0{\cdot}5\,\lambda$ ist, reflektirt wird. Bei starkem Reflexionsvermögen bilden sich daher durch Superposition der einfallenden und reflektirten Bewegung stehende Wellen des FRESNEL'schen Vectors, deren Knoten um weniger als $0{\cdot}06\,\lambda$ hinter dem Spiegel liegt. Daher fand WIENER, wie oben pag. 753 erwähnt ist, auch bei Reflexion an Metallspiegeln ein Minimum der photographischen Wirkung am Spiegel selbst. — Die Anwendung von Metallspiegeln empfiehlt sich für diese Versuche mehr, als die Anwendung von Glasspiegeln, weil bei sehr starker Reflexion sich wirkliche stehende Wellen des Lichtvectors ausbilden, d. h. es giebt wirkliche Knotenpunkte im Raum, in welchen der Lichtvector in absoluter Ruhe ist. — Die von LIPPMANN[1]) erfundene Farbenphotographie beruht auf der von WIENER gemachten Entdeckung, dass nur der eine von den beiden verschiedenen, bei Lichtbewegung in Schwingung sich befindenden Vectoren photographisch wirksam ist. Es ist ohne Weiteres klar, dass man möglichst stark reflektirende Metallspiegel benutzen muss, um deutliche Wirkungen zu erzielen.

Die bisherigen Formeln bezogen sich darauf, die Natur des reflektirten Lichtes aus bekannten optischen Constanten des Metalls zu ermitteln.

Die umgekehrte Aufgabe, die optischen Constanten aus Reflexionsbeobachtungen zu bestimmen, gelingt am bequemsten und zugleich am genauesten[2]), wenn ψ und Δ, d. h. das relative Amplitudenverhältniss und die relative Phasendifferenz, für eine Reihe von Einfallswinkeln beobachtet werden, welche dem Haupteinfallswinkel benachbart sind.

Aus der zweitletzten der Formeln (38) folgt, dass in erster Annäherung $tang\,P\,sin\,\varphi\,tang\,\varphi$ eine Constante ist. Bezeichnet man den aus den Beobachtungen [dieselben bestimmen die Grössen P und Q nach den Formeln (34)] sich er-

[1]) G. LIPPMANN, Compt. rend. 112, pag. 274. 1891. — Weiteres über Farbenphotographie findet sich bei E. BECQUEREL, Compt. rend. 112, pag. 275. 1891. — G. LIPPMANN, Compt. rend. 114, pag. 961. 1892; Nature, 46, pag. 12. 1892. — H. W. VOGEL, Verhl. d. phys. Ges. Berl. 10, pag. 33. 1891; Photogr. Mitth. 28, pag. 7. — KRONE, WIED. Ann. 46, pag. 426. 1892. — BUGUET, Photogr. des couleurs. Paris 1891. — MESLIN, Ann. de chim. et de phys. (6) 26, pag. 369. — CH. B. TWOING, Sillim. Journ. 42, pag. 388. 1891. — LABATUT, Compt. rend. pag. 126. 1891.

[2]) Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 39, pag. 504. 1890.

gebenden Mittelwerth dieser Grösse mit S, so ist dieselbe in erster Annäherung gleich $n\sqrt{(1+\varkappa^2)}$, wie aus (38) folgt. Man erhält nun ferner aus (38) unter Benutzung der stets angewandten Näherung, dass $\frac{1}{n^4(1+\varkappa^2)^2}$ gegen 1 vernachlässigt wird,

$$tang\,P\,sin\,Q = \frac{n\varkappa}{sin\,\varphi\,tang\,\varphi}\left[1+\frac{sin^2\varphi}{2}\cdot\frac{1}{n^2(1+\varkappa^2)}\right],$$
$$tang\,P\,cos\,Q = \frac{n}{sin\,\varphi\,tang\,\varphi}\left[1-\frac{sin^2\varphi}{2}\,\frac{1}{n^2(1+\varkappa^2)}\right].$$

In diesen Gleichungen ist in der Klammer für $n^2(1+\varkappa^2)$ sein Näherungswerth S^2 einzuführen. Die optischen Constanten ergeben sich daher aus den Beobachtungen nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} n\varkappa &= \frac{\Sigma\,sin\,\varphi\,tang\,\varphi\,tang\,P\,sin\,Q}{N}\left(1-\frac{1}{2S^2}\,\frac{\Sigma\,sin^2\varphi}{N}\right),\\ n &= \frac{\Sigma\,sin\,\varphi\,tang\,\varphi\,tang\,P\,cos\,Q}{N}\left(1+\frac{1}{2S^2}\,\frac{\Sigma\,sin^2\varphi}{N}\right).\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

Jn diesen Formeln bezieht sich das Σ-Zeichen auf die bei den einzelnen Einfallswinkeln erhaltenen Werthe, N bedeutet die Anzahl der Einfallswinkel, bei denen beobachtet ist.

Die hier entwickelten theoretischen Resultate sind vom Experiment mannigfach bestätigt worden. Am einfachsten ist die Untersuchung des Amplitudenverhältnisses $tang\,\psi$ und der relativen Phasenänderung Δ, welche mit Hilfe eines BABINET'schen Compensators und eines drehbaren Nicols nach der auf pag. 721 angegebenen Methode leicht gelingt.. Auf diesem Wege hat QUINCKE[1]) für Silber und Gold, HENNIG[2]) für Stahl gezeigt, dass die beobachtete Abhängigkeit des ψ und Δ vom Einfallswinkel φ durch die hier gegebenen Formeln völlig befriedigend dargestellt wird.

JAMIN[3]) verfuhr nach einer etwas anderen Methode, indem er zwei Spiegel desselben Metalls einander parallel gegenüberstellte. Er bestimmte diejenigen Einfallswinkel, für welche das einfallende linear polarisirte Licht nach 2, 4, 6 etc. Reflexionen wiederum linear polarisirt war. Aus der Lage der Polarisationsebene des reflektirten Lichtes, welche durch ein drehbares NICOL'sches Prisma ermittelt wurde, kann man offenbar $tang\,\psi$ berechnen, dagegen Δ aus der Anzahl der Reflexionen, indem z. B. bei 4 Reflexionen Δ einen der drei Werthe $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{2}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ besitzen muss, falls das zuletzt reflektirte Licht linearpolarisirt sein soll. Es tritt dies demnach auch für drei verschiedene Einfallswinkel ein. Auch JAMIN constatirte die Uebereinstimmung zwischen den nach den CAUCHY'schen Formeln berechneten und den beobachteten Werthen.

Durch photometrische Vergleichung der von einem Metallspiegel reflektirten Lichtintensität mit der unter gleichem Einfallswinkel von einer Glasfläche reflektirten, bestimmte JAMIN[4]) ebenfalls die absoluten Amplitudenänderungen $tang\,\psi_p$ und $tang\,\psi_s$. Auch diese Beobachtungen wurden durch die CAUCHY'sche Theorie gut dargestellt. Später hat JAMIN[5]) bei Silber, Kupfer, Zink, Stahl, Messing, Spiegelmetall und Glockenmetall für verschiedene Farben die Haupteinfallswinkel

1) G. QUINCKE, POGG. Ann. 128, pag. 541. 1866.
2) R. HENNIG, Gött. Nachr. 13, pag. 365. 1887.
3) J. JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 19, pag. 296. 1847.
4) J. JAMIN, l. c. pag. 298.
5) J. JAMIN, Ann. de chim. et de phys. (3) 22, pag. 311. 1848; POGG. Ann. 74, pag. 528. 1848.

und Hauptazimuthe bestimmt. Aus ihnen wurde das Reflexionsvermögen für jede Farbe berechnet und damit die resultirende Gesammtfarbe bei einfallendem weissen Licht. Dieselbe stimmte mit der beobachteten überein.

Die sonstigen bisher angestellten Messungen[1]) über die absoluten Intensitäten stimmen ebenfalls im Allgemeinen mit den nach den Formeln (45) und (45') berechneten nahe überein[2]), wenn man in ihnen für n und $\varkappa$ die aus Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth für jedes Metall zu bestimmenden Werte einführt. Speciell werden z. B. das ausserordentlich hohe Reflexionsvermögen des Silbers in Luft, welches für grosse Wellenlängen zu 0·96 beobachtet ist, völlig erklärt durch den kleinen Brechungsexponenten des Silbers, welcher etwa nur 0·2 beträgt, während $n^2(1+\varkappa^2)$ den Betrag 14 erreicht (cf. weiter unten). Von allen Metallen besitzen Eisen und Stahl das kleinste Reflexionsvermögen (0·56—0·58), in Uebereinstimmung mit der Thatsache, dass für diese n im Verhältniss zu $n^2(1+\varkappa^2)$ am grössten ist, nämlich ungefähr 2·4 zu 17.

Die Messung der absoluten Phasenänderungen Δ_p und Δ_s, oder vielmehr die Vergleichung[3]) ihrer Werthe mit den bei Reflexionen an durchsichtigen Körpern sich ergebenden, macht erheblichere Schwierigkeiten. Als die einfachste Methode empfiehlt sich zunächst die, die Durchmesser der (NEWTON'schen) Ringe zu messen, welche entstehen, wenn man eine schwach gekrümmte Glaslinse auf einen Metallspiegel legt, da der Ort der Ringe von den absoluten Phasenänderungen abhängt. In der That zeigen auf diese Weise hervorgebrachte Interferenzringe Abweichungen gegenüber den zwischen zwei Glasflächen hervorgebrachten.

Die Erscheinung[4]) ist völlig verwandt dem von AIRY beobachteten Verhalten der zwischen einem Diamant und einer Glaslinse hervorgebrachten Interferenzringe (cf. oben pag. 761), nur erstreckt sich hier die Abweichung von dem Verhalten der gewöhnlichen NEWTON'schen Ringe auf einen grösseren Bereich des Einfallswinkels, als dort[5]).

---

[1]) Solche sind ausgeführt von DE LA PROVOSTAYE und DESAINS (Ann. de chim. et de phys. (3) 30, pag. 276 u. 431. 1850) für Wärmestrahlen (wie für diese Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth aus Beobachtungen gefunden werden kann, hat H. KNOBLAUCH in WIED. Ann. 24, pag. 258. 1885 gezeigt), ferner von CONROY (Proc. Roy. Soc. Lond. 35, pag. 26. 1883; 37, pag. 36. 1884) und RUBENS (WIED. Ann. 37, pag. 267. 1889).

[2]) Vergl. dazu P. DRUDE, WIED. Ann. 39, pag. 547. 1890.

[3]) Sämmtliche hier angeführte Methoden können nur eine Vergleichung bezwecken. Daher ist es gleichgültig, ob wir hier für die Δ_p und Δ_s die Reflexionsformeln des NEUMANN'schen oder die des FRESNEL'schen Vectors verwerthen.

[4]) Man vergl. G. QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 380. 1871, und G. STOKES, Mondes (2) 41, pag. 562. 1876.

[5]) Jedoch ist es nicht gerechtfertigt, die elliptische Reflexion an durchsichtigen Medien als einen speciellen Fall von Metallreflexion aufzufassen, d. h. von Reflexion an einem sehr schwach absorbirenden Medium, wie es zum Theil geschehen ist. Abgesehen davon, dass der Absorptionscoëfficient, wie er sich aus der Ellipticität des reflektirten Lichtes bei linear polarisirtem einfallendem Licht berechnen würde, falls man die Metallformeln zu Grunde legt, viel zu gross ausfallen würde, als dass er mit der hohen Durchsichtigkeit von z. B. Diamant oder Glas verträglich wäre, sind auch die Gesetze für die Ellipticität des reflektirten Lichtes in beiden Fällen analytisch nicht identisch. Denn für durchsichtige Körper ist (vergl. pag. 765)

$$tang\,\Delta = 2\,\varepsilon n^2 \frac{\sin\varphi\, tang\,\varphi}{tang^2\varphi - n^2},$$

während für schwach absorbirende Körper ist:

$$tang\,\Delta = 2\varkappa n^2 \frac{\sin\varphi\, tang\,\varphi}{tang^2\varphi - n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}.$$

Man gelangt zu einer Bestimmung der absoluten Phasendifferenzen aus den NEWTON'schen Ringen nur, wenn der Krümmungsradius der Glaslinse bekannt ist und ihre Entfernung vom Metallspiegel. Letztere nahm nun QUINCKE[1]) gleich Null an, indem er die Linse so fest auf den Spiegel drückte, dass keine Farbenänderung bei weiterem Druck eintrat. Dies hat aber den Uebelstand zur Folge, dass die Linse und der Metallspiegel durch den ausgeübten Druck deformirt werden, so dass man die Dickenvariation der zwischenlagernden Luftschicht nicht mehr kennt, da sich u. A. der Krümmungsradius der Linse in unbekannter Weise geändert hat. Daher stimmten auch die nach der Theorie berechneten Werthe von Δ_p und Δ_s mit den aus diesen Experimenten sich ergebenden nicht überein. — Uebt man auf die Linse keinen starken Druck aus und führt die kürzeste Entfernung der Linse vom Spiegel als weitere Unbekante ein, so addirt sich dieselbe in den Formeln zu den zu berechnenden Phasenänderungen. Daher können letztere wiederum nicht genau ermittelt werden. Wohl aber kann die Dispersion der absoluten Phasenänderungen genau aus den Versuchen berechnet werden, d. h. die Differenz der Phasenänderungen für zwei verschiedene Farben, da die Differenz der Phasenänderungen, wie sie durch das Vorhandensein der Zwischenschicht hervorgerufen werden, aus den Wellenlängen der beiden Farben leicht berechnet werden können.

Auf diese Weise ist es GLAN[2]) gelungen, die Dispersion der absoluten Phasenänderungen bei Fuchsin und Eisenglanz, bei welchen dieselben hohe Beträge erreicht, indem sich diese Substanzen für einige Farben als fast durchsichtig, für andere als stark absorbirend verhalten[3]), aus den NEWTON'schen Ringen zu berechnen und mit den theoretischen Formeln im Einklang zu finden.

Eine andere Methode zur Messung der absoluten Phasenänderungen ist folgende: Es wird die Fläche eines Glases theilweise mit Metall belegt[4]) und man lässt Lichtstrahlen zur Interferenz gelangen, welche einestheils im Glase am Metall reflektirt sind, anderntheils im Glas an Luft eine partielle oder totale Reflexion erlitten haben. Aus dem Ort der entstandenen Interferenzstreifen kann man auf die Differenz der durch Glas-Luft-Reflexion und der durch die Glas-

---

[1]) G. QUINCKE, l. c.

[2]) P. GLAN, POGG. Ann. 155, pag. 1, 258. 1875; 156, pag. 235. 1875. — Betreffs anderer Körper vergl. auch P. GLAN, WIED. Ann. 7, pag. 321. 1879; 47, pag. 252. 1892.

[3]) Die Reflexionsconstanten des Fuchsins sind bestimmt von E. WIEDEMANN (POGG. Ann. 151, pag. 1. 1874), G. LUNDQUIST (POGG. Ann. 152, pag. 571. 1874), P. GLAN (WIED. Ann. 7, pag. 321. 1879), E. SCHENK (WIED. Ann. 15, pag. 177. 1882), J. MERKEL (WIED. Ann. 19, pag. 1. 1883). — Berechnet sind diese Beobachtungen von W. VOIGT (WIED. Ann. 23, pag. 554. 1884). Ein Körper mit ähnlich stark auswählender Absorption ist das Indigo, dessen Reflexionsconstanten von VAN DER WILLIGEN bestimmt sind (POGG. Ann. 117, pag. 464. 1862).

[4]) Eine besonders bequeme Methode dazu ist das von BÖTTCHER angegebene Verfahren zur Versilberung des Glases: 1) Man löst salpetersaures Silber in destillirtem Wasser, versetzt die Lösung mit Ammoniak, bis der entstandene Niederschlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtrirt die Lösung und verdünnt sie, so dass 1 *gr* salpetersaures Silber auf 100 *cbcm* der Lösung kommt. 2) 2 *gr* salpetersaures Silber werden in etwas Wasser gelöst und in 1 *l* siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 1·66 *gr* Seignettesalz und lässt die Mischung kurze Zeit sieden, bis der entstandene Niederschlag grau aussieht. Die Lösung wird heiss filtrirt. Die gut (mit Salpetersäure, Aetzkali, Alkohol) gereinigte Glasfläche wird in einem Gefäss mit einer einige *mm* hohen Schicht aus gleichen Raumtheilen beider Lösungen bedeckt. Nach einer Stunde ist die Reduction beendigt. Die Operation kann erneuert werden, falls das Silber noch nicht die genügende Dicke besitzt.

Metall-Reflexion hervorgebrachten absoluten Phasenänderungen schliessen, d. h. letztere werden mit ersteren verglichen.

Eine derartige Methode ist von BABINET[1]), DE SÉNARMONT[2]), BILLET[3]), QUINCKE[4]) angewandt. Indess führten die Versuche meist zu keinen zuverlässigen numerischen Werthen.

Die beste, auf dem erwähnten Principe beruhende Versuchsanordnung ist die von W. WERNICKE[5]) gewählte, der die Substanz, welche theilweise metallisch belegt wurde, so dünn wählte, dass sie eine NEWTON'schen Farbe hoher Ordnung zeigte, d. h. bei einfallendem weissen Licht und spectraler Zerlegung eine Reihe von Interferenzfransen aufwies. Aus dem Absetzen derselben an der Grenzlinie, an welcher die Metallbelegung aufhört, kann man die absoluten Phasenänderungen der Metallreflexion mit denen der Reflexion an durchsichtigen Medien vergleichen (cf. oben pag. 761).

Knüpfen wir z. B. an den Fall an, dass die Rückfläche einer sehr dünnen Glasplatte theilweise versilbert ist. Die Phasenänderungen an der Vorderfläche derselben üben keinen Einfluss auf die Erscheinungen, an der Rückfläche der Glasfläche erleidet der FRESNEL'sche Vector an den unbelegten Stellen keine Phasenänderung, an den versilberten Stellen aber eine Beschleunigung, welche nach der Formel (46) zu berechnen ist. Da in dieser Formel n den Brechungsexponenten des Silbers gegen Glas bedeutet, so ist zu setzen $n = n_0 : n'$, falls n_0 den Brechungsexponenten des Silbers gegen Luft, n' den Brechungsexponenten des Glases bedeutet. Man erhält so[6]) für gelbes Licht $tang\, \Delta_s = -0{\cdot}955$, d. h. $\Delta_s = 136{\cdot}3°$. Es ergiebt sich also eine Phasenbeschleunigung um $0{\cdot}378\, \lambda$ d. h. die Interferenzfransen auf den belegten Stellen müssen um 0·378 Fransenbreite verschoben sein gegen die Interferenzfransen auf den unbelegten Stellen und zwar nach dem blauen Ende des Spectrums zu. In der That haben WERNICKE und später WIENER[7]) an theilweise versilberten Glimmerblättchen eine Fransenverschiebung von etwa $\frac{1}{4}\lambda$ im bezeichneten Sinne gefunden. — In etwas anderer Weise ist DRUDE[8]) verfahren, indem er ein sehr dünnes schwach keilförmiges Glashäutchen versilberte. Die Interferenzfransen entstehen schon bei Beleuchtung mit homogenem (Natrium-) Licht durch die verschiedene Dicke des Glases an verschiedenen Stellen. Diese Methode ist frei von störenden Einflüssen, welche bei Anwendung der WERNICKE-schen Methode die Dispersion des Δ_s, d. h. seine Abhängigkeit von der Farbe, ausüben kann. Es ergab sich als Mittel aus mehreren Versuchen, dass die Interferenzfransen auf den belegten Stellen um 0·372 Streifenbreiten gegenüber den Interferenzfransen an den unbelegten verschoben waren, und zwar nach der dickeren Seite der keilförmigen Glasschicht hin. Wie man

---

[1]) BABINET, Compt. rend. 8, pag. 709. 1839.

[2]) DE SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (2) 73, pag. 360. 1840; POGG. Ann. Ergzbd. 1, pag. 473. 1842.

[3]) BILLET, Ann. de chim et de phys. (3) 64, pag. 408. 1862.

[4]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 132, pag. 561. 1867; 142, pag. 192. 1871. Diese letzteren Versuche haben zu numerischen Resultaten geführt, welche mit der Theorie theilweise im Einklang sind, theilweise jedoch auch nicht.

[5]) W. WERNICKE, Berl. Ber. 1875, pag. 673.

[6]) Es sind dabei die unten mitgetheilten Werthe für n und $n\varkappa$ bei Silber benutzt.

[7]) O. WIENER, WIED. Ann. 31, pag. 629. 1887. — Die gleiche Methode hat A. POTIER (Compt. rend. 108, pag. 995. 1889) beim Fuchsin angewandt.

[8]) P. DRUDE, WIED. Ann. 50. 1893.

sieht, steht dies Resultat in sehr gutem Einklang mit dem theoretisch sich ergebenden Werth. — Aber in anderer Hinsicht zeigt sich eine Abweichung von der Theorie, wenn man nämlich untersucht, in welcher Weise der genannte Fransensprung sich ändert, wenn die Dicke der Belegung der Glas (oder Glimmer-) Fläche allmählich von Null bis auf grosse Dicken zunimmt. WERNICKE fand, dass dann der Phasensprung continuirlich von Null auf $\frac{1}{4}\lambda$ zunahm, während WIENER nnd DRUDE beobachteten, dass er continuirlich von Null bis auf $\frac{3}{4}\lambda$ resp. $0{\cdot}628\ \lambda$ wuchs und zwar waren die Fransen im entgegengesetzten Sinne, als er vorhin genannt wurde, gegenseitig verschoben. — Die bisher aufgestellten Formeln beziehen sich auf diesen Fall nicht, man kann aber ohne grosse Schwierigkeiten die theoretischen Betrachtungen auch für eine beliebig dünne Metallbelegung durchführen. Es ergiebt sich dann (vergl. DRUDE, l. c.), dass, wenn man die optischen Constanten der Metallbelegung in jeder Dicke von derselben Grösse annimmt, welche massive Metallmassen besitzen, dann das WERNICKE'sche Beobachtungsresultat aus den Formeln folgt. Die entgegenstehenden Beobachtungen von WIENER und DRUDE führen dagegen mit Nothwendigkeit zu der Annahme, dass sehr dünne Silberschichten wesentlich andere optische Constanten besitzen müssen, als massive, indem n (gegen Luft) > 1 und $\varkappa < 1$ sein muss, während für massives Silber $n < 1$, $\varkappa > 1$ ist. — Aus Versuchen (cf. weiter unten) über Reflexion des Lichtes in Luft an Silber erhielt DRUDE ganz dasselbe Resultat, dass nämlich für sehr dünnes Silber (dünner als $0{\cdot}02\,\lambda$) $n > 1$, $\varkappa < 1$ sei. — Bei den an dickeren Silberschichten gemachten Versuchen waren merkbare Störungen durch optisch abweichende Zwischenschichten, zwischen Glas und Silberbelegung nicht zu konstatiren.

Trotzdem kann die Annahme solcher Zwischenschichten von ausserordentlich geringer Dicke ($2{\cdot}10^{-6}$ *mm*) den Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung aufheben, d. h. es veranlassen, dass für Silber bei sehr geringen Dicken $n > 1$, $\varkappa < 1$ erscheint. — Auch erscheint es dann als möglich, dass je nach gewissen Zufälligkeiten sowohl das von WERNICKE beobachtete Verhalten, als das von WIENER und DRUDE beobachtete eintritt. Betreffs näherer Ausführung mag auf die citirte Arbeit von DRUDE verwiesen sein.

Durch andere Versuchsanordnungen kann man auch die absolute Phasenänderung bei der Reflexion Luft-Metall mit der bei der Reflexion Luft-durchsichtige Substanz vergleichen, z. B. wenn man Interferenzfransen durch zwei FRESNEL'sche Spiegel hervorruft, von denen der eine aus Metall, der andere aus Glas besteht. Schon FRESNEL[1]) bemerkt, das bei solchen Spiegeln die Farben nicht mehr symmetrisch zur hellen Mitte liegen, was auf eine Dispersion, (d. h. Abhängigkeit von der Wellenlänge) der absoluten Phasenänderungen der Metallreflexion hinweist.

Die Versuche DE SÉNARMONT's[2]), die absoluten Phasenänderungen nach dieser Methode zu messen, führten zu keinem Resultate wegen der Schwierigkeit, Metallspiegel mit genügender Vollkommenheit herzustellen.

QUINCKE[3]) stellte die Versuche in der Weise an, dass er von zwei FRESNEL-schen Spiegeln A und B, die aus Glas bestanden, Theile derart mit Silber belegte, dass ein belegter Theil des einen Spiegels A an einen unbelegten

---

[1]) A. FRESNEL, Oeuvr. compl. 1, pag. 703

[2]) H. DE SÉNARMONT, Ann. de chim. et de phys. (2) 73, pag. 360. 1840.

[3]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 219. 1871.

des anderen B anstiess, während an einer anderen Stelle ein belegter Theil von B an einen unbelegten von A anstiess. Es ergab sich eine Verschiebung der an beiden Stellen hervorgerufenen Interferenzfransen, welche zum Theil daher rührte, dass die eine Spiegelseite um die Dicke der Metallbelegung über die andere vorstand, und zum Theil von der absoluten Phasenänderung durch die metallische Reflexion herbeigeführt wurde. Letztere war daher zu berechnen, falls die Metalldicke bekannt war. Diese bestimmte QUINCKE[1]) dadurch, dass er die Belegung theilweise fortnahm und eine schwachgekrümmte Glaslinse fest auf das Metall so aufpresste, dass ihr Berührungspunkt auf der Grenzlinie der Metallbelegung lag. Aus der Farbe der zwischen Glaslinse uud Glasfläche befindlichen Luftschicht an der Stelle, wo dieselbe an die Metallschich anstösst, kann dann die Dicke der letzteren leicht berechnet werden, vorausgesetzt, dass die Linse das Metall wirklich berührt. — Die Genauigkeit der aus diesen Versuchen erhaltenen Zahlen ist nicht gross genug, um sie entweder als Stütze oder als Widerspruch gegen die Theorie verwerthen zu können[2]). Der allgemeine Gang der absoluten Phasenänderungen, dass nämlich Δ_p mit Variation des Einfallswinkels nur wenig variirt, Δ_s dagegen von fast o bis $-\pi$, ist allerdings deutlich aus den Versuchen zu erkennen.

Diesen soeben auseinandergesetzten QUINCKE'schen Versuchen in gewisser Weise verwandt sind die von O. WIENER[3]), welcher ebenfalls die absolute Phasenänderung bei Luft-Metall-Reflexion mit der Luft-Glas-Reflexion verglich, wobei die Metallfläche um ihre Dicke der Glasfläche vorstand, nur verwendete WIENER nicht die FRESNEL'schen Spiegel, sondern die von WERNICKE benutzte Messungsmethode (cf. pag. 761), indem er auf eine Glasfläche, welche theilweise metallisch belegt war, ein anderes Glasstück so auflegte, dass eine Luftschicht dazwischen blieb, welche eine NEWTON'sche Farbe hoher Ordnung gab. Aus der gegenseitigen Lage der bei spectraler Zerlegung erhaltenen Interterenzfransen an der Grenzlinie der Metallbelegung kann man die Phasenänderungen der Reflexion berechnen, falls man wiederum die Dicke der Metallbelegung kennt[4]).

Die Dicke einer Silberschicht kann man sehr genau durch ein von FIZEAU[5]) zuerst angegebenes Verfahren bestimmen: Man legt ein Jodkorn auf dieselbe, wodurch das Silber in Jodsilber verwandelt wird, welches eventuell eine NEWTON'sche Farbe dünner Blättchen zeigt. Ist ε die Dicke der Luftschicht,

---

[1]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 129, pag. 177. 1866.

[2]) Ebenso wenig haben sich aus den bei QUINCKE, l. c., pag. 211 u. ff. beschriebenen Beugungsversuchen sichere und mit der Theorie gut in Uebereinstimmung befindliche Werthe von Δ_p und Δ_s ergeben.

[3]) O. WIENER, WIED. Ann. 31, pag. 629. 1887.

[4]) Umgekehrt kann man die Dicke derselben nach dieser Methode berechnen, wenn man den Werth der absoluten Phasenänderungen der Reflexion kennt. Diese Methode, welche WIENER zur Dickenbestimmung dünner Schichten vorschlug, ist in sofern eine Vervollkommnung der analogen soeben angegebenen QUINCKE'schen, als man nicht voraussetzt, dass das aufgelegte Glasstück das Metall wirklich berührt und man die Dicke einer Luftschicht genauer aus der Lage ihrer Interferenzfransen als aus ihrer NEWTON'schen Farbe bestimmen kann. — Diese Methode der Dickenbestimmung ist am besten für durchsichtige Substanzen anwendbar, da man bei ihnen die absoluten Phasenänderungen mit Sicherheit kennt. Ueber die genauere Berechnung der Dicke nach dieser Methode vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 50. 1893.

[5]) FIZEAU, Compt. rend. 52, pag. 274. 1861.

welche dieselbe NEWTON'sche Farbe zeigen würde[1]), wie die Jodsilberschicht und ist ferner

Das Aequivalent des Silbers	Ag	$= 107\cdot9$
„ „ „ Jodsilbers	JAg	$= 234\cdot9$
Die Dichtigkeit des Silbers	d_1	$= 10\cdot55$
„ „ „ Jodsilbers	d_2	$= 5\cdot60$
Der Brechungsexponent	n	$= 2\cdot15$[2]),

so ist die gesuchte Dicke D der Silberschicht, aus der sich das Jodsilber gebildet hatte:

$$D = \frac{Ag}{JAg} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon}{n} = 0\cdot114\,\varepsilon.$$

Noch genauer wird die Dicke der Jodsilberschicht durch die WERNICKE'sche oder WIENER'sche Methode der Interferenzfransen gefunden. — Nach letzterer Methode[3]) angestellte Versuche von DRUDE ergaben, dass der FRESNEL'sche Vector bei der Reflexion Luft-Silber für Natriumlicht eine Beschleunigung von $0\cdot412\,\lambda$ (d. h. der NEUMANN'sche Vector eine Verzögerung von $-0\cdot088\,\lambda$) erleidet, während Formel (46) dafür liefert[4]) $0\cdot417\,\lambda$ resp. $-0\cdot083\,\lambda$. Es ergiebt sich also eine gute Uebereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. — Abweichungen jedoch zeigen sich wiederum, wenn man die Abhängigkeit des Fransensprunges von der Dicke der Silberbelegung untersucht. Die Theorie ergiebt für den Fall, dass das Silber in jeder Dicke die optischen Constanten des massiven Silbers besitzt, dass die Fransen an den belegten und unbelegten Stellen bei sehr dünner Belegung sich in einem anderen Sinne gegenseitig verschieben müssen, als bei dickerer Belegung, während das Experiment hiervon nichts wahrnehmen lässt. Diese Thatsache führt ebenfalls (cf. oben) mit Nothwendigkeit zu der Annahme, dass für sehr dünnes Silber $n > 1$, $\varkappa < 1$ sei. Dann ergiebt sich wiederum Uebereinstimmung mit Experiment und Rechnung.

Ein wichtiges Mittel znr Prüfung der Theorie bietet auch die Beobachtung der Reflexion an demselben Metallspiegel in verschiedenen Flüssigkeiten. Da hierdurch die in den Formeln auftretende Constante $\varkappa$ nicht geändert wird, aber n in dem Verhältniss des Brechungsexponenten des umgebenden Mediums kleiner wird, so zeigt die Formel (40), dass der Haupteinfallswinkel bei Reflexion im stärker brechenden Medium abnimmt, die Formel (43), dass das Hauptazimuth nahezu ungeändert bleibt (es nimmt ein wenig zu), die Formel (45'), dass das Reflexionsvermögen abnimmt, da $n^2(1 + \varkappa^2)$ in stärkerem Maasse abnimmt als n. Diese Gesetze haben sich im Allgemeinen bestätigt gefunden, jedoch ergiebt eine genauere numerische Vergleichung der beobachteten und theoretischen Werthe von ψ und Δ eine gewisse, bei allen Experimenten[5]) in demselben Sinne ausfallende Abweichung[6]). Man kann dieselbe erklären durch

---

[1]) Tabellen hierfür finden sich bei E. BRÜCKE, POGG. Ann. 74, pag. 582. 1848. — G. QUINCKE, POGG. Ann. 129, pag. 180. 1866. — A. ROLLET, Wien. Ber. (II) 77, pag. 117. 1878.

[2]) Durch Beobachtung des Polarisationswinkels fand DRUDE für Natriumlicht $n = 2\cdot15$.

[3]) Sie unterschied sich dadurch, dass wiederum nur homogenes Licht verwendet wurde, cf. oben.

[4]) Wenn man wiederum die unten mitgetheilten Constanten n und $n\varkappa$ für Silber benutzt.

[5]) Derartige Experimente sind angestellt von G. QUINCKE (POGG. Ann. 128, pag. 541. 1866), CONROY (Proc. Roy. Soc. 28, pag. 242. 1879; 31, pag. 486. 1881), DES COUDRES (Ueber die Reflexion polarisirten Lichtes an Quecksilber. Inaug.-Diss. Berlin. 1887) und P. DRUDE (WIED. Ann. 39, pag. 544. 1890).

[6]) Vergl. W. VOIGT, WIED. Ann. 23, pag. 137. 1884. — P. DRUDE, WIED. Ann. 39, pag. 543. 1890.

eine dem Metallspiegel in der Flüssigkeit anhaftende Oberflächenschicht von geringerem mittleren Brechungsexponenten, als der der Flüssigkeit beträgt, also z. B. durch eine anhaftende Luftschicht. Die Dicke einer solchen würde sich bei Versuchen, die an Quecksilber in Wasser angestellt sind, zu 0·004 λ berechnen.

Bei den bisher angestellten Versuchen ist noch nicht genügend auf die Entfernung einer anhaftenden Gasschicht geachtet. Aber auch selbst wenn diese fehlte, ist es durchaus wahrscheinlich, dass eine Flüssigkeit bei der Berührung mit einem Metall eine Oberflächenschicht besitzt, da eine solche an der freien Grenze der Flüssigkeit meist vorhanden ist, wie das Auftreten eines merklichen Ellipticitätscoëfficienten (cf. pag. 770) beweist.

Einen störenden Einfluss haben Oberflächenschichten meist auch auf die in Luft beobachtete Metallreflexion, und diesem ist es zum grossen Theil[1]) zuzuschreiben, dass die an denselben Metallen erhaltenen Werthe des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuths sehr oft starke gegenseitige Differenzen aufweisen.

Das Eigenthümliche des Einflusses der Oberflächenschichten[2]) ist, dass die Abhängigkeit des ψ und Δ vom Einfallswinkel, wie sie z. B. durch die Formeln (44) dargestellt wird, nicht modificirt wird, sodass die früher (cf. pag. 826) angestellten Prüfungen der Theorie stets gute Resultate gaben. Auf die absoluten Werthe des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuths haben jedoch die Oberflächenschichten einen erheblichen Einfluss, und zwar äussert sich derselbe in der Weise, dass der Haupteinfallswinkel dadurch stets verkleinert wird. Diejenige Behandlung eines Metallspiegels, nach welcher derselbe den grössten Haupteinfallswinkel besitzt, ist daher als diejenige anzusehen, bei welcher er die geringsten Verunreinigungen erfährt.

Bei Berechnung der optischen Constanten der Metalle aus den Reflexionsbeobachtungen ist daher sorgfältig auf die Behandlungsart des Spiegels zu achten, wenn man richtige Werthe der Constanten erhalten will. DRUDE[3]) hat Metallspiegel nur mit Anwendung von trockenem, ungebrauchten Schmirgelpapier (oder Feilen) und mit theilweiser Benutzung eines Polirstahls hergestellt. Es ergeben sich so für die verschiedenen Metalle in der That die grössten Haupteinfallswinkel, die bisher beobachtet sind[4]). Da dieselben ausserdem für verschiedene Spiegel desselben Metalls nahe übereinstimmten, so sind die Beobachtungen als nahezu unbeeinflusst durch Oberflächenschichten anzusehen.

Die folgende Tabelle enthält die aus den DRUDE'schen Reflexionsbeobachtungen von ψ und Δ nach den Formeln (47) ermittelten Werthe der Constanten n und $n\varkappa$ für Natriumlicht. In der 4. und 5. Colonne sind die nach den Formeln (41) und (43) berechneten Werthe des Haupteinfallswinkels $\overline{\varphi}$ und Hauptazimuths $\overline{\psi}$ an-

[1]) Zum Theil liegen die Differenzen auch an mangelnder Politur, da Risse in derselben zu Beugungserscheinungen Anlass geben und hauptsächlich $\overline{\psi}$ beeinflussen. Vergl. dazu P. DRUDE, WIED. Ann. 39, pag. 492. 1890.

[2]) P. DRUDE, WIED. Ann. 36, pag. 885. 1889.

[3]) P. DRUDE, WIED. Ann. 39, pag. 481. 1890.

[4]) Beobachtungen über die Reflexionsconstanten ($\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$) an Metallen sind gemacht von BADEN POWELL (Phil. Trans. 1845, pag. 296), S. HAUGHTON (Phil. Trans. 1, pag. 87. 1863). J. JAMIN (Ann. de chim. et de phys. 22, pag. 311. 1848), MASCART (Compt. rend. 76, pag. 868. 1873), G. QUINCKE (POGG. Ann. besonders Jubelbd., pag. 336. 1874), CONROY (Proc. Roy. Soc. 28, pag. 242. 1879; 31, pag. 486. 1881; 35, pag. 26. 1883; 37, pag. 36. 1884), KNOBLAUCH (WIED. Ann. 24, pag. 256. 1885), HENNIG (Gött. Nachr. 13, pag. 365. 1887), SISSINGH (Inaug.-Diss. Leiden, 1885), DES COUDRES (Inaug.-Diss. Berlin. 1887).

gegeben, in der letzten Colonne der nach (45') berechnete Werth des Reflexionsvermögens in Procenten.

	$n\varkappa$	n	$\overline{\varphi}$	$\overline{\psi}$	J
Wismuth	3·66	1·90	77° 3'	31° 58'	65·2
Blei	3·48	2·01	76° 42'	30° 45'	62·1
Quecksilber	4·96	1·73	79° 34'	35° 43'	78·4
Platin	4·26	2·06	78° 30'	32° 35'	70·1
Gold	2·82	0·37	72° 18'	41° 39'	85·1
Antimon	4·94	3·04	80° 26'	29° 35'	70·1
Zinn	5·25	1·48	79° 57'	37° 24'	82·5
Cadmium	5·01	1·13	79° 22'	38° 53'	84·7
Silber	3·67	0·18	75° 42'	43° 35'	95·3
Zink	5·48	2·12	80° 35'	34° 45'	78·6
Kupfer	2·62	0·64	71° 35'	38° 57'	73·2
Nickel	3·32	1·79	76° 1'	31° 41'	62·0
Kobalt	4·03	2·12	78° 5'	31° 40'	67·5
Stahl	3·40	2·41	77° 3'	27° 49'	58·5
Aluminium	5·23	1·44	79° 55'	37° 34'	82·7
Magnesium	4·42	0·37	77° 57'	42° 42'	92·9
WOOD'sche Legirung fest	4·65	2·03			73·4
„ „ flüssig	4·50	2·10			71·9

Besonders auffallend sind die kleinen Brechungsexponenten von Silber, Gold, Kupfer und Magnesium, da sie kleiner als 1 sind, d. h. die Lichtgeschwindigkeit in diesen Metallen grösser sein muss, als im freien Aether. Durch andere, weiter unten zu besprechende Versuche, sind für die drei ersten der genannten Metalle diese kleinen Werthe ihrer Brechungsexponenten bestätigt.

Durch Beobachtungen im rothen Licht ist constatirt, dass nur Blei, Gold und Kupfer für dasselbe kleinere Brechungsexponenten besitzen, als für gelbes Licht, während dies Verhalten bei allen anderen Metallen umgekehrt ist, d. h. abweichend von dem normalen Verhalten der durchsichtigen Körper.

Als das durchsichtigste Metall erweist sich nach der Tabelle Kupfer, jedoch ist nach der Berechnung der pag. 821, Anm. 1 die Absorption in ihm noch ausserordentlich stark.

Bei einigen Metallen wurde die Abhängigkeit der Constanten von der Temperatur untersucht. Dieselbe erwies sich als sehr gering.

Wie oben pag. 809 hervorgehoben wurde, sind die Formeln, welche zur Ermittelung der optischen Constanten aus den Reflexionsbeobachtungen benutzt sind, in völlig gleicher Weise aus der elektromagnetischen, der KETTELER'schen oder der VOIGT'schen Theorie zu erhalten. Fragen wir nun aber, ob die optischen Constanten der Metalle mit den Grundlagen der verschiedenen Theorieen gut zu vereinen sind, so erhalten wir verschiedene Antworten.

Zunächst würden Brechungsexponenten, welche kleiner als 1 sind, mit der BOUSSINESQ'schen Lichttheorie, welche allerdings noch nicht auf absorbirende Medien ausgedehnt ist, nicht zu vereinigen sein, da nach dieser Theorie die Lichtgeschwindigkeit in ponderabeln Medien nie grösser sein kann, als im leeren Raum. — Ferner ergiebt sich für alle Metalle $\varkappa > 1$, d. h. nach Formel (28) die Constante a negativ. Diese Thatsache ist nach mechanischem Standpunkte sowohl[1]), wie nach elektromagnetischem nur durch Eigenschwingungen der pon-

[1]) Vergl. W. THOMSON, Lectures on Molecular Dynamics. — Baltimore, 1885.

derabeln Moleküle, deren Periode im Ultrarothen liegt, zu erklären (cf. oben pag. 686). — Verweilen wir etwas länger bei den von der elektromagnetischen Theorie gegebenen Beziehungen, so liefert die oben pag. 686 gegebene Formel (21'), in der π^2 den Werth $1/\alpha$ besitzen muss:

$$\pi^2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a + ia'} = A^2(\varepsilon - 4\pi\lambda\tau i), \tag{48}$$

wobei ε die Summe von Quotienten ist, deren Nenner die Form $1 + \frac{i}{\tau} a_h - \frac{1}{\tau^2} b_h$ besitzen. Da nun $1/A^2 = a_0$, d. h. gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum ist, so erhält man aus (48) und (37):

$$\varepsilon - 4\pi\lambda\tau i = \frac{a_0}{\alpha} = n^2(1 - \varkappa^2 - 2i\varkappa)^1). \tag{49}$$

Der reelle Theil von ε muss also für Lichtschwingungen einen negativen Werth besitzen[2]), was man, wie schon gesagt ist, durch Eigenschwingungen im Ultrarothen erklären könnte, d. h. durch $b_h > \tau^2$. — Nun ist die elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit λ des Silbers: $\lambda = 5{\cdot}6 \cdot 10^{17}\, sec^{-1}$, es würde also mit Vernachlässigung der in ε auftretenden Reibungscoëfficienten a_h für gelbe Lichtschwingungen, für welche ist $2\pi\tau = T = 2 \cdot 10^{-15}\, sec$ folgen:

$$n^2\varkappa = 1120.$$

Dieser Werth ist bei weitem grösser, als die Erfahrung lehrt ($n^2\varkappa = 0{\cdot}7$). Mit Berücksichtigung der Reibungscoëfficienten a_h (welche positiv sein müssen), wird aber $n^2\varkappa$ noch grösser, wie die zweite der oben pag. 686 aufgestellten Formeln (26) lehrt, in welcher $p : A$ identisch ist mit n, $p' : A$ identisch mit $n\varkappa$.

Dieser Widerspruch lässt sich heben, wenn man das früher pag. 684 aufgestellte Formelsystem (17) der elektromagnetischen Theorie erweitert[3]) in

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda X\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{p}{A}\Delta X. \tag{50}$$

Es ergiebt sich dann[4])

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \frac{\varepsilon - 4\pi p\lambda}{1 + \frac{p^2}{\tau^2}}, \quad 2n^2\varkappa = \frac{4\pi\lambda\tau + \frac{\varepsilon p}{\tau}}{1 + \frac{p^2}{\tau^2}}. \tag{51}$$

Durch diese Formeln kann man sogar mit von τ unabhängigem ε bei passender Wahl von p die optischen Constanten der Metalle darstellen. Es ergiebt sich für ε ein grosser, positiver Werth, und dieser würde demnach die Be-

---

1) Für langsame, d. h. elektrische, Schwingungen müsste ε reell und positiv sein. Dies ergiebt $\varkappa < 1$, daher $n^2 > 2\pi\tau\lambda$, d. h. eine sehr kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in Metallen. — Die Abnahme ihrer Amplitude bei Fortschreitung im Metall um die Länge 1 ergiebt sich als weit geringer, als die entsprechende Abnahme optischer Wellen (dass aus der Theorie meist das Entgegengesetzte geschlossen wird, liegt daran, dass man n fälschlich als nicht wesentlich von 1 verschieden annimmt), trotzdem ist die Durchlässigkeit auch sehr dünner Metallschirme gegen elektrische Wellen weit geringer, als für optische Wellen, weil, wie Formel (45') lehrt, ihr Reflexionsvermögen durch den grossen Werth von n^2 sehr hoch ist. — Vergl dazu auch L. BOLTZMANN, WIED. Ann. 48, pag. 63. 1893.

2) Vergl. E. COHN, WIED. Ann. 45, pag. 55. 1892.

3) Diese Erweiterung kann man aus einem von H. A. LORENTZ (SCHLÖM. Zeitschr. 23, pag. 209. 1878) gemachten Ansatz ableiten. — Sie ergiebt sich auch ungezwungen aus der Annahme, dass aus dem oben pag. 787, Anm. 1 gesagten Grunde die Polarisation auch von den Differentialquotienten der Kräfte abhängen muss. Wegen der vollkommenen Isotropie müssen dies mindestens die zweiten Differentialquotienten sein.

4) Vergl. P. DRUDE, Gött. Nachr. 10, pag. 391. 1891.

deutung der wirklichen Dielectricitätsconstante der Metalle besitzen. — Man muss aber vorläufig, so lange man nicht die Dielectricitätsconstante direkt ermittelt hat, dahin gestellt sein lassen, ob nicht doch auch bei Metallen die (elektrischen oder ponderabeln) Eigenschwingungen der Moleküle mit zu berücksichtigen sind, sodass in den Formeln (51) ε von τ als abhängig anzusehen ist.

IV. Durchgang des Lichtes und Reflexion an einer planparallelen Metallplatte.

Es ist möglich, so dünne Metallschichten herzustellen, dass sie durchsichtig sind. Für Gold gelingt dies auf rein mechanischem Wege durch Hämmern, Silber kann man mit Hilfe der auf pag. 828, Anm. 1 beschriebenen Methode in durchsichtiger Schicht auf Glas niederschlagen[1]), und für sämmtliche Metalle gelingt dies meist auf elektrolytischem Wege am besten, indem eine Glasfläche, welche durch Platinirung leitend gemacht ist, als Kathode verwandt wird. Es ist aber auch möglich, als solche eine Metallplatte zu verwenden, welche man vor der Einleitung der Elektrolyse mit einem sehr dünnen Ueberzug einer schlecht leitenden Substanz (Wachs, Fett, Oel, auch Graphit) versieht. In Folge dieser haftet die niedergeschlagene Metallschicht nicht sehr fest an der Metallplatte, und man kann erstere durch Anwendung von Gelatine oder Collodium von letzterer abreissen, so dass sich die Schicht als durchsichtiges Häutchen auf den Klebmitteln befindet. — Auch gelingt es, durch Zerstäuben einer Metallelektrode durch einen kräftigen elektrischen Strom durchsichtige Metallspiegel auf Glas herzustellen. Indess zeigen diese gewisse Anomalien[2]).

Das an einer solchen durchsichtigen Metallschicht reflektirte Licht zeigt andere Eigenschaften, als das an einem massiven Metallspiegel reflektirte, es erweist sich z. B. der Haupteinfallswinkel und das Hauptazimuth von der Dicke der Metallschicht abhängig. Dieses Verhalten hat QUINCKE[3]) in mehreren Arbeiten beobachtet, ebenso auch die Abhängigkeit der absoluten Phasenänderungen von der Dicke des Metalls[4]).

Das durch eine Metallplatte hindurchgehende Licht zeigt insofern ein eigenthümliches Verhalten, als dasselbe bei schiefer Incidenz eine starke elliptische Polarisation zeigt, wenn es ursprünglich linear polarisirt war. Die elliptische Polarisation des durch Matallplatten hindurchgehenden Lichtes ist von QUINCKE (in den citirten Arbeiten) und von MESLIN[5]) gemessen.

Es macht keinerlei Schwierigkeiten, die Versuche nach der hier entwickelten Theorie zu berechnen; man kann direkt die für eine durchsichtige Platte giltigen Formeln auch hier verwerthen, wenn man den in ihnen auftretenden Brechungs-

---

[1]) Betreffs der Erzeugung durchsichtiger Gold- und Platinschichten auf chemischem Wege vergl. noch QUINCKE, POGG. Ann. 129, pag. 177. 1866. — WERNICKE, ibid. 133, pag. 183. 1868. — KUNDT, Berl. Ber. 1884, Juli.

[2]) Vergl. A. KUNDT, WIED. Ann. 27, pag. 59. 1886. — B. DESSAU, WIED. Ann. 29, pag. 353. 1886. — O. WIENER, WIED. Ann. 31, pag. 673. 1887.

[3]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 119, pag. 368. 1863; 120, pag. 599. 1863; 128, pag. 541. 1866; 129, pag. 177. 1866.

[4]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 132, pag. 561. 1867.

[5]) G. MESLIN, Compt. rend. 106, pag. 197. 1888; Ann. de chim. et de phys. (6) 20, pag. 56. 1890; Journ. de phys. (2) 9, pag. 353. 1890. — Ueber eine neue Methode der Messung der Elemente der elliptischen Polarisation, welche den BABINET'schen Compensator und gleichzeitig den BRAVAIS'schen benutzt, vergl. G. MESLIN, Journ. de phys. (2) 9, pag. 436. 1890. — BOUASSE, Journ. de phys. (2) 10, pag. 61. 1891.

exponenten der Platte durch die complexe optische Constante des Metalls ersetzt. — Auf diese Weise ergiebt sich eine Darstellung[1]) der Beobachtungen, welche bei der grossen Ungenauigkeit, mit welcher dieselben meist noch behaftet sind, befriedigend zu nennen ist.

Eine Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung tritt nur hinsichtlich der von QUINCKE[2]) und DESSAU[3]) an Metallschichten variabler Dicke beobachteten Ringe ein, welche diese Physiker als Analogon der NEWTON'schen Ringe betrachteten, während die Theorie[4]) ergiebt, dass diese bei der starken Absorption der Metalle nicht eintreten können.

Die Beobachtung der elliptischen Polarisation des durch eine Metallplatte hindurchgehenden Lichtes lässt eine gute Bestimmung des Absorptionsindex $\varkappa$ des Metalls zu. Ausserdem ist die Verknüpfung von Beobachtungen über das durchgehende Licht mit denen über das bei gleichen Einfallswinkeln reflektirte deshalb von Bedeutung, weil man dadurch die Wirkung von Oberflächenschichten falls sie dünn genug sind, eliminiren kann[5]).

Von besonderer Wichtigkeit wird die beim Durchgang durch eine Metallplatte hervorgerufene Phasenänderung des Lichtes, die man mit einem Interferenzapparat, z. B. dem JAMIN'schen, messen kann, da sie einen Werth für den Brechungsexponenten n liefert. Auf diesem Wege haben QUINCKE[6]), HURION und MERMERET[7]) für Silber und Gold constatiren können, dass sie für Natriumlicht einen Brechungsexponenten besitzen, welcher kleiner als 1 ist.

Die Beobachtung der Intensität des durch eine Metallplatte hindurchgehenden Lichtes liefert die direkteste Bestimmung des Absorptionscoëfficienten $n\varkappa$. Die Intensitätsverluste des durchgehenden Lichtes treten einmal durch die Reflexion an den Grenzflächen der Metallplatte ein und andererseits durch Absorption in ihr. Der Betrag des ersteren Verlustes ist, wie aus dem starken Reflexionsvermögen der Metalle folgt, sehr bedeutend, ausserdem ist er wechselnd je nach der Dicke der Metallplatte, indem er für sehr dünne Platten geringer ist, als für sehr dicke. Nur wenn die Dicke derselben so gross ist, dass Licht, welches die Metallplatte 3mal durchlaufen würde, keine merkliche Intensität mehr besitzt, ist der durch Reflexion herbeigeführte Intensitätsverlust von der Dicke unabhängig. Combinirt man daher zwei Metallplatten verschiedener Dicke, deren dünnste jedoch den soeben erwähnten Betrag an Dicke noch überschreitet, so ergiebt die photometrische Vergleichung der durch beide Metallplatten hindurchgehenden Lichtintensitäten die Wirkung der reinen Absorption, d. h. die Bestimmung von $n\varkappa$, falls die Dickendifferenz der Metallplatten bekannt ist.

Auf diesem Wege hat W. WERNICKE[8]) die Intensitäten des bei senkrechtem Einfall[9]) durch zwei Silberplatten hindurchgehenden Lichtes verglichen, deren

---

[1]) Man vergl. die Rechnungen von JOCHMANN, POGG. Ann. Ergzbd. 5, pag. 620. 1871. — W. VOIGT, WIED. Ann. 25, pag. 95. 1885.

[2]) Q. QUINCKE, POGG. Ann. 129, pag. 177. 1866.

[3]) B. DESSAU, WIED. Ann. 29, pag. 353. 1886.

[4]) Vergl. JOCHMANN, POGG. Ann. Ergzbd. 5, pag. 620. 1871. — W. VOIGT, WIED. Ann. 35, pag. 95. 1888. Hier ist auch eine eventuelle andere Deutung der beobachteten Ringe gegeben.

[5]) Vergl. P. DRUDE, WIED. Ann. 43, pag. 154. 1891.

[6]) G. QUINCKE, POGG. Ann. 142, pag. 177. 1871.

[7]) HURION et MERMERET, Compt. rend. 110, pag. 1187. 1890.

[8]) W. WERNICKE, POGG. Ann. Ergzbd. 8, pag. 75. 1878.

[9]) Durch Beobachtung derselben Grössen bei schiefem Einfall glaubte WERNICKE (POGG. Ann. 155, pag. 87. 1875) auch den Brechungsexponenten des Silbers berechnen zu können. Er

Dicken nach dem auf pag. 832 beschriebenen Jodsilber-Verfahren leicht und genau bestimmt werden können. Es ergab sich für $n\varkappa$ als Mittel aus mehreren Beobachtungen:

$n\varkappa$ für Silber:

Linie	C:	3·49,
„	D:	3·26,
„	E:	2·95,
„	F:	2·71,
„	$(G-H)$:	2·31.

Auf ähnlichem Wege bestimmte W. RATHENAU[1]) die Absorptionscoëfficienten für verschiedene Wellenlängen bei mehreren Metallen. Es ergiebt sich $n\varkappa$ zu

λ in μμ	65	60	55	50	45
Gold	2·16	1·84	1·50	1·17	0·82
Silber	1·79	1·61	1·46	1·32	1·18
Platin	2·03	1·84	1·62	1·44	1·43
Eisen	1·78	1·61	1·52	1·39	1·24
Nickel	2·06	1·92	1·81	1·65	1·50

W. WIEN[2]) maass die durch Metallschichten hindurchgelassene Energie einer Bunsenflamme auf bolometrischem Wege. Es wurde der Verlust durch Reflexion direkt durch Beobachtung bestimmt und in Abzug gebracht. Es ergeben sich aus seinen Versuchen, wenn man annimmt, dass die mittlere Wellenlänge der Energie der leuchtenden Bunsenflamme 59 μμ betrage, für die Absorptionscoëfficienten die Werthe:

Gold . . . . $n\varkappa = 3·0$,
Silber . . . $n\varkappa = 3·1$,
Platin . . . $n\varkappa = 3·9$.

Der Grössenordnung nach stimmen die erhaltenen Absorptionscoëfficienten mit den aus den Reflexionsbeobachtungen erhaltenen (cf. oben pag. 834) überein. Dass die Uebereinstimmung keine noch bessere ist, liegt wohl daran, dass es schwierig ist, Metalle in dünner Schicht in so cohärentem Zustande zu erhalten, wie sie ihn als massive Spiegel besitzen.

V. Durchgang des Lichtes durch ein Metallprisma.

A. KUNDT[3]) ist es gelungen, Metallprismen herzustellen, welche ihren brechenden Winkel und die Ablenkung des durch sie hindurchgehenden Lichtstrahls zu messen gestatteten. Wegen der starken Absorption müssen die Prismenwinkel sehr klein sein, damit auf eine messbare Prismenbreite noch merkliche Lichtintensität hindurchdringt. Die Prismenwinkel betrugen stets nur Bruchtheile einer Minute. Da die Ablenkungen von derselben Grössenordnung sind, so sind die Messungen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden.

---

erhielt auf diese Weise Werthe, welche den Werth 1 überschritten und zwischen 3 und 5 lagen. — Es ist indess der von WERNICKE gemachte Ansatz nicht richtig. Die richtige Berechnung liefert Werthe für n, welche kleiner als 1 sind und mit den sonstigen Beobachtungen stimmen. Vergl. oben pag. 682, Anm. 1 und EISENLOHR, WIED. Ann. 1, pag. 199. 1877. — W. VOIGT, WIED. Ann. 23, pag. 133. 1884.

[1]) W. RATHENAU, die Absorption des Lichtes in Metallen. Inauguraldiss., Berlin 1889.

[2]) W. WIEN, WIED. Ann. 35, pag. 48. 1888.

[3]) A. KUNDT, Berl. Ber. Febr. 1888; WIED. Ann. 34, pag. 469. 1888.

Aus der beobachteten Ablenkung δ und dem Prismenwinkel γ findet man für nahezu senkrechte Incidenz des einfallenden Lichtes den Brechungsexponenten n des Metalls nach derselben Formel[1]), als ob das Prisma aus durchsichtiger Substanz bestünde, nämlich nach

$$n = \frac{\delta + \gamma}{\gamma}, \tag{52}$$

wobei δ als positiv zu nehmen ist, wenn der Lichtstrahl von der Kante des Prismas weggebrochen wird.

Ist der Einfallswinkel φ erheblich von 0 verschieden, so ist[2])

$$n = \frac{\delta + \gamma}{\gamma} \cos\varphi \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2\varphi}{n^2(1+\varkappa^2)}\right]. \tag{53}$$

In dieser Formel braucht $n^2(1+\varkappa^2)$ nur näherungsweise, z. B. aus dem Haupteinfallswinkel des Metalls, bekannt zu sein, da diese Grösse einen erheblichen Betrag besitzt und ihr reciproker Werth neben 2 auftritt. Für die meisten Metalle genügt schon die Näherungsformel:

$$n = \frac{\delta + \gamma}{\gamma} \cos\varphi. \tag{53'}$$

Man erhält diese Formeln unabhängig von den besonderen Grenzbedingungen der Theorie nur mit Berücksichtigung des Umstandes, dass an der Grenzfläche zwischen Luft und Metall jedenfalls lineare Beziehungen zwischen den Componenten des Lichtvectors in der Luft und denen im Metall stattfinden müssen[3]).

Die von du Bois und Rubens[4]) angestellten Beobachtungen über den schiefen Durchgang des Lichtes durch Prismen von Eisen, Kobalt und Nickel lassen sich vollständig durch die Formel (53') darstellen[5]).

Aus den erwähnten Prismenbeobachtungen haben sich folgende Werthe für die Brechungsexponenten ergeben. Es bezieht sich in der Tabelle der an die Metallnamen angehängte Index 1 auf die citirte Arbeit Kundt's, der Index 2 auf eine spätere Arbeit[6]) von Kundt Berl. Ber. Dec. 1888. — Wied. Ann. 36, pag. 824. 1889), der Index 3 auf die citirte Arbeit von du Bois und Rubens, Index 4 auf die citirte Arbeit von Shea. Die von ihnen erhaltenen Resultate für durch rothes Glas gegangenes Licht sind unter der Rubrik »roth«, die für die *D*-Linie unter der Rubrik »weiss«, die für die *F*-Linie erhaltenen unter der Rubrik »blau« verzeichnet):

---

[1]) Vergl. W. Voigt, Wied. Ann. 24, pag. 144. 1885.

[2]) Vergl. P. Drude, Wied. Ann. 42, pag. 666. 1891.

[3]) Man vergl. dazu auch die Ableitung der angegebenen Formeln von H. A. Lorentz, Wied. Ann. 46, pag. 244. 1892.

[4]) H. E. J. G. du Bois und H. Rubens, Berl. Ber. Juli 1890. — Wied. Ann. 41, pag. 507. 1890. — Kürzlich sind auch Beobachtungen von D. Shea (Wied. Ann. 47, pag. 177. 1892) hierüber mitgetheilt.

[5]) Vergl. P. Drude, l. c., pag. 673.

[6]) In dieser hat Kundt eine starke Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Temperatur gefunden, derart, dass der Temperaturcoëfficient desselben gleich dem des elektrischen Leitungsvermögens ist. Dies Verhalten, durch welches sich die Metalle wesentlich von den durchsichtigen Körpern unterscheiden würden, da in ihnen der Brechungsexponent nur sehr wenig mit der Temperatur variirt, ist durch Reflexionsbeobachtungen, welche bei verschiedenen Temperaturen angestellt wurden, nicht bestätigt. Vergl. Sissingh, Arch. Néerland. 20. — P. Drude, Wied. Ann. 39, pag. 538. 1890.

Brechungsexponenten n:

	Roth	Weiss	Blau
Silber[1])	—	0·27	—
Silber[2])	—	0·32	—
Silber[4])	0·35	0·27	0·20
Gold[1])	0·38	0·58	1·00
Gold[2])	0·52	—	1·06
Gold[4])	0·26	0·66	0·82
Kupfer[1])	0·45	0·65	0·95
Kupfer[4])	0·48	0·60	1·12
Platin[1])	1·76	1·64	1·44
Platin[2])	—	1·70	—
Platin[4])	1·99	1·76	1·63
Wismuth[1])	2·61	2·26	2·13
Eisen[1])	1·81	1·73	1·52
Eisen[2])	1·92	—	—
Eisen[3])	3·06	2·72	2·43
Nickel[1])	2·17	2·01	1·85
Nickel[2])	2·20	—	—
Nickel[3])	1·93	1·84	1·71
Nickel[4])	2·01	—	—
Kobalt[3])	3·10	2·76	2·39

Dass die erhaltenen Brechungsexponenten nicht besser übereinstimmen, liegt wohl einmal an der Schwierigkeit der Beobachtung, indem dieselben als Quotienten zweier sehr kleiner Grössen gewonnen werden, und hauptsächlich an dem Umstande, dass bei der ausserordentlichen Feinheit der niedergeschlagenen Schichten ihre Kohärenz oft wechselnd ist. Bei Berücksichtigung dieser Umstände muss die Uebereinstimmung der Werthe von n auch mit den aus den Reflexionsbeobachtungen gewonnenen als eine gute bezeichnet werden, speciell finden sich die dort gefundenen Dispersionsgesetze, dass ausser Gold, Kupfer (und Blei) sämmtliche Metalle anomale Dispersion besitzen, hier bestätigt, und ebenso das auffallende Resultat, dass für gelbes Licht Silber, Gold und Kupfer Brechungsexponenten besitzen, welche kleiner als 1 sind. P. Drude.

Polarisation des gebeugten Lichtes.

Die Fresnel'sche Theorie der Diffraction, nach welcher jeder Punkt der Beugungsöffnung nach dem Huygens'schen Principe als Ausgangspunkt von Elementarwellen angesehen wird, deren Schwingungsweise durch die der primären einfallenden Welle bestimmt ist, ist insofern unvollständig, als sie nicht das Gesetz liefert, nach welchem sich die Lichtintensität in einer Richtung, welche schief zur strahlenden Fläche und zur Schwingungsrichtung liegt, ergiebt, Es hat sich durch Vergleich mit Experimenten herausgestellt, dass der Fresnel'sche

Ansatz den Ort, an welchem für die Lichtintensität Maxima und Minima bestehen, richtig zu berechnen erlaubt, die Intensitäten selber dagegen und den Polarisationszustand[1]) des gebeugten Lichtes nicht.

Diese Lücke hat zuerst STOKES[2]) auszufüllen gesucht, indem er aus den Differentialgleichungen für die Lichtbewegung die Verrückung an einem beliebigen Orte bestimmte, falls sie an einem anderen gegeben war. Aus der erhaltenen Lösung ergab sich die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen der FRESNEL'schen und NEUMANN'schen Definition der Polarisationsebene, indem nach ersterer die Polarisationsebene des gebeugten Lichtes der Beugungsebene näher liegen müsste als die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, während nach letzterer das Entgegengesetzte der Fall sein müsste. Die an einem Glasgitter angestellten Experimente im durchgehenden Licht schienen zu Gunsten FRESNEL's zu entscheiden, während die von HOLTZMANN[3]) an einem Russgitter angestellten Versuche für die NEUMANN'sche Auffassung sprachen. Dies veranlasste STOKES[4]) zu der Meinung, dass bei grossen Beugungswinkeln doch vielleicht die Substanz des Gitters und nicht nur die Gestalt und Lage seiner Oeffnungen von Einfluss sei, da bei grossen Beugungswinkeln für die Lichtintensität hauptsächlich die an den Rändern der Schirmöffnungen unmittelbar anliegenden Wellen maassgebend sind.

Diese Meinung hat sich besonders durch die von GOUY[5]) angestellten Versuche über die Polarisation des am einfachen Rande eines Schirmes gebeugten Lichtes bestätigt, aus denen der Einfluss der Natur des Schirmes evident zu Tage tritt. Durch diese Versuche erweisen sich die sämmtlichen[6]), bisher aufgestellten Theorieen, in denen die Substanz des Beugungsgitters als unwesentlich erscheint, als unzureichend. Die Willkürlichkeit der bisherigen Anschauungsweise liegt offenbar darin, dass man die Lichtbewegung in einer Schirmöffnung als überall gleichgerichtet und nur durch die Elementarwelle bestimmt annahm.

---

[1]) Dass auch bei einfallendem natürlichen Lichte das von einer Stahlplatte. in welche ein Gitter eingerissen ist, reflektirte Licht stark polarisirt ist, hat D. BREWSTER schon im Jahre 1830 beobachtet. Vgl. D. BREWSTER, Compt. rend. 30, pag. 496. 1850.

[2]) G. G. STOKES, Cambr. Trans. 9, pag. 1. 1849. Die Beziehung des von STOKES gelösten Problems zu dem von HERTZ gelösten analogen in der Elektrodynamik ist besprochen von W. KÖNIG, WIED. Ann. 37, pag. 651. 1889.

[3]) C. A. H. HOLTZMANN, POGG. Ann. 89, pag. 446. 1856.

[4]) G. G. STOKES, Phil. Mag. (4) 13, pag. 158, 1857; POGG. Ann. 101, pag. 154. 1857.

[5]) GOUY, Compt. rend. 96, pag. 697. 1883; 98, pag. 1573. 1884; Ann. de chim. et de phys (6) 8, pag. 145. 1886. Vergl. auch W. WIEN, WIED. Ann. 28, pag. 117. 1886; HURMUCESCU, Comp. rend. 114, pag. 465. 1892.

[6]) Solche sind gegeben von F. EISENLOHR (POGG. Ann. 104, pag. 337. 1858), L. LORENZ, (POGG. Ann. 111, pag. 315. 1860). E. LOMMEL (Grun. Arch. 38, pag. 209. 1862), POTIER (Compt. rend. 64, pag. 960. 1867), L. DITSCHEINER (Wien. Ber. (II) 67, pag. 205. 1873), S. FRÖHLICH (WIED. Ann. 3, pag. 376, 568. 1878; 4, pag. 319. 1878; 5, pag. 134. 1878; 6, pag. 414, 1879; 8, pag. 670. 1879; 13, pag. 133. 1887; 15, pag. 576. 1882; 22, pag. 161. 1884), M. RÉTHY (WIED. Ann. 11, pag. 504. 1880). — W. KÖNIG (WIED. Ann. 17, pag. 1016. 1882), R. T. GLAZEBROOK (Proc. Cambr. Phil. Soc. 5, pag. 254. 1885), ROWLAND (Philos. Mag. (5) 17, pag. 413. 1884). In der letzten Arbeit, welche die Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie benutzt, ist gezeigt, dass die genannten Erscheinungen nicht zur Bestimmung der Lage der Polarisationsebene dienen können, auch nicht, wenn man von den gewöhnlichen Vorstellungen der elastischen Theorie ausgeht, da gleichzeitig mit der Verschiebungswelle (Componenten u, v, w) eine Drehungswelle (Componenten ξ, η, ζ) existirt. Vergl. die Bemerkungen der pag. 673 dieses Handbuches. — RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 12, pag. 1881.

Diesem Mangel hat FRÖHLICH[1]) abzuhelfen gesucht, indem er aus Beobachtungsdaten festzustellen suchte, in welcher Weise die Lichtbewegung in einer Schirmöffnung mit dem Orte wechselte. Es ergab sich eine unendliche Mannigfaltigkeit der gesuchten Lösungen, und wenn auch durch die FRÖHLICH'schen Formeln die angestellten Beobachtungen[2]) besser dargestellt werden, als durch die bisherigen, schon allein, weil sie weit mehr aus den Beobachtungen selbst zu bestimmende Constanten enthalten, so sind diese Entwickelungen doch mehr als Interpolationsformeln, als eine Theorie anzusehen. Eine solche müsste, wenn überhaupt für die Lichtbewegung in isotropen, durchsichtigen resp. absorbirenden Substanzen nur eine resp. zwei ihnen individuelle Constanten maassgebend sind, die Beobachtungen vollständig zu berechnen gestatten aus der Natur des einfallenden Lichtes, der geometrischen Gestalt und Lage der Schirmöffnungen und den optischen Constanten der Schirmsubstanz. Diese Aufgabe kann die Theorie nur lösen, wenn sie zugleich auf die in das Innere der Schirmsubstanz fortgepflanzte Lichtbewegung Rücksicht nimmt. Die gestellte Aufgabe scheint aber selbst für die einfachste Schirmgestalt, bei der GOUY beobachtet hat, nur mit grossen Schwierigkeiten zu lösen zu sein für die in der Optik vorliegenden Verhältnisse. — Dagegen scheint mir ein Problem der Diffractionstheorie, welches mit elektrischen Wellen jetzt leicht zu realisiren ist, in einfacher Weise durchführbar: nämlich die Wirkung eines Gitters, welches ans parallelen Drähten von kreiscylinderförmigem Querschnitt besteht, dessen Durchmesser klein gegen die benutzte Wellenlänge ist. Das Problem ist sehr ähnlich dem der Magnetisirung von langen Eisencylindern im gleichförmigen magnetischen Felde, und hierfür besitzt man bekanntlich einfache Lösung.

Eine vollständige Diffractionstheorie würde zugleich die Erscheinungen[3]) erklären, welche bei Reflexion des Lichtes an rauhen Flächen und Durchdringung des Lichtes durch Medien, in welchen sehr kleine anders brechende Substanzen suspendirt sind, beobachtet werden. Die hierüber angestellten Beobachtungen sind von verschiedenen Seiten[4]) zur Erklärung der Polarisation des blauen Himmelslichtes herangezogen. P. DRUDE.

---

[1]) S. FRÖHLICH, WIED. Ann. 15, pag. 576. 1882.

[2]) Ausser an den vorhin citirten Stellen finden sich Beobachtungen über die Polarisation des gebeugten Lichtes bei H. FIZEAU, POGG. Ann. 116, pag. 478, 562. 1862. — D. BREWSTER, Edinb. Trans. 24, pag. 221. 1865. — MASCART, Compt. rend. 63, pag. 1005. 1866. — PH. GILBERT, Comp. rend. 64, pag. 161. 1867. — L. DITSCHEINER, Wien. Ber. (II.) 60, pag. 567. 1869. — G. QUINCKE, POGG. Ann. 149, pag. 273. 1873. Gött. Nachr. 1873, pag. 22. — S. FRÖHLICH, WIED. Ann. 1, pag. 321. 1877. — W. KÖNIG, WIED. Ann. 17, pag. 1016. 1882. — K. EXNER, Wien. Bericht (II) 99. 1890; 101, pag. 8. 1892. — H. E. J. G. DU BOIS, WIED. Ann. 46, pag. 542. 1892. Auch durch die QUINCKE'schen Versuche ist die Unzulänglichkeit der bisherigen Theorieen (selbst der FRÖHLICH'schen, vergl. QUINCKE, WIED. Ann. 47, pag. 765. 1892) deutlich gezeigt, indem QUINCKE bei Aenderung des Beugungswinkels die Aenderung des Polarisationsazimuths nicht continuirlich zu- oder abnehmend fand.

[3]) Man vergl. die von ARAGO, PROVOSTAYE und DESAINS angestellten Versuche (BILLET, optique physique, Paris 1858, Bd. 1, pag. 508 u. ff.), ferner A. KUNDT, POGG. Ann. 123, pag. 385. 1864. — LALLEMAND, Compt. rend. 69, pag. 189, 282, 917, 1294. 1869; 78, pag. 1272. 1874; 79, pag. 693. 1874; Ann. de chim. et de phys. (4) 22, pag. 200. 1871; ibid. (5) 8, pag. 93. 1876. — Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 12, pag. 81. 1881. — GOUY, Compt. rend. 98, pag. 978. 1884. — K. ANGSTRÖM, WIED. Ann. 26, pag. 253. 1885. — A. HURION, Compt. rend. 114, pag. 910. 1892.

[4]) Man vergl. D. BREWSTER, Phil. Mag. (4) 25, pag. 344. 1863. — LALLEMAND, Compt. rend. 75, pag. 854. 1872.

Druckfehlerverzeichniss und Berichtigungen.

pag. 34, Zeile 26 v. o. statt: »ersten Brennpunkt« lies: »zweiten Brennpunkt«.
„ 43, „ 4 v. o. statt: »x', y', z' (nach: Werthen)« lies: »x, y, z«.
„ 43, „ 14 v. o. statt: »$\frac{A'}{B'}$« lies: »$\frac{A'}{D'}$«.
„ 45, „ 18 v. o. statt: »$tg\, v = \frac{1}{m}$« lies: »$tg\, v = -\frac{1}{m}$«.
„ 45, „ 16 v. u. lies: »$\left(m - \frac{1}{m}\right)(b_3 c_2 + b_2 c_3) = c_3^2 - b_3^2 + c_2^2 - b_2^2$«.
„ 45, „ 13 v. u. statt: »$b_2 = c_2 = b_3 = c_3$« lies: »$b_2^2 = c_2^2 = b_3^2 = c_3^2$«.
„ 47, „ 12 v. u. statt: »$\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right)\beta^2$« lies: »$\beta^2 = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right)\alpha$«.
„ 47, „ 23 v. o. statt: »$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$« lies: »$\mathfrak{b} = \pm\, \mathfrak{c}$«
„ 48, „ 6 v. u. statt: »$a < 0$« lies: »$\mathfrak{a} < 0$«.
„ 53, „ 25 v. u. statt: »$h' = -x' \cdot tg\, u$« lies: »$h' = -x' \cdot tg\, u'$«.
„ 53, „ 21 v. u. statt: »$-\frac{f}{x}$« lies: »$-\frac{f}{x'}$«.
„ 67, „ 3 v. u. statt: »von dem Punkte« lies: »nach dem Punkte«.
„ 68, „ 4 v. o. nach: »$(n/n')r$« schalte ein: »vom Mittelpunkt«.
„ 74, „ 7 v. o. nach: »winkels« schalte ein: »vor oder«.
„ 74, „ 19 v. o. vor: »Medien« schalte ein: »Brechungsexponenten der«.
„ 76, „ 5 v. o. statt: »congruent« lies: »symmetrisch gleich«.
„ 77, erster Absatz: »die allgemeine Giltigkeit der Beziehung $\beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'}$ wurde vor HELMHOLTZ schon von L. SEIDEL (Astr. Nachr. 43, pag. 302. 1856) nachgewiesen«.
„ 79, »In den Gleichungen für s_H und s_H' ist der Faktor $(n - 1)$ im Zähler und Nenner der rechten Seite zu heben«.
„ 89, Zeile 10 v. o. statt: »$C'D'$« lies: »ED«.
„ 91, „ 15 v. u. statt: »Objektivraum« lies: »Objektraum«.
„ 91, „ 9 v. o. statt: »$\frac{de}{c_2}$« lies: »$\frac{de}{e^2}$«.
„ 92, „ 13 v. u. statt: »zu l« lies: »zur Einfallsebene«.
„ 105, „ 13 v. u. lies: »$n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 (z_0)_{k'} = a_1 (z_0)_{k'}$ und $n_k u_k z_k = n_1 u_1 (z_0)_k = a_1 (z_0)_k$«.
„ 105, „ 3 v. u. statt: »a_1« lies: »a_1^2«.
„ 106, „ 10 v. o. desgleichen.
„ 106, „ 15 v. u. nach: »Brechung« schalte ein: »$n_1 = 1$ gesetzt«.
„ 117, Anmerkung, Zeile 2 u. 3 v. o. statt: »$\frac{\pi}{4}$« lies: »$\frac{\pi}{2}$«.
„ 120, Zeile 4 v. u. statt: »$\frac{\beta}{\beta_t}$« lies: »$\frac{\beta_s}{\beta_t}$«.
„ 124, „ 7 v. u. statt: »der linearen Oeffnung h_0 des einfallenden Büschels« lies: »des Objekthalbmessers y_0.
„ 126, „ 2 v. o. statt: »$\frac{Q_x}{Q_x - Q_x}$« lies: »$\frac{Q_x}{Q_x - Q_s}$«.
„ 131, „ 6 v. u. nach denken kann, schalte ein: »Da es senkrecht steht zu der Bildlinie jener Büschel, so breitet er dieselbe in einen schweifartigen Zerstreuungsfleck aus; daher die Bezeichnung dieses Fehlers als »Coma«.

pag. 132, in Gleichung (2), (2a), (2b) und (3) muss Q^* das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, also: $-QQ^* \frac{1}{nt}$ u. s. w.

" 139, Zeile 10 v. o. statt: »$\frac{df_2}{f_2} \frac{d\Delta}{\Delta}$« lies: »$\frac{df_2}{f_2} - \frac{d\Delta}{\Delta}$«.

" 140, Gleichung (1) ist der Faktor $\frac{1}{2}$ rechts zu streichen.

" 153, Zeile 16 v. u. nach: »Werth hat« schalte ein: »und $\varepsilon(p) > 0$« ist.

" 154, " 7 v. u. statt: »79° 56'« lies: 79° 26'«.

" 159, Gleichung (15**) links statt: »$n^2 - 1$« lies: »$n'^2 - 1$«.

" 160, Zeile 3 v. u., bei welchem durch entgegengesetzte Drehung zweier Glasplatten um dieselbe Axe die scheinbaren Orte zweier in naher Entfernung von einander befindlichen Objekte identiseh gemacht werden.

pag. 161, Gleichung (19a) und (19b) links statt: »di_x'« lies: »di_p'«.

" 176, Zeile 6 v. o. statt: »beistehender Figur« lies »Fig. 343, Taf. I.«

" 180, " 2 v. u. statt: »$\frac{tg\,\omega'}{tg\,\omega}$« lies: »$\frac{tg\,w'}{tg\,w}$«.

" 187, " 10 v. u. statt: »ξ/β« lies: »β/ξ'«.

" 189, " 7 v. u. in der Gleichung für $2\Delta\xi$, am Kopf der Tabelle ist rechts der Faktor ξ zu streichen.

" 193, " 11 v. o. nach: »proportional«, schalte ein: »dem Quadrat«.

" 198, " 24 v. u. statt: »kn^1/n^2« lies: »$k(n^1/n)^2$«.

" 210, " 12 v. u. statt: »$\frac{1}{p} - \frac{1}{p}$« lies: »$\frac{1}{p} - \frac{1}{P}$«.

" 224, " 12 v. u. statt: »$f3$« lies: »f^3«.

" 240, " 7 v. u. das Wort: »Bilderzeugung« gehört auf Zeile 6 v. u. nach: »der«.

" 265, " 2 v. u. statt: »Sehfeldes« lies: »halben Sehwinkels«.

In der Charakteristik der verschiedenen Gattungen von Abbildungen bezw. von abbildenden Systemen (pag. 35 ff.) ist dem Verfasser ein handgreifliches Versehen untergelaufen, auf welches denselben aufmerksam zu machen, Herr Professor RUNGE in Hannover die grosse Liebenswürdigkeit hatte.

Rein mathematisch bieten sich allerdings beide Fälle als möglich dar: sowohl der, dass $a O$, die Abbildung also rechtläufig, wie der, dass $a O$, d. h. dieselbe rückläufig sei. Physisch verwirklichen lässt sich aber bloss der Fall der rechtläufigen Abbildung, wenn man nämlich für die Beurtheilung der Recht- und Rückläufigkeit an der eingeführten Coordinatenbestimmung festhält, wonach die Richtung der wachsenden x in jedem Raume zusammenfallen soll mit der Bewegung des Lichtes in ihm. Eine kurze Ueberlegung zeigt dann, dass z. B. bei der einmaligen Spiegelung Objekt und Bild sich entlang den Hauptaxen ihrer Räume im gleichen Sinne bewegen.

Der wesentliche Unterschied zwichen der katoptrischen und der dioptrischen Abbildung ist also nicht in jenem Merkmal zu suchen, sondern vielmehr darin, dass die Nebenaxen der Abbildung (b, c) das eine Mal — die optrische Abbildung — gleiches, das andere Mal — katoptrische Abbildung — entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Bei der um die x-Axe symmetrischen Abbildung (pag. 34) hat man demnach zu unterscheiden zwischen dem Falle, dass $b = +c$ (dioptrische Abbildung) und dem, dass $b = -c$ (katoptrische Abbildung).

Dieser Unterschied äussert sich z. B. darin, dass dem Durchlaufen der Peripherie eines zur x-Axe senkrechten Kreises im Objektraum bei der dioptrischen Abbildung ein gleichsinniges, bei der katoptrischen ein entgegengesetztes Durchlaufen der Peripherie des Kreises im Bildraum entspricht; oder dass das dioptrische Bild einer rechtsgewundenen Schraube wieder eine rechtsgewundene, das katoptrische Bild derselben aber eine linksgängige Schraube ist — jene Kreise und die Schrauben in dem betreffenden Raume immer in der gleichen Stellung zur Lichtbewegung in demselben angesehen.

pag. 399, Zeile 18 v. o. lies: »fallen« statt: »falle«.

" 400, " 7 v. o. lies: »$\frac{d\lambda}{\lambda}$« statt »$\frac{\lambda}{d\lambda}$«.

pag. 404, Zeile 9 v. u. lies: »$\frac{\delta}{2}$« statt: »δ_2«.

„ 409, „ 10 v. u. lies: »$\frac{a}{s}$« statt: »$\frac{a}{3}$«.

„ 412, „ 32 v. o. lies: »$\frac{e'}{e}$« statt: »$\frac{e'}{c}$«.

„ 417, „ 18 v. u. lies: »An der Stelle der *D*-Linien in sechster Ordnung befindet sich bekanntlich gleichzeitig Licht von der Wellenlänge: $6 \times 589\ \mu\mu = 3534\ \mu\mu$, $\frac{1}{2} \times 3534$, $\frac{1}{3} \times 3534$, $\frac{1}{4} \times 3534$, $\frac{1}{5} \times 3534$, $\frac{1}{6} \times 3534$ u. s. w. Das Prisma zerlegt also das Licht in verschieden . . . . . .

„ 419, „ 7 v. o. lies: »Gleichgewichtspunkt« statt: »Schwerpunkt«.

„ 423, „ 5 v. o. lies: «sphäre« statt: »späre«.

„ 431, „ 12 v. u. lies: »HUGGINS« statt: »HUYGINS«.

„ 508, „ 14 v. u. statt: »eines« lies: »seines«

„ 512, „ 20 v. u. statt: »WARXOW« lies: »MARXOW«.

„ 512, „ 7 v. u. statt: »ZEIES« lies: ZEISS.

„ 514, „ 21 v. u. statt: »$x +$ « lies: »$x + \lambda$.

„ 514, „ 6 v. u. statt: »Wellenlänge« lies: »Weglänge«.

„ 515, „ 7 v. o. statt: »allgemeinen« lies: »Allgemeinen«.

„ 518, „ 5 u. 6 v. o. statt: »letzten Gleichung« lies: »Gleichung (9)«.

„ 519, „ 14 v. o. statt: »$\pi + D$« lies: »$x + D$«.

„ 519, „ 11 v. u. statt: »hiermit« lies: »hier mit«.

„ 522, „ 9 v. o. statt: »519« lies: »516«.

„ 522, „ 12 v. o. statt: »π_2« lies: »π^2«.

„ 522, „ 16 v. o. statt: »der Polarisationsebene« lies »den Polarisationsebenen«.

„ 522, „ 17 v. o. statt: »C^2« lies: »Ç«.

„ 524, „ 24 v. u. statt: »gezogenen Geraden« lies: »gezogene Gerade«.

„ 529, „ 22 v. o. statt: »folgendermaassen« lies: »folgendermassen«.

„ 531, „ 7 v. o. statt: »Werth« lies: »Werths«.

„ 531, „ 8 v. o. statt: »brechbaren« lies: »brechbareren«.

„ 531, „ 9 v. u. statt: »weissem« lies: »weichem«.

„ 534, „ 18 v. o. statt: »$(n - 1)2$« lies: »$(n - 1)\varepsilon$«.

„ 536, „ 20 v. u. statt: »ein« lies: »einer«.

„ 536, „ 15 v. u. statt: »Aenderung *E*« lies: »Aenderung von *E*«.

„ 539, „ 9 v. u. statt: »scheiden« lies: »schneiden«.

„ 542, „ 21 v. u. statt: »33« lies: »527«.

„ 544, „ 19 v. o. statt: »tilge« lies: »zuerst«.

„ 548, „ 25 v. o. statt: »Seenkrechte« lies: »Senkrechte«.

„ 551, „ 25 v. o. statt: »dies« lies: »das«.

„ 555, „ 15 v. o. statt: »alle seine Bewegungen« lies: »all seine Bewegung«.

„ 563, „ 23 v. u. »hinter Blättchens ist ein Komma zu setzen«.

„ 563, „ 2 v. u. statt: »PROVESTAYE« lies: »PROVOSTAYE«.

„ 575, „ 17 v. u. »das Komma hinter Gangunterschied ist zu tilgen«.

„ 577, „ 1 v. o. statt: »549» lies: »563«.

„ 577, „ 17 v. u. statt: »Interferenz-streifen« lies: »Interferenzstreifen«.

„ 579, „ 1 v. u. statt: »endliche« lies: »unendliche«.

„ 580, „ 14 v. o. statt: »545« lies: »554«.

„ 581, „ 6 u. 7 v. o. statt: »anfertigten« lies: «anfertigen«.

„ 585, „ 6 v. o. statt: «Explosionsdauer« lies: »Expositionsdauer«.

„ 588, „ 7 v. o. statt: »Benoît« lies: »Benoît«.

„ 588, „ 18 v. u. statt: »Trave« lies: »Trav.«

„ 588, „ 9 v. u. statt: »RKBENS« lies: »RUBENS«.

„ 588, „ 9 v. u. statt: »116« lies: »46«.

Sachregister.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Namenregister.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

B

C

G

H

J

K

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule).

Inhaltsverzeichniss[1].

Optik.

---

[1]) Im vorliegenden Verzeichniss sind die einzelnen Artikel und deren Verfasser angegeben, das Sachregister, pag. 846, giebt nähere Auskunft über die behandelten Gegenstände.

Breslau, Eduard Trewendt's Buchdruckerei (Setzerinnenschule.)







